



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées et fondamentales

Par

BOURAS Djihad

Sujet

Etude des transformations hodographique
et ses applications

Devant le jury composé de :

NADIR Mostefa	Prof	Uni. M'sila	Président
GASMI Abdelkader	Prof	Uni. M'sila	Rapporteur
GUEGUI Bachir	M.AA	Uni. M'sila	Examineur

Promotion: 2013/2014

Conclusions	28
Bibliographie	29

Table des matières

Introduction	1
1 Introduction aux équations aux dérivées partielles	3
1.1 Equation aux dérivées partielles (EDP)	3
1.1.1 Définition d'EDP	3
1.1.2 Ordre d'équation aux dérivées partielles	4
1.1.3 Dimension d'équation aux dérivées partielles	4
1.1.4 Types des équations aux dérivées partielles	4
1.1.5 Classification des EDPs	5
1.2 Système quasi-linéaire	5
1.3 Problèmes non linéaires	6
2 La transformation hodographique et la transformation réciproque	9
2.1 Le hodograph	9
2.2 Classification des transformations hodographiques	9
2.3 La transformation hodographique H_1^{22}	10
2.3.1 Préliminaires sur H_1^{22} et système linéarisable E_1^{22}	10
2.3.2 Caractéristiques du système linéarisable E_1^{22}	12
2.4 Transformation réciproque	16
2.5 Comparaison entre transformation hodographique et transformation réciproque	19
3 Réduction d'ordre d'EDP par la transformation hodographique	22
3.1 Réduction d'ordre d'équation aux dérivées partielles	22
3.2 Applications de H_1^{22}	24

Conclusion	28
Bibliographie	29

Introduction

Aujourd'hui, les équations aux dérivées partielles représentent l'un des outils les plus puissants en mathématiques modélisent des problèmes en physique, biologie, chimie, économie et nombreuses applications. Les solutions exactes des équations aux dérivées partielles jouent un rôle important dans la compréhension et l'analyse des dispositifs de beaucoup des phénomènes et processus dans divers secteurs de la science naturelle. Tandis qu'il y aura beaucoup de théories pour des équations aux dérivées partielles non linéaires, beaucoup des cas spéciaux ont rapporté pour s'approprier des changements des variables. En fait les transformations sont peut-être l'outil analytique général le plus puissant actuellement disponible dans ce secteur. Typiquement ceux-ci linéarisent des systèmes, ramènent l'équation à une équation ordinaire non linéaire, transforment le système à une déjà résolue, ou effectuent une autre réduction de complexité.

En général, ces changements peuvent être classifiés dans trois groupes: La classe I contient des transformations seulement des variables dépendantes. La classe II contient des transformations seulement des variables indépendantes. La classe III consiste des transformations des variables dépendantes et des variables indépendantes. Nous rappelons cette dernière classe "Les Transformations Hodographiques" au quelles on les étudie dans ce mémoire.

Les transformations hodographiques sont fréquemment utilisées dans la résolution des problèmes non linéaires en ingénierie et physique, et de nombreux résultats utiles en mécanique des fluides et mécanique des solides ont été obtenus par ces transformations. Il y a une longue liste de différents types des transformations hodographiques. Cependant, dans ce mémoire, nous allons concentrer seulement sur la transformation hodographique $B_1^{(2)}$ qui échange les rôles d'une variable dépendante et une variable indépendante dans des systèmes

des équations aux dérivées partielles du premier ordre avec deux variables dépendantes et deux variables indépendantes.

Ce mémoire se divise en trois chapitres.

Le premier chapitre a pour but de rappeler des équations aux dérivées partielles et certaines de leurs propriétés fondamentales.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à l'application de la transformation hodographique H_1^{22} . Cette dernière est principalement appliquée pour la linéarisation des équations paraboliques ou hyperboliques quasi-linéaires du premier ordre, qui

Aujourd'hui, les équations aux dérivées partielles représentent l'un des outils les plus puissants en mathématiques modélisant des problèmes en physiques, biologie, chimie, économie et nombreuses applications. Les solutions exactes des équations aux dérivées partielles jouent un rôle important dans la compréhension appropriée des dispositifs de beaucoup des phénomènes et processus dans divers secteurs de la science naturelle. Tandis qu'il y aura beaucoup de théories pour des équations aux dérivées partielles non linéaires, beaucoup des cas spéciaux ont rapporté pour s'approprier des changements des variables. En fait les transformations sont peut être l'outil analytique général le plus puissant actuellement disponible dans ce secteur. Typiquement ceux-ci linéarisent des systèmes, ramènent l'équation à une équation ordinaire non linéaire, transforment le système à une déjà résolu, ou effectuent une autre réduction de complexité.

En général, ces changements peuvent être classifiés dans trois groupes: La classe I contient des transformations seulement des variables dépendantes, La classe II contient des transformations seulement des variables indépendantes, La classe III consiste des transformations des variables dépendantes et des variables indépendantes. Nous rappelons cette dernière classe " Les Transformations Hodographiques" au quelles on les étudie dans ce mémoire.

Les transformations hodographiques sont fréquemment utilisées dans la résolution des problèmes non linéaires en ingénierie et physiques, et de nombreux résultats utiles en mécanique des fluides et mécanique des solides ont été obtenues par ces transformations. Il y a une long liste de différents types des transformations hodographiques. Cependant, dans ce mémoire, nous allons concentrer seulement sur la transformation hodographique H_1^{22} qui échange les rôles d'une variable dépendante et une variable indépendante dans des systèmes

des équations aux dérivées partielles du premier ordre avec deux variables dépendantes et deux variables indépendantes.

Ce mémoire se divise en trois chapitres.

Le premier chapitre a pour but de rappeler des équations aux dérivées partielles et certaines de leurs propriétés fondamentales.

Dans le deuxième chapitre nous avons étudié plusieurs issues au l'application de la transformation hodographique H_1^{22} . Cette dernière est principalement appliquée pour la linéarisation des équations paraboliques ou hyperboliques quasi-linéaires du premier ordre, qui se produisent habituellement dans des problèmes dépendants du temps. Les expressions générales des équations linearizables paraboliques et hyperboliques correspondantes sont dérivées. On traite également dans ce chapitre le lien entre la transformation hodographique et la transformation réciproque qui est montré par un exemple concret et on termine cette partie par annoncer quelques commentaires.

Dans le dernier chapitre nous allons aborder l'application de H_1^{22} dans la réduction de l'ordre des équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre en les transformant au des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Enfin, nous donnerons quelques nouveaux exemples des applications de H_1^{22} en linéarisation des systèmes quasi-linéaires avec l'importance pratique ou théorique.

1.1.1 - Définition d'EDP

Une équation aux dérivées partielles est une équation mathématique contenant et plus de la variable dépendante u et les variables indépendantes (x, y, \dots) , une ou plusieurs dérivées partielles.

Alors une équation aux dérivées partielles est une relation entre les variables dérivées partielles de u , de la forme :

$$F(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

où F désigne une fonction.

La solution de l'équation (1.1) est une fonction $u = u(x, y, \dots)$ dont cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation (1.1) est satisfaite.

Conclusion générale

Le but de ce mémoire est d'étudier plusieurs issues concernant l'application de la transformation hodographique H_1^{22} qui est principalement appliquée pour linéariser des équations quasi-linéaires du premier ordre paraboliques ou hyperboliques. Plusieurs résultats ont montré la réussite de l'application de la transformation réciproque en génie civil aussi bien que d'autres domaines en physique puissent être obtenus également par la transformation hodographique. D'ailleurs, il a été précisé que la transformation hodographique est meilleure dans certains aspects par rapport à la transformation réciproque. Et on a appliqué aussi la transformation H_1^{22} dans la résolution de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre en les transformant aux équations aux dérivées partielles du premier ordre. Et ces équations du premier ordre peuvent être alors résolues seulement par l'intégration de quelques ensembles des équations ordinaires. Enfin on a vu quelques nouveaux exemples qui ont été donnés pour illustrer la linéarisation par H_1^{22} . Ces exemples, simultanément les autres exemples surgissant en mécanique du sol et mécanique des fluides, ont démontré que la transformation hodographique H_1^{22} pourrait être aussi utile que la transformation hodographique classique.

Bibliographie

- [1] Bluman, G. W., and Kumei, S., 1989, *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, USA.
- [2] Calogero, F., 1984, "A Solvable Nonlinear Wave Equation," *Studies in Applied Mathematics*, Vol. 70, pp. 189-199.
- [3] Courant, R., and Friedrichs, K. O., 1948, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer, New York, USA.
- [4] Courant, R., and Hilbert, D., 1962, *Methods of Mathematical Physics (Vol. II)*, Interscience, New York, USA.
- [5] Garabedian, P. R., 1986, *Partial Differential Equations*, Chelsea, New York, USA.
- [6] Geiringer, H., 1983, "Ideal Plasticity," *In Mechanics of Solids, Vol. III* (Truesdell, C.) ed., Springer-Verlag, New York, USA, pp. 403-533.
- [7] Hung, M. J., Lei, H. C., and Chang, H. W., 1996, "Linearity of Gibson's Theory of Soil Consolidation," *The Chinese Journal of Mechanics*, Vol. 12, pp. 307-317. (in Chinese).
- [8] Kachanov, L. M., 1971, *Foundations of the Theory of Plasticity*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Holland.
- [9] Kingston, J. G., and Rogers, C., 1982, "Reciprocal Backlund Transformations of Conservation laws," *Physics Letters*, Vol. 92a, pp. 261-264.

-
- [10] Lei, H. C., and Chang, H. W., 1996, "A List of Hodograph Transformations and Exactly Linearizable Systems," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 31, pp. 117-127.
- [11] Lei, H. C., 1998, "Group Splitting and Linearization Mapping of a Solvable Nonlinear Wave equation," *International Journal Non-Linear Mechanics*, Vol. 33, pp. 461-471.
- [12] Rogers, C., 1984, "Inverse Transformations and the Reduction of Nonlinear Dirichlet Problems," *Journal of Physics. A: Mathematical and General.*, Vol. 17, pp. L681-L685.
- [13] Rogers, C., and Ames, W. F., 1989, *Nonlinear Boundary Value Problems in Science and Engineering*, Academic Press, New York, USA.
- [14] Siravay, V. A., 1965, "On Some New Results Concerning the Motion of Fluids in Long Pipes," *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 3, pp. 56-62. (in Russian).
- [15] Sukharev, M. G., 1967, "Invariant Solutions of Equations Describing the Motion of Fluids and Gases in Long Pipelines," *Doklady Akademii Nauk USSR*, Vol. 175, pp. 781-784.
- [16] Whitham, G. B., 1974, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York, USA.

ملخص

نهتم في هذا البحث بتطبيق التحويل الأودوغرافي الذي يلعب دور هام جدا في تحويل المشاكل اللاخطية في الهندسة المدنية إلى خطية ؛ التطبيق الآخر لهذا التحويل يكون في تخفيض درجة بعض المعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية ذات الدرجة الثانية.

الكلمات المفتاحية: التحويل الأودوغرافي ، الميكانيكا اللاخطية، معادلة تفاضلية جزئية لاخطية، الحل المضبوط.

Résumé

On s'intéresse dans ce travail, à l'application de la transformation hodographique qui joue un rôle très important dans la linéarisation des problèmes non linéaires en génie civil; l'autre application de cette transformation est la réduction de l'ordre de quelques équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre.

Mots clés:

transformation hodographique, mecaniques non linéaires, équation aux dérivées partielles non linéaires, solution exacte.

Abstract

In this work we interest, with the application of the hodograph transformation which plays a very significant role in the linearization of the nonlinear problems in civil engineering; also the other application for this transformation is in reduction of the order of some nonlinear second order partial differential equations.

Key words:

hodograph transformation, nonlinear mechanics, nonlinear partial differential equation, exact solution.