



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

*Problèmes inverses pour une équation aux dérivées partielles en temps avec
dérivée fractionnaire généralisée*

Présentée par :

HOUD Kheirddine

Devant le jury composé de :

Merzougui Abdelkrim	Prof,	Université de M'sila	Président.
Arioua Yacine	M.C.A,	Université de M'sila	Encadreur.
Saadi Abderachid	M,C,A,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Je remercie *ALLAH*, Le tout puissant, Le Miséricordieux, qui nous a donné l'opportunité de mener bien ce travail. J'exprime ma gratitude, mes remerciements à mes parents qui ont fait de leur mieux pour m'aider. C'est avec un grand plaisir que, j'adresse mes sincères remerciements à mon encadreur, Monsieur *ARIOUA*

Yassine, pour ces conseils et son suivi durant la réalisation de mon travail.

Je tiens également à remercier les membres du jury qui ont bien voulu d'examiner ce travail.

Je remercie également les nombreux professeurs du département mathématiques et informatique.

Mes remerciements aussi à tous mes professeurs qui ont contribué à ma formation.

Je ne terminai pas sans avoir exprimé des remerciements envers toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, en particulier *HABOUCHE Zakaria*

Dédicace

Ce travail est dédié

À mon cher père *Rached* qui a toujours cru en moi et a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour que je réussisse dans mes études.

À ma chère mère *Fatima* : que je ne cesse de remercier pour tout ce qu'elle m'a donné. Elle m'a supporté dans son ventre 9 mois. Qu'Allah le récompense pour tous ces bienfaits.

À mes très chers frères et sœurs *Abd elsalam, Abd elazize, Nadai, Linda, Amira, Remasa, Farh, Yousef* : je ne peux exprimer à travers ces lignes tous mes sentiments d'amour et de tendresse envers vous. Puisse l'amour et la fraternité nous unissent jamais. Je vous souhaite la réussite dans votre vie, avec tout le bonheur qu'il faut pour vous combler. Merci pour votre précieuse aide à la réalisation de ce travail.

À tous ceux ou celles qui me sont chers et que j'ai omis involontairement de citer.

À tous Mes enseignants tout au long de mes études.

À tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail. À tous ceux qui ont cette pénible tâche de soulager les gens et diminuer leurs souffrances.

HOUD Kheirddine

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Fonction Spéciales	4
1.1.1 Fonction Gamma d'Euler	4
1.1.2 Fonction Bêta d'Euler	5
1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler	5
1.1.4 Polynôme de Legendre	6
1.2 Les opérateur intégral fractionnaires	7
1.3 Les opérateur de dérivées fractionnaires	8
1.4 L'intégrale fractionnaires généralisé de Katugampola	12
1.5 Dérivées fractionnaires généralisé de Katugampola	13
2 Problème Inverse Pour EDPs fractionnaires	15
2.1 Problème avec la dérivée de Caputo	16
2.1.1 L'existence de la Solution	16
2.1.2 L'unicite de la Solution	20
2.1.3 Exemple	21
2.2 Problème avec la dérivée de Remann-Liouville	22
2.2.1 L'existence de la Solution	22
2.2.2 L'unicite de la Solution	27
2.2.3 Exemple	27
3 Problème Inverse Pour EDPs au sens de dérivée fractionnaire généralisé	29
3.1 Problème avec la dérivée de Caputo-Katugampola	30
3.1.1 L'existence de la solution	30
3.1.2 L'unicite de la Solution	34
3.1.3 Exemple	35
3.2 Problème avec la dérivée de Katugampola	36
3.2.1 L'existence de la solution	37
3.2.2 L'unicite de la Solution	41
3.2.3 Exemple	42
Conclusion générale	44
Bibliographie	45

Introduction

Le calcul fractionnaire est un champ d'étude mathématique qui sort du traditionnel définitions des opérateurs intégrales et dérivées : définir l'intégrale fractionnaire comme simple généralisation de l'intégrale d'ordre entier, et la dérivée fractionnaire comme l'opération inverse ; c'est un sujet presque aussi ancien que le calcul différentiel classique connu aujourd'hui.

Les problème inverse des équations aux dérivées partielles sont liées à plusieurs phénomènes physiques et chimiques, telles que la propagation d'épidémie par exemple, l'équation de diffusion non-linéaire appartient à cette classe d'équations aux dérivées partielles qui modélise de nombreux phénomènes, on peut citer en particulier : la filtration d'un gaz à travers un milieu poreux, la dynamique des populations, l'hydrologie, (cf [10] ; [11] ; [13]).

Ce mémoire est composé de trois chapitres organisés comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux notions de base et des résultats fondamentaux relatives au calcul fractionnaire, un rappel et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma, la fonction Bêta et les définitions de la dérivation et l'intégration fractionnaire au sens Riemann-Liouville et Caputo, Katugampola et Caputo-Katugampola et leur propriété.

Dans le second chapitre nous étudions deux problème inverse pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires suivant :

1. problème inverse d'équation aux dérivées partielles fractionnaires au sens de Caputo

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1 - x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ U(0, x) = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. problème inverse d'équation aux dérivées partielles fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

$$\begin{cases} {}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1 - x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U(t, x) |_{t=0} = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Où ${}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha$, ${}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha$ la dérivées partielles fractionnaire de Caputo et Riemann-Liouville d'ordre α , ($0 < \alpha < 1$) respectivement, $\mathcal{I}^{1-\alpha}$ l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville et $v(x)$, $w(x)$ deux fonctions données .

Nous avons démontré l'existence du solution qui s'écrit sous forme du série de polynôme de Legendre , convergence et l'unicité de cette solution , nous assure également donne quelque exemple pour les deux type le contenu de ce chapitre est basé sur le travail de (N.Al-salti and E.Karimov, Inverse source problem for degenerate time fractional PDE arXiv : 1905.00362v2 (2020)).

Dans le troisième chapitre de notre travail, nous étudions deux problème inverse pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires généralisé suivant :

1. problème inverse d'équation aux dérivées partielles fractionnaires au sens de Caputo-Katugempola

$$\begin{cases} {}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho}U(t,x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t,x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ U(0,x) = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T,x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. problème inverse d'équation aux dérivées partielles fractionnaires au sens de Katugempola

$$\begin{cases} {}^K\mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho}U(t,x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t,x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha}U(t,x)|_{t=0} = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T,x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Où ${}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho}$, ${}^K\mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho}$ la dérivées partielles fractionnaires de Caputo-Katugempola et Katugempola d'ordre α , ($0 < \alpha < 1$) respectivement, $\mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha}$ l'intégral fractionnaire de Katugempola et $v(x)$, $w(x)$ deux fonctions données .

On va démentré l'exisente, convergence et l'unicite du cette solution,

Cette problème est généralisé par à pour le problème étoudé dans le chapitre precident.

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions élémentaire et notion de base du calcul fractionnaire, nous présentons d'abord les fonctions spéciales importantes dans la théorie du calcul fractionnaire (fonction Gamma, fonction Bêta, fonction Mittag-Leffter et le Polynôme de Legendre), ensuite on définit l'intégral et la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, Caputo, Katugampola et Caputo-Katugempola et leur propriétés.

1.1 Fonction Spéciales

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1.1. [2] On appelle fonction Gamma d'Euler la fonction définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt; (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) < 0).$$

avec $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

Exemple 1.1.1. 1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$. (posont $t = \tau^2$)

Lemme 1.1.1. [2] la fonction Gamma est une fonction de classe \mathbb{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* , (resp holomorphe sur le demi plan $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0$) et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{R}_+^* (\text{resp. } z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0); \Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Lemme 1.1.2. [2] Pour tout $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Démonstration. 1. Représentons $\Gamma(z+1)$ par Intégral d'Euler et intégrons par parties :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = [-t^z e^{-t}]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

2. Il suffit de poser dans le lemme 1.1.2 (1) $z = n-1$.

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= (n-1)(n-2)(n-3)\dots\Gamma(1) \\ &= (n-1)!. \end{aligned}$$

3. Nous allons démontré la formule $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

– Pour $n = 0$, on a $\Gamma(0 + \frac{1}{2}) = \frac{(0!) \sqrt{\pi}}{4^0 0!} = \sqrt{\pi}$.

– Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n .

C-à-d supposons que $\Gamma((n-1) + \frac{1}{2}) = \frac{(2(n-1))! \sqrt{\pi}}{4^{(n-1)} (n-1)!}$, est vérifiée, alors

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{((2(n-1))! \sqrt{\pi})}{4^{(n-1)} (n-1)!} \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right) \frac{(2n-1) \sqrt{\pi}}{4^{(n-1)} (n-1)!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2n(2)(4)^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n . □

Remarque 1.1.1. [2] La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entiers par la formule

$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ et La transition d'un intervalle à un autre] -1, 0[- 1, -2[- 2, -3[...

la fonction Gamma n'existe pas pour les valeur négatif entiers.

Exemple 1.1.2. 1. $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$.

2. $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$.

le graphe de la fonction Gamma

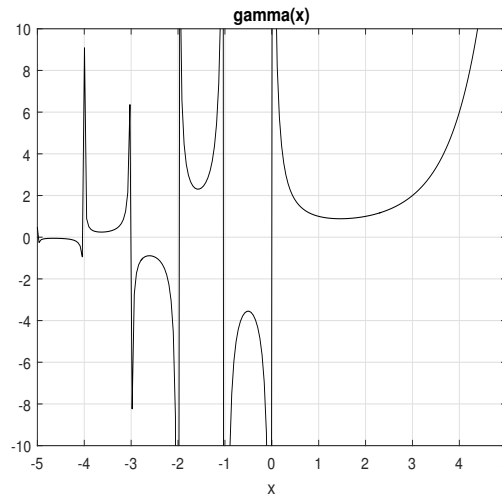


FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction Gamma

1.1.2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.1.2. [2] La fonction Bêta est une type d'intégrale d'Euler définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, (p, q \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0).$$

Lemme 1.1.3. [2] Pour tout $p, q \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0$, on a :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.1.3. [2] La fonction de Mittag-Leffler est définie par

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0.$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définie par

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha, \beta > 0.$$

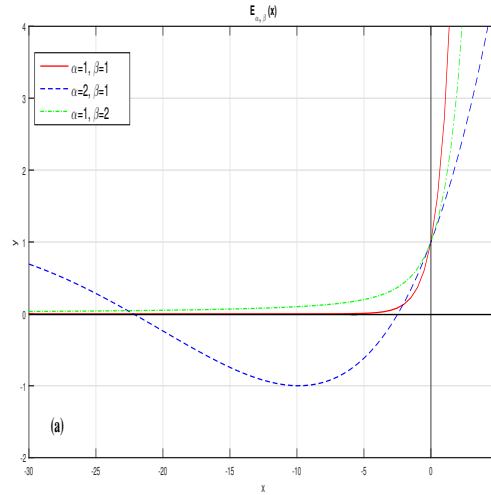
Exemple 1.1.3.

1. $E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$
2. $E_2(x) = E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \cosh \sqrt{x}.$
3. $E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x}(e^x - 1).$
4. $E_{1,3}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x).$

Théorème 1.1.1. [2] Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n E_n(\lambda x^n) = \lambda E_\alpha(\lambda x^n).$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda x^n) = \lambda x^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda x^n).$$

FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction $E_{\alpha,\beta}(x)$

Lemme 1.1.4. [2] Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a :

$$E_{\alpha,\beta}(x) - xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) - xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} - x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} - \sum_{k'=1}^{+\infty} \frac{x^{k'}}{\Gamma(\alpha k' + \beta)}, (k' = k + 1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} - \sum_{k'=1}^{+\infty} \frac{x^{k'}}{\Gamma(\alpha k' + \beta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

□

1.1.4 Polynôme de Legendre

Soit l'équation différentielle du second ordre à coefficient variable

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0. \quad (1.1.1)$$

Est appelé l'équation de Legendre .

Lemme 1.1.5. [12] Soit $-1 \leq x \leq 1$ si $\lambda = n(n + 1)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), alors l'équation de Legendre admet une solution sous la forme

$$y(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1.1.2)$$

$P_n(x)$ est appelé le Polynôme de Legendre.

Proposition 1.1.1. [12] Soit $P_n(x)$ le Polynôme de Legendre, on a :

$$1. P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)P_n(x), (n \geq 1),$$

2. $\frac{d}{dx} [(1-x^2)P'_n(x)] + n(n+1)P'_n(x) = 0,$
3. $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n,$
4. $|P_n(x)| \leq 1, (|x| \leq 1),$
5. $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) = \begin{cases} 0 & ; n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & ; n = m \end{cases},$

Théorème 1.1.2. [12] *Le Polynôme de Legendre $P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) est une form d'un système orthogonale dans l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$ est on a $\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$*

Corollaire 1.1.1. [12] *Soit f fonction continue pour tout ($|x| \leq 1$), la series de Polynôme de Legendre est :*

$$c_n = \frac{(f, P_n)}{\|P_n(x)\|^2} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_n dx. \quad (1.1.3)$$

Lemme 1.1.6. [12] *Pour tout ($|x| \leq 1$), alors le series de Polynôme de Legendre de la fonction f est convergente uniformemnt.*

1.2 Les opérateur intégral fractionnaires

L'intégrale fractionnaire de Rimann-Liouville

Définition 1.2.1. [2] *L'intégrale fractionnaire de Rieman-Liouville à gauche d'order $\alpha > 0$ de f est définie par :*

$$\forall t \in [a, b], (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

L'intégrale fractionnaire de Rieman-Liouville à droite d'order $\alpha > 0$ de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], ; (\mathcal{I}_{b^-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Proposition 1.2.1. [2] *Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a :*

1. $(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}.$
2. $(\mathcal{I}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}.$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-1} d\tau, \text{ posons } (\tau-a = s(t-a)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 ((t-a)_s (t-a))^{\alpha-1} (s(t-a))^{\beta-1} (t-a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

2. Même idée on démontre 1.2.1(2) (avec le changement de variable $b-\tau=s(b-t)$).

□

Théorème 1.2.1. [2] *Si $f \in L^1([a, b])$, alors $\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f$ existe pour tout $\alpha > 0$ et $\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f \in L^1([a, b])$.*

Lemme 1.2.1. [2] *Soit $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f \in L^1([a, b])$, alor*

$$\mathcal{I}_{a^+}^\alpha \mathcal{I}_{a^+}^\beta f = \mathcal{I}_{a^+}^\beta \mathcal{I}_{a^+}^\alpha f = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f.$$

Intégrale fractionnaire de Hadamard

Définition 1.2.2. [2] L'intégrale fractionnaire de Hadamard à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall t \in [a, b], ({}^H\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\ln t - \ln \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

L'intégrale fractionnaire de Hadamard à droite d'ordre $\alpha > 0$ de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall t \in [a, b], ({}^H\mathcal{I}_{b^-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\ln \tau - \ln t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Proposition 1.2.2. [2] Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a :

1. $({}^H\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (\ln t - \ln a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\ln t - \ln a)^{\alpha+\beta-1}$.
2. $({}^H\mathcal{I}_{b^-}^\alpha (\ln b - \ln t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\ln b - \ln t)^{\alpha+\beta-1}$.

Lemme 1.2.2. [2] Soit $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f \in L^1([a, b])$, alors

$${}^H\mathcal{I}_{a^+}^\alpha {}^H\mathcal{I}_{a^+}^\beta f = {}^H\mathcal{I}_{a^+}^\beta {}^H\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f = {}^H\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f.$$

1.3 Les opérateur de dérivées fractionnaires

Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1. [2] Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^{RL}\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Remarque 1.3.1. [2]

1. Pour $\alpha = 0, n = 1$, on a ${}^{RL}\mathcal{D}_{a^+} f(t) = \frac{d}{dt}(\mathcal{I}_{a^+}^1 f(t)) = f(t)$.
2. Pour $\alpha = n, n \in \mathbb{N}^*$. L'opérateur \mathcal{D}^α donne le même résultat que la dérivée usuelle pour les ordres entiers :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^n f(t) = f^n(t). \\ \mathcal{D}_{b^-}^0 f(t) = D_-^n f(t) = (-1)^n f^n(t) \end{cases}$$

Proposition 1.3.1. [2] Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a :

1. $({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}$.
2. $({}^{RL}\mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}$.

Démonstration. 1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$ d'après la définition (1.3.1) et la proposition (1.2.1) on a

$${}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\dots(n-\alpha+\beta-1-(n-1))(t-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\dots(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\Gamma(n - \alpha + \beta) &= (n - \alpha + \beta - 1)\Gamma(n - \alpha + \beta - 1), \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \\ &= (n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2)\Gamma(n - \alpha + \beta - 2) \\ &= (n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2)\dots(\beta - \alpha)\Gamma(\beta - \alpha),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}{}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha + \beta)} (n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2)\dots(\beta - \alpha)(t - a)^{\beta - \alpha - 1} \\ &= \frac{(n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2)\dots(\beta - \alpha)\Gamma(\beta)}{(n - \alpha + \beta - 1)(n - \alpha + \beta - 2)\dots(\beta - \alpha)\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha - 1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha - 1}.\end{aligned}$$

2. On procède de la même manière que 1.3.1(1). □

Remarque 1.3.2. Pour $\lambda = \beta - 1$, $a = 0$ on a :

$$\begin{aligned}{}^{RL}(\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda})(t) &= \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \lambda + 1)} (n - \alpha + \lambda)(n - \alpha + \lambda - 1)\dots(\lambda + 1 - \alpha)(t)^{\lambda - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \lambda + 1)} (n - (\alpha - \lambda))(n - 1 - (\alpha + \lambda))\dots(1 - (\alpha - \lambda))(t)^{\lambda - \alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \lambda + 1)} (t)^{\lambda - \alpha}, & \alpha - \lambda \notin \{1, 2, \dots, n\}, \lambda > -1 \\ 0, & \alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}\end{aligned}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m, m \in \{1, 2, \dots, n\}$ C-à-d

$${}^{RL}(\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\alpha - m})(t) = 0, m \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Lemme 1.3.1. [2] Soit $\alpha > 0$ si $f(t) \in C([0, T]) \cap L([0, T])$, alors

1. L'équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville ${}^{RL}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} f(t) = 0$, admet une solution unique

$$f(t) = C_1 t^{\alpha - 1} + C_2 t^{\alpha - 2} + \dots + C_n t^{\alpha - n}.$$

2. Si ${}^{RL}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} f(t) \in C([0, T]) \cap L([0, T])$ et $n = [\alpha] + 1$, alors

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} {}^{RL}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} f(t) = f(t) + C_1 t^{\alpha - 1} + C_2 t^{\alpha - 2} + \dots + C_n t^{\alpha - n}.$$

Où $C_n \in \mathbb{R}$ avec $n = 1, 2, \dots, n$.

Théorème 1.3.1. [2] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} {}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} y(t) - \lambda y(t) = f(t), & 0 < \alpha \leq 1, \\ I^{1 - \alpha} y(a) = b, & b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

admet une solution $y(t)$ sous forme

$$y(t) = b(t - a)^{\alpha - 1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t - a)^{\alpha}) + \int_a^t (t - \tau)^{\alpha - 1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t - \tau)^{\alpha}) f(\tau) d\tau.$$

Dérivées fractionnaires de Caputo

Définition 1.3.2. [2] Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f(t) \circ \left(-\frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Remarque 1.3.3. Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{a^+}^n f(t) = f^{(n)} - f^{(n)}(a), \\ {}^C\mathcal{D}_{b^-}^n f(t) = (-1)^n (f^{(n)} - f^{(n)}(b)). \end{cases}$$

Proposition 1.3.2. [2] Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a :

1. $({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}$.
2. $({}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}$.

Démonstration. 1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$ d'après la définition (1.3.2) et la proposition (1.2.1) on a

$${}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t-a)^{\beta-1} &= (\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-1-(n-1))(t-a)^{\beta-1-n} \\ &= (\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)(t-a)^{\beta-1-n}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n-1} d\tau, \text{ posons } (\tau-a = s(t-a)) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_a^t (1-s)^{n-\alpha-1} (s)^{\beta-n-1} ds \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n), \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \end{aligned}$$

2. De la même manière on démontre (2)

□

Remarque 1.3.4. Pour $\lambda = \beta - 1, a = 0$ on a :

$$\begin{aligned} ({}^C\mathcal{D}_{0^+}^\alpha t^\lambda)(t) &= \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)\dots(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} (t)^{\lambda-\alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (t)^{\lambda-\alpha}, & \alpha - \lambda \notin \{1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}, \lambda > -1 \end{aligned}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m, m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ C-à-d

$$({}^C\mathcal{D}_{0^+}^\alpha t^{\alpha-m})(t) = 0, m \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Lemme 1.3.2. [2]

1. Soit $\alpha > 0$ si $f(t) \in C([0, T])$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo ${}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha f(t) = 0$, admet une solution unique

$$f(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + c_n t^n.$$

Où $C_n \in \mathbb{R}$ avec $n = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

2. Supposons que $f(t) \in C^n([0, T])$, alors :

$$\mathcal{I}_{0+}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha f(t) = f(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_n t^n.$$

Où $C_n \in \mathbb{R}$ avec $n = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Théorème 1.3.2. [12] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le problème de cauchy :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha y(t) - \lambda y(t) = f(t), & 0 < \alpha \leq 1, \\ y(a) = b, & b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

admet une solution $y(t)$ sous forme

$$y(t) = b E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha) + \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) f(\tau) d\tau.$$

Théorème 1.3.3. [2] Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si f possède $(n-1)$ dérivées en a et $(\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)$ existe, alors

$$({}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t) = \mathcal{D}_{a+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right].$$

Corollaire 1.3.1. [2] Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $(\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t)$, $({}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t)$ existent.

On suppose que $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, alors

$$(\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t) = ({}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t).$$

Dérivées fractionnaires de Hadamard

Définition 1.3.3. [2] Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1, -\infty < a < b < +\infty$, La dérivée fractionnaire de Hadamard à gauche d'ordre α de la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^H\mathcal{D}_{a+\alpha} f(t) = \left(t \frac{d}{dt} \right)^n \circ ({}^H\mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (\ln t - \ln \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

La dérivée fractionnaire de Hadamard à droite d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^H\mathcal{D}_{b-\alpha} f(t) = \left(-t \frac{d}{dt} \right)^n \circ ({}^H\mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-t \frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (\ln \tau - \ln t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Proposition 1.3.3. [2] Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a :

- $({}^H\mathcal{D}_{a+\alpha} (\ln t - \ln a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\ln t - \ln a)^{\beta-\alpha-1}$.
- $({}^H\mathcal{D}_{b-\alpha} (\ln b - \ln t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\ln b - \ln t)^{\beta-\alpha-1}$.

Dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard

Définition 1.3.4. [2] Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1, -\infty < a < b < +\infty$, La dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard à gauche d'ordre α de la fonction $f \in AC_\sigma^n([a, b])$ est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^{C-H}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = ({}^H\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}) \circ \left(t \frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (\ln t - \ln \tau)^{n-\alpha-1} (\gamma)^n f(\tau) d\tau.$$

La dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard à droite d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^{C-H}\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = ({}^H\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha}) \circ \left(-t \frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\ln \tau - \ln t)^{n-\alpha-1} (-\gamma)^n f(\tau) d\tau.$$

Avec $\gamma = t \frac{d}{dt}$

Proposition 1.3.4. [2] Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a :

1. $({}^{C-H}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (\ln t - \ln a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\ln t - \ln a)^{\beta-\alpha-1}$.
2. $({}^{C-H}\mathcal{D}_{b^-}^\alpha (\ln b - \ln t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\ln b - \ln t)^{\beta-\alpha-1}$.

Remarque 1.3.5. [2] Pour $\alpha \geq 0$, si $f \in AC_\sigma^n([a, b])$, alors la dérivées fractionnaire de Caputo-Hadamard exist et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}^{C-H}\mathcal{D}_{a^+}^n f(t) = (\gamma)^n f(t), \\ {}^{C-H}\mathcal{D}_{b^-}^n f(t) = (-\gamma)^n f(t) \end{cases}$$

Théorème 1.3.4. [2] Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, alors

$$({}^{C-H}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma^k f(a)}{k!} (\ln t - \ln a)^k \right].$$

1.4 L'intégrale fractionnaires généralisé de Katugampola

L'intégrale fractionnaire de Katugampola est la généralisé de L'intégrale fractionnaire de Rimann-Liouville et L'intégrale fractionnaire de Hadamard de la manière suivante :

Définition 1.4.1. [9] Soit $-\infty < a < b < +\infty$ L'intégrale fractionnaire de Katugampola à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de $f \in X_c^p([a, b])$ est définie par

$$\forall t \in [a, b], (\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha, \rho})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}.$$

Et L'intégrale fractionnaire de Katugampola à droite d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], (\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha, \rho} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \left(\frac{\tau^\rho - t^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^\rho}.$$

Lemme 1.4.1. [6] Soit $\alpha, \beta, \rho > 0$ et pour tout $f \in X_c^p[0, T]$, on a :

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha, \rho} \mathcal{I}_{a^+}^{\beta, \rho} f = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta, \rho}.$$

Proposition 1.4.1. [5] Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ et $0 < \rho < \infty$ on a :

1. $(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha, \rho} (t-a)^m)(t) = \frac{\rho^{-\alpha} \Gamma(1+\frac{m}{\rho})}{\Gamma(\alpha+1+\frac{m}{\rho})} (t-a)^{\rho\alpha+m}$.
2. $(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha, \rho} (b-t)^m)(t) = \frac{\rho^{-\alpha} \Gamma(1+\frac{m}{\rho})}{\Gamma(\alpha+1+\frac{m}{\rho})} (b-t)^{\rho\alpha+m}$.

Théorème 1.4.1. [5] Soit $\alpha \geq 0, 1 \leq \rho < \infty$, alors

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} (\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha, \rho})(t) = ({}^{RL}\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} (\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha, \rho})(t) = ({}^H\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\ln t - \ln \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

1.5 Dérivées fractionnaires généralisé de Katugampola

Dérivées fractionnaires de katugampola

Définition 1.5.1. [9] Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, $-\infty < a < b < +\infty$ La dérivée fractionnaire de Katugampola à gauche d'ordre α de $f \in X_c^p([a, b])$ est définie par :

$${}^K\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha, \rho} f(t) = \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n \circ (\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha, \rho} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{n-\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}.$$

La dérivée fractionnaire de Katugampola à droite d'ordre α de f est définie par :

$${}^K\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha, \rho} f(t) = \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n \circ (\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha, \rho} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b \left(\frac{\tau^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{n-\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}.$$

Proposition 1.5.1. [5] Pour $\alpha > 0$, $\rho > 0$ et $m > -\rho$ on a :

1. $({}^K\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha, \rho} (t-a)^m)(t) = \frac{\rho^{\alpha-1} \Gamma(1+\frac{m}{\rho})}{\Gamma(1-\alpha+\frac{m}{\rho})} (t-a)^{m-\rho\alpha}$.
2. $({}^K\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha, \rho} (b-t)^m)(t) = \frac{\rho^{\alpha-1} \Gamma(1+\frac{m}{\rho})}{\Gamma(1-\alpha+\frac{m}{\rho})} (b-t)^{m-\rho\alpha}$.

Lemme 1.5.1. [6] Soit $\alpha, \rho > 0$, si $f(t) \in C([0, T])$, alors

1. L'équation différentielle fractionnaire de type Katugampola ${}^K\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha, \rho} f(t) = 0$, admet une solution unique

$$f(t) = C_1 t^{\rho(\alpha-1)} + C_2 t^{\rho(\alpha-2)} + \dots + C_n t^{\rho(\alpha-n)}.$$

2. Si ${}^K\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha, \rho} f(t) \in C([0, T])$ et $0 < \alpha < 1$, alors

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha, \rho} {}^K\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha, \rho} f(t) = f(t) + C t^{\rho(\alpha-1)}.$$

avec $C \in \mathbb{R}$,

Théorème 1.5.1. [5] Soit $\alpha \geq 0$ et $1 \leq \rho < \infty$, alors

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} ({}^K\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha, \rho} f)(t) = ({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} ({}^K\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha, \rho} f)(t) = ({}^H\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (\ln t - \ln \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Théorème 1.5.2. [9] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} {}^K\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha, \rho} y(t) - \lambda y(t) = f(t), & 0 < \alpha \leq 1, \\ \mathcal{I}_{a^+}^{1-\alpha, \rho} f(a) = b, & b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

admet une solution $y(t)$ sous forme

$$y(t) = b \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(\lambda \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) + \int_a^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(\lambda \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}.$$

Dérivées fractionnaires généralisé de Caputo-Katugampola

Définition 1.5.2. [9] Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, $-\infty < a < b < +\infty$, La dérivée fractionnaire généralisé de Caputo-katugampola à gauche d'ordre α de $f \in X_c^p([a, b])$ est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^{C-K}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha, \rho} f(t) = (\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha, \rho}) \circ (\gamma)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{n-\alpha-1} (\gamma)^n f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}.$$

Et la dérivée fractionnaire généralisé de Caputo-katugampola à droite d'ordre α de $f \in X_c^p([a, b])$ est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^{C-K}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha, \rho} f(t) = (\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha}) \circ (\gamma)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left(\frac{\tau^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{n-\alpha-1} (-\gamma)^n f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}.$$

Avec $\gamma = t^{1-\rho} \frac{d}{dt}$

Proposition 1.5.2. [5] Pour $\alpha > 0$, $\rho > 0$ et $m > -\rho$ on a :

1. $({}^{C-K}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho}(t-a)^m)(t) = \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma(1+\frac{m}{\rho})}{\Gamma(1-\alpha+\frac{\rho}{\rho})}(t-a)^{m-\rho\alpha}$.
2. $({}^{C-K}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha,\rho}(b-t)^m)(t) = \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma(1+\frac{m}{\rho})}{\Gamma(1-\alpha+\frac{\rho}{\rho})}(b-t)^{m-\rho\alpha}$.

Lemme 1.5.2. [6] Soit $\alpha, \rho > 0$, si $f(t) \in C([0, T])$, alors

1. l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo-Katugampola ${}^{C-K}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\rho} = 0$, admet une solution unique

$$f(t) = C_0 + C_1 t^\rho + C_2 t^{2\rho} + \dots + c_{n-1} t^{(n-1)\rho}.$$

2. Si $f(t) \in C^n([0, T])$ et $0 < \alpha < 1$, alors

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha,\rho} {}^{C-K}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\rho} f(t) = f(t) + C.$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.5.3. [5] Soit $\alpha \geq 0$ et $1 \leq \rho < \infty$, alors

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} ({}^{C-K}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho} f)(t) = ({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} ({}^{C-K}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho} f)(t) = ({}^{C-H}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (\ln t - \ln \tau)^{n-\alpha-1} (\gamma)^n f(\tau) d\tau.$$

Théorème 1.5.4. [9] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le problème de cauchy :

$$\begin{cases} {}^{C-K}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\rho} y(t) - \lambda y(t) = f(t), & 0 < \alpha \leq 1, \\ y(a) = b, & b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

admet une solution $y(t)$ sous forme

$$y(t) = b E_\alpha \left(\lambda \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) + \int_a^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(\lambda \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}.$$

PROBLÈME INVERSE POUR EDPs FRACTIONNAIRES

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence, la convergence et l'unicité de solution de deux problèmes inverses pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires,

1. Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires, au sens de Caputo s'écrivent comme :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ U(0, x) = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires, au sens de Riemann-Liouville s'écrivent comme :

$$\begin{cases} {}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ \mathcal{I}^{1-\alpha} U(t, x) |_{t=0} = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Où ${}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x)$, ${}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x)$ est la dérivée partielle fractionnaire de Caputo et Riemann-Liouville d'ordre α ($0 < \alpha < 1$), respectivement de $U(t, x)$, $\mathcal{I}^{1-\alpha}$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $1 - \alpha$ et $v(x)$, $w(x)$ deux fonctions données.

On applique la méthode de séparation de variables pour obtenir la solution explicite sous forme d'une série de polynôme de Legendre.

2.1 Problème avec la dérivée de Caputo

Dans cette section, on va étudier l'existence, convergence et l'unicité de solution du Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaire au sens de Caputo de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ U(0, x) = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Où ${}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x)$ est la dérivée partielle fractionnaire de Caputo d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) de $U(t, x)$ et $v(x), w(x)$ deux fonctions données.

Le résultat principal de cette section est le Théorème suivant :

Théorème 2.1.1. Soit $v, w \in C^3([-1, 1])$ et $v', w' \in L([-1, 1])$, alors il existe une solution unique de Problème (2.1.1) est donnée :

$$U(t, x) = v(x) + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T}\right)^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha)} (w_n - v_n) P_n(x). \quad (2.1.2)$$

$$h(x) = (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} + \frac{d}{dx} [(1-x^2)v'(x)] + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{w_n - v_n}{1 - E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha)}\right) P_n(x). \quad (2.1.3)$$

avec $\lambda_n = n(n+1)$, et

$$v_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 v(x) P_n(x), \quad w_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 w(x) P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2.1.1 L'existence de la Solution

Théorème 2.1.2. Le Problème (2.1.1) admet l'ensemble de solution $\{U(t, x), h(x)\}$, données par :

$$U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x), \quad (2.1.4)$$

où $U_n(t)$ est fonction à déterminer, $P_n(x)$ le polynôme de Legendre et h_n est constant.

Démonstration. On cherche la solution du Problème (2.1.1), sous forme :

$$\left\{ U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x) \right\}.$$

Alors $\{U(t, x), h(x)\}$ est vérifier l'équation (2.1.1), C-à-d

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_n(t), \\ [(1-x^2)U_x]_x = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2) P_n''(x) U_n(t) - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) U_n(t). \end{cases}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2) P_n''(x) U_n(t) - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) U_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x),$$

on obtient :

$$P_n(x) {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_n(t) = (1-x^2) P_n''(x) U_n(t) - 2x P_n'(x) U_n(t) + h_n P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et comme $P_n(x)$ est solution de l'équation de Legendre on obtient :

$$(1-x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) = -\lambda_n P_n(x).$$

Alors

$$P_n(x) {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_n(t) = -\lambda_n U_n(t) + h_n P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

on obtient

$${}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_n(t) + \lambda_n U_n(t) + h_n P_n(x), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.5)$$

et d'autre part on a :

$$\begin{cases} U(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(0) P_n(x) = v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n P_n(x), \\ U(T, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(T) P_n(x) = w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n P_n(x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_n(0) = v_n, \\ U_n(T) = w_n \end{cases} . n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.6)$$

On cherche $U_n(t)$

1. Pour $n = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_0(t) = h_0, & 0 < t < T, \\ U_0(0) = v_0, \\ U_0(T) = w_0. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

En appliquant \mathcal{I}_{0t}^α sur l'équation (2.1.7), on obtint :

$$\mathcal{I}_{0t}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_0(t) = \mathcal{I}_{0t}^\alpha h_0,$$

d'après le lemme (1.3.2) pour $0 < \alpha \leq 1$, ($n = [\alpha] + 1 = 1$) on a :

$$\mathcal{I}_{0t}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_0(t) = U_0(t) - c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

donc

$$U_0(t) - c_0 = \mathcal{I}_{0t}^\alpha h_0, \Rightarrow U_0(t) = c_0 + \mathcal{I}_{0t}^\alpha h_0.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (2.1.7), est :

$$U_0(t) = c_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} h_0 d\tau.$$

Les conditions aux limites implique :

$$\begin{cases} U_0(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = v_0, \\ U_0(T) = c_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - \tau)^{\alpha-1} h_0 d\tau = w_0 \Rightarrow h_0 = (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha}. \end{cases}$$

Alors

$$U_0(t) = v_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} h_0 d\tau = v_0 + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T}\right)^\alpha.$$

2. Pour $n \geq 1$ on obtient :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t) + \lambda U_n(t) = h_n, & 0 < t < T, \\ U_n(0) = v_n, \\ U_n(T) = w_n. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

d'après le théorème (1.3.2) pour $0 < \alpha \leq 1$, Alors le problème (2.1.8) admet une solution sous forme

$$\begin{aligned}
U_n(t) &= v_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-\tau)^\alpha) h_n d\tau \\
&= v_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k (t-\tau)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} h_n d\tau \\
&= v_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^t \frac{-\lambda_n^k (t-\tau)^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} h_n d\tau \\
&= v_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k (t)^{\alpha k + \alpha}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} h_n \\
&= v_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) + \frac{-\lambda_n t^\alpha}{-\lambda_n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k (t)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} h_n \\
&= v_n E_\alpha(z) - \frac{h_n}{\lambda_n} z E_{\alpha,\alpha+1}(z), (z = -\lambda t^\alpha) \\
&= v_n E_\alpha(z) - \frac{h_n}{\lambda_n} (E_\alpha(z) - 1) = c_n E_\alpha(-\lambda t^\alpha) + \frac{h_n}{\lambda_n}.
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites implique :

$$\begin{cases} U_n(0) = c_n + \frac{h_n}{\lambda_n} = v_n, \\ U_n(T) = c_n E_\alpha(-\lambda T^\alpha) + \frac{h_n}{\lambda_n} = w_n. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_n = \frac{v_n - w_n}{1 - E_\alpha(-\lambda T^\alpha)}, \\ h_n = \lambda_n (v_n - c_n), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
U_n(t) &= \frac{(v_n - w_n) E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda T^\alpha)} + \frac{w_n - v_n}{1 - E_\alpha(-\lambda T^\alpha)} + v_n \\
&= \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda T^\alpha)} (w_n - v_n) + v_n, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
U(t, x) &= v_0 + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha + \left(\frac{1 - E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda T^\alpha)} (w_n - v_n) + v_n \right) P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \\
&= v(x) + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha + \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda T^\alpha)} (w_n - v_n) P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \\
&= v(x) + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda T^\alpha)} (w_n - v_n) P_n(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} + \lambda_n \left(v_n + \frac{w_n - v_n}{1 - E_\alpha(-\lambda T^\alpha)} \right) P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \\
&= (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} + \lambda_n v_n P_n(x) + \lambda_n \left(\frac{w_n - v_n}{1 - E_\alpha(-\lambda T^\alpha)} \right) P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \\
&= (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} + \frac{d}{dx} [(1 - x^2) v'(x)] + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{w_n - v_n}{1 - E_\alpha(-\lambda T^\alpha)} \right) P_n(x).
\end{aligned}$$

La convergence de la solution

Dans la suite, on va démontré la convergence uniforme des séries apparaissant dans l'expressienci dessus et les séries correspondantes $[(1 - x^2)U_x]_x$ et ${}^C \mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x)$.

Nous commençons par :

$$\begin{aligned}
|U(t, x)| &= \left| v(x) + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha)} (w_n - v_n) P_n(x) \right| \\
&\leq |v(x)| + \left| (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha)} (w_n - v_n) \right| |P_n(x)| \\
&\leq |v(x)| + |w_0| + |v_0| + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} (|w_n| + |v_n|).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|h(x)| &= \left| (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} + \frac{d}{dx} [(1 - x^2)v'(x)] + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{w_n - v_n}{1 - E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha)} \right) P_n(x) \right| \\
&\leq \left| (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} \right| + \left| \frac{d}{dx} [(1 - x^2)v'(x)] \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \lambda_n \left(\frac{w_n - v_n}{1 - E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha)} \right) \right| |P_n(x)| \\
&\leq (|w_0| + |v_0|) \left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} \right| + \left| \frac{d}{dx} [(1 - x^2)v'(x)] \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{|w_n| + |v_n|}{|1 - E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha)|} |P_n(x)| \\
&\leq (|w_0| + |v_0|) \left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} \right| + \left| [(1 - x^2)v'(x)]' \right| + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n + 1) (|w_n| + |v_n|).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|{}^C \mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x)| &= \left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} (w_0 - v_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n + 1) E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha)} (w_n - v_n) P_n(x) \right| \\
&\leq \left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} (w_0 - v_0) \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n(n + 1) E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha)} \right| |(w_n - v_n)| |P_n(x)| \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} (|w_0| + |v_0|) + C_3 \sum_{n=1}^{\infty} n(n + 1) (|w_n| + |v_n|).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|[(1 - x^2)U_x]_x| &= \left| [(1 - x^2)v'(x)]' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha)} (n(n + 1)) (w_n - v_n) P_n(x) \right| \\
&\leq \left| [(1 - x^2)v'(x)]' \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha)} \right| |(n(n + 1)) (w_n - v_n)| |P_n(x)| \\
&\leq \left| [(1 - x^2)v'(x)]' \right| + C_4 \sum_{n=1}^{\infty} (n(n + 1)) (|w_n| + |v_n|).
\end{aligned}$$

Le convergence des séries dépend de l'estimations de v_n et w_n ,

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{2n + 1}{2} \int_{-1}^1 v(x) P_n(x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(x) (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) dx,
\end{aligned}$$

on intègre par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
v_n &= [v(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|v_n| &= \left| -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))| dx
\end{aligned}$$

En utilisant l'ingalite de Cauchy Schwarz et $\|P_n(x)\|^2$ il vient :

$$\begin{aligned} |v_n| &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |v'(x)| (|P_{n+1}(x)| + |P_{n-1}(x)|) \\ &\leq \frac{1}{2} \|v'(x)\| (\|P_{n+1}(x)\| + \|P_{n-1}(x)\|) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|v'(x)\| \left(\frac{\sqrt{2}}{(2n+3)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &\leq \frac{\|v'(x)\| \sqrt{2}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

En répétant le procossus ci-dessus une fois de plus, on obtient :

$$|v_n| \leq \frac{4\sqrt{2}}{(2n-3)^{\frac{3}{2}}} \|v''(x)\|.$$

On trouve finalement la convergence uniforme de la solution pour $v, w \in C^3([-1, 1])$ et $v^4, w^4 \in L([-1, 1])$.

□

2.1.2 L'unicite de la Solution

Soient $\{U_1(t, x), h_1(x)\}, \{U_2(t, x), h_2(x)\}$ deux ensembles de solition du Problème (2.1.1), posant $U = U_1 - U_2, h = h_1 - h_2$, il vient :

$$\begin{cases} {}^C \mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x) & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ U(0, x) = 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = 0, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

d'après le théorème (2.1.2) le problème (2.1.9) admet l'ensemble de solution $\{U(t, x), h(x)\}$:

$$U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x), \quad (2.1.10)$$

Mais d'après (1.1.3) on obtient :

$$U_n(t) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 U(t, x) P_n(x) dx. \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.11)$$

$$h_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 h(x) P_n(x) dx. \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.12)$$

$$\begin{cases} U_n(0) = 0, \\ U_n(T) = 0, \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.13)$$

En appliquant ${}^C \mathcal{D}_{0t}^\alpha$ sur l'èquation (2.1.11) on obtient :

$$\begin{aligned} {}^C \mathcal{D}_{0t}^\alpha U_0(t) &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) {}^C \mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) ([(1-x^2)U_x]_x + h(x)) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) [(1-x^2)U_x]_x dx + \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) h(x) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) [(1-x^2)U_x]_x dx + h_n. \end{aligned}$$

on intègre par parties deux fois on trouve :

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_0(t) &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 [(1-x^2)P'_n(x)]' U(t,x) dx + h_n \\ &= -\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 n(n+1)U(t,x)P_n(x) dx + h_n \\ &= -n(n+1)U_n(t) + h_n. \end{aligned}$$

Alore, d'après le théorème (1.3.2) et la condition (2.1.13) on obtient :

$$U_n(t) = 0, \quad h_n = 0.$$

et comme $P_n(x)$ est système comble sur $[-1, 1]$, alors

$$U(t, x) \equiv 0, \quad h(x) \equiv 0.$$

2.1.3 Exemple

Exemple 2.1.1.

Soit le Problème suivant :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ U(0, x) = 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = 3x^2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

On a

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n P_n(x) \\ &= v_0 P_0(x) + v_1 P_1(x) + v_2 P_2(x) + \dots \\ &= v_0 + v_1 x + \frac{v_2}{2} (3x^2 - 1) \dots = 0. \end{aligned}$$

Alors $v_n = 0, \forall n \geq 0$.

Et.

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n P_n(x) \\ &= w_0 P_0(x) + w_1 P_1(x) + w_2 P_2(x) + \dots \\ &= w_0 + w_1 x + \frac{w_2}{2} (3x^2 - 1) \dots = 3x^2. \end{aligned}$$

Alors $w_0 = 1, w_1 = 0$ et $w_2 = 2, w_n = 0, \forall n \geq 3$.

d'après le théorème (2.1.1) on obtient :

$$\begin{aligned} U(t, x) &= v(x) + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T}\right)^\alpha + \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_1 t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_1 T^\alpha)} (w_1 - v_1) P_1(x) \\ &\quad + \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_2 t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_2 T^\alpha)} (w_2 - v_2) P_2(x) \\ &= w_0 \left(\frac{t}{T}\right)^\alpha + \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_2 t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_2 T^\alpha)} w_2 P_2(x) \\ &= \left(\frac{t}{T}\right)^\alpha + \frac{1 - E_\alpha(-6t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-6T^\alpha)} (3x^2 - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} + \frac{d}{dx} [(1 - x^2)v'(x)] \\
&\quad + \lambda_1 \left(\frac{w_1 - v_1}{1 - E_\alpha(-\lambda_1 T^\alpha)} \right) P_1(x) + \lambda_2 \left(\frac{w_2 - v_2}{1 - E_\alpha(-\lambda_2 T^\alpha)} \right) P_2(x) \\
&= w_0 \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} + \lambda_2 \left(\frac{w_2 - v_2}{1 - E_\alpha(-\lambda_2 T^\alpha)} \right) P_2(x) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} + \left(\frac{6}{1 - E_\alpha(-6T^\alpha)} \right) (3x^2 - 1).
\end{aligned}$$

2.2 Problème avec la dérivée de Remann-Liouville

Dans cette section, on va étudier l'existence, convergence et l'unicité de solution de Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires au sens de Remann-Liouville de la forme suivant :

$$\begin{cases}
{}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1 - x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\
\mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U(t, x) |_{t=0} = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\
U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1.
\end{cases} \quad (2.2.1)$$

Où ${}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x)$ est la dérivée partielles fractionnaire de Remann-Liouville d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) de $U(t, x)$ et $\mathcal{I}_{0t}^\alpha U(t, x)$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de $U(t, x)$, $v(x)$ et $w(x)$ deux fonctions données. Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. Soit $v, w \in C^3([-1, 1])$ et $v^4, w^4 \in L([-1, 1])$, alors il existe une solution unique de Problème (2.2.1) est donnée

$$\begin{aligned}
U(t, x) &= (w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha + v(x) t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n t^\alpha) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(+t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n t^\alpha) \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) \right) P_n(x).
\end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$h(x) = (w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) P_n(x), \quad (2.2.3)$$

où $\lambda_n = n(n + 1)$, et

$$v_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 v(x) P_n(x), \quad w_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 w(x) P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2.2.1 L'existence de la Solution

Théorème 2.2.2. Le Problème (2.2.1) admet l'ensemble de solution $\{U(t, x), h(x)\}$, données par :

$$U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x), \quad (2.2.4)$$

où $U_n(t)$ est fonction à déterminer, $P_n(x)$ le polynôme de Legendre et h_n est constant.

Démonstration. On cherche la solution du Problème (2.2.1) sous forme :

$$\left\{ U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x) \right\}$$

Alors $\{U(t, x), h(x)\}$ est vérifiées l'équation (2.2.1), C-à-d

$$\begin{cases}
{}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) {}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_n(t), \\
[(1 - x^2)U_x]_x = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x^2) P_n''(x) U_n(t) - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) U_n(t)
\end{cases}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)^{RL} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha} U_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2) P_n''(x) U_n(t) - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) U_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x),$$

on obtient :

$$P_n(x)^{RL} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha} U_n(t) = (1-x^2) P_n''(x) U_n(t) - 2x P_n'(x) U_n(t) + h_n P_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$$

et comme $P_n(x)$ est solution de l'équation de gendre on obtient :

$$(1-x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) = -\lambda_n P_n(x).$$

Donc

$$P_n(x)^{RL} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha} U_n(t) = -\lambda_n U_n(t) P_n(x) + h_n P_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$$

alors

$${}^{RL} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha} U_n(t) + \lambda_n U_n(t) = h_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.5)$$

et d'autre part on a :

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U(t, x) |_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U_n(t) |_{t=0} P_n(x) = v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n P_n(x), \\ U(T, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(T) P_n(x) = w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n P_n(x). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U_n(t) |_{t=0} = v_n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ U_n(T) = w_n. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

On cherche $U_n(t)$

1. Pour $n = 0$ on obtient :

$$\begin{cases} {}^{RL} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha} U_0(t) = h_0, & 0 < t < T, \\ \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U_0(t) |_{t=0} = v_0, \\ U_0(T) = w_0. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

En appliquant $\mathcal{I}_{0t}^{\alpha}$ sur l'équation (2.2.7) on obtint :

$$\mathcal{I}_{0t}^{\alpha} {}^{RL} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha} U_0(t) = \mathcal{I}_{0t}^{\alpha} h_0$$

d'après le lemme (1.3.1) pour $0 < \alpha \leq 1$, ($n = [\alpha] + 1 = 1$) on obtient :

$$\mathcal{I}_{0t}^{\alpha} {}^{RL} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha} U_0(t) = U_0(t) - c_0 t^{\alpha-1}, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

donc

$$U_0(t) - c_0 t^{\alpha-1} = \mathcal{I}_{0t}^{\alpha} h_0,$$

ce que implique

$$U_0(t) = c_0 t^{\alpha-1} + \mathcal{I}_{0t}^{\alpha} h_0. \quad (2.2.8)$$

et en appliquant $\mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha}$ sur l'équation (2.2.8), et d'après la proposition (1.2.1) on obtint :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U_0(t) &= c_0 \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} t^{\alpha-1} + \mathcal{I}_{0t}^{\alpha} h_0 \\ &= c_0 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha+\alpha)} t^{1-\alpha+\alpha-1} + \mathcal{I}_{0t}^{\alpha} h_0 \\ &= c_0 \Gamma(\alpha) + \mathcal{I}_{0t}^{\alpha} h_0. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U_0(t) |_{t=0} = c_0 \Gamma(\alpha) = v_0, \Rightarrow c_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} v_0.$$

et on a :

$$\begin{aligned}
U_0(T) &= c_0 T^{\alpha-1} + \mathcal{I}_{0t}^\alpha h_0 \\
&= c_0 T^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} h_0 d\tau \\
&= c_0 T^{\alpha-1} + h_0 \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha \\
&= w_0.
\end{aligned}$$

Alors

$$h_0 = (w_0 - c_0 T^{\alpha-1}) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha} = (w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha}.$$

$$\begin{aligned}
U_0(t) &= c_0 t^{\alpha-1} t^{\alpha-1} + \mathcal{I}_{0t}^\alpha h_0 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} h_0 d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\alpha-1} + \frac{h_0}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\alpha-1} + (w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0) \left(\frac{t}{T}\right)^\alpha.
\end{aligned}$$

2. Pour $n \geq 1$ on obtient :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_{0t}^\alpha U(t) + \lambda U_n(t) = h_n, & 0 < t < T, \\ \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U_n(T) |_{t=0} = v_n, \\ U_n(T) = w_n. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

d'après le théorème (1.3.1) pour $0 < \alpha \leq 1$, on a le problème (2.2.9) admet une solution sous forme

$$\begin{aligned}
U_n(t) &= v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-\tau)^\alpha) h_n d\tau \\
&= v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k (t-\tau)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} h_n d\tau \\
&= v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^t \frac{-\lambda_n^k (t-\tau)^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} h_n d\tau \\
&= v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k (t)^{\alpha k + \alpha}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} h_n \\
&= v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) + t^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k (t)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} h_n \\
&= v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) + t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n t^\alpha) h_n.
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites implique :

$$U(T) = v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n T^\alpha) + T^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha) h_n = w_n$$

Donc

$$h_n = \frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)}$$

$$U_n(t) = v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) + t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n t^\alpha) \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right)$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
U(t, x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\alpha-1} + \left(w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha + \left(v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n t^\alpha) \right) P_n(x) \\
&+ \left(+t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n t^\alpha) \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) \right) P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\alpha-1} + \left(w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n t^\alpha) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(+t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n t^\alpha) \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) \right) P_n(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= \left(w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha} + \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \\
&= \left(w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) P_n(x).
\end{aligned}$$

La convergence de solution

Dans la suite, on va démontré la convergence uniforme des séries apparaissant dans l'expressienci-dessns, et les séries crrespondontes $[(1-x^2)U_x]_x$.

Nous commencone par :

-

$$\begin{aligned}
|U(t, x)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\alpha-1} + \left(w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n t^\alpha) P_n(x) \right. \\
&+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left(+t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n t^\alpha) \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) \right) P_n(x) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\alpha-1} \right| + \left| \left(w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n t^\alpha) P_n(x) \right| \\
&+ \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(+t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n t^\alpha) \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) \right) P_n(x) \right| \\
&\leq c_0 |v_0| + (|w_0| + c_1 |v_0|) + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| + c_3 \sum_{n=1}^{\infty} (|w_n| + c_4 |v_n|).
\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}
|h(x)| &= \left| \left(w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) P_n(x) \right| \\
&\leq \left| \left(w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha} \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) P_n(x) \right| \\
&\leq (|w_0| + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |v_0|) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) P_n(x) \right| \\
&\leq (|w_0| + c_0 |v_0|) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha} + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} (|w_n| + |v_n|).
\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}
|[(1-x^2)U_x]_x| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) n(n+1) P_n(x) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left(+t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n t^\alpha) \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) \right) P_n(x) \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) n(n+1) P_n(x) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left(+t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n t^\alpha) \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha)} \right) \right) P_n(x) \right| \\
&\leq c_1 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) |v_n| + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (|w_n| + c_3 |v_n|).
\end{aligned}$$

Le convergence des séries dépend de l'estimations de v_n et w_n ,

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 v(x) P_n(x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(x) (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) dx,
\end{aligned}$$

on intègre par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
v_n &= [v(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x) (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x) (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|v_n| &= \left| -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x) (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |v'(x) (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))| dx
\end{aligned}$$

en utilisant l'ingalite de Cauchy Schwarz et $\|P_n(x)\|^2$ il vient :

$$\begin{aligned}
|v_n| &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |v'(x)| (|P_{n+1}(x)| + |P_{n-1}(x)|) \\
&\leq \frac{1}{2} \|v'(x)\| (\|P_{n+1}(x)\| + \|P_{n-1}(x)\|) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \|v'(x)\| \left(\frac{\sqrt{2}}{(2n+3)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&\leq \frac{\|v'(x)\| \sqrt{2}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

En répétant le processus ci-dessus une fois de plus, on obtient :

$$|v_n| \leq \frac{4\sqrt{2}}{(2n-3)^{\frac{3}{2}}} \|v''(x)\|.$$

On trouve finalement la convergence uniforme de la solution pour $v, w \in C^3([-1, 1])$ et $v^4, w^4 \in L([-1, 1])$. \square

2.2.2 L'unicité de la Solution

Soient $\{U_1(t, x), h_1(x)\}$, $\{U_2(t, x), h_2(x)\}$ deux ensembles de solution du Problème (2.2.1), posant $U = U_1 - U_2$, $h = h_1 - h_2$, il vient :

$$\begin{cases} {}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x) & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U(t, x)|_{t=0} = 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = 0, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

d'après le théorème(2.2.2) le problème (2.2.10) admet le ensembles de solution $\{U(t, x), h(x)\}$

$$U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x), \quad (2.2.11)$$

Mais d'après (1.1.3) on obtient :

$$U_n(t) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 U(t, x) P_n(x) dx. \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.12)$$

$$h_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 h(x) P_n(x) dx. \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.13)$$

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U_n(t)|_{t=0} = 0, \\ U_n(T) = 0, \end{cases} \quad , n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.14)$$

En appliquant ${}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha$ sur l'équation (2.2.12) on obtint :

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_0(t) &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) {}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) ([(1-x^2)U_x]_x + h(x)) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) [(1-x^2)U_x]_x dx + \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) h(x) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) [(1-x^2)U_x]_x dx + h_n, \end{aligned}$$

on intègre par parties deux fois on trouve :

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U_0(t) &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 [(1-x^2)P_n'(x)]' U(t, x) dx + h_n \\ &= -\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 n(n+1)U(t, x) P_n(x) dx + h_n \\ &= -n(n+1)U_n(t) + h_n. \end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème(1.3.1) et la condition (3.2.13) on obtient :

$$U_n(t) = 0, \quad h_n = 0$$

et comme $P_n(x)$ est système complet sur $[-1, 1]$, alors

$$U(t, x) \equiv 0, \quad h(x) \equiv 0$$

2.2.3 Exemple

Exemple 2.2.1. Soit le Problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, 1[\times]-1, 1[, \\ \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U(t, x)|_{t=0} = 1+x, & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = 3x^2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.2.15)$$

On a

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n P_n(x) \\ &= v_0 P_0(x) + v_1 P_1(x) + v_2 P_2(x) + \dots \\ &= v_0 + v_1 x + \frac{v_2}{2} (3x^2 - 1) \dots = 1 + x. \end{aligned}$$

Alors $v_0 = 1, v_1 = 1$ et $v_n = 0, \forall n \geq 2$.

Et

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n P_n(x) \\ &= w_0 P_0(x) + w_1 P_1(x) + w_2 P_2(x) + \dots \\ &= w_0 + w_1 x + \frac{w_2}{2} (3x^2 - 1) \dots = 3x^2. \end{aligned}$$

Alors $w_0 = 1, w_1 = 0$ et $w_2 = 2, w_n = 0, \forall n \geq 3$.

d'après le théorème (2.2.1) le Problème (2.2.15) admet l'ensemble de solution $\{U(t, x), h(x)\}$, et on a :

$$\begin{aligned} U(t, x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\alpha-1} + \left(w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \left(\frac{t}{T} \right)^{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n t^{\alpha}) P_n(x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(t^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n t^{\alpha}) \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^{\alpha})}{T^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^{\alpha})} \right) \right) P_n(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \left(1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right) (t)^{\alpha} + x t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-2t^{\alpha}) - t^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1}(-2t^{\alpha}) \left(\frac{x E_{\alpha, \alpha}(-2)}{E_{\alpha, \alpha+1}(-2)} \right) \\ &+ t^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1}(-6t^{\alpha}) \left(\frac{(3x^2 - 1) E_{\alpha, \alpha}(-6)}{E_{\alpha, \alpha+1}(-6)} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(w_0 - \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{T^{\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w_n - v_n T^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^{\alpha})}{T^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^{\alpha})} \right) P_n(x) \\ &= -\frac{x E_{\alpha, \alpha}(-2)}{E_{\alpha, \alpha+1}(-2)} + \frac{(3x^2 - 1) E_{\alpha, \alpha}(-6)}{E_{\alpha, \alpha+1}(-6)}. \end{aligned}$$

PROBLÈME INVERSE POUR EDPs AU SENS DE DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE GÉNÉRALISÉ

Dans ce chapitre, on va généraliser la solution du Problème inverses pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires généralisé,

1. Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires, au sens de Caputo-Katugampola s'écrivent comme :

$$\begin{cases} {}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha}U(t, x) = [(1 - x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ U(0, x) = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires, au sens de de Katugampola s'écrivent comme :

$$\begin{cases} {}^K\mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho}U(t, x) = [(1 - x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha, \rho}U(t, x) |_{t=0} = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Où ${}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho}U(t, x)$, ${}^K\mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho}U(t, x)$ est la dérivées partielles fractionnaires de Caputo-Katugampola et Katugampola d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) et $\rho > 0$ respectivement de $U(t, x)$, $\mathcal{I}^{1-\alpha, \rho}U(t, x)$ est l'intégral fractionnaire de Katugampola d'ordre $1 - \alpha$ de $U(t, x)$, $\rho > 0$ et $v(x)$, $w(x)$ deux fonctions données .

On applique la method de séparation de variables pour obtenir la solution explicite sous forme d'une série de polynome de Legendre.

3.1 Problème avec la dérivée de Caputo-Katugampola

Dans cette section, on va étudier l'existence, convergence et l'unicité de la solution du Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires au sens de Caputo-Katugampola de la forme suivant :

$$\begin{cases} {}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho}U(t,x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t,x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ U(0,x) = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T,x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Où ${}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho}U(t,x)$ est la dérivée partielle fractionnaire de Caputo-Katugampola d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) et $\rho > 0$, $v(x)$ et $w(x)$ deux fonctions données.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. Soit $v, w \in C^3([-1, 1])$ et $v^4, w^4 \in L_2([-1, 1])$, alors il existe une solution unique du Problème (3.1.1) donnée :

$$U(t,x) = v(x) + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T}\right)^{\alpha\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha}\right)}{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha}\right)} (w_n - v_n) P_n(x). \quad (3.1.2)$$

$$h(x) = (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{T^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha}} + \frac{d}{dx} [(1-x^2)v'(x)] + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{w_n - v_n}{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha}\right)}\right) P_n(x). \quad (3.1.3)$$

avec $\lambda_n = n(n+1)$ et

$$v_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 v(x) P_n(x), \quad w_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 w(x) P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3.1.1 L'existence de la solution

Théorème 3.1.2. Le Problème (3.1.1) admet l'ensemble de solution $\{U(t,x), h(x)\}$ données par :

$$U(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x), \quad (3.1.4)$$

où $U_n(t)$ est fonction à déterminer, $P_n(x)$ polynôme de Legendre et h_n est constant.

Démonstration. On cherche la solution de Problème (3.1.1) sous forme :

$$\left\{ U(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x) \right\}$$

Alors $\{U(t,x), h(x)\}$ est vérifiée l'équation (3.1.1), C-à-d

$$\begin{cases} {}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho}U(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) {}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho}U_n(t), \\ [(1-x^2)U_x]_x = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)P_n''(x)U_n(t) - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)U_n(t). \end{cases}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) {}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho}U_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)P_n''(x)U_n(t) - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)U_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x),$$

on obtient

$$P_n(x) {}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho}U_n(t) = (1-x^2)P_n''(x)U_n(t) - 2xP_n'(x)U_n(t) + h_n P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et comme $P_n(x)$ est solution de l'équation de Legendre on a :

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) = -\lambda_n P_n(x),$$

on obtient :

$$P_n(x)^{C-K} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho} U_n(t) = -\lambda_n U_n(t) + h_n P_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$$

alors

$${}^C \mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho} U_n(t) + \lambda_n U_n(t) = h_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.5)$$

et d'autre part on a :

$$\begin{cases} U(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(0) P_n(x) = v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n P_n(x), \\ U(T, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(T) P_n(x) = W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n P_n(x). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_n(0) = v_n, \\ U_n(T) = w_n. \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.6)$$

On recherche $U_n(t)$

1. Pour $n = 0$ on obtient :

$$\begin{cases} {}^{C-K} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho} U_0(t) = h_0, & 0 < t < T, \\ U_0(0) = v_0, \\ U_0(T) = w_0. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

En appliquant $\mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho}$ sur l'équation (3.2.7), on obtient :

$$\mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho} {}^{C-K} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho} U_0(t) = \mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho} h_0,$$

D'après le lemme pour $0 < \alpha \leq 1$, ($n = [\alpha] + 1 = 1$) on a :

$$\mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho} {}^{C-K} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho} U_0(t) = U_0(t) - c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

donc

$$U_0(t) - c_0 = \mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho} h_0, \Rightarrow U_0(t) = c_0 + \mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho} h_0.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (3.2.7), est :

$$U_0(t) = c_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} h_0 \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}.$$

Les conditions aux limites implique :

$$U_0(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = v_0$$

et on a :

$$U_0(T) = c_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left(\frac{T^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} h_0 \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} = w_0 \Rightarrow h_0 = (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha}$$

Alors

$$U_0(t) = v_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} h_0 \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} = v_0 + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^{\alpha\rho}.$$

2. Pour $n \geq 1$ on obtient :

$$\begin{cases} {}^{C-K} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho} U(t) + \lambda U_n(t) = h_n, & 0 < t < T, \\ U_n(0) = v_n, \\ U_n(T) = w_n. \end{cases} \quad (3.1.8)$$

D'après le théorème (1.5.4) pour $0 < \alpha \leq 1$, alor le preblème (3.1.8) admet une solution sous forme

$$\begin{aligned}
U_n(t) &= v_n E_\alpha \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) + \int_0^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) h_n \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \\
&= v_n E_\alpha \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) + \int_0^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} h_n \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \\
&= v_n E_\alpha \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^t \frac{-\lambda_n^k \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} h_n \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \\
&= v_n E_\alpha \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{\alpha k + \alpha}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} h_n \\
&= v_n E_\alpha \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) + \frac{-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha}{-\lambda_n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} h_n \\
&= v_n E_\alpha(z) - \frac{h_n}{\lambda_n} z E_{\alpha,\alpha+1}(z), \left(z = -\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \\
&= v_n E_\alpha(z) - \frac{h_n}{\lambda_n} (E_\alpha(z) - 1) = c_n E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) + \frac{h_n}{\lambda_n}.
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites implique :

$$\begin{cases} U_n(0) = c_n + \frac{h_n}{\lambda_n} = v_n, \\ U_n(T) = c_n E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) + \frac{h_n}{\lambda_n} = w_n. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_n = \frac{v_n - w_n}{1 - E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}, \\ h_n = \lambda_n (v_n - c), \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

donc

$$\begin{aligned}
U_n(t) &= \frac{(v_n - w_n) E_\alpha \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}{1 - E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} + \frac{w_n - v_n}{1 - E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} + v_n \\
&= \frac{1 - E_\alpha \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}{1 - E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} (w_n - v_n) + v_n, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
U(t, x) &= v_0 + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^{\alpha\rho} + \left(\frac{1 - E_\alpha \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}{1 - E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} (w_n - v_n) + v_n \right) P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \\
&= v(x) + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^{\alpha\rho} + \frac{1 - E_\alpha \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}{1 - E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} (w_n - v_n) P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \\
&= v(x) + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^{\alpha\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - E_\alpha \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}{1 - E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} (w_n - v_n) P_n(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha} + \lambda_n \left(v_n + \frac{w_n - v_n}{1 - E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} \right) P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \\
&= (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha} + \lambda_n v_n P_n(x) + \lambda_n \left(\frac{w_n - v_n}{1 - E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} \right) P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \\
&= (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha} + \frac{d}{dx} [(1 - x^2)v'(x)] + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{w_n - v_n}{1 - E_\alpha \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} \right) P_n(x).
\end{aligned}$$

La convergence de la solution

Dans la suite, on va démontré la convergence uniforme des séries apparaissant dans l'expressienci-dessns, et les séries crrespondontes $[(1-x^2)U_x]_x$ et ${}^C D^{\alpha,\rho}U(t,x)$.

Nous commencone par :

$$\begin{aligned} |U(t,x)| &= \left| v(x) + (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^{\alpha\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)}{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)} (w_n - v_n) P_n(x) \right| \\ &\leq |v(x)| + \left| (w_0 - v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^{\alpha\rho} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)}{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)} \right| |(w_n - v_n)| |P_n(x)| \\ &\leq |v(x)| + |w_0| + |v_0| + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} (|w_n| + |v_n|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |h(x)| &= \left| (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha}} + \frac{d}{dx} [(1-x^2)v'(x)] + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{w_n - v_n}{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)} \right) P_n(x) \right| \\ &\leq \left| (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha}} \right| + \left| \frac{d}{dx} [(1-x^2)v'(x)] \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \lambda_n \left(\frac{w_n - v_n}{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)} \right) \right| |P_n(x)| \\ &\leq (|w_0| + |v_0|) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha}} + \left| \frac{d}{dx} [(1-x^2)v'(x)] \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{|w_n| + |v_n|}{\left| 1 - E_{\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right) \right|} \right) |P_n(x)| \\ &\leq (|w_0| + |v_0|) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha}} + \left| [(1-x^2)v'(x)]' \right| + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) |w_n| + |v_n| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |{}^{C-K} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho} U(t,x)| &= \left| \frac{\rho^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{T^{\alpha\rho}} (w_0 - v_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{\alpha-1} n(n+1) E_{\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)}{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)} (w_n - v_n) P_n(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{\rho^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{T^{\alpha\rho}} (w_0 - v_0) \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\rho^{\alpha-1} n(n+1) E_{\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)}{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)} \right| |(w_n - v_n)| |P_n(x)| \\ &\leq \frac{\rho^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha}} (|w_0| + |v_0|) + C_3 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (|w_n| + |v_n|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |[(1-x^2)U_x]_x| &= \left| [(1-x^2)v'(x)]' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)}{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)} (n(n+1))(w_n - v_n) P_n(x) \right| \\ &\leq \left| [(1-x^2)v'(x)]' \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)}{1 - E_{\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)} \right| |(n(n+1))(w_n - v_n)| |P_n(x)| \\ &\leq \left| [(1-x^2)v'(x)]' \right| + C_4 \sum_{n=1}^{\infty} (n(n+1)) (|w_n| + |v_n|) \end{aligned}$$

Le convergence des séries dépend de l'estimations de v_n et w_n ,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 v(x) P_n(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(x) (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) dx \end{aligned}$$

on intègre par parties on obtient :

$$\begin{aligned} v_n &= [v(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))dx \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |v_n| &= \left| -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))| dx \end{aligned}$$

en utilisant l'ingalite de Cauchy Schwarz et $\|P_n(x)\|^2$ il vient :

$$\begin{aligned} |v_n| &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |v'(x)| (|P_{n+1}(x)| + |P_{n-1}(x)|) \\ &\leq \frac{1}{2} \|v'(x)\| (\|P_{n+1}(x)\| + \|P_{n-1}(x)\|) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|v'(x)\| \left(\frac{\sqrt{2}}{(2n+3)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &\leq \frac{\|v'(x)\| \sqrt{2}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

En répétant le procone ci-dessus plus de temps, on obtient :

$$|v_n| \leq \frac{4\sqrt{2}}{(2n-3)^{\frac{3}{2}}} \|v''(x)\|$$

On trouve finalement la convergence uniforme de la solution pour $v, w \in C^3([-1, 1])$ et $v^4, w^4 \in L([-1, 1])$.

□

3.1.2 L'unicite de la Solution

Soient $\{U_1(t, x), h_1(x)\}, \{U_2(t, x), h_2(x)\}$ deux ensembles du solitions de le Problème (2.1.1), En posant $U = U_1 - U_2, h = h_1 - h_2$, il vient :

$$\begin{cases} {}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ U(0, x) = 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = 0, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

D'après le théorème (3.1.2) le préblème (3.1.9) admet l'ensemble de solution $\{U(t, x), h(x)\}$ sous forme :

$$U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x), \quad (3.1.10)$$

Mais D'après (1.1.3) on obtient :

$$U_n(t) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 U(t, x) P_n(x) dx. \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.11)$$

$$h_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 h(x) P_n(x) dx. \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.12)$$

$$\begin{cases} U_n(0) = 0, \\ U_n(T) = 0, \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.13)$$

En appliquant ${}^C D_{0+}^{\alpha, \rho}$ sur l'équation (3.1.11) on obtint :

$$\begin{aligned} {}^C D_{0+}^{\alpha, \rho} U_0(t) &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) {}^C D_{0+}^{\alpha, \rho} U(t, x) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) \left([(1-x^2)U_x]_x + h(x) \right) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) [(1-x^2)U_x]_x dx + \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) h(x) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) [(1-x^2)U_x]_x dx + h_n, \end{aligned}$$

on intègre par parties deux fois on trouve :

$$\begin{aligned} {}^C D_{0+}^{\alpha, \rho} U_0(t) &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 [(1-x^2)P_n'(x)]' U(t, x) dx + h_n \\ &= -\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 n(n+1)U(t, x)P_n(x) dx + h_n \\ &= -n(n+1)U_n(t) + h_n. \end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème(1.5.4) et les condition (3.1.13) on obtient :

$$U_n(t) = 0, \quad h_n = 0$$

et comme $P_n(x)$ est système comble sur $[-1, 1]$, alors

$$U(t, x) \equiv 0, \quad h(x) \equiv 0.$$

3.1.3 Exemple

Exemple 3.1.1. Soit le Problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{C-K} D_{0+}^{\alpha, \rho} U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, 1[\times]-1, 1[, \\ U(0, x) = 1+x, & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = 3x^2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.1.14)$$

On a

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n P_n(x) \\ &= v_0 P_0(x) + v_1 P_1(x) + v_2 P_2(x) + \dots \\ &= v_0 + v_1 x + \frac{v_2}{2} (3x^2 - 1) \dots = 1+x. \end{aligned}$$

Alors $v_0 = 1, v_1 = 1$ et $v_n = 0, \forall n \geq 2$.

Et

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n P_n(x) \\ &= w_0 P_0(x) + w_1 P_1(x) + w_2 P_2(x) + \dots \\ &= w_0 + w_1 x + \frac{w_2}{2} (3x^2 - 1) \dots = 3x^2. \end{aligned}$$

Alors $w_0 = 1, w_1 = 0$ et $w_2 = 2, w_n = 0, \forall n \geq 3$.

D'après le théorème (3.1.1), pour $\rho = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
U(t, x) &= v(x) + (w_0 - v_0)(t)^{\alpha\rho} + \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_1 \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_1 \left(\frac{1}{\rho}\right)^\alpha)} (w_1 - v_1)P_1(x) \\
&\quad + \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_2 \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_2 \left(\frac{1}{\rho}\right)^\alpha)} (w_2 - v_2)P_2(x) \\
&= v(x) + \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_1 \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_1 \left(\frac{1}{\rho}\right)^\alpha)} w_1 P_1(x) + \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_2 t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\lambda_2 \left(\frac{1}{\rho}\right)^\alpha)} w_2 P_2(x) \\
&= 1 + x + \frac{1 - E_\alpha(-2t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-2)} x + \frac{1 - E_\alpha(-6t^\alpha)}{1 - E_\alpha(-6)} (3x^2 - 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= (w_0 - v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)^\alpha} + \frac{d}{dx} [(1 - x^2)v'(x)] + \lambda_1 \left(\frac{w_1 - v_1}{1 - E_\alpha(-\lambda_1 \left(\frac{1}{\rho}\right)^\alpha)} \right) P_1(x) \\
&\quad + \lambda_2 \left(\frac{w_2 - v_2}{1 - E_\alpha(-\lambda_2 \left(\frac{1}{\rho}\right)^\alpha)} \right) P_2(x) \\
&= \frac{d}{dx} [(1 - x^2)v'(x)] + \lambda_1 \left(\frac{w_1 - v_1}{1 - E_\alpha(-\lambda_1 \left(\frac{1}{\rho}\right)^\alpha)} \right) P_1(x) + \lambda_2 \left(\frac{w_2 - v_2}{1 - E_\alpha(-\lambda_2 \left(\frac{1}{\rho}\right)^\alpha)} \right) P_2(x) \\
&= -2x - \frac{2x}{1 - E_\alpha(-2)} + \frac{18x^2 - 6}{1 - E_\alpha(-6)}.
\end{aligned}$$

3.2 Problème avec la dérivée de Katugampola

Dans cette section, on va étudier l'existence, convergence et l'unicité de solution du Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires au sens de Katugampola de la forme suivante :

$$\begin{cases}
{}^K \mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U(t, x) = [(1 - x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\
\mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha, \rho} U(t, x) |_{t=0} = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\
U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1.
\end{cases} \quad (3.2.1)$$

où ${}^K \mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho}$ est la dérivée partielle fractionnaire de Katugampola d'ordre α ($0 < \alpha < 1$), $\mathcal{I}^{1-\alpha, \rho} U(t, x)$ est l'intégral fractionnaire de Katugampola d'ordre $1 - \alpha$ et ($0 < \alpha < 1$) et $\rho > 0$ et $v(x)$, $w(x)$ deux fonctions données.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. Soit $v, w \in C^3([-1, 1])$ et $v^4, w^4 \in L_2([-1, 1])$, alors il existe une solution unique de Problème (3.1.1) donnée :

$$\begin{aligned}
U(t, x) &= \frac{1}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\rho(\alpha-1)} + (w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0) \left(\frac{t}{T}\right)^{\rho\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) P_n(x) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\rho\alpha} E_{\alpha, \alpha+1} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha E_{\alpha, \alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)} \right) \right) P_n(x). \quad (3.2.2)
\end{aligned}$$

$$h(x) = (w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\rho^{1-\alpha} T^{\rho\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha E_{\alpha, \alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)} \right) P_n(x). \quad (3.2.3)$$

avec $\lambda_n = n(n+1)$ et

$$v_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 v(x) P_n(x), \quad w_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 w(x) P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3.2.1 L'existence de la solution

Théorème 3.2.2. Le Problème (3.2.1) admet l'ensemble de solution $\{U(t, x), h(x)\}$ donnée par :

$$U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x), \quad (3.2.4)$$

où $U_n(t)$ est fonction à déterminer, $P_n(x)$ polynôme de Legendre et h_n est constant.

Démonstration. On cherche la solution du Problème (3.2.1), sous forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), \\ h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x) \end{array} \right\}$$

Alors $\{U(t, x), h(x)\}$ est vérifie l'équation (3.2.1), C-à-d

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^K \mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) {}^K \mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U_n(t), \\ [(1-x^2)U_x]_x = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2) P_n''(x) U_n(t) - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) U_n(t). \end{array} \right.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) {}^K \mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2) P_n''(x) U_n(t) - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) U_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x),$$

on obtient

$$P_n(x) {}^K \mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U_n(t) = (1-x^2) P_n''(x) U_n(t) - 2x P_n'(x) U_n(t) + h_n P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et comme $P_n(x)$ est solution de l'équation de Legendre on a :

$$(1-x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) = -\lambda_n P_n(x)$$

on obtient :

$$P_n(x) {}^K \mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U_n(t) = -\lambda_n U_n(t) + h_n P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

alors

$${}^K \mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U_n(t) + \lambda_n U_n(t) = h_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.5)$$

et d'autre part on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}^{1-\alpha, \rho} U(t, x) |_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}^{1-\alpha, \rho} U_n(t) |_{t=0} P_n(x) = v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n P_n(x), \\ U(T, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(T) P_n(x) = W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n P_n(x) \end{array} \right.$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}^{1-\alpha, \rho} U_n(t) |_{t=0} = v_n, \\ U_n(T) = w_n. \end{array} \right. \quad , n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.6)$$

On cherche $U_n(t)$

1. Pour $n = 0$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^K \mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U_0(t) = h_0, \quad 0 < t < T, \\ \mathcal{I} U_0(t) |_{t=0} = v_0, \\ U_0(T) = w_0. \end{array} \right. \quad (3.2.7)$$

En appliquant $\mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho}$ sur l'équation (3.2.7) on obtint :

$$\mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho K} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho} U_0(t) = \mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho} h_0,$$

D'après le lemme (1.5.1) on a

$$\mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho K} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho} U_0(t) = U_0(t) - c_0 t^{\rho(1-\alpha)}, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

donc

$$U_0(t) - c_0 t^{\rho(\alpha-1)} = \mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho} h_0, \Rightarrow U_0(t) = c_0 t^{\rho(\alpha-1)} + \mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho} h_0.$$

et on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{1-\alpha,\rho} U_0(t) &= c_0 \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha,\rho} t^{\rho(\alpha-1)} + \mathcal{I}_{0t}^{1,\rho} h_0 \\ &= c_0 \frac{\rho^{-\alpha} \Gamma(1 + \alpha - 1)}{\Gamma(1 + 1 - \alpha + \alpha - 1)} t^{\rho(1-\alpha) + \rho(\alpha-1)} + \mathcal{I}_{0t}^{1,\rho} h_0 \\ &= c_0 \rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha) + \mathcal{I}_{0t}^{1,\rho} h_0. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} U_0(t) |_{t=0} = c_0 \rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha) = v_0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0.$$

et on a :

$$\begin{aligned} U_0(T) &= c_0 T^{\rho(\alpha-1)} + \mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho} h_0 \\ &= c_0 T^{\rho(\alpha-1)} + \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} h_0 \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \\ &= c_0 T^{\rho(\alpha-1)} + h_0 \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} T^{\rho\alpha} \\ &= w_0. \end{aligned}$$

Alors

$$h_0 = (w_0 - c_0 T^{\rho(\alpha-1)}) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\rho^{1-\alpha} T^{\rho\alpha}} = (w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\rho^{1-\alpha} T^{\rho\alpha}}.$$

$$\begin{aligned} U_0(t) &= c_0 t^{\rho(\alpha-1)} + \mathcal{I}_{0t}^{\alpha,\rho} h_0 \\ &= \frac{1}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0 t^{\rho(\alpha-1)} + \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} h_0 \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \\ &= \frac{1}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0 t^{\rho(\alpha-1)} + \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\rho\alpha} \\ &= \frac{1}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0 t^{\rho(\alpha-1)} + (w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0) \left(\frac{t}{T} \right)^{\rho\alpha}. \end{aligned}$$

2. Pour $n \geq 1$ on obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0t}^{\alpha,\rho} U(t) + \lambda U_n(t) = h_n, & 0 < t < T, \\ \mathcal{I}^{1-\alpha,\rho} U_n(t) |_{t=0} = v_n, \\ U_n(T) = w_n. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

D'après le théorème (1.5.2) pour $0 < \alpha \leq 1$, alors le problème (3.2.8) admet une solution sous forme

$$\begin{aligned}
U_n(t) &= v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) + \int_0^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) h_n \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \\
&= v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) + \int_0^t \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} h_n \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \\
&= v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^t \frac{-\lambda_n^k \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho}\right)^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} h_n \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \\
&= v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha k + \alpha}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} h_n \\
&= v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) + \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\lambda_n^k \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} h_n \\
&= v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(z) + \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(z) h_n, \quad \left(z = -\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites implique

$$U_n(T) = v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) + \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) h_n = w_n$$

Donc

$$h_n = \frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}.$$

$$U_n(t) = v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) + \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}\right)$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
U(t, x) &= \frac{1}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0 t^{\rho(\alpha-1)} + \left(w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0\right) \left(\frac{t}{T}\right)^{\rho\alpha} + v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) P_n(x) \\
&\quad + \left(\left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\rho\alpha} E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}\right)\right) P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \\
&= \frac{1}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0 t^{\rho(\alpha-1)} + \left(w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0\right) \left(\frac{t}{T}\right)^{\rho\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) P_n(x) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{\rho\alpha} E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right) \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}\right)\right) P_n(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= \left(w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0\right) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\rho^{1-\alpha} T^{\rho\alpha}} + \frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}, \quad n = 1, 2, \dots \\
&= \left(w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)} v_0\right) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\rho^{1-\alpha} T^{\rho\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right)}\right) P_n(x).
\end{aligned}$$

La convergence de la solution

Dans la suite, on va démontrer la convergence uniforme des séries apparaissant dans l'expressienci-dessns et les séries crrespondontes $[(1-x^2)U_x]_x$ et ${}^K D^{\alpha,\rho}U(t,x)$.

Nous commencone par :

$$\begin{aligned}
 U(t,x) &= \left| \frac{1}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\rho(\alpha-1)} + \left(w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \left(\frac{t}{T} \right)^{\rho\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) P_n(x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{\rho\alpha} E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} \right) \right) P_n(x) \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\rho(\alpha-1)} \right| + \left| \left(w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \left(\frac{t}{T} \right)^{\rho\alpha} \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) P_n(x) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{\rho\alpha} E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} \right) \right) P_n(x) \right| \\
 &\leq c_0 |v_0| + (|w_0| + c_1 |v_n|) + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| + c_3 \sum_{n=1}^{\infty} (|w_n| + c_4 |v_n|).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \left| \left(w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\rho^{1-\alpha} T^{\rho\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} \right) P_n(x) \right| \\
 &\leq \left| \left(w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\rho^{1-\alpha} T^{\rho\alpha}} \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} \right) P_n(x) \right| \\
 &\leq (|w_0| + |c_0| |v_0|) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\rho^{1-\alpha} T^{\rho\alpha}} c_1 \sum_{n=1}^{\infty} (|w_n| + c_2 |v_n|).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |[(1-x^2)U_x]_x| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) n(n+1) P_n(x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{\rho\alpha} E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} \right) \right) n(n+1) P_n(x) \right| \\
 &\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) n(n+1) P_n(x) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{\rho\alpha} E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)}{\left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)} \right) \right) n(n+1) P_n(x) \right| \\
 &\leq c_0 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) |v_n| + c_1 \sum_n n(n+1) (|w_n| + c_2 |v_n|).
 \end{aligned}$$

Le convergence des séries dépend de l'estimations de v_n et w_n ,

$$\begin{aligned}
 v_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 v(x) P_n(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(x) (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) dx
 \end{aligned}$$

on intègre par parties on obtient :

$$\begin{aligned} v_n &= [v(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))dx \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |v_n| &= \left| -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |v'(x)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))| dx \end{aligned}$$

en utilisant l'ingalite de Cauchy Schwarz et $\|P_n(x)\|^2$ il vient :

$$\begin{aligned} |v_n| &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |v'(x)| (|P_{n+1}(x)| + |P_{n-1}(x)|) \\ &\leq \frac{1}{2} \|v'(x)\| (\|P_{n+1}(x)\| + \|P_{n-1}(x)\|)dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|v'(x)\| \left(\frac{\sqrt{2}}{(2n+3)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &\leq \frac{\|v'(x)\| \sqrt{2}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

En répétant le procone ci-dessus plus de temps, on obtient

$$|v_n| \leq \frac{4\sqrt{2}}{(2n-3)^{\frac{3}{2}}} \|v''(x)\|$$

On trouve finalement la convergence uniforeme de la solution pour $v, w \in C^3([-1, 1])$ et $v^4, w^4 \in L([-1, 1])$. \square

3.2.2 L'unicite de la Solution

Soient $\{U_1(t, x), h_1(x)\}, \{U_2(t, x), h_2(x)\}$ deux ensembles du solition de le Problème (3.2.1), posant $U = U_1 - U_2, h = h_1 - h_2$, il vient :

$$\begin{cases} {}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[\\ I_0^{1-\alpha, \rho} U(t, x) |_{t=0} = 0, & -1 \leq x \leq 1 \\ U(T, x) = 0, & -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

D'après le théorème (3.2.1) le problème (3.2.9) admet l'ensemble de solution $\{U(t, x), h(x)\}$, sous forme :

$$U(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) P_n(x), h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(x), \quad (3.2.10)$$

Mais D'après (1.1.3) on a :

$$U_n(t) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 U(t, x) P_n(x) dx. \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.11)$$

$$h_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 h(x) P_n(x) dx. \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.12)$$

$$\begin{cases} I_0^{1-\alpha, \rho} U_n(t) |_{t=0} = 0 \\ U_n(T) = 0 \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.13)$$

En appliquant ${}^{RL}D_{0^+}^{\alpha,\rho}$ sur l'équation (3.2.11) on obtint :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{0^+}^{\alpha,\rho}U_n(t) &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) {}^{RL}D_{0^+}^{\alpha,\rho}U(t,x) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) \left([(1-x^2)U_x]_x + h(x) \right) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) [(1-x^2)U_x]_x dx + \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) h(x) dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) [(1-x^2)U_x]_x dx + h_n \end{aligned}$$

on intègre par parties deux fois on trouve :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{0^+}^{\alpha,\rho}U_n(t) &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 [(1-x^2)P_n'(x)]' U(t,x) dx + h_n \\ &= -\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 n(n+1)U(t,x)P_n(x) dx + h_n \\ &= -n(n+1)U_n(t) + h_n \end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème (1.5.2) et la condition (3.2.13) on obtient :

$$U_n(t) = 0, \quad h_n = 0$$

et comme $P_n(x)$ est système complet sur $[-1, 1]$, alors

$$U(t,x) \equiv 0, \quad h(x) \equiv 0$$

3.2.3 Exemple

Exemple 3.2.1. Soit le Problème suivant :

$$\begin{cases} {}^K D_{0^+}^{\alpha,\rho}U(t,x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t,x) \in]0, 1[\times]-1, 1[, \\ \mathcal{I}0t^{1-\alpha}U(t,x)|_{t=0} = 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T,x) = 3x^2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.2.14)$$

On a

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n P_n(x) \\ &= v_0 P_0(x) + v_1 P_1(x) + v_2 P_2(x) + \dots \\ &= v_0 + v_1 x + \frac{v_2}{2} (3x^2 - 1) \dots = 1. \end{aligned}$$

Alors $v_0 = 1, v_n = 0, \forall n \geq 1$.

Et

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n P_n(x) \\ &= w_0 P_0(x) + w_1 P_1(x) + w_2 P_2(x) + \dots \\ &= w_0 + v_1 x + \frac{w_2}{2} (3x^2 - 1) \dots = 3x^2. \end{aligned}$$

Alors $w_0 = 1, w_1 = 0$ et $w_2 = 2, v_n = 0, \forall n \geq 3$.

D'après le théorème (3.2.1), pour $\rho = 6$ et $0 < \alpha < 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
U(t, x) &= \frac{1}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0 t^{\rho(\alpha-1)} + \left(w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \left(\frac{t}{T} \right)^{\rho\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\lambda \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right) P_n(x) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\rho\alpha} E_{\alpha, \alpha+1} \left(-\lambda_n \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right) \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)}{\left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)} \right) \right) P_n(x) \\
&= \frac{1}{6^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} t^{6(\alpha-1)} + \left(\frac{t^6}{6} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-2 \left(\frac{t^6}{6} \right)^{\alpha} \right) \\
&+ \left(\frac{t^6}{6} \right)^{6\alpha} E_{\alpha, \alpha+1} \left(-6 \left(\frac{t^6}{6} \right)^{\alpha} \right) \left(\frac{\left(\frac{T^6}{6} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-6 \left(\frac{T^6}{6} \right)^{\alpha} \right)}{\left(\frac{T^6}{6} \right)^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1} \left(-6 \left(\frac{T^6}{6} \right)^{\alpha} \right)} \right) (3x^2 - 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= \left(w_0 - \frac{T^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{-\alpha}\Gamma(\alpha)} v_0 \right) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\rho^{1-\alpha} T^{\rho\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w_n - v_n \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\lambda \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)}{\left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1} \left(-\lambda \left(\frac{T^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right)} \right) P_n(x) \\
&= \frac{\left(\frac{T^6}{6} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-6 \left(\frac{T^6}{6} \right)^{\alpha} \right)}{\left(\frac{T^6}{6} \right)^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1} \left(-6 \left(\frac{T^6}{6} \right)^{\alpha} \right)} (3x^2 - 1).
\end{aligned}$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons généralisé la solution de deux problèmes inverses d'équation aux dérivées partielles fractionnaires.

Ce travail se déroule en deux étapes :

(I) nous avons étudié l'existence, la convergence et l'unicité de solution de deux problèmes inverses,

1. Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires, au sens de Caputo c'est-à-dire comme :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ U(0, x) = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires, au sens de Riemann-Liouville c'est-à-dire comme :

$$\begin{cases} {}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ \mathcal{I}^{1-\alpha} U(t, x) |_{t=0} = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Où ${}^C\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x)$, ${}^{RL}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x)$ est la dérivée partielle fractionnaire de Caputo et Riemann-Liouville d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) de $U(t, x)$, $\mathcal{I}^{1-\alpha}$ est l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $1 - \alpha$ et $v(x)$, $w(x)$ deux fonctions données.

(II) nous avons étudié l'existence, la convergence et l'unicité de solution de deux problèmes inverses d'équation aux dérivées partielles fractionnaires généralisées

1. Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires, au sens de Caputo-Katugambola c'est-à-dire comme :

$$\begin{cases} {}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^\alpha U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ U(0, x) = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. Problème pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires, au sens de Katugambola c'est-à-dire comme :

$$\begin{cases} {}^K\mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U(t, x) = [(1-x^2)U_x]_x + h(x), & (t, x) \in]0, T[\times]-1, 1[, \\ \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha, \rho} U(t, x) |_{t=0} = v(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ U(T, x) = w(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Où ${}^{C-K}\mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U(t, x)$, ${}^K\mathcal{D}_{0t}^{\alpha, \rho} U(t, x)$ est la dérivée partielle fractionnaire de Caputo-Katugambola et Katugambola d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) et $\rho > 0$ de $U(t, x)$, $\mathcal{I}^{1-\alpha, \rho} U(t, x)$ est l'intégral fractionnaire de Katugambola d'ordre $1 - \alpha$ de $U(t, x)$, $\rho > 0$ et $v(x)$, $w(x)$ deux fonctions données.

Bibliographie

- [1] A.A.Kilbas, Hadamard type fractional calculus, *J. Korean Math. Soc.*,38 (2001), 1191â€“1204.
- [2] A.Kilbas, H.M.Srivastava, J.J.Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, North Holland Mathematics Studies 204, (2006).
- [3] Butzer, P. L., Kilbas, A. A., and Trujillo, J.J., Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 269, (2002), 387-400.
- [4] Butzer, P. L., Kilbas, A. A., and Trujillo, J.J., Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 269, (2002), 1-27.
- [5] B.Basti, Y. Arioua , N.Benhamidouche, Existence and Uniqueness of Solutions for Nonlinear Katugampola Fractional Differential Equations , *J. Math. Appl.* 42 (2019), 3561
- [6] B.Basti, Y. Arioua , N. Benhamidouche, Existence results for nonlinear Katugampola fractionnal differential equations with an integral conition
- [7] F.Jarad, T.Abdeljawad, D.Baleanu, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivative, *Adv. Differ. Equ.*, (2012), 2012 :142.
- [8] F.Jarad, T.Abdeljawad, D.Baleanu, On the generalized fractional derivatives and their Caputo modification, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10(5) (2017), 2607â€“2619.
- [9] F.Jarada, T.Abdeljawadb, A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators ,*Nonlinear Analysis* 1 (2018) No. 2, 88â€“98
- [10] Kalashnikov, A. S, The occurrence of singularities in solutions of the nonsteady seepage equation, *Z. Vycisk. Mat. i Mat. Fiz.* 7 (1967), 440.444. (Translated as : *USSR Computational Math. Phys.* 7 (1967), 269-275.
- [11] Kolmogorov, N.A. Petrovsky, I.G. Piskunov, N.S, Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matiÃ¨re et son application Ã un problÃme biologique, *Bulletin Université d'état Ã Moscou (Bjul. Moskowskogo Gos. Univ)*, Série A. 1(1937),1-26.
- [12] N.Al-salti and E.Karimov, Inverse source problème for degenerate time fractional PDE arXiv : 1905.00362v2 (2020).
- [13] Polyanin, A.D. Zaitsev, V.F, *Handbook of Nonlinear Partial Equation*, Chapman Hall/CRC, Boca Raton (2004).
- [14] S.G.Samko, A.A.Kilbas, O.I.Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon, (1993).
- [15] U.N.Katugampola, New approach to generalized fractional integral, *Appl. Math. Comput.*, 218 (2011), 860â€“865.
- [16] U.N.Katugampola, A new approach to generalized fractional derivatives, *Bul. Math. Anal.Appl.*, 6 (2014), 1â€“15.
- [17] U.N.Katugampola, Existence and uniqueness results for a class of generalized fractional differential equations, *Bull. Math. Anal. Appl.*, arXiv :1411.5229v1 (2016).

- [18] Y. Arioua ,B. Basti, N. Benhamidouche , Initial value problem for nonlinear implicit fractional differential equations with Katugampola derivative, *Appl. Math. E-Notes* 19 (2019), 397-412.
- [19] Y.Y.Gambo, F.Jarad, T.Abdeljawad, D.Baleanu, On Caputo modification of the Hadamard fractional derivative, *Adv. Differ. Equ.*, (2014), 2014 :10.
- [20] Y. Arioua, N. Benhamidouche , Boundary value problem for Caputo-Hadamard fractional differential equations, *Surv. Math. Appl.* 12 (2017), 103-115.

Résumé

Dans ce mémoire on a étudié deux problèmes inverse pour l'équation aux dérivée partielles fractionnaire.

On a débuté par des rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce travail.

Le deuxième chapitre voué à étudier l'existence, convergence et l'unicité d'une solution de deux problèmes inverse pour l'équation aux dérivée partielles fractionnaire.

Enfin, le troisième chapitre est destiné à l'existence, convergence et l'unicité d'une solution de deux problèmes inverse pour l'équation aux dérivée partielles fractionnaire généralise. (katugambola, Caputo-Katugambola)

Mots clés: Problème inverse, équation aux dérivée partielles fractionnaire, dérivée fractionnaire généralise.

Abstract

In this work two invers source problems have been studied for time-fractional partial differential equation.

We started with reminders of some fundamental preliminary concepts and tools needed in this work.

The second chapter is devoted to studying the existence, convergence and uniqueness of a strong solution of two invers source problems for time-fractional partial differential equation.

The second chapter is devoted to studying the existence, convergence and uniqueness of a strong solution of two invers source problems for time-fractional partial differential equation with generalized fractional derivative.

Key Words: Inverse source problem, fractional partial deferential equation, generalized fractional derivative.

ملخص

يهدف هذا العمل الى دراسة مسألتين عكسيتين لمعادلات تفاضلية جزئية ذات مشتق كسري.

نبدأ بالتذكير ببعض المفاهيم الأساسية والأولية المهمة المستعملة في هذا العمل.

يتناول الفصل الثاني دراسة وجود، تقارب ووحداية الحل لمسألتين عكسيتين لمعادلات تفاضلية جزئية ذات مشتق كسري.

أخيرا، الفصل الثالث يتناول دراسة وجود، تقارب ووحداية الحل لمسألتين عكسيتين لمعادلة تفاضلية جزئية ذات مشتق كسري معمم.

كلمات مفتاحية: معادلة تفاضلية كسرية، المشتق الكسري، المسألة العكسية.