UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématiques et Numérique

Par

Mouchira Mansour

Sujet

Approches par les splines des équations intégrales de Volterra

Devant le jury :

Mostefa NADIR	Prof. Univ. de M'sila	Président
Noui DJAIDJA	M.A.A. Univ. de M'sila	Encadreur
Bachir GAGUI	M.C.A. Univ. de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant pour m'avoir donné toute cette force et ce courage pour faire aboutir ce travail.

Je tiens à remercier ma encadreur de mémoire Mr Noui DJAIDJA pour m'avoir soutenue et encouragée tout au long de la préparation de cette mémoire. et pour m'avoir inspirée et guidée durant le cheminement de ce travail. Cette mémoire n'aurait pas vu le jour sans sa détermination à mener à bien ce projet.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Mr Mostefa NADIR.

Mr Bachir GAGI.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

DÉDICACES

Je dédie ce travail à mon père qui m'a accompagné et soutenu durant ces années, ma mère qui m'a vraiment encouragé pour terminer ce travail, mon frère Wahid et mes soeurs Houda, Sara, Abir et Manar. Je les remercie pour leurs encouragements durant toute la période d'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction

Les équations intégrales de Volterra apparaissent dans de nombreuses applications scientifiques comme la dynamique des populations, la propagation des épidémies et les dispositifs semi-conducteurs. Volterra a commencé travailler sur les équations intégrales en 1884, mais son étude sérieuse a commencé en 1896. Le nom équation intégrale a été donné par du Bois-Reymond en 1888. Cependant, le nom d'équation intégrale de Volterra a été inventé par Lalesco en 1908.

Ce mémoire est construit de trois chapitres:

Dans le premier chapitre, On commence par une rappels sur les espaces, les opérateur linéaire et notions d'analyse numerique : intégration numérique, les méthodes de quadratures, les splines.

Chapiter II : Présente les équations intégrales on a la classification des équations intégrales linéaires, transformation de l'équation intégrale de Volterra de première espèse a l'équation de Volterra de seconde espèce, liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra, et résolution de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce en utilise les théorèmes du point fixe pour l'éxistence et l'unicité de la solution.

Chapiter III C'est une partie purement pratique, elle met en oeuvre certaines techniques des résolutions des équations intégrales de Volterra de second espéce par les méthodes des splines non polynomiales (linéaire, quadratique et cubique) et la méthode de Simpson modifiée.

Notations

$\|.\|_X$	Est définit une norme sur X.
$\mathcal{C}(K)$	Espace des fonctions continues de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}^k(K)$	Espace des fonctions k fois continûment dérivables de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{L}(E,F)$	Espace des opérateurs linéaires continus de E dans F.
H	Espace de Hilbert.
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire
A	Opérateur linéaire.
A^{-1}	Inverse de l'opérateur linéaire.
I	Opérateur identité
$k(x,t)$	Noyau de l'intégrale.
φ	Fonction inconnue
$\tilde{\varphi}$	Solution approximée
EI	équations intégrales
PVI	problème de valeur initiale.
SM	Méthode de Simpson modifiée.
$SNPL$	spline linéaire non polynomiale.
$SNPQ$	spline quadratique non polynomiale.
$SNPC$	spline cubique non polynomiale.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales et certaines définitions et théorèmes que nous utiliserons dans les autres chapitres.

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps des scalaires. Une application $A : E \to F$ est dite linéaire si pour tout φ et ψ dans E et pour tout scalaires α et β,*

$$A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A\varphi + \beta A\psi \tag{1.1.1}$$

Cette application est appelée aussi opérateur linéaire ou transformation linéaire.

Définition 1.1.2 *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la Propriété suivante Pour toute suite x_n de G converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire*

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0). \tag{1.1.2}$$

Remarque 1.1.1 *un opérateur linéaire A est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G.*

Définition 1.1.3 *Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est dit borné s'il existe une constante $M \geq 0$, telle que*

$$\| A\varphi \| \leq M \| \varphi \| \quad \textit{pour tout } \varphi \in E \tag{1.1.3}$$

Définition 1.1.4 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On définit une norme sur l'espace vectoriel de tout les opérateurs linéaires bornés de E dans F par*

$$\| A \| = \sup_{\|\varphi\|=1} \| A\varphi \| = \sup_{\|\varphi\|\neq 1} \frac{\| A\varphi \|}{\| \varphi \|} \tag{1.1.4}$$

L'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F muni de cette norme est noté par $\mathcal{L}(E, F)$. Si $E = F$, il est noté simplement par $\mathcal{L}(E)$.

Théorème 1.1.1 *Soit A un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. A est borné.
2. A est continu sur E.

Théorème 1.1.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si F est un Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi.*

Preuve. voir [4] ■

Définition 1.1.5 *Deux normes $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_2$ sont dites équivalentes, s'il existe deux constantes α, β telles que $\alpha \| \,.\, \|_1 \leq \| \,.\, \|_2 \leq \beta \| \,.\, \|_1$.*

Proposition 1.1.1 *Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ce résultat, n'est pas vrai en dimension infinie.*

Théorème 1.1.3 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet et par conséquent tout sous espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

1.1.2 Opérateurs intégraux

Définition 1.1.6 *Soit k une fonction mesurable sur $\Omega \times \Omega$. Alors la forme général d'un opérateur intégral linéaire A, dit aussi opérateur à noyau, est formellement donné par l'expression*

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.1.5}$$

$A\varphi$ est défini dés que cette intégrale existe.

Convergence uniforme et convergence ponctuelle

Définition 1.1.7 *Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs dans $\mathcal{L}(E,F)$. On dit que A_n converge uniformément vers un certain $A \in \mathcal{L}(E,F)$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n - A \| = 0.$$

On dit aussi, que A_n converge vers A en norme d'opérateur.

Définition 1.1.8 *Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs dans $\mathcal{L}(E,F)$. On dit que A_n converge ponctuellement vers un certain $A \in \mathcal{L}(E,F)$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n\varphi - A\varphi \| = 0,\ pourtout \varphi \in E$$

Il est facile de vérifier que la convergence uniforme de la suite $\{A_n\}$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ implique la convergence ponctuelle, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Noyau et image d'une application linéaire

Le noyau et l'image d'une application linéaire sont deux espaces vectoriels importants.

Définition 1.1.9 *Soit $A : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E, F. Le noyau de A, noté par $N(A)$ est le sous ensemble de E défini par*

$$N(A) = \{u \in E \mid Au = 0\}. \tag{1.1.6}$$

L'image de A, notée par $R(A)$ est le sous ensemble de F défini par

$$R(A) = \{Au \in F \mid u \in E\}. \tag{1.1.7}$$

Proposition 1.1.2 *Soit $A : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E, F. Le noyau de A est un sous espace vectoriel de E, et l'image de A est un sous espace vectoriel de F. Si E et F sont des espaces vectoriels normés et A est borné, alors le noyau de A est un sous espace fermé.*

Théorème 1.1.4 ***(de l'inverse de Banach)***
Soient E et F deux espaces de Banach et soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et bijectif, alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(E, F)$.

Preuve. voir [4]. ■

1.1.3 Opérateurs compacts

Définition 1.1.10 ***(Ensembles relativement compacts)***
Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G, il existe une sous suite $\left\{u_{n(k)}\right\}$ qui converge dans F

Définition 1.1.11 *Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F. Autrement dit, la fermeture $A(G)$ est compacte.*

Théorème 1.1.5 ***(critère de compacité)***
Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E, la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente de F.

Théorème 1.1.6 *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Théorème 1.1.7 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Théorème 1.1.8 *Soit A un opérateur borné de E dans F, à image $A(E)$ de dimension finie. Alors A est compact.*

Théorème 1.1.9 *L'opérateur identique I de E dans E est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

Théorème 1.1.10 ***(Arzéla-Ascoli)***
Un ensemble $G \subseteq C(K)$ est relativement compact dans $C(K)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées
1. G est équicontinues, i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que $x, y \in K$, $|x - y| < \delta$ implique $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$ pour tout $\varphi \in G$.
2. G est bornée, i.e., il existe M telle que $| \varphi(x) | \leq M$ pour tout $\varphi \in G$. et tout $x \in K$.

Théorème 1.1.11 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Démonstration. voir [10]. ■

1.2 Notions d'analyse numérique

1.2.1 Intégration numérique

Dans les méthodes d'intégration, l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné $[a, b]$ est remplacée par une somme finie. Le choix de la subdivision de l'intervalle d'intégration et celui des coefficients qui interviennent dans la somme approchant l'intégrale sont des critères essentiels pour minimiser l'erreur.

Méthode de quadrature

Méthode de simpson

Formule simple soit f une fonctoin connue aux trois points équidistants de $[a, b]$,

$$x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2} = a + h,\ x_2 = b = a + 2h, \text{ avec } h = \frac{b-a}{2},$$

Alors on obtient

$$I_2 = \int_a^b f(x)dx \ = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]. \tag{1.2.1}$$

C'est la formule simple dite de Simpson.

Formule composite La méthode simple requiert deux intervalles, il semble souhaitable de diviser l'intervalle d'intégration $[a,b]$ en $2n$ sous-intervalles, et d'utiliser la méthode de Simpson simple dans chaque paire de sous-intervalles. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{3}(f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})) \\ &= \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+.... \\ &\quad +2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n}))\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Erreur dans la méthode de Simpson Pour des fonctions f admettant des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre 4, on trouve l'estimation de l'erreur suivante

$$\| I - I_n \| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}\max_{x\in[a,b]} \mid f^{(4)}(x) \mid . \tag{1.2.3}$$

Lorsqu'on connait une majoration M de$\mid f^{(4)}(x) \mid$, le pas choisi h qui permet d'avoir au plus une erreur ε vérifie nécéssairement

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4}M \leq \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{(b-a)}{180}h^4 M \leq \varepsilon,$$

ou bien

$$h \leq \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)\,M}}$$

Le pas h est en $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right)$.

Si on veut éviter d'utiliser une majoration de $\mid f^{(4)}(x) \mid$, on effectue les approximations I_n^h et $I_n^{\frac{h}{2}}$ de I de pas respectifs h et $\frac{h}{2}$. La deuxième est peu coûteuse, puisqu'elle utilise certaines valeurs déjà calculées. On réitèrera les calculs,en remplaçant h par $\frac{h}{2}$, et en effectuant le test d'arrêt

$$\mid I_n^h - I_n^{\frac{h}{2}} \mid \leq \varepsilon.$$

1.2.2 Fonctions splines

Définition 1.2.1 *Une fonction S est appelée spline de degré k si:*

1. Le domaine de S est un intervalle $[a, b]$.

2. $s \in C^{k-1}[a, b]$.

3. Il y a (les noeuds de S) $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ et tel que S est un polynôme de degré au plus k sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Fonctions splines non polynomiales

La forme de la fonction spline non polynomiale d'ordre n est:

$$S_i(t) = a_i \cos k(t - t_i) + b_i \sin k(t - t_i) + ... + y_i(t - t_i)^{n-1} + z_i, \quad i = 0, ..., n \tag{1.2.4}$$

où $a_i, b_i, ..., y_i$ et z_i sont des constantes à déterminer et k est la fréquence des fonctions trigonométriques qui seront utilisés pour augmenter la précision de la méthode.

Fonction spline linéaire non polynomiale La forme de la fonction spline linéaire non polynomiale est:

$$p_i(t) = a_i \cos k(t - t_i) + b_i \sin k(t - t_i) + c_i(t - t_i) + d_i,\ i = 0, ..., n \tag{1.2.5}$$

où a_i, b_i, c_i et d_i sont les constantes à déterminer. Pour obtenir la valeur de a_i, b_i, c_i and d_i, on différencie l'équation (1.2.5) trois fois par rapport à t, on obtient:

$$\left.\begin{aligned} p_i'(t) &= -ka_i \sin k(t - t_i) + kb_i \cos k(t - t_i) + c_i \\ p_i''(t) &= -k^2 a_i \cos k(t - t_i) - k^2 b_i \sin k(t - t_i) \\ p_i'''(t) &= k^3 a_i \sin k(t - t_i) - k^3 b_i \cos k(t - t_i) \end{aligned}\right\} \tag{1.2.6}$$

Par conséquent, remplacer t par t_i dans les relations (1.2.5) et (1.2.6)

$$\left.\begin{aligned} p_i(t_i) &= a_i + d_i \\ p_i'(t_i) &= kb_i + c_i \\ p_i''(t_i) &= -k^2 a_i \\ p_i'''(t_i) &= -k^3 b_i \end{aligned}\right\} \tag{1.2.7}$$

A partir des équations (1.2.7), les valeurs de a_i, b_i, c_i et d_i sont

$$\left.\begin{aligned} a_i &= -\tfrac{1}{k^2} p_i''(t_i) \\ b_i &= -\tfrac{1}{k^3} p_i'''(t_i) \\ c_i &= p_i'(t_i) - kb_i \\ d_i &= p_i(t_i) - a_i \end{aligned}\right\} \tag{1.2.8}$$

Fonction spline quadratique non–polynomiale: La forme de la fonction spline quadratique non polynomiale est:

$$Q_i(t) = a_i \cos k(t-t_i) + b_i \sin k(t-t_i) + c_i(t-t_i) + d_i(t-t_i)^2 + e_i, \ i = 0, ..., n \tag{1.2.9}$$

où a_i, b_i, c_i d_i et e_i sont les constantes à déterminer. Pour obtenir les valeurs de a_i, b_i, c_i, d_i et e_i, nous différencions l'équation (1.2.9) quatre fois par rapport à t,on obtient:

$$\left.\begin{aligned} Q_i'(t) &= -ka_i \sin k(t-t_i) + kb_i \cos k(t-t_i) + c_i + 2d_i(t-t_i) \\ Q_i''(t) &= -k^2 a_i \cos k(t-t_i) - k^2 b_i \sin k(t-t_i) + 2d_i \\ Q_i'''(t) &= k^3 a_i \sin k(t-t_i) - k^3 b_i \cos k(t-t_i) \\ Q_i^{(4)}(t) &= k^4 a_i \cos k(t-t_i) + k^4 b_i \sin k(t-t_i) \end{aligned}\right\} \tag{1.2.10}$$

Par conséquent, remplacer t par t_i dans les relations (1.2.9) et (1.2.10)

$$\left.\begin{aligned} Q_i(t_i) &= a_i + e_i \\ Q_i'(t_i) &= kb_i + c_i \\ Q_i''(t_i) &= -k^2 a_i + 2d_i \\ Q_i'''(t_i) &= -k^3 b_i \\ Q_i^{(4)}(t_i) &= k^4 a_i \end{aligned}\right\} \tag{1.2.11}$$

A partir des équations (1.2.11), les valeurs de a_i, b_i, c_i et d_i sont
pour $i = 0, 1, \ldots, n$

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{k^4} Q_i^{(4)}(t_i) \\ b_i &= -\frac{1}{k^3} Q_i'''(t_i) \\ c_i &= Q_i'(t_i) - kb_i \\ d_i &= \frac{1}{2}\left(Q_i''(t_i) + k^2 a_i\right) \\ e_i &= Q_i(t_i) - a_i \end{aligned}\right\} \tag{1.2.12}$$

Fonction spline cubique non–polynomiale: La forme de la fonction spline cubique non polynomiale est:

$$S_i(t) = a_i \cos k(t-t_i)+b_i \sin k(t-t_i)+c_i(t-t_i)+d_i(t-t_i)^2+e_i(t-t_i)^3+m_i,\ i=0,..,n \quad (1.2.13)$$

où a_i, b_i, c_i, d_i, e_i et m_i sont les constantes à déterminer. Pour obtenir les valeurs de a_i, b_i, c_i, d_i, e_i et m_i, nous différencions l'équation (1.2.13)cinq fois par rapport à t, on obtient:

$$\left.\begin{array}{ll} S_i^{'}(t) & = -ka_i \sin k(t-t_i) + kb_i \cos k(t-t_i) + c_i + 2d_i(t-t_i) + 3e_i(t-t_i)^2 \\ S_i''(t) & = -k^2 a_i \cos k(t-t_i) - k^2 b_i \sin k(t-t_i) + 2d_i + 6e_i(t-t_i) \\ S_i'''(t) & = k^3 a_i \sin k(t-t_i) - k^3 b_i \cos k(t-t_i) + 6e_i \\ S_i^{(4)}(t) & = k^4 a_i \cos k(t-t_i) + k^4 b_i \sin k(t-t_i) \\ S_i^{(5)}(t) & = -k^5 a_i \sin k(t-t_i) + k^5 b_i \cos k(t-t_i) \end{array}\right\} \quad (1.2.14)$$

Par conséquent, remplacer t par t_i dans les relations (1.2.13) et (1.2.14) on obtient:

$$\left.\begin{array}{ll} S_i(t_i) & = a_i + m_i \\ S_i'(t_i) & = kb_i + c_i \\ S_i''(t_i) & = -k^2 a_i + 2d_i \\ S_i'''(t_i) & = -k^3 b_i + 6e_i \\ S_i^{(4)}(t_i) & = k^4 a_i \\ S_i^{(5)}(t_i) & = k^5 b_i \end{array}\right\} \quad (1.2.15)$$

alors les valeurs de a_i, b_i, c_i, d_i, e_i et m_i sont:

$$\left.\begin{array}{ll} a_i & = \frac{1}{k^4} S_i^{(4)}(t_i) \\ b_i & = \frac{1}{k^5} S_i^{(5)}(t_i) \\ c_i & = S_i'(t_i) - kb_i \\ d_i & = \frac{1}{2}\left(S_i''(t_i) + k^2 a_i\right) \\ e_i & = \frac{1}{6}\left(S_i'''(t_i) + k^3 b_i\right) \\ m_i & = S_i(t_i) - a_i \end{array}\right\} \quad (1.2.16)$$

pour $i = 0, 1, .., n$.

Chapitre 2

Équations intégrales

2.1 Introduction

Définition 2.1.1 *Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue à déterminer $\varphi(x)$ apparaît sous le signe de l'intégrale. Une forme typique d'une équation intégrale dans $\varphi(x)$ est de la forme*

$$\Phi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{b(x)}^{a(x)} k(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a,b] \tag{2.1.1}$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont les limites de l'intégration, λ est un paramètre constant, et $k(x,t)$ est une fonction connue de deux variables x et t, appelé le noyau de l'équation intégrale. Les fonctions $f(x)$ et $k(x,t)$ sont données à l'avance. Il est à noter que les limites d'intégration déterminées comme $a(x)$ et $b(x)$ peuvent être variables ou constantes.

2.2 classification des équations intégrales

Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredhlom. qui constituent donc les deux principales catégories. À ces deux catégories d'équations intégrales, nous pouvons considérer encore deux autres types, à savoir Les équations intégro-différentielles et les équations intégrales singulières.

2.2.1 Équations intégrales linéaires de Fredholm

La forme standard des équations intégrales linéaires de Fredholm, où les limites de l'intégration a et b sont des constantes, est donnée par la forme

$$\Phi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x, t \leq b \tag{2.2.1}$$

où le noyau de l'équation intégrale $k(x,t)$ et la fonction $f(x)$ sont donnés à l'avance, et λ est un paramètre.

L'équation (2.2.1) est appelée linéaire parce que la fonction inconnue $\varphi(x)$ sous le signe de l'intégrale se produit de manière linéaire, c'est-à-dire que la puissance de $\varphi(x)$ est égale à un.

La valeur de $\Phi(x)$ donnera les types suivants d'équations intégrales linéaires de Fredholm:

- si $\Phi(x) = 0$, l'équation (2.2.1) s'écrite

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{2.2.2}$$

  et dans ce cas l'équation intégrale s'appelle l'équation intégrale de Fredholm de première espèce.

- si $\Phi(x) = 1$, l'équation (2.2.1) s'écrite

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.2.3}$$

  et dans ce cas l'équation intégrale s'appelle l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

2.2.2 Équations intégrales linéaires de Volterra

La forme standard des équations intégrales linéaires de Volterra, où les limites de l'intégration sont fonction de x plutôt que de constantes, est de la forme

$$\Phi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x, t \leq b \tag{2.2.4}$$

où la fonction inconnue $\varphi(x)$ sous le signe de l'intégrale se produit linéairement comme indiqué précédemment.

Il convient de noter que (2.2.4) peut être considéré comme un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm lorsque le noyau $K(x,t)$ s'annule pour $t > x$, Les équations intégrales de Volterra sont de deux espèces, en fonction de la valeur de $\Phi(x)$, à savoir:

- si $\Phi(x) = 0$, l'équation (2.2.4) s'écrite

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{2.2.5}$$

  et dans ce cas l'équation intégrale s'appelle l'équation intégrale de volterra de première espèce.

- si $\Phi(x) = 1$, l'équation (2.2.4) s'écrite

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.2.6}$$

  et dans ce cas l'équation intégrale s'appelle l'équation intégrale de volterra de seconde espèce.

Remarque 2.2.1 *En examinant soigneusement les équations (2.2.1) - (2.2.6), nous pouvons conclure les remarques suivantes.*

1. La structure des équations de Fredholm et de Volterra:

La fonction inconnue $\varphi(x)$ n'apparaît linéairement que sous le signe de l'intégrale dans les équations intégrales linéaires de Fredholm et de Volterra de première espèce. Cependant, la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît linéairement à l'intérieur du signe intégral et à l'extérieur du signe intégral également dans le deuxième espèce d'équations intégrales linéaires de Fredholm et de Volterra.

2. Les limites de l'intégration:

Dans les équations intégrales de Fredholm, l'intégrale est prise sur un intervalle fini avec des limites d'intégration définies.Toutefois, dans les équations intégrales de Volterra, au moins une limite de l'intervalle d'intégration est une variable et la limite supérieure est la plus couramment utilisée avec une limite variable.

3. La propriété de linéarité:

Comme indiqué précédemment, la fonction inconnue $\varphi(x)$ dans les équations intégrales de Fredholm et de Volterra (2.2.3) et (2.2.6) apparaît à la première puissance, où qu'elle *setrouve. Cependant, des équations intégrales de Fredholm et de Volterra non linéaires apparaissent si $\varphi(x)$ est remplacé par une fonction non linéaire $F(\varphi(x))$, comme $\varphi^2(x)$, $\varphi^3(x)$, $e^{\varphi(x)}, \sin(\varphi(x))$ ...etc.*

4. La propriété d'homogénéité:

Si nous posons $f(x) = 0$ dans l'équation intégrale de Fredholm ou de Volterra de seconde espèce donnée par (2.2.3) et (2.2.6), l'équation résultante s'appelle une équation intégrale homogène, sinon elle s'appelle une équation intégrale non homogène.

5. Le comportement singulier de l'équation intégrale:

Une équation intégrale est appelée singulière si l'intégration est impropre. Cela se produit généralement si l'intervalle d'intégration est infini, ou si le noyau devient illimité à un ou plusieurs points de l'intervalle de considération $a \leq t \leq b$.

2.2.3 Équations intégrales singulières

L'équation intégrale de première espèce

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.2.7}$$

ou l'équation intégrale de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.2.8}$$

est appelé singulier si la limite inférieure, la limite supérieure ou les deux limites d'intégration sont infinies.

De plus, l'équation (2.2.7) ou (2.2.8) est également appelée équation intégrale singulière si le noyau $K(x,t)$ devient infini en un ou plusieurs points de domaine d'intégration.

2.2.4 Équations intégro-différentielles

Dans ce type d'équations, la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît d'un côté dans une dérivée ordinaire et de l'autre sous le signe de l'intégrale. De plus, nous soulignons qu'une équation intégro-différentielle peut être facilement observée comme étape intermédiaire lorsque nous convertissons une équation différentielle à une équation intégrale.

- L'équation intégro-différentielle de Fredholm apparaît dans la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.2.9}$$

où a et b fixant et $\varphi^{(n)}$ indique la dérivée n-ième de $\varphi(x)$.

- Équations intégro-différentielles de Volterra

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.2.10}$$

où x est une variable et a est une constante, et $\varphi^{(n)}$ indique la dérivée n-ième de $\varphi(x)$.

2.3 Existence et unicité de la solution de l'équation de Volterra de second espèce

2.3.1 Introduction à la théorie du point fixe

Définition 2.3.1 *Soient H est un espace de Hilbert et A un opérateur borné, l'opérateur A est dit opérateur contractant s'il existe une constante k telle que* : $0 < k < 1$ *et*

$$\| A\varphi_1 - A\varphi_2 \| \leq k \| \varphi_1 - \varphi_2 \|, \quad \textit{pour tout } \varphi_1, \varphi_2 \in H$$

Théorème 2.3.1 *Soit A un opérateur contractant dans un espace de Hilbert H, alors l'équation*

$$A\varphi = \varphi \tag{2.3.1}$$

admet une solution unique φ dans H, cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Démonstration. Pour démontrer l'existance de la solution de l'équation (2.3.1) on utilise la méthode des approximations sussessives, soit φ_0 une fonction arbitraire, on définit la suite (φ_n) comme suit:

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n, \quad n = 1, 2, ...$$

est de Cauchy et converge vers la solution de l'équation (2.3.1), en effet:

$$\begin{aligned}
\| \varphi_{p+1} - \varphi_p \| = \| A\varphi_p - A\varphi_{p-1} \| &\leq k \| \varphi_p - \varphi_{p-1} \| \\
&\leq k^2 \| \varphi_{p-1} - \varphi_{p-2} \| \\
... \qquad &\leq .... \\
&\leq k^p \| \varphi_1 - \varphi_0 \|
\end{aligned}$$

d'autre part, pour tout $q > p$, on a

$$\begin{aligned}
\| \varphi_q - \varphi_p \| &\leq \| \left(\varphi_q - \varphi_{q-1}\right) + \left(\varphi_{q-1} - \varphi_{q-2}\right) + ... + \left(\varphi_{p+1} - \varphi_p\right) \| \\
&\leq \| \varphi_q - \varphi_{q-1} \| + \| \varphi_{q-1} - \varphi_{q-2} \| + ... + \| \varphi_{p+1} - \varphi_p \| \\
&\leq (k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}) \| \varphi_1 - \varphi_0 \| \\
&\leq k^p \left(1 + k + k^2 + ... + k^{\frac{q-1}{p}}\right) \| \varphi_1 - \varphi_0 \| \\
&\leq \frac{k^p - k^q}{1-k} \| \varphi_1 - \varphi_0 \|
\end{aligned}$$

ce qui nous montre que

$$\lim_{p,q\to\infty} \| \varphi_q - \varphi_p \| = 0$$

d'où la suite (φ_n) est de Cauchy dans un espace de Hilbert donc elle converge vers la solution unique φ

En effet de la continuité de l'opérateur A on obtient:

$$\varphi = \lim \varphi_{n+1} = \lim A\varphi_n = A \lim \varphi_n = A\varphi$$

Pour démontrer l'unicité, on suppose qu'il existe deux points fixes distincts φ et ψ, tels que :

$$A\varphi = \varphi$$

$$A\psi = \psi$$

alors on peut écrire

$$\| \varphi - \psi \| = \| A\varphi - A\psi \| \leq k \| \varphi - \psi \|$$

d'où

$$(1-k) \| \varphi - \psi \| \leq 0$$

ce qui nous donne

$$\| \varphi - \psi \| = 0 \Longrightarrow \varphi = \psi.$$

■

Corollaire 2.3.1 *Supposons que l'opérateur A admet un point fixe dans l'espace de Hilbert H alors l'opérateur A^n admet le même point fixe φ.*

Corollaire 2.3.2 *Soit A un opérateur dans l'espace H tel que l'opérateur est un opérateur contractant, alors A admet un point fixe unique φ dans l'espace H.*

Théorème 2.3.2 *Soit H est un espace de Hilbert et A un opérateur borné dans H avec la propriété suivante*

$$\| A\varphi_1 - A\varphi_2 \| \leq k \| \varphi_1 - \varphi_2 \|$$

alors l'équation suivante

$$\varphi - \lambda A\varphi = f$$

admet une solution unique pour toute $f \in H$ à condition que $\mid \lambda \mid$ est petit.

Théorème 2.3.3 *Soit $K(x,t)$ est une fonction continue pour $x, t \in [a,b]$, alors l'équation de Volterra*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \ \ a \leq t \leq x \leq b \qquad (2.3.2)$$

admet une solution unique $\varphi(x)$ pour toute f dans $L^2([a,b])$ et λ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour l'équation intégrale de Volterra nous considérons l'opérateur

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda A\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

avec

$$A\varphi(x) = \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

et nous essayons de prouver que l'opérateur T^n est une contraction pour un certain $n \in \mathbb{N}$, donc $T\varphi$ admet un point fixe, qui doit être une solution de l'équation (2.3.2)

$$\begin{aligned}
T\varphi &= f + \lambda A\varphi \\
T^2\varphi &= T(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda A(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2\varphi \\
.. &= .... \\
T^n\varphi &= f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + ... + \lambda^{n-1}A^{n-1}f + \lambda^n A^n\varphi
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\| T^n\varphi_2 - T^n\varphi_1 \| &= \| \lambda^n A^n\varphi_2 - \lambda^n A^n\varphi_1 \| \\
&= \mid \lambda \mid^n \| \int_a^x k_n(x,t)\left(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right) dt \|
\end{aligned}$$

Rappelons que $k_n(x,t)$ est le noyau itéré d'ordre n donné par

$$k_n(x,t) = \int_x^t k(x,z)k_{n-1}(z,t)dz$$

puisque on a par hypothèse

$$\mid k(x,t) \mid \leq M$$

alors

$$\mid k_n(x,t) \mid \leq \frac{M^n(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad a \leq t \leq x \leq b \tag{2.3.3}$$

Pour $n = 1$ l'expression (2.3.3) est évidente.

Supposons qu'elle est vraie pour $m \in \mathbb{N}$

$$\mid k_m(x,t) \mid \leq \frac{M^m(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}, \qquad a \leq t \leq x \leq b$$

alors

$$\begin{aligned} \mid k_{m+1}(x,t) \mid \ &= \mid \int_t^x k(x,z)k_m(z,t)dz \mid \\ &\leq \int_y^x \mid k(x,z)k_m(z,t) \mid dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{(m-1)!} \int_t^x (x-z)^{m-1}dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{(m)!}(x-t)^m \end{aligned}$$

tel que

$$\parallel T^n\varphi_2 - T^n\varphi_1 \parallel \leq \frac{\mid \lambda \mid^n M^n}{(n-1)!} \parallel \varphi_2 - \varphi_1 \parallel$$

pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand on obtient

$$\frac{\mid \lambda \mid^n M^n}{(n-1)!} < 1$$

ainsi que l'opérateur T^n est contractant ce qui implique que T admet un point fixe, on écrit

$$T\varphi = \varphi \Longleftrightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt.$$

■

2.4 Relation entre les équations différentielles et EI de Volterra

Pour trouver la relation entre les équations intégrale et différentielle, nous aurons besoin du lemme suivant qui nous permettra de remplacer plusieurs intégrales par une seule intégrale.

Lemme 2.4.1 *pour tout f une fonctoin continue,*

$$\int_0^x \int_0^{x_1} f(t)dtdx_1 = \int_a^x (x-t)f(t)dt \tag{2.4.1}$$

En général, on a

$$\int_0^x \int_0^{x_1} .... \int_0^{x_{n-1}} \varphi(x_n)dx_n dx_{n-1}...dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt \tag{2.4.2}$$

Preuve. voir [16]. ■

Problèmes avec conditions initiales

On considère le problème des valeurs initiales de second ordre suivant

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta, \end{cases} \tag{2.4.3}$$

où α et β sont des constantes. Les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions analytiques et $g(x)$ est une fonction continue.

En posant

$$y''(x) = \varphi(x) \tag{2.4.4}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction continue. Une intégration le long de l'intervalle $[0, x]$ donne

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x \varphi(t)dt \tag{2.4.5}$$

ou équivalent

$$y'(x) = \beta + \int_0^x \varphi(t)dt \tag{2.4.6}$$

Une intégration de (2.4.6) sur le long de l'intervalle $[0, x]$ donne

$$y(x) - y(0) = \beta x + \int_0^x \int_0^x \varphi(t)dtdt \tag{2.4.7}$$

ou équivalent

$$y(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt \tag{2.4.8}$$

En substituant (2.4.4), (2.4.6) et (2.4.8)au problème de valeur initiale (2.4.3), on obtient:

$$\varphi(x) + p(x)\left[\beta + \int_0^x \varphi(t)dt\right] + q(x)\left[\alpha + \beta x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt\right] = g(x) \tag{2.4.9}$$

La dernière équation peut être écrite sous la forme d'EI de Volterra de second espèce:

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{2.4.10}$$

où

$$K(x,t) = p(x) + q(x)(x-t), \tag{2.4.11}$$

et

$$f(x) = g(x) - [\beta p(x) + \alpha q(x) + \beta x q(x)]. \tag{2.4.12}$$

La technique présentée ci-dessus peut être généralisée en considérant le problème général des valeurs initiales:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x), \\ y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1,\ y''(0) = c_2, \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \end{cases} \tag{2.4.13}$$

Nous supposons que les fonctions $a_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ sont analytiques à l'origine et $g(x)$ est une fonctoin continue sur $[a,b]$.

En posant

$$y^{(n)}(x) = \varphi(x), \tag{2.4.14}$$

où $\varphi(x)$ est une fonctoin continue sur $[a,b]$. Une intégration le long de l'intervalle $[0,x]$ donne

$$y^{(n-1)}(x) = c_{n-1} + \int_0^x \varphi(t)dt. \tag{2.4.15}$$

Une intégration autre fois sur le long de l'intervalle $[0,x]$ donne

$$\begin{aligned} y^{(n-2)}(x) &= c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x\int_0^x \varphi(t)dtdt \\ &= c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt. \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Nous procédons comme avant

$$\begin{aligned} y^{(n-3)}(x) &= c_{n-3} + c_{n-2}x + \frac{1}{2}c_{n-1}x^2 + \int_0^x \int_0^x \int_0^x \varphi(t)dtdtdt \\ &= c_{n-3} + c_{n-2}x + \frac{1}{2}c_{n-1}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt. \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

La poursuite de processus d'intégration donne

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{k!}x^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt \tag{2.4.18}$$

Le remplacement de (2.4.14) - (2.4.18) dans (2.4.13) donne

$$u(x) = f(x) - \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{2.4.19}$$

où

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}, \tag{2.4.20}$$

et

$$f(x) = g(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{k=1}^{j} \frac{c_{n-k}}{(j-k)!} x^{j-k} \right). \tag{2.4.21}$$

2.5 Transformation de EI de Volterra de première espèce à EI de Volterra de second espèce

La règle de Leibniz

soient $f(x,t)$ et $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ des fonctoins continues dans un domaine de le plan $x-t$ qui inclut dans le rectangle $a \leq x \leq b, t_0 \leq t \leq t_1$ et soit

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)dt \tag{2.5.1}$$

alors la différenciation de l'intégrale (2.5.1) existe et donnée par

$$\frac{dF}{dx} = f(x,h(x))\frac{dh(x)}{dx} - f(x,g(x))\frac{dg(x)}{dx} - \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt \tag{2.5.2}$$

Si $g(x) = a$ et $h(x) = x$ où a est une constante et x est une variable, alors la règle de Leibnitz (2.5.2) réduite à

$$\frac{dF}{dx} = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt \tag{2.5.3}$$

Exemple 2.5.1 *Trouvez $F^{'}(x)$ pour*

$$F(x) = \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.5.4}$$

Dans ce cas, la règle de Leibnitz (2.5.2) se réduit à la forme:

$$F^{'}(x) = K(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi(t)dt. \tag{2.5.5}$$

Transformation de EI de Volterra de première espèce à EI de Volterra de second espèce

On considère l'EI de Volterra de première espèce

$$f(x) = \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt, \ a \leq x \leq b \tag{2.5.6}$$

La technique de conversion l'EI de Volterra de première espèce (2.5.6) à l'EI de Volterra de second espèce ne fonctionne efficacement que si $k(x,x) \neq 0$. Dérivons (2.5.6) terme à terme par rapport à x, il vient

$$f^{'}(x) = k(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi(t)dt, \quad x \in [a,b] \tag{2.5.7}$$

En résolvant pour $\varphi(x)$, à condition que $K(x,x) \neq 0$, nous obtenons l'équation intégrale de Volterra du second espèce donnée par:

$$\varphi(x) = \frac{f^{'}(x)}{k(x,x)} - \int_a^x \frac{1}{k(x,x)}\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi(t)dt \quad x \in [a,b] \tag{2.5.8}$$

Notez que le terme non homogène et le noyau ont changé pour

$$g(x) = \frac{f^{'}(x)}{k(x,x)} \tag{2.5.9}$$

et

$$G(x,t) = \frac{1}{k(x,x)}\frac{\partial k(x,t)}{\partial x} \tag{2.5.10}$$

respectivement.

Chapitre 3

Résolution numérique EI linéaires de Volterra de première espèce

3.1 les schémas des fonctions splines non polynomiales

Dans cette section, nous présentons les schémas des fonctions splines non polynomiales linéaire, quadratique et cubique pour trouver la solution de EI linéaires de Volterra de première espèce qui a une forme:

$$\tilde{f}(x) = \lambda \int_a^x \tilde{k}(x,t)\varphi(t)dt \quad x \in [a,b] \tag{3.1.1}$$

avec $\tilde{k}(x,t)$ et $\tilde{f}(x)$ sont des fonctions connues et continues dans $C^6[a,b]$, et $\varphi(x)$ est une fonction inconnue. où $k(x,x) \neq 0$, on différencie les équations (3.1.1) une fois par rapport à x. Par conséquent, nous obtenons une conversion vers la seconde espèce, c -à-d.

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \quad x \in [a,b] \tag{3.1.2}$$

où $f(x) = \dfrac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{k}(x,x)}$ et $k(x,t) = \dfrac{1}{k(x,x)}\dfrac{\partial \tilde{k}(x,t)}{\partial x}$.

Pour résoudre l'équation (3.1.1), nous devons différencier l'équation (3.1.2) cinq fois par rapport à x, en utilisant la formule de Leibniz, nous réalisons:

$$\varphi'(x) = f'(x) + \int_a^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi(t)dt + k(x,x)\varphi(x) \tag{3.1.3}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x) = \quad & f''(x) + \int_a^x \frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\varphi(t)dt + \left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\varphi(x) \\ & + \frac{dk(x,x)}{dx}\varphi(x) + k(x,x)\varphi'(x)\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

$$\begin{aligned}\varphi'''(x) = \quad & f'''(x) + \int_a^x \frac{\partial^3 k(x,t)}{\partial x^3}\varphi(t)dt + \left(\frac{\partial k^2(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\varphi(x) \\ & + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\varphi(x) + \left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\varphi'(x) \\ & + \frac{d^2k(x,x)}{dx^2}\varphi(x) + 2\frac{dk(x,x)}{dx}\varphi'(x) + k(x,x)\varphi''(x)\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(4)}(x) = \quad & f^{(4)}(x) + \int_a^x \frac{\partial^4 k(x,t)}{\partial x^4}\varphi(t)dt + \left(\frac{\partial k^3(x,t)}{\partial x^3}\right)_{t=x}\varphi(x) \\ & + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\varphi(x) + \left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\varphi'(x) \\ & + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\varphi(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\varphi'(x) \\ & + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\varphi'(x) + \left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\varphi''(x) + \frac{d^3k(x,x)}{dx^3}\varphi(x) \\ & + 3\frac{d^2k(x,x)}{dx^2}\varphi'(x) + 3\frac{dk(x,x)}{dx}\varphi''(x) + k(x,x)\varphi'''(x)\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(5)} = \quad & f^{(5)}(x) + \int_a^x \frac{\partial^5 k(x,t)}{\partial x^5}\varphi(t)dt + \left(\frac{\partial k^4(x,t)}{\partial x^4}\right)_{t=x}\varphi(x) \\ & + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^3 k(x,t)}{\partial x^3}\right)_{t=x}\varphi(x) + \left(\frac{\partial^3 k(x,t)}{\partial x^3}\right)_{t=x}\varphi'(x) \\ & + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\varphi(x) + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\varphi'(x) \\ & + \left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial^2 x}\right)_{t=x}\varphi''(x) + \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\varphi(x) \\ & + 3\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\varphi'(x) + 3\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\varphi''(x) \\ & + \left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\varphi'''(x) + \frac{d^4k(x,x)}{dx^4}\varphi(x) + 4\frac{d^3k(x,x)}{dx^3}\varphi'(x) \\ & + 6\frac{d^2k(x,x)}{dx^2}\varphi''(x) + 4\frac{dk(x,x)}{dx}\varphi'''(x) + k(x,x)\varphi^{(4)}(x)\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Pour compléter notre procédure de résolution EI de Volterra, on substitue $x = a$ dans les équations (3.1.2) - (3.1.7), alors on obtient:

$$\varphi(a) = f(a) \tag{3.1.8}$$

$$\varphi'(a) = f'(a) + k(a,a)\varphi(a) \tag{3.1.9}$$

$$\varphi''(a) = f''(a) + \left(\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi(a) + \left(\frac{dk(x,x)}{dx}\right)_{x=a} \varphi(a) + k(a,a)\varphi'(a) \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned}\varphi'''(a) = \ & f'''(a) + \left(\left(\frac{\partial k^2(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi(a) + \left(\tfrac{d}{dx}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi(a) \\ & + \left(\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi^{'}(a) + \left(\frac{d^2k(x,x)}{dx^2}\right)_{x=a} \varphi(a) \\ & +2\left(\frac{dk(x,x)}{dx}\right)_{x=a} \varphi^{'}(a) + k(a,a)\varphi''(a)\end{aligned} \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(4)}(a) = \ & f^{(4)}(a) + \left(\left(\frac{\partial k^3(x,t)}{\partial x^3}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi(a) + \left(\tfrac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi(a) \\ & + \left(\left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi^{'}(a) + \left(\tfrac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi(a) \\ & + \left(\tfrac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi^{'}(a) + \left(\tfrac{d}{dx}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi^{'}(a) \\ & + \left(\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi^{''}(a) + \left(\frac{d^3k(x,x)}{dx^3}\right)_{x=a} \varphi(a) \\ & +3\left(\frac{d^2k(x,x)}{dx^2}\right)_{x=a} \varphi^{'}(a) + 3\left(\frac{dk(x,x)}{dx}\right)_{x=a} \varphi^{''}(a) + k(a,a)\varphi^{'''}(a)\end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(5)}(a) = \ & f^{(5)}(a) + \left(\left(\frac{\partial k^4(x,t)}{\partial x^4}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi(a) + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^3 k(x,t)}{\partial x^3}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi(a) \\ & + \left(\left(\frac{\partial^3 k(x,t)}{\partial x^3}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi^{'}(a) + \left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi(a) \\ & +2\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi^{'}(a) + \left(\left(\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial^2 x}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi^{''}(a) \\ & + \left(\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi(a) + 3\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi^{'}(a) \\ & +3\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi^{''}(a) + \left(\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right)_{t=x}\right)_{x=a} \varphi^{'''}(a) \\ & + \left(\frac{d^4k(x,x)}{dx^4}\right)_{x=a} \varphi(a) + 4\left(\frac{d^3k(x,x)}{dx^3}\right)_{x=a} \varphi^{'}(a) + 6\left(\frac{d^2k(x,x)}{dx^2}\right)_{x=a} \varphi^{''}(a) \\ & +4\left(\frac{dk(x,x)}{dx}\right)_{x=a} \varphi^{'''}(a) + k(x,x)\varphi^{(4)}(a)\end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Maintenant, nous essayons de résoudre l'équation (3.1.2) en utilisant des fonctions splines non polynomiales linéaires, quadratiques et cubiques.

3.1.1 Le schéma de la fonction spline linéaire non polynomiale

Nous approchons la solution des EI linéaires de volterra (3.1.2) en utilisant la fonction spline linéaire non polynomiale (1.2.5). Nous introduisons la méthode de la solution par l'algorithme (EIV2SNP1).

Algorithme 3.1.1 ***(EIV2SNP1)***

Étape 1: Définir $h = \frac{(b-a)}{n}$, $t_i = t_0 + ih$, $i = 0, ..., n$ *(où* $t_0 = a$, $t_n = b$*) et* $\varphi_0 = f(a)$.

Étape 2: Evaluez a_0, b_0, c_0, *et* d_0 *en substituant* $(3.1.8) - (3.1.11)$ *aux équations* (1.2.8).

Étape 3: Calculez $p_0(t)$ *en utilisant l'étape* 2 *et l'équation* (1.2.5).

Étape 4: rapprocher $\varphi_1 = p_0(t_1)$.

Étape 5: Pour $i = 1$ *à* $n-1$, *procédez comme suit:*

Étape 6: Évaluez a_i, b_i, c_i, *et* d_i *en utilisant les équations* (1.2.8) *et en remplaçant* $\varphi(t_i)$, $\varphi^{'}(t_i)$, $\varphi^{''}(t_i)$ *et* $\varphi^{'''}(t_i)$ *par* $p_i(t_i)$, $p_i^{'}(t_i)$, $p_i^{''}(t_i)$ *et* $p_i^{'''}(t_i)$.

Étape 7: Calculez $p_i(t)$ *en utilisant l'étape* 6 *et l'équation* (1.2.5).

Étape 8: rapprocher $\varphi_i = p_i(t_{i+1})$.

3.1.2 Le schéma de la fonction spline quadratique non polynomiale

Afin d'approcher la solution de EI linéaires de volterra (3.1.2) en utilisant une fonction spline quadratique non polynomiale (1.2.9). Nous présentons une méthode de solution par l'algorithme (EIV2SNP2).

Algorithme 3.1.2 ***(EIV2SNP2)***

Étape 1: Définir $h = \frac{(b-a)}{n}$, $t_i = t_0 + ih$, $i = 0, ..., n$ *(où* $t_0 = a$, $t_n = b$*) et* $\varphi_0 = f(a)$

Étape 2: Evaluez a_0, b_0, c_0, d_0 *et* e_0 *en substituant* $(3.1.8) - (3.1.12)$ *aux équations* (1.2.12).

Étape 3: Calculez $Q_0(t)$ *en utilisant l'étape* 2 *et l'équation* (1.2.9).

Étape 4: rapprocher $\varphi_1 = Q_0(t_1)$.

Étape 5: Pour $i = 1$ *à* $n-1$, *procédez comme suit:*

Étape 6: Évaluez a_i, b_i, c_i, d_i *et* e_i *en utilisant les équations* (1.2.12) *et en remplaçant* $\varphi(t_i)$, $\varphi^{'}(t_i)$, $\varphi^{''}(t_i)$, $\varphi^{'''}(t_i)$ *et* $\varphi^{(4)}(t_i)$ *par* $Q_i(t_i)$, $Q_i^{'}(t_i)$, $Q_i^{''}(t_i)$, $Q_i^{'''}(t_i)$ *et* $Q_i^{(4)}(t_i)$.

Étape 7: Calculez $Q_i(t)$ en utilisant l'étape 6 et l'équation (1.2.9).
Étape 8: rapprocher $\varphi_i = Q_i(t_{i+1})$.

3.1.3 Le schéma de la fonction spline cubique non polynomiale

Nous approchons la solution des EI linéaires de volterra (3.1.2) en utilisant la fonction spline cubique non polynomiale (1.2.13). Nous introduisons une méthode de solution par l'algorithme (EIV2SNP3).

Algorithme 3.1.3 ***(EIV2SNP3)***
Étape 1: Définir $h = \frac{(b-a)}{n}$, $t_i = t_0 + ih$, $i = 0, ..., n$ (où $t_0 = a$, $t_n = b$) et $\varphi_0 = f(a)$.
Étape 2: Evaluez a_0, b_0, c_0, d_0 et m_0 en substituant $(3.1.8) - (3.1.13)$ aux équations (1.2.16).
Étape 3: Calculez $S_0(t)$ en utilisant l'étape 2 et l'équation (1.2.13).
Étape 4: rapprocher $\varphi_1 = S_0(t_1)$.
Étape 5: Pour $i = 1$ à $n-1$, procédez comme suit:
Étape 6: Évaluez a_i, b_i, c_i, d_i, e_i et m_i en utilisant les équations (1.2.16). et en remplaçant $\varphi(t_i)$, $\varphi'(t_i)$, $\varphi''(t_i)$, $\varphi'''(t_i)$, $\varphi^{(4)}(t_i)$ et $\varphi^{(5)}(t_i)$ par $S_i(t_i)$, $S_i'(t_i)$, $S_i''(t_i)$, $S_i'''(t_i)$, $S_i^{(4)}(t_i)$ et $S_i^{(5)}(t_i)$.
Étape 7: Calculez $S_i(t)$ en utilisant l'étape 6 et l'équation (1.2.13).
Étape 8: rapprocher $\varphi_i = S_i(t_{i+1})$.

3.2 Le schéma de la Méthode de Simpson modifiée

Dans cette section nous allons introduire la méthode de Simpson modifiée pour la résolution numérique EI de volterra de première espèce et second espèce à noyau régulier, l'idée principale est basée sur l'adaptation de la règle de quadrature de Simpson.

Notre objectif est d'approcher la solution de l'équation sur un ensemble de points de $[a, b]$ en utilisant la règle de quadrature de Simpson. Ensuite, sur le sous-intervalle $[s, s+2h]$ on a:

$$\begin{aligned} \int_s^{s+2h} k_x(t)\varphi(t)dt = \; & \frac{h}{3}\left[k_x(s)\varphi(s) + 4k_x(s+h)\varphi(s+h) + k_x(s+2h)\varphi(s+2h)\right] \\ & -\frac{h^5}{90}\left(k_x(\zeta)\varphi(\zeta)\right)^{(4)} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Ceci est important, dans le sens où l'erreur d'intégration $E(h)$ sur deux segments par la règle de Simpson est proportionnelle à h^5. En outre, on note que, si le segment h est réduit de moitié, alors $E(\frac{h}{2}) \simeq \frac{1}{16}E(h)$.

Pour les équations intégrales de volterra de première espèce

On considère l'équation

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \ a \leq x \leq b \tag{3.2.2}$$

où $k(a,a) \neq 0$. Soit $a = x_0 < x_1 < ... < x_{2j-1} < x_{2j} < ... < x_{2n}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$. En exigeant que l'équation (3.2.2) soit vérifiée sur chaque noeud x_{2j}, et on écrit

$$\int_a^{x_{2j}} k(x_{2j},t)\varphi(t)dt = f(x_{2j}) \tag{3.2.3}$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{i=0}^{j-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} k(x_{2j},t)\varphi(t)dt = f(x_{2j}) \tag{3.2.4}$$

Dans la suite, pour la simplicité on utilise les notations φ_{2j}, f_{2j}, $k_{2j,2i}$, au lieu de $\varphi(x_{2j})$, $f(x_{2j})$, $k(x_{2j},t_{2i})$, En utilisant la règle de quadrature de Simpson, l'équation discrète (3.2.4) devient

$$\sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3}\left(k_{2j,2i}\varphi_{2i} + 4k_{2j,2i+1}\varphi_{2i+1} + k_{2j,2i+2}\varphi_{2i+2}\right) = f_{2j} \tag{3.2.5}$$

Pour h suffisamment petit, une approximation φ_{2j} de devient possible, en approchant la solution φ_{2i+1} au noeud x_{2i+1} par la moyenne, $\dfrac{\varphi_{2i}+\varphi_{2i+2}}{2}$ donc on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3}\left(k_{2j,2i}\varphi_{2i} + 4k_{2j,2i+1}\frac{\varphi_{2i}+\varphi_{2i+2}}{2} + k_{2j,2i+2}\varphi_{2i+2}\right) = f_{2j} \\
&\Rightarrow \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3}\left(k_{2j,2i} + 2k_{2j,2i+1}\right)\varphi_{2i} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3}\left(2k_{2j,2i+1} + k_{2j,2i+2}\right)\varphi_{2i+2} = f_{2j} \\
&\Rightarrow \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3}\left(k_{2j,2i} + 2k_{2j,2i+1}\right)\varphi_{2i} + \sum_{i=1}^{j} \frac{h}{3}\left(2k_{2j,2i-1} + k_{2j,2i}\right)\varphi_{2i} = f_{2j}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{3}\left(k_{2j,0}+2k_{2j,1}\right)\varphi_0+\frac{h}{3}\left(2k_{2j,2j-1}+k_{2j,2j}\right)\varphi_{2j}+\frac{2h}{3}\sum_{i=0}^{j-1}\left(k_{2j,2i-1}+k_{2j,2i}+k_{2j,2i+1}\right)\varphi_{2i}=f_{2j}$$

$$\varphi_{2j}=\frac{f_{2j}-\frac{2h}{3}\sum_{i=0}^{j-1}\left(k_{2j,2i-1}+k_{2j,2i}+k_{2j,2i+1}\right)\varphi_{2i}-\frac{h}{3}\left(k_{2j,0}+2k_{2j,1}\right)\varphi_0}{\frac{h}{3}\left(2k_{2j,2j-1}+k_{2j,2j}\right)}$$

$$j=1,2,...,n \tag{3.2.6}$$

par le dérivé de l'équation (3.2.2) on obtient:

$$k(x,x)\varphi(x)+\int_a^x\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi(t)dt=f^{'}(x)$$

$$\Rightarrow k(a,a)\varphi(a)=f^{'}(a)$$

$$\varphi_0=\varphi(a)=\frac{f^{'}(a)}{k(a,a)}. \tag{3.2.7}$$

Pour les équations intégrales de volterra de second espèce

On considère l'équation

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt=f(x),\ \ a\leq x\leq b \tag{3.2.8}$$

une subdivision de l'intervalle $[a,b]$. En exigeant que l'équation (3.2.2) soit vérifiée sur chaque noeud x_{2j}, et on écrit

$$\begin{aligned}\varphi(x_{2j}) &= \int_a^{x_{2j}}k(x_{2j},t)\varphi(t)dt+f(x_{2j})\\ &= \sum_{i=0}^{j-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}k(x_{2j},t)\varphi(t)dt+f(x_{2j})\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

qui peut être réécrit comme

$$\varphi_{2j}=\sum_{i=0}^{j-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}k(x_{2j},t)\varphi(t)dt+f_{2j} \tag{3.2.10}$$

En utilisant la règle de quadrature de Simpson, l'équation discrète (3.2.10) devient

$$\varphi_{2j}=\sum_{i=0}^{j-1}\frac{h}{3}\left(k_{2j,2i}\varphi_{2i}+4k_{2j,2i+1}\varphi_{2i+1}+k_{2j,2i+2}\varphi_{2i+2}\right)+f_{2j}. \tag{3.2.11}$$

Pour h suffisamment petit, une approximation φ_{2j} de devient possible, en approchant la solution φ_{2i+1} au noeud x_{2i+1} par la moyenne, $\dfrac{\varphi_{2i}+\varphi_{2i+2}}{2}$ donc on a

$$\begin{aligned}
\varphi_{2j} &= f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3}\left(k_{2j,2i}\varphi_{2i} + 4k_{2j,2i+1}\frac{\varphi_{2i}+\varphi_{2i+2}}{2} + k_{2j,2i+2}\varphi_{2i+2}\right) \\
\varphi_{2j} &= f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3}\left(k_{2j,2i} + 2k_{2j,2i+1}\right)\varphi_{2i} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3}\left(2k_{2j,2i+1} + k_{2j,2i+2}\right)\varphi_{2i+2} \\
\varphi_{2j} &= f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3}\left(k_{2j,2i} + 2k_{2j,2i+1}\right)\varphi_{2i} + \sum_{i=1}^{j} \frac{h}{3}\left(2k_{2j,2i-1} + k_{2j,2i}\right)\varphi_{2i} \\
\varphi_{2j} &= f_{2j} + \frac{h}{3}\left(k_{2j,0} + 2k_{2j,1}\right)\varphi_0 + \frac{h}{3}\left(2k_{2j,2j-1} + k_{2j,2j}\right)\varphi_{2j} \\
&\quad + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{j-1}\left(k_{2j,2i-1} + k_{2j,2i} + k_{2j,2i+1}\right)\varphi_{2i}
\end{aligned}$$

D'où, pour $j = 1, 2, ...n$

$$\begin{aligned}
\varphi_{2j}(1 - \frac{h}{3}\left(2k_{2j,2j-1} + k_{2j,2j}\right)) &= f_{2j} + \frac{h}{3}\left(k_{2j,0} + 2k_{2j,1}\right)\varphi_0 \\
&\quad + \frac{2h}{3}\sum_{i=0}^{j-1}\left(k_{2j,2i-1} + k_{2j,2i} + k_{2j,2i+1}\right)\varphi_{2i}
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

A partir de l'équation (3.2.8), il est claire que $\varphi(x_0) = f(x_0)$, i.e, $\varphi_0 = f_0$.

3.3 Exemples

3.3.1 Exemple 1

On considère l'équation intégrale de volterra de première espèce

$$\int_0^x e^{t-x}\varphi(t)dr = x, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{3.3.1}$$

telle que la solution exacte est $\varphi(x) = x+1$, on transforme EI de volterra de première espèce à EI de volterra de second espèce, on obtient

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x e^{t-x}\varphi(t)dt, \; 0 \leq x \leq 1$$

Les tableaux (3.1) et (3.2) (3.3) présentent une comparaison entre les erreurs dans nos méthodes

x	erreur SNPL	erreur SNPQ	erreur SNPC	erreur SM
0	0	0	0	0
0.2	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$5.6610e-07$
0.4	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$1.1544e-06$
0.6	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$1.7649e-06$
0.8	$6.6613e-16$	$6.6613e-16$	$6.6613e-16$	$2.3976e-06$
1	$8.8818e-16$	$8.8818e-16$	$8.8818e-16$	$3.0525e-06$

Tableau 3.1 : les erreurs pour $h = 0.1$

x	erreur SNPL	erreur SNPQ	erreur SNPC	erreur SM
0	0	0	0	0
0.2	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$3.5408e-08$
0.4	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$7.2204e-08$
0.6	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$1.1039e-07$
0.8	$6.6613e-16$	$6.6613e-16$	$6.6613e-16$	$1.4996e-07$
1	$8.8818e-16$	$8.8818e-16$	$8.8818e-16$	$1.9092e-07$

Tableau 3.2 : les erreurs pour $h = 0.05$

x	erreur SNPL	erreur SNPQ	erreur SNPC	erreur SM
0	0	0	0	0
0.2	$6.6613e-16$	$6.6613e-16$	$6.6613e-16$	$2.2134e-09$
0.4	$1.3323e-15$	$1.3323e-15$	$1.3323e-15$	$4.5136e-09$
0.6	$2.2204e-15$	$2.2204e-15$	$2.2204e-15$	$6.9006e-09$
0.8	$2.8866e-15$	$2.8866e-15$	$2.8866e-15$	$9.3744e-09$
1	$3.5527e-15$	$3.5527e-15$	$3.5527e-15$	$1.1935e-08$

Tableau 3.3 : les erreurs pour $h = 0.025$

3.3.2 Exemple 2

On considère l'équation intégrale de volterra de première espèce

$$\int_0^x (x^2 - t + 2)\varphi(t)dr = (x^2 - x + 2)\sin(x) + 1 - \cos(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{3.3.2}$$

telle que la solution exacte est $\varphi(x) = \cos(x)$, on transforme EI de volterra de première espèce à EI de volterra de second espèce, on obtient

$$\varphi(x) = \cos(x) + \frac{2x}{x^2 - x + 2}\sin(x) - \int_0^x \frac{2x}{x^2 - x + 2}\varphi(t)dt, \ 0 \leq x \leq 1$$

Les tableaux (3.4), (3.5) et (3.6) présentent une comparaison entre les erreurs dans nos méthodes

x	erreur SNPL	erreur SNPQ	erreur SNPC	erreur SM
0	0	0	0	0
0.2	$1.1102e-16$	$1.1102e-16$	$1.1102e-16$	$1.4099e-04$
0.4	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$5.5249e-04$
0.6	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$1.1136e-03$
0.8	$3.3307e-16$	$3.3307e-16$	$3.3307e-16$	$1.6251e-03$
1	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$1.9276e-03$

Tableau 3.4 : les erreurs pour $h = 0.1$

x	erreur SNPL	erreur SNPQ	erreur SNPC	erreur SM
0	0	0	0	0
0.2	$1.1102e-16$	$1.1102e-16$	$1.1102e-16$	$3.5423e-05$
0.4	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$1.3875e-04$
0.6	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$2.7931e-04$
0.8	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$4.0683e-04$
1	$3.3307e-16$	$3.3307e-16$	$3.3307e-16$	$4.8165e-04$

Tableau 3.5 : les erreurs pour $h = 0.05$

x	erreur SNPL	erreur SNPQ	erreur SNPC	erreur SM
0	0	0	0	0
0.2	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$8.8668e-06$
0.4	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$2.2204e-16$	$3.4726e-05$
0.6	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$4.4409e-16$	$6.9882e-05$
0.8	$6.6613e-16$	$6.6613e-16$	$6.6613e-16$	$1.0174e-04$
1	$6.6613e-16$	$6.6613e-16$	$6.6613e-16$	$1.2040e-04$

Tableau 3.6 : les erreurs pour $h = 0.025$

3.3.3 Exemple 3

On considère l'équation intégrale de volterra de première espèce

$$\int_0^x \sin(x-t)\varphi(x)dt = e^{\frac{x^2}{2}} - 1,\ 0 \le x \le 1 \tag{3.3.3}$$

telle que la solution exacte est $\varphi(x) = (2 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}} - 1$, on transforme EI de volterra de première espèce à EI de volterra de second espèce, on obtient

$$\varphi(x) = \int_0^x \sin(x-t)\varphi(x)dt + (1 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}},\ 0 \le x \le 1 \tag{3.3.4}$$

Les tableaux (3.7), (3.8) et (3.9) présentent une comparaison entre les erreurs dans nos méthodes

x	erreur SNPL	erreur SNPQ	erreur SNPC	erreur SM
0	0	0	0	0
0.2	$1.4770e-03$	$1.2333e-05$	$4.1061e-02$	$2.7442e-04$
0.4	$2.4144e-02$	$8.0217e-04$	$1.7750e-01$	$1.1488e-03$
0.6	$1.2678e-01$	$9.3919e-03$	$4.5332e-01$	$2.7907e-03$
0.8	$4.2244e-01$	$5.4897e-02$	$9.5742e-01$	$5.5324e-03$
1	$1.1074e+00$	$2.2072e-01$	$1.8532e+00$	$9.9714e-03$

Tableau 3.7 : les erreurs pour $h = 0.1$

x	erreur SNPL	erreur SNPQ	erreur SNPC	erreur SM
0	0	0	0	0
0.2	$1.4770e-003$	$1.2333e-05$	$4.1061e-02$	$6.7909e-05$
0.4	$2.4144e-02$	$8.0217e-04$	$1.7750e-01$	$2.8424e-04$
0.6	$1.2678e-01$	$9.3919e-03$	$4.5332e-01$	$6.9032e-04$
0.8	$4.2244e-01$	$5.4897e-02$	$9.5742e-01$	$1.3680e-03$
1	$1.1074e+00$	$2.2072e-01$	$1.8532e+00$	$2.4646e-03$

Tableau 3.8 : les erreurs pour $h = 0.05$

x	erreur SNPL	erreur SNPQ	erreur SNPC	erreur SM
0	0	0	0	0
0.2	$1.4770e-03$	$1.2333e-05$	$4.1061e-02$	$1.6933e-05$
0.4	$2.4144e-02$	$8.0217e-04$	$1.7750e-01$	$7.0874e-05$
0.6	$1.2678e-01$	$9.3919e-03$	$4.5332e-01$	$1.7212e-04$
0.8	$4.2244e-01$	$5.4897e-02$	$9.5742e-01$	$3.4107e-04$
1	$1.1074e+00$	$2.2072e-01$	$1.8532e+00$	$6.1438e-04$

Tableau 3.9 : les erreurs pour $h = 0.025$

Conclusion

Dans ce mémoire on a traité numériquement des équations intégrales de volterra de premier éspèce par dse méthodes d'approximations: les méthodes des splines non polynomiales (linéaire, quadratique et cubique) et la méthode de Simpson modifiée.

D'après les exemples précédents, on peut conclure que:

1-La résolution d'une équation intégrale de Volterra du première espèce, qui est considérée comme un problème mal posé, peut être régularisée, pour aboutir à une équation intégrale du deuxième espèce.

2-Les fonctions de splines non polynomiales donnent une meilleure approximation que la méthode de simpson modifiée.

Bibliographie

[1] A, Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, Ecole Polytechnique de Montréal, 2016.

[2] A.Khirani, Resolution des equations integrales non lineaires type volterra Mémoire de Magistère université de M'sila,2011.

[3] A. Rahman, Integral Equations and their Applications, Dalhousie University, Canada, 2007.

[4] A. Rahmoune,Cours d'équations intégrales linéaires, université de Bordj Bou Arréridj, 2018.

[5] A. Rahmoune, Résolution numérique des équations intégrales. Mémoire de Magistère,Université de M'sila, 2004.

[6] F, Mirzaee, Numerical Solution for Volterra Integral Equations of the First Kind via Quadrature Rule, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6(20) (2012) pp. 969-974.

[7] L Jolivet, R Labbas, Analyse et analyse numérique Rappel de cours et exercices corrigés, Hermes Science Publications ,2004.

[8] M.Krasnov, A.Kissélev, G.Makarenko, Equations intégrales,MIR, 1977. Manuscripts, Vol.1(1) (2007), pp. 141-146.

[9] M, Nadir, A. Rahmoune, Modified Method for Solving Linear Volterra Integral Equations of the Second Kind Using Simpson's Rule, International Journal: Mathematical

[10] M, Nadir, Cours d'équations intégrales, université de M'sila 2004.

[11] M, Nadir, S, Guechi, Integral Equations and their Relationship to Differential Equations with Initial Conditions,General Letters in Mathematics (GLM) 1 (1) pp. 23-31,2016.

[12] S, Harbi, M. Murad, S. Majeed, A Solution of Second Kind Volterra Integral Equations Using Third Order Non-Polynomial Spline Function, Baghdad Science Journal Vol.12(2),2015.

[13] S, Harbi, M. Mustafa, Solution of Second Kind Volterra Integral Equations Using Non-Polynomial Spline Function, Baghdad Science Journal Vol.11(2),2014.

[14] S, Harbi, Volterra Integral Equations Using Non-Polynomial Spline Functions, University of Baghdad, 2009.

[15] W,Abdul.Majid. A first course in integral equations,second edition,World Scientific,2015.

[16] W,Abdul.Majid. linear and Nonlinear intégral équations Méthods and Applications, Higher Education press, Beijin and springer-Verlag Berlim Heidelberg, 2011.

ملخص: الهدف الأساسي من هذا العمل هو دراسة طرق عددية, لحل معادلات تكاملية خطية لفولترا من الصنف الأول وذلك باستعمال طرق الشريحة غير متعددة الحدود:الخطية-التربيعية-المكعبة و طريقة سيمبسون المعدلة.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التكاملية الخطية لفولتيرا الصنف الاول- طريقة سيمسون المعدلة- طريقة الشريحة غير متعددة الحدود.

Résumé:

Le but de ce mémoire est la résolution numériques des équations intégrales linéaires de Volterra du premier espèce en utilisant les splines non polynomiales (linéaire, quadratique et cubique) et la méthode de Simpson modifiée.

Mots clés: Equation intégrale de Volterra de première espèce, Méthode de Simpson modifiée, Fonctions splines non polynomiales.

Abstract:

The aim of this memory is the numerical resolution of the Volterra integral equation of first kind using no polynomial splines and modified Simpson method.

Keywords: Volterra integral equation of the first kind; Method of no polynomial splines; modified Simpson method.