



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## Mémoire de Master

**Domaine** : Mathématiques et Informatique  
**Filière** : Mathématiques  
**Option** : Analyse Mathématique et Numérique

### Thème

---

**Comparaison entre les solutions des séries Hermite et Legendre pour Les équations intégrales de Fredholm**

---

Présentée par : *GHADRI Ayoub*

Soutenu publiquement le : ..06/2022.

Devant le jury composé de :

**Mr. SELT Omar**  
**Mr. DILMI Mustapha**  
**Mr. GAGUI Bachir**

Prof  
M.C.B  
M.C.A

Université de M'sila  
Université de M'sila  
Université de M'sila

**Président.**  
**Encadreur.**  
**Examineur.**

Année universitaire 2021/2022

---

# Remerciements

Je tiens à remercier avant tout «Allah » le tout puissant de me donner le courage, la sagesse et la force pour réaliser ce travail.

Mes profonds remerciements pour mon encadreur Mr.DILMI Mustapha qui m'a permise de profiter de son inestimable expérience et qui m'a aidée et soutenue tout au long de mon chemin.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation tout au long de ma carrière universitaire.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

un grand merci à ma famille, notamment à mes parents et mon mari et mes frères et sœurs pour leur amour, leurs encouragements et leurs conseils. Merci d'être toujours à mes côtés.

Je ne peux clôturer mes remerciements sans adresser ma profonde gratitude à mes amies avec qui j'ai partagé les bons et les durs moments pendant la réalisation de ce travail, merci de m'encourager et de faire partie de ma vie.

Enfin, Merci à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

---

# Dédicace

Je dedie ma mémoire a mes chers parents, source de vie, d'amour et d'affection.

A mon encadreur Dr. DILMI. Mustapha et tout mes enseignement de faculté de  
Mathématique.

A tout mes amies.

## المخلص

في هذه المذكرة نقوم بدراسة المعادلات التكاملية من نوع فريدولم من الصنف الثاني بإستعمال طريقة السلاسل بالاعتماد على كثيرات حدود هيرميت ولجنذر لإيجاد الحلول التقريبية ومقارنتها مع الحلول الدقيقة.

**الكلمات المفتاحية:** معادلات فريدولم التكاملية، كثيرات حدود هيرميت، كثيرات حدود لجنذر، طرق عددية.

---

# Abstract

In this thesis we study the Integral Equations of the type of Fredholm of the second kind using the truncated Hermite and Legendre series to find approximate solutions and compare them with exact solutions

**Key words:** Fredholm 's Integral Equations, Hermite polynomials, Legendre polynomials, numerical methods

---

# Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions les équations intégrales du type de Fredholm de la deuxième type en utilisant les séries tronquée de Hermite et Legendre pour trouver des solutions approximatives et les comparer avec des solutions exactes.

**Mots-clés:** Équations intégrales de Fredholm, polynômes de Hermite, polynômes de Legendre, méthodes numériques..

# Table des matières

<b>Liste des tableaux</b>	<b>1</b>
<b>Notations</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Rappels et notions fondamentales</b>	<b>4</b>
1.1 Espace fonctionnels . . . . .	4
1.1.1 Notions sur les opérateurs . . . . .	6
1.1.2 Opérateur adjoint . . . . .	7
1.1.3 Opérateurs compacts . . . . .	8
1.2 Classification des équations intégrales . . . . .	9
<b>2 Existence et unicité des solutions des E.I</b>	<b>13</b>
2.1 Existence et unicité . . . . .	14
2.2 Méthodes analytiques pour résoudre les E.I.F . . . . .	15
2.2.1 La méthode du noyau dégénéré ou séparable . . . . .	15
2.2.2 La méthode de décomposition d’Adomian . . . . .	17
2.3 Méthodes numériques pour résoudre les E.I.F . . . . .	19
2.3.1 La méthode du noyau dégénéré . . . . .	20
2.3.2 Méthode de collocation . . . . .	22
<b>3 méthodes d’approximation spectrale</b>	<b>25</b>
3.1 Polynômes orthogonaux classiques . . . . .	25

3.1.1	Les polynômes Hermitiens . . . . .	25
3.1.2	Polynômes de Legendre . . . . .	26
3.2	Méthodes d'approximation spectrale . . . . .	26
3.2.1	Méthode de résolution de la série de Legendre et Hermite . . . . .	28
	<b>Conclusion</b>	<b>35</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>38</b>

# Liste des tableaux

1	Solutions exactes et approximatives de l'équation de Fredholm. Exemple 3.2.1	...32
3	Solutions exactes et approximatives de l'équation de Fredholm. Exemple 3.2.2	...33
4	Solutions exactes et approximatives de l'équation de Fredholm. Exemple 3.2.3	...34
5	Solutions exactes et approximatives de l'équation de Fredholm. Exemple 3.2.4	...35

---

# Notations

$C([a, b])$	espace des fonctions continues sur $[a, b]$
$f$	terme libre dans l'équation intégrale
$A$	opérateur linéaire
$I$	opérateur identique
$\  \cdot \ $	norme
$\int$	signe intégrale
$\langle , \rangle$	le produit scalaire
$T$	opérateur compact
$H$	polynôme de Hermite
$L$	polynôme de Legendre
$k(x, t)$	noyau de l'équation intégrale
$\varphi$	la fonction inconnue dans l'équation intégrale
$\varphi_n$	solution approchée
$\lambda$	paramètre numérique
$E.I.F$	équation intégrale de Fredholm

# Introduction

Le travail que nous présentons porte sur une étude générale des équation dans laquelle l'inconnu apparaît sous le signe intégrale. Cet inconnu est une fonction d'une ou plusieurs variables. Les équations intégrales ont un grand intérêt scientifique, elles sont parmi les branches les plus importantes en mathématiques, il est connu qu'elles touchent divers domaines des mathématiques appliquées et de la physique. Dans la théorie des équations intégrales on distingue les équations de Fredholm (qui ont été introduites par le mathématicien Suédois Ivar Fredholm en 1900) et les équations de Volterra (qui ont été introduites par le mathématicien Italian Vito Volterra en 1896). Les équations intégrales linéaires de Fredholm sont issues de nombreuses applications de la science et il a également été démontré qu'elles peuvent être déduites des problèmes de valeurs limites. Il a également contribué aux modèles de physique. Problèmes mathématiques tels que les problèmes de diffusion et de diffusion en mécanique quantique, les cartes d'appariement et les vagues d'eau dans la création d'équations intégratives. Dans le cas général on ne sait pas résoudre explicitement l'équation et on s'intéresse donc à la résolution approchée (numériques) de cette équation. Il existe plusieurs méthodes pour obtenir cette solution approchée. Avec le développement des machines de computation numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui plus simples. Dans ce mémoire, nous allons présenter quelques méthodes de résolutions d'équations intégrales linéaires de Fredholm. Il est divisé en trois chapitres comme suit:

**Le premier chapitre** Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions et définitions de l'analyse

fonctionnelle et les opérateurs avec ses propriétés, utilisées dans la théorie des équations intégrales nous allons donner la définition et la classification des équations intégrales.

**Le deuxième chapitre** dans ce chapitre, on a étudié l'existence et l'unicité des équations intégrales, et nous présenterons quelques méthodes analytiques, et numériques importantes pour résoudre les équations intégrales.

**Dans le dernier chapitre** représente le but de ce mémoire, où nous allons résoudre l'équation intégrale de Fredholm en utilisant les séries Hermite et Legendre des équations intégrales de Fredholm avec application .

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

L'étude de diverse classe des équations intégrales nécessite l'utilisation des espaces fonctionnels, tels que les espaces de Banach ou de Hilbert. Dans ce chapitre, on donne des définitions de base sur l'analyse fonctionnelle. Aussi, on donne quelques notions sur les opérateurs. Nous commençons par rappeler la définition d'un espace vectoriel normé.

### 1.1 Espace fonctionnels

**Définition 1.1.1** *Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme. Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle norme sur l'espace  $E$  toute application notée  $\| \cdot \|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , vérifiant pour tout  $x, y$  dans  $E$  et dans  $\mathbb{k}$*

1.  $\| x \| = 0$  si et seulement si  $x = 0$
2.  $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$  (homogénéité).
3.  $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$  (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

**Proposition 1.1.1** *Tout espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  de dimension finie est complet.*

**Définition 1.1.2** (*Espace de Banach*) Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

**Définition 1.1.3** (*Produit scalaire*) Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , un produit scalaire sur  $E$  est application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $\langle \dots \rangle$  possédant les propriétés suivantes: pour tout  $x, y, z$  dans  $E$  et  $\mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{R}$  on a

1.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0$
4.  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

**Définition 1.1.4** (*Espace  $\mathbb{C}[a, b]$* ) Des fonctions continues sur  $[a, b]$ , de norme

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

**Définition 1.1.5** (*Espace  $\mathbb{C}^k[a, b]$* ) Des fonctions  $k$  fois continument dérivables sur  $[a, b]$ ,

de norme

$$\|x\| = \sum_{i=0}^K \max |x^i(t)| ; \text{ telle que } x^0(t) = x(t).$$

**Définition 1.1.6** (*Espace  $L^1(\Omega)$* ) Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on désigne par  $L^1(\Omega)$  des fonctions intégrable sur  $\Omega$  valeur dans  $\mathbb{R}$ , on pose

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

**Définition 1.1.7** (*Espace  $L^p(\Omega)$* ) Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ , on pose

$$L^p(\Omega) = L^1(\Omega) \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega)\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si  $p = \infty$ , on a  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable, vérifiant

$$c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c, \text{ sur } \Omega$$

La norme est notée par

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf \{c > 0; |f(x)| \leq c; \text{ sur } \Omega\}$$

### 1.1.1 Notions sur les opérateurs

#### Opérateurs linéaires bornés

**Définition 1.1.8** (*Opérateur linéaire*) Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dite linéaire s'il vérifie les conditions suivantes: pour tout  $u, v$  dans  $E$  et, dans  $\mathbb{R}$ , on a

1.  $Au \in F$
2.  $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$

**Définition 1.1.9** (*Opérateur linéaire borné*) Un opérateur linéaire  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dite borné s'il existe une constante positive  $C$ , telle que:

$$\|Au\|_F \leq C \|u\|_E, \forall u \in E$$

**Théorème 1.1.1** Soit  $A$  un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés  $E$  et  $F$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes

- (1)  $A$  est borné.
- (2)  $A$  est continu sur  $E$
- (3)  $A$  est continu à l'origine.

**Théorème 1.1.2** *Un opérateur linéaire est continu si et seulement si il est borné.*

**Définition 1.1.10** (*Opérateur intégral linéaire*) *Un opérateur intégral linéaire  $A$  est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante*

$$(A\varphi)x = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

*La fonction  $K$  est appelée noyau de l'opérateur  $A$ .*

## 1.1.2 Opérateur adjoint

**Théorème 1.1.3** *Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $A$  un opérateur linéaire borné défini sur  $H$  à valeur dans  $H$ , alors il existe un opérateur linéaire borné noté  $A^*$  défini de  $H$  dans  $H$  par*

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle, \forall \varphi, \psi \in H,$$

*de plus, on a*

$$\|A\| = \|A^*\|$$

**Théorème 1.1.4** *Soit  $A$  un opérateur intégral défini à partir d'un noyau  $K$  continu sur  $[a, b]$  par la formule suivante*

$$\forall x \in [a, b]; (A\varphi)x = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

*Alors, l'opérateur  $A$  admet un unique opérateur adjoint  $A^*$  pour le produit scalaire usuel de  $L^2$ . Pour tout  $x \in [a, b]$ ,*

$$(A^*\psi)x = \int_a^b K(t,x)\psi(t)dt$$

**Définition 1.1.11** (*Opérateur auto-adjoint*) *Soit  $H$  un espace de Hilbert, on dit que l'opérateur  $A$  est auto-adjoint si  $A^* = A$ , i.e. si pour tout  $x, y \in H$  on a*

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle.$$

### 1.1.3 Opérateurs compacts

**Définition 1.1.12** (*Compacité*) Soit  $U$  un ensemble d'un espace normé  $X$ ,  $U$  est dit compact si de tout recouvrement de  $U$  par des ouverts de  $U$  on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e.

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouverts)}, U \subset \cup_{j \in J} V_j \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n \text{ telle que } U \subset \cup_{k=1}^n V_{j(k)}$$

**Théorème 1.1.5** (*Arzela-Ascoli*) Une condition nécessaire et suffisante q'une famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact  $[a, b]$ , est compacte dans  $\mathbb{C}([a, b])$  est que cette famille est uniformément bornée et équicontinue.

**Théorème 1.1.6** L'opérateur intégral  $T$  de  $\mathbb{C}([a, b])$  dans  $\mathbb{C}([a, b])$  à noyau continu est un opérateur compact.

**Théorème 1.1.7** Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

**Théorème 1.1.8** Le produit  $T_1 T_2$  de deux opérateurs bornés  $T_1$  et  $T_2$  est compact si l'un des opérateurs  $T_1$  ou  $T_2$  est compact.

**Théorème 1.1.9** Soit  $X$  un espace normé et  $Y$  un espace de Banach, et soit  $\{T_n\}$  une suite d'opérateurs compacts de  $X$  dans  $Y$ . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$$

Alors,  $T$  est compact.

**Définition 1.1.13** Soient  $E$  et  $F$  deux espace vectoriels un opérateur  $T : E \rightarrow F$  est dit de rang fini si son image est de dimension finie. Le rang de  $T$  est la dimension de son image.

On note

$$rg(T) = \dim(\text{Im}(T))$$

**Théorème 1.1.10** (*Théorème de Rize*) Soit  $E$  un espace vectoriel normé tel que  $B_E$  soit compacte. Alors  $E$  est de dimension finie.

**Théorème 1.1.11** Si  $T$  est un opérateur compact et  $S$  un opérateur borné, les opérateurs  $TS$  et  $ST$  sont compacts.

## 1.2 Classification des équations intégrales

L'étude des équations intégrales est divisé en deux secteurs, par rapport aux équations linéaires. Dans cette section, nous donnons les équations intégrales linéaires les plus célèbres qui sont les équations intégrales de Volterra et de Fredholm.

### Equation intégrale linéaire de Fredholm

**Définition 1.2.1** (*Equation intégrale linéaire de Fredholm*) L'équation intégrale linéaire de Fredholm est une équation s'écrit sous la forme:

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.1)$$

où  $h(x)$ ,  $f(x)$ ,  $K(x, t)$  sont des fonctions connues la fonction  $\varphi(x)$  qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer,  $x$  est une variable réelle appartient à l'intervalle  $]a, b[$ , et  $\lambda$  est un paramètre non nul, réel ou complexe.

1. Le type de l'équation intégrale est déterminé par la fonction  $h(x)$  où on a:

**1.1.** Si  $h(x) = 0$ , alors l'équation (1.1) devient:

$$f(x) + \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = 0 \quad (1.2)$$

Cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

**1.2.** Si  $h(x) = \alpha$  (constante réelle non nulle), alors l'équation (1.1) devient:

$$\alpha\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.3)$$

et cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm seconde espèce.

**1.** Si  $h(x) \neq 0$ , alors l'équation (1.1) est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de troisième espèce.

**2.** Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1.1) est dite équation intégrale linéaire de Fredholm non homogène.

3. Si  $f(x) = 0$ , alors l'équation (1.1) devient:

$$h(x)\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.4)$$

et cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm homogène.

### Equation intégrale linéaire de Volterra

L'équation intégrale linéaire de Volterra est une équation intégrale linéaire de Fredholm sauf que la borne d'intégration supérieure est variable  $x$ , c-à-d.,  $b = x$  et on a

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.5)$$

1. Si  $h(x) = 0$ , alors l'équation (1.5) devient:

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = 0 \quad (1.6)$$

Cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

2. Si  $h(x) = \alpha$  (constante réelle non nulle), alors l'équation (1.5) devient:

$$\alpha\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.7)$$

et cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

3. Si  $h(x) \neq 0$ , alors l'équation (1.5) est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de troisième espèce.

4. Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1.5) est dite équation intégrale linéaire de Volterra non homogène.

5. Si  $f(x) = 0$ , alors l'équation (1.5) devient:

$$h(x)\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.8)$$

et cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Volterra homogène.

**Remarque 1.2.1** *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm il suffit de prendre le noyau  $K$  vérifiant*

$$K(x, t) = 0 \text{ pour } x < t$$

### Autres équations intégrales linéaires

L'équation intégrale linéaire de Wiener-Hopf est une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^\infty K(x-t)\varphi(t)dt = f(x)$$

On appelle équation intégrale linéaire de Renwal toute équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^x K(x-t)\varphi(t)dt = f(x)$$

Toute équation a la forme suivante

$$\int_a^\infty \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x)$$

est appelée équation intégrale linéaire d'Abel où  $\alpha \in ]0, 1[$ .

### équations intégrales linéaires de Volterra

L'équation intégrale non linéaire de Volterra a la forme suivante:

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt. \tag{1.9}$$

1. Si  $h(x) = 0$ , alors l'équation (1.9) devient:

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt = 0. \tag{1.10}$$

Cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce.

2. Si  $h(x) = \alpha$  (constante réelle non nulle), alors l'équation (1.9) devient:

$$\alpha\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt. \quad (1.11)$$

et cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce.

3. Si  $h(x) \neq 0$ , alors l'équation (1.9) est appelée équation intégral non linéaire de Volterra de troisième espèce.

4. Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1.9) est dite équation intégrale non linéaire de Volterra non homogène.

5. Si  $f(x) = 0$ , alors l'équation (1.9) devient:

$$h(x)\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt \quad (1.12)$$

et cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra homogène.

# Chapitre 2

## Existence et unicité des solutions des E.I

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques méthodes analytiques et numériques pour résoudre l'intégrale de Fredholm équation du second type, mais nous commençons par énoncer quelques théorèmes sur l'existence, l'unicité de solutions.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.1)$$

$a$  et  $b$  sont des constantes données et la fonction noyau est  $K(x, t)$ . De plus, dans les équations intégrales de Fredholm du deuxième type, la fonction inconnue  $\varphi(x)$  apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral. Dans l'équation (2.1),  $K(x, t)$  et la fonction  $f(x)$  sont des fonctions à valeurs réelles et  $\lambda$  est un paramètre. Lorsque  $f(x) = 0$  alors l'équation intégrale de Fredholm est dite homogène

Dans cette section, nous donnons quelques conditions qui assurent l'existence de l'unique solution des équations intégrales de Fredholm.

## 2.1 Existence et unicité

**Théorème 2.1.1** *Soit l'équation suivante*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.2)$$

*Si le noyau  $K(x, t)$  est continu sur  $[a, b] \times [a, b]$ ,  $f \in L^2([a, b])$  et  $|\lambda|B < 1$ , où*

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt}$$

*Alors l'équation (2.2) admet une unique solution pour  $y \in L^2([a, b])$*

**Théorème 2.1.2** *Soient  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues.*

*Donc, si  $\lambda$  est assez petit, alors l'équation*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt$$

*admet une solution unique qui doit être étendue à  $[a, b]$*

**Théorème 2.1.3 (Théorème alternatif de Fredholm).** *Si l'équation intégrale de Fredholm homogène*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.3)$$

*n'a que la solution triviale ou nulle  $\varphi(x) = 0$ , alors l'équation intégrale de Fredholm non homogène correspondante :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.4)$$

*a toujours une solution unique.*

On considère ce théorème pour un noyau qui est séparable.

**Théorème 2.1.4 (Solution d'unicité).** *Si le noyau  $K(x, t)$  dans l'équation intégrale de Fredholm (2.1) est une fonction continue à valeur réelle, délimitée par le carré  $a \leq x \leq b$  et  $a \leq t \leq b$  et  $f(x)$  est une fonction continue à valeur réelle, alors une condition nécessaire pour l'existence d'une solution unique pour l'équation intégrale de Fredholm (2.1) est donnée par*

$$|\lambda|M(b-a) < 1 \quad (2.5)$$

où

$$|K(x, t)| \leq M \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

*Cependant, si la condition nécessaire ne tient pas, alors une solution continue peut exister pour l'équation intégrale de Fredholm.*

## 2.2 Méthodes analytiques pour résoudre les E.I.F

Certaines équations intégrales ont des solutions et d'autres n'ont pas de solutions ou ont d'innombrables solutions.

Certaines des méthodes d'analyse comprennent:

1. La méthode du noyau dégénéré
2. La méthode de décomposition d'Adomian

### 2.2.1 La méthode du noyau dégénéré ou séparable

Nous avons défini un noyau dégénéré ou séparable comme suit

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(t) \quad (2.7)$$

Les applications  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$  et  $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)$  sont linéairement indépendantes. Etant donné l'équation intégrale ci-dessous

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.8)$$

Depuis

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(t)$$

Alors (2.8) devient

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n g_i(x) \int_a^b h_i(t) \varphi(t) dt \quad (2.9)$$

La technique de résolution de l'équation (2.9) dépend essentiellement du choix du paramètre complexe  $\lambda$  et on définit donc

$$\beta_i = \int_a^b h_i(t) \varphi(t) dt \quad (2.10)$$

Où les quantités  $\beta_i$  sont des constantes. En utilisant (2.10) dans (2.9) on obtient

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \beta_i g_i(x) \quad (2.11)$$

Et nous pouvons maintenant trouver les valeurs de  $\beta_i$  En utilisant (2.11) dans (2.9) nous avons

$$\sum_{i=1}^n g_i(x) [\beta_i - \int_a^b h_i(t) [f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(t)] dt] = 0 \quad (2.12)$$

De l'indépendance linéaire de  $g_i(x)$ , il suffit alors d'avoir

$$\beta_i - \int_a^b h_i(t) [f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(t)] dt = 0 \quad (2.13)$$

Maintenant, en utilisant la notation simplifiée

$$\int_a^b h_i(t) f(t) dt = f_i \quad (2.14)$$

et

$$\int_a^b h_i(t) g_k(t) dt = G_{ik} \quad (2.15)$$

Alors (2.13) devient ;

$$\beta_i - \lambda \sum_{k=1}^n \beta_k G_{ik} = f_i \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

Qui est un système d'équations algébriques pour l'inconnue  $\beta_i$  Le système (2.16) a pour déterminant :

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda G_{11} - \lambda G_{12} \cdots - \lambda G_{1n} \\ -\lambda G_{21} 1 - \lambda G_{22} \cdots - \lambda G_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\lambda G_{n1} - \lambda G_{n2} & \cdots & 1 - \lambda G_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.17)$$

Qui est un polynôme en  $\lambda$  de degré  $n$ .

1.  $\forall \lambda$  pour laquelle  $D(\lambda) \neq 0$ , le système algébrique (2.17) et donc l'équation intégrale (2.8) a une solution unique.

2. Par contre,  $\forall \lambda$  pour lequel  $D(\lambda) = 0$ , le système algébrique (2.16), et avec lui l'équation intégrale (2.8), soit est insoluble, soit a une infinité de solutions.

### 2.2.2 La méthode de décomposition d'Adomian

Il a été introduit par George Adomian, et il s'agit de la décomposition de la fonction inconnue  $\varphi(x)$ .

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.18)$$

en une somme d'un nombre infini de composantes définies par la série de décomposition

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (2.19)$$

ou équivalent

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) \quad (2.20)$$

Où les composantes  $\varphi_n(x), n \geq 0$  seront déterminées de manière récurrente. Ceci est réalisé en remplaçant (2.19) dans (2.18) pour obtenir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \right) dt \quad (2.21)$$

ou équivalent,

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) [\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots] dt \quad (2.22)$$

La composante  $\varphi_0(x)$  est appelée le zéro qui est identifié par tous les termes en dehors du signe intégral.

$$\varphi_0(x) = f(x) \quad (2.23)$$

et

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (2.24)$$

Donc  $\varphi(x)$  peut être facilement obtenu sous la forme d'une solution en série à l'aide de l'hypothèse que nous avons faite en (2.19) et (2.20)

**Exemple 2.2.1** Résolvons l'intégrale du second type ci-dessous

$$\varphi(x) = 2x + \frac{x}{2} \int_{-1}^1 t \varphi(t) dt \quad (2.25)$$

Nous savons que d'après (2.25) nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 2x + \frac{x}{2} \int_{-1}^1 t \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) dt \quad (2.26)$$

Ou de manière équivalente comme

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots = 2x + \frac{x}{2} \int_{-1}^1 t (\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \dots) dt \quad (2.27)$$

On identifie donc la composante zéro par tous les termes qui ne sont pas identifiés sous le signe intégral. On obtient donc la relation de récurrence suivante

$$\varphi_0(x) = 2x \quad (2.28)$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{x}{2} \int_{-1}^1 t \varphi_n(t) dt \quad (2.29)$$

Il résulte de (2.28) que

$$\varphi_1(x) = \frac{x}{2} \int_{-1}^1 t \varphi_0(t) dt = \frac{x}{2} \int_{-1}^1 2t^2 dt = \frac{2x}{3}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x}{2} \int_{-1}^1 t \varphi_1(t) dt = \frac{x}{2} \int_{-1}^1 \frac{2t^2}{3} dt = \frac{2x}{9}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{x}{2} \int_{-1}^1 t \varphi_2(t) dt = \frac{x}{2} \int_{-1}^1 \frac{2t^2}{9} dt = \frac{2x}{27}$$

D'où

$$\varphi(x) = 2x + x \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \dots \right) \quad (2.30)$$

On remarque que l'équation (2.30) représente une série géométrique infinie à droite et a

$$a = \frac{2}{3}, \quad r = \frac{1}{3}$$

mais nous savons que

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

La solution exacte est donc donnée par

$$\varphi(x) = 2x + x \quad (2.31)$$

$$\varphi(x) = 3x \quad (2.32)$$

## 2.3 Méthodes numériques pour résoudre les E.I.F

Il existe de nombreuses méthodes numériques pour résoudre les équations intégrales de Fredholm du deuxième type. Ceux-ci inclus:

1. La méthode du noyau dégénéré
2. La méthode de collocation

### 2.3.1 La méthode du noyau dégénéré

Nous avons discuté de la méthode du noyau dégénéré comme l'une des méthodes analytiques pour résoudre les équations intégrales de Fredholm du deuxième type. Cependant, nous pouvons également l'utiliser pour résoudre numériquement l'équation intégrale de Fredholm ci-dessous.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad (2.33)$$

Un noyau  $K(x, t)$  est dégénéré s'il peut être exprimé comme la somme d'un nombre fini de termes, dont chacun est un produit de fonctions de  $x$  et  $t$  seulement tel que :

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(t) \quad (2.34)$$

que nous cherchons maintenant à les approximer par des noyaux dégénérés. D'après l'équation (2.33),  $K(x, t)$  est la fonction à approximer par une séquence de fonctions noyaux dégénérées ;

$$K_n(x, t) = \sum_{i=1}^n g_{i,n}(x)h_{i,n}(t), \quad n \geq 1 \quad (2.35)$$

Où  $K_n$  est un opérateur intégral associé à l'équation intégrale (2.33) qui peut se réécrire sous la forme

$$K_n\varphi(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x \leq b, n \geq 1 \quad (2.36)$$

Ainsi, l'équation intégrale (2.33) peut être simplifiée comme suit

$$(I - \lambda K)\varphi = f \quad (2.37)$$

En utilisant (2.36), (2.37) peut s'écrire

$$(I - \lambda K_n)\varphi_n = f \quad (2.38)$$

Où  $\varphi_n$  est la solution de l'équation d'approximation.

En utilisant la formule (2.35) pour  $K_n(x, t)$ , l'équation intégrale (2.38) devient

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n g_{i,n}(x) \int_a^b h_{i,n}(t)\varphi_n(t)dt$$

nous avons alors :

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) \quad (2.39)$$

Où

$$\beta_i - \lambda \sum_{k=1}^n G_{ik} \beta_k = q_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.40)$$

représente un système de  $n$  équations algébriques avec  $\beta_i$  les inconnues telles que

$$q_i = \int_a^b h_i(t) g_i(t) dt \quad (2.41)$$

et

$$G_{ik} = \int_a^b h_i(t) g_k(t) dt \quad (2.42)$$

De (2.40), (2.41) et (2.42) nous avons

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda G_{11} & -\lambda G_{12} \dots & -\lambda G_{1n} \\ -\lambda G_{21} & 1 - \lambda G_{22} \dots & -\lambda G_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda G_{n1} & -\lambda G_{n2} \dots & 1 - \lambda G_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.43)$$

qui est un polynôme en  $\lambda$  de degré  $n$ .

**Analyse de la solution**  $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt$ , par le noyau dégénéré Lorsque l'un des  $q_i$  ou tous sont non nuls, alors on a :

1. Si  $D(\lambda) \neq 0$ , alors une unique solution non nulle du système (2.40) existe, ce qui implique que (2.33) a une unique solution donnée par (2.39).

2. Si  $D(\lambda) = 0$ , alors le système (2.40) n'a pas de solution ou possède une infinité de solutions. Ainsi, (2.33) n'a pas de solution ou une solution infinie.

Lorsque  $f(x) = 0$ , alors d'après (2.41) cela implique que  $q_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$  ce qui suffit au système algébrique (2.40) à un système d'équation linéaire homogène d'où les suivantes sont possibles en fonction de la valeur de  $D(\lambda)$

1. Si  $D(\lambda) \neq 0$ , alors (2.40) a une unique solution nulle pour  $\beta_i = 0$  ce qui implique également que (2.33) a une unique solution nulle c'est-à-dire  $\varphi_n(x) = 0$ .

2. Si  $D(\lambda) = 0$ , alors (2.40) a des solutions non nulles infinies de sorte que (2.33) a également des solutions non nulles infinies où les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $D(\lambda) = 0$  sont les valeurs propres et toutes les solutions non nulles correspondantes de  $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt$  sont appelées les fonctions propres de l'équation intégrale.

Lorsque  $f(x) = 0$ , mais

$$\int_a^b f(t)h_i(t)dt = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.44)$$

ce qui signifie simplement que la fonction  $f(x)$  est orthogonale aux fonctions  $h_i(t)$  donc les  $q_i$  se réduisent à zéros pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . A partir de (2.44), le système (2.41) se réduit à un système d'équations linéaires homogènes et les cas possibles sont :

1. Si  $D(\lambda) \neq 0$ , alors (2.33) admet une unique solution nulle pour  $\beta_i = 0, i = 1, 2, \dots, n.i.e$

$$\varphi_n(x) = 0$$

2. Si  $D(\lambda) = 0$ , alors le système (2.40) possède des solutions non nulles infinies ce qui implique que (2.33) possède des solutions non nulles infinies.

### 2.3.2 Méthode de collocation

La méthode de collocation est l'une des méthodes numériques pour résoudre les équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées partielles et les équations intégrales.

Maintenant, étant donné l'équation intégrale de Fredholm du deuxième type :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x, t \leq b \quad (2.45)$$

L'équation (2.45) peut s'écrire sous la forme

$$\varepsilon[\varphi(x)] \equiv f(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) - F(x) \quad (2.46)$$

On cherche une solution approchée de l'équation (2.46) sous la forme telle que :

$$\varphi_n(x) = \Phi(x, A_1, \dots, A_n) \quad (2.47)$$

Où les paramètres  $A_1, \dots, A_n$  sont appelés coefficients indéterminés. En substituant (2.47) dans (2.46), on obtient :

$$\varepsilon[\varphi_n(x)] = \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi_n(t)dt - F(x) \quad (2.48)$$

Si  $f(x)$  est une solution exacte, alors clairement le résidu  $\varepsilon[f(x)] = 0$ , ce qui permet de choisir les paramètres  $A_1, \dots, A_n$  tels que l'erreur  $\varepsilon[F_n(x)]$  est petit. Encore une fois, nous avons que  $\varphi_n(x)$  dépendent linéairement des paramètres  $A_1, \dots, A_n$ , donc de (2.47), si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x),$$

alors nous pouvons trouver la solution  $f(x)$  arbitrairement en prenant un nombre suffisamment grand de paramètres  $A_1, \dots, A_n$ .

#### Détermination d'une solution approchée $F_n(x)$

fixons

$$\varphi_n(x) = \Phi_0(x) + \sum_{i=1}^n A_i \Phi_i(x) \quad (2.49)$$

En supposant que les fonctions  $\Phi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont linéairement indépendantes.

Si nous prenons  $\Phi_0(x) = \varphi(x)$  ou  $\Phi_0(x) = 0$  puis substituons dans (2.49), cela donne ;

$$\varepsilon[\varphi_n(x)] = \Phi_0(x) + \sum_{i=1}^n A_i \Phi_i(x) - \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)[\Phi_0(t) + \sum_{i=1}^n A_i \Phi_i(t)]dt$$

ou simplement comme

$$\varepsilon[\varphi_n(x)] = h_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n A_i h_i(x, \lambda) \quad (2.50)$$

Où

$$h_0(x, \lambda) = \Phi_0(x) - \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\Phi_0(t)dt$$

$$h_i(x, \lambda) = \Phi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \Phi_i(t) dt$$

Nous exigeons que  $\varepsilon[\varphi_n(x)] = 0$  du système donné aux points de collocation  $x_1, \dots, x_n$  sur l'intervalle  $[a, b]$  c'est-à-dire ;

$$\varepsilon[\varphi_n(x_j)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$$

Habituellement  $x_1 = a$  et  $x_n = b \implies$  le système algébrique (2.50) devient

$$\sum_{i=1}^n A_i h_i(x_j, \lambda) = -h_0(x_j, \lambda), \quad j = 1, \dots, n \quad (2.51)$$

Supposons que le déterminant du système algébrique (2.51) est non nul i,e

$$\det[h_i(x_j, \lambda)] = \begin{vmatrix} h_1(x_1, \lambda) & h_1(x_2, \lambda) \cdots h_1(x_n, \lambda) \\ h_2(x_1, \lambda) & h_2(x_2, \lambda) \cdots h_2(x_n, \lambda) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ h_n(x_1, \lambda) & h_n(x_2, \lambda) \cdots h_n(x_n, \lambda) \end{vmatrix} \quad (2.52)$$

puis (2.51) détermine de manière unique les nombres  $A_1, \dots, A_n$  ce qui permet de trouver la solution approchée  $\varphi_n(x)$  à l'aide de la formule (2.49)

# Chapitre 3

## méthodes d'approximation spectrale

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la façon d'utiliser les méthodes spectrales pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm du deuxième type. Cette technique est basée sur l'approximation de l'inconnue sous forme de série.

### 3.1 Polynômes orthogonaux classiques

Les polynômes orthogonaux classiques sont les plus utilisés puisqu'ils constituent la classe la plus importante de polynômes orthogonaux et sont définis selon les valeurs de l'intervalle d'intégration  $I$  et selon l'expression de la mesure de la fonction de poids  $w(x)$ . Ces polynômes orthogonaux les comprennent :

3. Polynômes hermitiens
4. Polynôme de Legendre

#### 3.1.1 Les polynômes Hermitiens

Ils se caractérisent par les trois présentations suivantes :

1. Les polynômes hermitiens  $H_n(x)$  sont donnés par la fonction génératrice

$$K(x, t) = e^{-2tx-t^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)t_n$$

2. Les polynômes  $H_n(x)$  sont définis par la formule de d'Olinde Rodrigues' c'est-à-dire

$$H_n(x) = (1-)^n e^{x^2} \frac{d^n}{d^n(x)} (e^{-x^2})$$

3. La série des polynômes hermitiens  $(H_n)_{n \geq 1}$  satisfait la relation de récurrence

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2_n H_{n-1}(x)$$

qui est orthogonal à  $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$

4. La famille

$$H_n(x) = \frac{H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

qui est une base orthonormée dans  $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$

### 3.1.2 Polynômes de Legendre

La famille des polynômes de Legendre est caractérisée par les présentations suivantes :

1. Par la fonction génératrice les polynômes de Legendre  $L_n(x)$  sont donnés par ;

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) t^n$$

2. A partir de la formule d'Olinde Rodrigues les polynômes de Legendre  $L_n(x)$  prennent la forme

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$$

3. Le des polynômes de Legendre  $(L_n(x))_{n \geq 0}$  satisfait la relation de récurrence

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x)$$

où  $(L_n(x) \geq 0)$  est une famille de polynômes orthogonaux dans  $L^2([-1, 1])$

## 3.2 Méthodes d'approximation spectrale

Les méthodes spectrales ont été introduites par D. Gottlieb et S. Orszag [11] et elles ont été largement utilisées pour l'approximation de solutions d'équations aux dérivées partielles.

Initialement ils ont été introduits par l'utilisation de séries de Fourier tronquées qui servaient principalement à l'approximation des problèmes avec conditions aux limites périodiques. Egalemeut par l'utilisation de polynômes de haut degré qui forment des bases tensorielles d'espaces d'approximation qui est une propriété fondamentale de la construction des méthodes spectrales. Généralement, les méthodes d'approximation spectrale utilisent des polynômes de la famille des polynômes de Jacobi.

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^k \binom{k+\alpha}{l} \binom{k+\beta}{k-l} (x-1)^l (x+1)^{k-1}, \forall x \in [-1, 1]$$

par rapport à la fonction de poids

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

Normalement la nature et le choix de l'approximation dépendent du domaine dont on cherche la solution. Par exemple, pour les polynômes de Legendre on prend ( $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$ ) et pour les polynômes de Tchebyshev de première espèce ( $\alpha = -\frac{1}{2}$  et  $\beta = -\frac{1}{2}$ ) un facteur multiplicatif proche , et dépend essentiellement du degré  $k$  si on se place sur l'intervalle  $I = [-1, 1]$ . Numériquement, la méthode spectrale fait appel à l'utilisation des polynômes de Tchebyshev qui sont parfois difficiles à mettre en œuvre et à analyser numériquement, en particulier lorsqu'il s'agit de méthodes spectrales. Nous remarquons que la définition et l'analyse numérique des méthodes spectrales sont entièrement basées sur les propriétés des polynômes orthogonaux.

Considérons l'équation intégrale de Fredholm du second type

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad C([a, b]) = [-1, 1] \quad (3.1)$$

telle que  $f(x)$  soit continue pour  $x \geq 0$  et le Noyau  $K(x, t)$  une fonction définie sur

$$I = ((x, t) \geq -1, t \leq 1)$$

est une fonction à déterminer.

### 3.2.1 Méthode de résolution de la série de Legendre et Hermite

Ici, la solution implique l'utilisation de l'approximation en série de Legendre tronquée. Normalement, nous prenons d'abord les développements en série de Legendre tronqués des fonctions dans l'équation intégrale de Fredholm, puis nous substituons leurs formes matricielles dans l'équation, ce qui correspond à un système linéaire d'équations algébriques avec des coefficients de Legendre inconnus. Pour des informations plus détaillées et des exemples illustratifs, voir [15] et [26].

Considérons l'équation intégrale de Fredholm du second type.

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_{-1}^1 K(x, t)\varphi(t)dt, -1 \leq x, t \leq 1 \quad (3.2)$$

Où  $\varphi(x)$  est la fonction à déterminer  $\lambda$  est une constante, tandis que le noyau  $K(x, t)$  et  $g(x)$  reçoivent des fonctions continues en  $-1 \leq x, t \leq 1$  ou tout comme  $[-1, 1]$ .

La solution de l'équation (3.2) s'exprime donc en Série de Legendre tronquée, soit:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \quad (3.3)$$

Où  $P_n(x)$  est le polynôme de Legendre de degré  $n$ .

L'expression (3.3) peut être exprimée sous sa forme matricielle équivalente comme suit :

$$\varphi(x) = P_x A \quad (3.4)$$

Où

$$P_x = P_0(x)P_1(x)P_2(x)...P_n(x),$$

$$A = [a_0 a_1 a_2 \dots a_n]^T$$

et

$$a_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

sont des coefficients à déterminer.

On choisit  $n$  tel que l'équation (3.3) devienne

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^N a_n(x)P_n(x)$$

**Procédure de détermination de  $\varphi(x)$**

Pour que l'on obtienne  $\varphi(x)$  pour l'équation (3.2) sous la forme de l'équation (3.3), il faudra d'abord déduire certaines des approximations matricielles correspondant aux polynômes de Legendre, c'est-à-dire laisser la fonction connue  $g(x)$  à approximer par la série de Legendre tronquée comme indiqué ci-dessous,

$$g(x) = \sum_{n=0}^N g_n P_n(x) \quad (3.5)$$

avec sa forme matricielle équivalente est donnée par

$$[g(x)] = P_x G \quad (3.6)$$

Où

$$G = [g_0 g_1 g_2 \dots g_n]$$

Si l'on considère alors le noyau  $K(x, t)$  que l'on peut approximer par double série de Legendre de degré  $N$  (du fait de la présence des deux variables  $x$  et  $t$ ) comme :

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N K_{m,n} P_m(x) P_n(t) \quad (3.7)$$

Ce que l'on peut aussi sous sa forme matricielle équivalente comme :

$$[K(x, t)] = P_x K P_t^T \quad (3.8)$$

Où

$$P_t = [p_0(t) p_1(t) p_2(t) \dots p_n(t)]$$

et

$$K = \begin{pmatrix} K_{00} K_{01} \dots K_{0N} \\ K_{10} K_{11} \dots K_{1N} \\ \vdots \\ \vdots \\ K_{N1} K_{N2} \dots K_{NN} \end{pmatrix}$$

Inversement, la fonction inconnue  $\varphi(t)$  dans l'intégrande, on l'écrit à partir de l'expression (3.3) et (3.4)

$$[\varphi(t)] = P_t A \quad (3.9)$$

Lorsque nous substituons les formes matricielles (3.4), (3.6), (3.8) et (3.9) qui sont congruentes aux fonctions  $\varphi(x)$ ,  $g(x)$ ,  $K(x, t)$  et  $\varphi(t)$  respectivement dans l'équation (3.2) et en simplifiant l'équation résultante, on obtient l'équation matricielle

$$A = G + \lambda K \left( \int_{-1}^1 P_t^T P_t dt \right) A \quad (3.10)$$

Ou simplement comme

$$(I - \lambda KQ)A = G \quad (3.11)$$

Où

$$Q = \int_{-1}^1 P_t^T P_t dt = [q_{mn}], \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.12)$$

et  $I$  est la matrice identité.

$$q_{mn} = \int_{-1}^1 P_n(t) P_s(t) dt = \left\{ \begin{array}{l} 0, m = n \\ \frac{2}{2n+1}, m = n \end{array} \right\}$$

Dans l'équation (3.12), lorsque

$$D(\lambda) = |I - \lambda KQ| = 0$$

on obtient alors

$$A = (I - \lambda KQ)^{-1} G, \quad \lambda = 0 \quad (3.13)$$

ce qui implique que les coefficients inconnus  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  peuvent être déterminés uniquement par l'équation (3.13) donc l'équation intégrale (3.2) a une solution unique comme nous l'avons déjà montré dans le précédent sections. La solution est normalement donnée par la série de Legendre tronquée.

### Exactitude de la solution

Nous pouvons toujours vérifier si cette méthode est exacte ou exacte. Parce que l'équation (3.3) représente la solution approchée de l'équation (3.2) qui doit être satisfaite. Pour  $x_i \in [-1, 1]$ , alors

$$\epsilon(x_i) = \left| \varphi(x_i) - g(x_i) - \lambda \int_{-1}^1 K(x, t) \varphi(t) dt \right| \cong 0$$

où

$$\epsilon(x_i) \leq 10^{-k} \quad (3.14)$$

$k_i$  est tout entier positif. supposons que  $(x_i) \leq 0$ ,  $k$  est un entier positif quelconque, est spécifié, alors la limite de troncature  $N$  est augmentée jusqu'à ce que la différence  $(x_i)$  à chacun des points  $x_i$  soit de plus en plus petite que la valeur spécifiée  $10^{-k}$ . Inversement, la fonction d'erreur peut être déterminée par

$$\epsilon(x_i) = \varphi(x) - g(x) - \lambda \int_{-1}^1 K(x, t) \varphi(t) dt$$

**Exemple 3.2.1** *Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm [25]*

$$\varphi(x) = \exp(2x) - x + \int_0^1 x \exp(-2t) \varphi(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = \exp(2x)$$

La solution approximative  $\varphi_n(x)$  de  $\varphi(x)$  est obtenue par la méthode de Hermite et Legendre avec les polynômes de Hermite et Legendre.

**Tableau 1.** *Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.2.1 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$  est calculée.*

$x$	sol exact $\varphi$	sol app $\varphi_n, H_n$	sol app $\varphi_n, L_n$	Erreur $H_n, n = 10$	Erreur $L_n, n = 10$
0.0	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	0.000E+00	2.181E-05
0.1	1.221E+00	1.221E+00	1.221E+00	2.681E-06	7.144E-05
0.2	1.492E+00	1.492E+00	1.492E+00	5.363E-06	2.621E-04
0.3	1.822E+00	1.822E+00	1.822E+00	8.044E-06	5.229E-04
0.4	2.226E+00	2.226E+00	2.225E+00	1.072E-05	8.085E-04
0.5	2.718E+00	2.718E+00	2.717E+00	1.338E-05	1.056E-03
0.6	3.320E+00	3.320E+00	3.319E+00	1.588E-05	1.182E-03
0.7	4.055E+00	4.055E+00	4.054E+00	1.762E-05	1.090E-03
0.8	4.953E+00	4.953E+00	4.952E+00	1.637E-05	6.626E-04
0.9	6.050E+00	6.050E+00	6.050E+00	5.234E-06	2.291E-04
1.0	7.389E+00	7.389E+00	7.391E+00	3.458E-05	1.721E-03

**Exemple 3.2.2** *Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm [23]*

$$\varphi(x) = \exp(x + 2) - 2 \int_0^1 \exp(x + t)\varphi(t)dt$$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = \exp(x)$$

La solution approximative  $\varphi_n(x)$  de  $\varphi(x)$  est obtenue par la méthode de Hermite et Legendre avec les polynômes de Hermite et Legendre.

**Tableau 2.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.2.2 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$  est calculée.

$x$	<i>sol exact</i> $\varphi$	<i>sol app</i> $\varphi_n, H_n$	<i>sol app</i> $\varphi_n, L_n$	<i>Erreur</i> $H_n, n = 10$	<i>Erreur</i> $L_n, n = 10$
0.0	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	5.175E-05	4.700E-05
0.1	1.105E+00	1.105E+00	1.105E+00	5.719E-05	5.191E-05
0.2	1.221E+00	1.221E+00	1.221E+00	6.317E-05	5.724E-05
0.3	1.350E+00	1.350E+00	1.350E+00	6.946E-05	6.286E-05
0.4	1.492E+00	1.492E+00	1.492E+00	7.497E-05	6.783E-05
0.5	1.649E+00	1.649E+00	1.649E+00	7.681E-05	6.947E-05
0.6	1.822E+00	1.822E+00	1.822E+00	6.883E-05	6.188E-05
0.7	2.014E+00	2.014E+00	2.014E+00	3.975E-05	3.411E-05
0.8	2.226E+00	2.226E+00	2.226E+00	2.924E-05	3.227E-05
0.9	2.460E+00	2.459E+00	2.459E+00	1.675E-04	1.663E-04
1.0	2.718E+00	2.718E+00	2.718E+00	4.190E-04	4.112E-04

**Exemple 3.2.3** Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = \exp(x) + 2 \int_0^1 \exp(x) \exp(t) \varphi(t) dt$$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = \frac{\exp(x)}{2 - \exp(2)}$$

La solution approximative  $\varphi_n(x)$  de  $\varphi(x)$  est obtenue par la méthode de Hermite et Legendre avec les polynômes de Hermite et Legendre.

**Tableau 3.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

*l'exemple 3.2.3 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$  est calculée.*

$x$	<i>sol exact <math>\varphi</math></i>	<i>sol app <math>\varphi_n, H_n</math></i>	<i>sol app <math>\varphi_n, L_n</math></i>	<i>Erreur <math>H_n, n = 10</math></i>	<i>Erreur <math>L_n, n = 10</math></i>
0.0	-1.856E-01	-1.856E-01	-1.856E-01	4.500E-08	7.565E-07
0.1	-2.051E-01	-2.051E-01	-2.051E-01	4.973E-08	8.362E-07
0.2	-2.266E-01	-2.266E-01	-2.266E-01	5.491E-08	9.258E-07
0.3	-2.505E-01	-2.505E-01	-2.505E-01	6.027E-08	1.030E-06
0.4	-2.768E-01	-2.768E-01	-2.768E-01	6.487E-08	1.155E-06
0.5	-3.059E-01	-3.059E-01	-3.059E-01	6.607E-08	1.306E-06
0.6	-3.381E-01	-3.381E-01	-3.381E-01	5.784E-08	1.490E-06
0.7	-3.737E-01	-3.737E-01	-3.737E-01	3.015E-08	1.706E-06
0.8	-4.130E-01	-4.130E-01	-4.130E-01	2.529E-08	1.958E-06
0.9	-4.564E-01	-4.564E-01	-4.564E-01	9.005E-08	2.279E-06
1.0	-5.044E-01	-5.044E-01	-5.044E-01	5.115E-08	2.793E-06

**Exemple 3.2.4** *Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm*

$$\varphi(x) = \exp(x) - 1 + \int_0^1 \exp(-t)\varphi(t)dt$$

*où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par*

$$\varphi(x) = \exp(x)$$

*La solution approximative  $\varphi_n(x)$  de  $\varphi(x)$  est obtenue par la méthode de Hermite et Legendre avec les polynômes de Hermite et Legendre.*

**Tableau 4.** *Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans*

*l'exemple 3.2.4 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$  est calculée.*

$x$	<i>sol exact <math>\varphi</math></i>	<i>sol app <math>\varphi_n, H_n</math></i>	<i>sol app <math>\varphi_n, L_n</math></i>	<i>Erreur <math>H_n, n = 10</math></i>	<i>Erreur <math>L_n, n = 10</math></i>
0.0	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	1.794E-06	5.246E-05
0.1	1.105E+00	1.105E+00	1.105E+00	1.794E-06	5.246E-05
0.2	1.221E+00	1.221E+00	1.221E+00	1.794E-06	5.251E-05
0.3	1.350E+00	1.350E+00	1.350E+00	1.794E-06	5.273E-05
0.4	1.492E+00	1.492E+00	1.492E+00	1.794E-06	5.332E-05
0.5	1.649E+00	1.649E+00	1.649E+00	1.797E-06	5.457E-05
0.6	1.822E+00	1.822E+00	1.822E+00	1.809E-06	5.684E-05
0.7	2.014E+00	2.014E+00	2.014E+00	1.864E-06	6.063E-05
0.8	2.226E+00	2.226E+00	2.226E+00	2.058E-06	6.654E-05
0.9	2.460E+00	2.460E+00	2.460E+00	2.651E-06	7.545E-05
1.0	2.718E+00	2.718E+00	2.718E+00	4.248E-06	8.865E-05

## Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les équations Intégrales du type de Fredholm de la deuxième classe en utilisant la méthode des chaînes avec les polynômes d'Hermite et de Legendre afin d'obtenir des solutions approximatives. Nous avons constaté que la méthode est efficace et bonne pour les deux, plus la limite  $N$  est élevée, plus l'utilisation du programme MATLAB basé sur des notes est grande, étayée par des exemples qui ont montré l'efficacité de la méthode. Nous avons également constaté que les résultats obtenus en utilisant des polynômes de Hermite étaient meilleurs que les résultats obtenus en utilisant des polynômes de Legendre.

# Bibliographie

- [1] S. Abbasbandy, E. Shivanian, A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations, in *Numer Algor*, 56, (2011) 27–43.
- [2] Abdul-Majid Wazwaz, A first cours in integral equations, saint xavier university, USA, second edition, 2005.
- [3] A. Adawi, F. Awawdeh, A numerical method for solving linear integral equations, *Int. J. Contemp. Mathematics Sciences*, 10, (2009) pp 485-496.
- [4] G. Arfken, Laguerre functions, mathematical methods for physicists, 1985.
- [5] K. Atkinson, The numerical solution of Integral équations of the second kind, the press syndicate of the university of cambridge, united kingdom, 1997.
- [6] K. Atkinson, W. Han, Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework. Springer, 2001.
- [7] K. E. Atkinson, The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind, Cambridge University Press, Cambridge, pp50-52, 1997.
- [8] E. Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equations of the second kind, *App. Math. Comput*, 165 (2005) 223–227.
- [9] E. Babolian, H.R. Marzban, M. Salmani, Using triangular orthogonal functions for solving Fredholm integral equations of the second kind, *App. Math. and Comput.*, 201, (2008) 452-464.

- [10] B. Gagui, Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz, thèse de Doctorat, Université de Msila, 2015.
- [11] C. E. Grosch, S. A. Orszag, Numerical Solution of Problems in Unbounded Regions, J. Comp. Phys, 25, 1997.
- [12] A. Jerri. Introduction to integral equations with applications. John Wiley and Sons, INC, 1999.
- [13] R. Kress, Linear Integral Equations. Springer. Verlag, New York, 2d ed , pp224-225, 1999.
- [14] P. Lewis and J. P. Ward, The Finite Element Method, Principles and Applications. Addison-Wesley, 1991.
- [15] Nanshan Liu, Theory and Applications and Legendre Polynomials and Wavelets. The University of Toledo, 2008.
- [16] K. Maleknejad, N. Aghazadeh, Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method, Appl. Math. Comput, 161, (2005) 915–922.
- [17] M. Mohamadi , E. Babolian, S. A. Yousefi. A Solution For Volterra Integral Equations of the First Kind Based on Bernstein Polynomials, Int. J. Industrial Mathematics, 10, (1) (2018), 19-27
- [18] M. Nadir, Cours sur les équations intégrales, université M'sila 2008.
- [19] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials, in Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics, 4, ( 2014), pp 37-44.
- [20] M. Nadir, Solving linear integral equations with Fibonacci polynomials, Malaya Journal of Matematik, Vol. 6, No. 4, (2018), 711-715.
- [21] M. Nadir, D. Mustapha, Euler Series solutions for linear Integral equations AJMAA, Vol. 14, No. 2, Art. 11, (2017) pp 1-7.

- [22] M. Nadir, A. Rahmoune, Modified Method for Solving Linear Volterra Integral equations of the Second Kind Using Simpson's Rule, in International Journal Mathematical Manuscripts (IJMM), 1, (2) (2007), 133-140.
- [23] L. Peter Alpha, Pell-Lucas Series Solution for Fredholm Integral Equations of the Second Kind, International Journal of Science and Research, V. 10, No. 6, (2021) 1376-1383.
- [24] A. Rahmoune, Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales, Thèse de Doctorat, Université de Batna, 2011.
- [25] S. Yalçınbaş, M. Aynigül, Hermite Series solutions of linear Fredholm integral equations, Mathematical and Computational Applications, Vol. 16, No. 2, (2011), pp 497-506.
- [26] S. Yalçınbaş, M. Seizer, H. H. Sorkun., Legendre Polynomial Solutions of Higher-Order Linear Fredholm Integro-differential Equations, App. Math and Comput, 210, 2, (2009), 334-349.

**الملخص:** في هذه المذكرة نقوم بدراسة المعادلات التكاملية من نوع فريدولم من الصنف الثاني بإستعمال طريقة السلاسل بالاعتماد على كثيرات حدود هيرميت ولجندر لإيجاد الحلول التقريبية ومقارنتها مع الحلول الدقيقة.  
**الكلمات المفتاحية:** معادلات فريدولم التكاملية، كثيرات حدود هيرميت، كثيرات حدود لجندر، طرق عددية.

**Résumé:** Dans ce mémoire, nous étudions les équations intégrales du type de Fredholm de la deuxième type en utilisant les séries tronquée de Hermite et Legendre pour trouver des solutions approximatives et les comparer avec des solutions exactes.

**Mots-clés:** Équations intégrales de Fredholm, polynômes de Hermite, polynômes de Legendre, méthodes numériques.

**Abstract:** In this thesis we study the Integral Equations of the type of Fredholm of the second kind using the truncated Hermite and Legendre series to find approximate solutions and compare them with exact solutions

**Keywords:** Fredholm Integral Equations, Hermite polynomials, Legendre polynomials, numerical methods