REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Etude sur les opérateurs sur -nucléaire fortementent Lipschitzien

---

Présenté par :
DEHAIMI Chahrazad

Devant le jury composé de :

M^r *SAADI* Khalil	prof	Université de M'sila	**Président**.
M^r *TIAIBA* Abdemoumen	prof	Université de M'sila	**Encadreur**.
M^r *YAHI* Rachid	M.C.B	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2020/2021

إهداء

إلى الينبوع الذي لا يمل العطاء إلى من حاكت سعادتي بخيوط منسوجة من قلبها إلى

والدتي العزيزة

إلى من سعى وشقي لأنعم بالراحة والهناء، الذي لم يبخل بشيء من أجل دفعي في طريق النجاح، الذي علمني أن أرتقي سلم الحياة بحكمة وصبر إلى

والدي العزيز

إلى من حبهم يجري في عروقي ويلهج بذكراهم فؤادي إلى

إخواني وأخواتي

إلى من شجعني وشاركني السعادة والحزن، وشاطرني لحظات النجاح والفشل إلى

زوجي العزيز

إلى من سرنا سو يا ونحن نشق الطر يق معا نحو النجاح والإبداع إلى من تكاتفنا يدا بيد ونحن نقطف زهرة تعلمنا إلى

صديقاتي وزميلاتي

إلى من علموني حروفا من ذهب وكلمات من درر وعبارات من أسمى وأجلى عبارات في العلم، إلى من صاغوا لي من علمهم حروفا ومن فكرهم منارة تنير لنا مسيرة العلم والنجاح إلى

أساتذتي الكرام.

أهدي هذا العمل المتواضع راجية من المولى عز وجل أن يجد القبول والنجاح.

دهيمي شهرزاد

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

Je tiens à remercier sincèrement Mr. ABDEMOUMEN TIAIBA, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour les efforts qu'il a consenti tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à tous les membres de jury .Mr,...khalil...Saadi .. et...Mr. Yahi Rachid qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes collègues ,mes amis,mes parents et tous mes fréres et mes soeurs pour leurs aides et leurs encouragements.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé de loin ou de près à réaliser ce travail.

Merci

Table des matières

Introduction

Pour enrichir notre mémoire, on donne comme un historique de quelques lignes. En effet. Le concept des opérateurs nucléaire remonte à Grothendieck au début des années cinquante. plus tard, il a été généralisé aux opérateurs $p-$nucléaires de premier plan $(1 \leq p < \infty)$ *par Pietsch* [15]. *Plusieurs auteurs,* [7, 9, 10, 11, 12, 15], *ont développé des nombreuses propriétés concernant cette notion notamment Persson et Rienov*[14, 16]. *En 2012, Chen et Zheng, voire [4], ont généralisé le concept d'opérateurs $p-$ nucléaires à cas des opérateurs Lipschitzien , où le domaine de ces opérateurs est un espace métrique qui n'a pas besoin d'être un espace normé, ils ont publié un article intitulé par «Lipschitz* (p, r, s) *-opérateurs intégraux et opérateurs Lipschitz* $(p, r, s)-$*nucléaires ». Belacel et Chen ont défini et prenez note des propriétés des opérateurs Lipschitz* $(p, r, s)-$*intégraux et opérateurs Lipschitz* $(p, r, s)-$ *nucléaires les résultats sont consultables en* [3].

Notre mémoire s'inscrit dans le cadre de la théories des opérateurs pour ce la on va prendre en étude approfondi un article des Monsieur .A ; Belacel et mademoiselle Khedidja Bey, qu' est paru dans le journal : Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis en 2019 *avec l'intitulé de : Strongly Lipschitz up-Nuclear Operators. Voire [25].*

Dans cet article, les auteurs introduisent le concept d'opérateurs up$-$nucléaires Lipschitzien . En présentant une étude la classe d'opérateurs up$-$nucléaires de Lipschitzien dont l'analogue linéaire a été trouvé dans [14] *où ils nous a donné le théorème de factorisation. Ils montrent autres résultats, qui permettent une transposition de l'opérateur $p-$nucléaire au* *fortement Lipschitz est* $p-$*nucléaire et nous ont trouvé les mêmes résultats avec les opérateurs fortement Lipschitzien* $p-$*nucléaires qui sont introduits et étudiés par Chen et Zheng dans* [4].

Nous avons essayé de faire en sorte que le mémoire soit composé de trois chapitres.

Généralement lors de la préparation d'un mémoire de fin d'études. Le premier chapitre est une bonne regroupements des outils mathématiques qui il faut qu'ils soient conformément nécessaires au séquelle de travail. En effet le notre est un présentation de nombreuses définitions, théorèmes et résultats au nom de préliminaires qui comptent la dont : Les espaces vectoriels, les espaces métriques, les espaces de Banach. Les applications lipschitziennes. et opérateurs linéaires fortement $p-$*sommants. La fin de chapitre parle aussi a propos des produit tensoriel projectif.*

Si nous voulons parler du deuxième chapitre on peut être considéré simplement comme un prélude aux résultats à atteindre. Dans ce chapitre on va prendre en étude un peut détaillé sur les opérateur $p-$*nucléaires et les opérateurs* $p-$*nucléaire Lipschitzinien . La dont on citera les théorèmes de domination de Pietsch. a la fin de ce chapitre on donne quelques résultats d'inclusions et relations entre ces types d'opérateurs.*

A la fin on porte notre dernier chapitre qui est l'essentielle de ce travail. La on peut dire que les auteurs introduisent la notion d'opérateurs fortement up-nucléaires Lipschitzien. Après une bonne identification mathématiques a ce nouveau type d'opérateurs et parmi plusieurs résultats, ils nous a prouvé un analogue du théorème de factorisation pour ces classes et donnent une caractérisons à leurs conjugués.

Notation

- B_X : *Boule unité fermée de l'espace* X.
- B_{X^*} : *Boule unité fermée de l'espace* X^*.
- $\mathbb{k}$: *Corps des scalaires* ($\mathbb{k} = \mathbb{R} ou\ \mathbb{C}$).
- $d(.,.)$: *Distance*.
- e : *Elément neutre ou distingué, on prend* 0 *si* X *est normé*.
- $\mathcal{M}_0$: *Ensemble des espaces métriques complets pointés.*
- $L(X,Y)$: *Ensemble de tous les opérateurs linéaires de* X *dans* Y.
- $\mathcal{N}_p^m(X_1,...,Xm;Y)$: *Ensemble des opérateurs* $m-$*linéaires Cohen* $p-$*nucléaires*.
- $\mathcal{N}_p^{m+}(E_1,...,Em;F)$: *Ensemble des opérateurs* $m-$*linéaires positifs Cohen* $p-$*nucléaires.*
- $D_{st,p}^L(X,E)$: *l'ensemble de tous fortement Opérateurs p-sommation Lipschitz entre* X*et* E.
- $Lip_k(X,Y)$: *l'ensemble des applications lipschitziens de raport* k *de* X *dans* Y.
- $\mathcal{N}_p$: *L'ensemble de tous les opérateurs linéaires* $p-$*nucléaires* $(1 \leq p < \infty)$.
- $\mathcal{N}_p^L$: *L'ensemble de tous les opérateurs* $p-$*nucléaires de Cohen Lipschitz* $(1 \leq p < \infty)$.
- $C(K)$: *Espace des fonctions continues sur un compact* K *à valeurs réelles*.
- $\mathcal{L}(X,Y)$: *Espace des opérateurs linéaires continus de* X *dans* Y.
- $Lip(X;Y)$: *Espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de*X *dans* Y.
- $Lip_0(X;Y)$: *Espace de toutes les applications lipschitziennes de* X *dans* Y *nulles au point* e.

- $\mathcal{L}_f(X,Y)$: *L'espace des opérateurs de rang finie* .
- Æ(X) : *Espace de Arens-Eells.*
- $\ell_p(X)$: *Espace des suites* $(x_i)_{i=1}^n \in X$ *absolument* $p-$*sommables.*
- $\Pi_p^L(X,Y)$: *Espace des opérateurs* $p-$*sommants de* X *dans* Y .
- $D_p(X,Y)$: *Espace des opérateurs fortement* $p-$*sommants de* X *dans* Y.
- $\Pi_p(X,Y)$: *Espace des opérateurs* $p-$*sommants de* X *dans* Y .
- $\mathcal{N}_p(X,Y)$: *Espace des opérateurs* $p-$*nucléaires de* X *dans* Y.
- $\mathcal{N}_{(r;r_1,\ldots,r_n;s)}\ (E_1,...,Em;F)$: *Espace des opérateurs* $n-$*linéaires* $(r,r_1,...,r_n;s)-$*nucléaires.*
- $\mathcal{F}(X)$: *L'espace libre de Lipschitz de* X.
- i_X : *Injection canonique.*
- $\mathcal{I}(X,Y)$: *Idéal des opérateurs linéaires pour tous* X *et* Y.
- p^* : *L'exposant conjugué de* p *(i.e.,*$\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$).
- X^* : *Le dual topologique de* X.
- X^{**} : *La bidual topologie de* X .
- T^* : *L'adjoint d'opérateur* T.
- T_L : *La linéarisation de l'opérateur multilinéaires (*$m-$*linéaires)* T.
- $\langle .,.\rangle$: *Le crochet de dualité*.
- $X\otimes_\varepsilon Y$: *Le produit tensoriel injectif de* X *par* Y.
- $X\otimes_\pi Y$: *Le produit tensoriel projectif de* X *par* Y.
- $X\hat{\boxtimes}_\varepsilon E$: *Le produit tenseur de Lipschitz injectif de* X *et* E.
- $X\hat{\boxtimes}_\pi E$: *Le produit tenseur projectiv de* X *et* E.
- $\|\ .\ \|_L$: *la norme de l'espace lipschitziennes.*
- μ : *Mesure de probabilité régulière positive sur l'espace compact* Ω.
- $m_{x,x'}$: *Molécule définie par* : $m_{xx\prime}=1_{\{x\}}-1_{\{x\prime\}}$ ***avec*** $x,x\prime\in X$.
- $X\boxtimes Y$: *Produit tenseur de Lipscitz entre* X *et* Y.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre. On va cité quelques notions et résultats aussi concepts fondamentales pour une bonne littérature de ce mémoire. Là dont on va vous donner des terminologies comme quelques espaces importants qui sont des espaces vectorielles des opérateurs qui soient normalement très utiles dans la suite de notre travail, on a bien citer les opérateurs linéaires, Les espaces vectoriels les espaces métriques, les espaces de Banach. Les applications lipschitziennes. et opérateurs linéaires fortement $p-$sommants. La dont on parler aussi des Produit tensoriel projectif comme un outil de quelques définitions. Pour plus de détails voir [4] , [6] , [7] , [9] , [10] , [13] , [16] et [17].

1.1 *Des espaces utiles*

1.1.1 *Les espaces vectoriels*

Définition 1.1.1 *Soit $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et X un ensemble muni de deux lois de compositions,*

Une lois interne est dite l' additive

$$\begin{array}{rll} (+): & X \times X & \longrightarrow X \\ & (x,y) & \longrightarrow x+y \end{array}.$$

L'autre lois externe est dite la multiplicatioin

$$\begin{array}{rl} (.) : \mathbb{k} \times X & \longrightarrow X \\ (x, y) & \longrightarrow x.y \end{array} .$$

On dit que $(X, +, .)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{k}$ *si :*

1. $(X, +)$ *est un groupe commutatif, c'est-à-dire,*
   - $\forall\ x\ ,\ y \in X : x + y = y + x$ *(commutatif).*
   - $\exists\ e \in X, \forall x \in X : x + e = x$ *(élément neutre).*
   - $\forall x \in X, \exists y \in X : x + y = y + x = e$ *(élément symétrique).*
   - $\forall x, y, z \in X : (x + y) + z = x + (y + z)$ *(associative).*
2. *Pour* $x, y \in X$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ *on a*
   - $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
   - $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
   - $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$.

Définition 1.1.2 *(Sous-espace vectoriel) Soit* $(X, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel et soit* E *une partie non vide de* X *(i.e.*$E \subset X$*). L'ensemble* E *est appellé un sous-espace vectoriel de* X *si, et seulement si*

1. $e \in E$ *(*e *est l'élément neutre de* X*).*
2. $x + y \in E$ *pour tout* $x, y \in E$.
3. $\lambda.x \in E$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{k}$ *et tout* $x \in E$.

Exemple 1.1.1 *Soit* $\mathbb{R}^2$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. L'ensemble* $E = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$*est un sous-espaces vectoriel de*$\mathbb{R}^2$ *.*

Remarque 1.1.1 *Soit* $(X, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel. Les deux ensembles* X *et* $\{e\}$ *sont des sous espaces vectoriel de* X *.*

1.1.2 *Les espaces mètriques*

Définition 1.1.3 *Une distance sur un ensemble X est une application*

$$\begin{array}{rcl} d: \ X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longrightarrow & d(x,y) \end{array}$$

telle que pour tous $x;\ y;\ z \in X$

1. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ *(Séparation).*
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *(Symétrie).*
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(Inégalité triangulaire).*

Remarque 1.1.2 *Un espace métrique est un couple (X,d) oŭ X est un ensemble et d est une distance sur X.*

Définition 1.1.4 *Soit (X, d_X, e) est un espace métrique pointé (i.e : e un élément neutre ou distingué).*

Notation 1.1.1 *On note par $\mathcal{M}_0$ ={espaces métriques complets pointés} .*

Exemple 1.1.2 *L'ensemble des réels muni de la distance $d(x,y) = \mid x - y \mid$ est un espace métrique.*

Définition 1.1.5 *(Produit des espaces métriques)*

Soit $\{(X_i\ , d_i\ , e_i), i \in I\}$ une famille des espaces métriques dans $\mathcal{M}_0$, on défnit $(\Pi^\infty X_i, d, e)$ l'ensemble des $x = (x_i)_{i \in I}$

tel que $\sup\limits_{i \in I} d_{x_i}(x_i, e) < \infty$ avec la métrique

$$d(x;y) = \sup_{i \in I} d_{x_i}(x_i, y_i)$$

où l'élément distingué $e = (e_i)_{i \in I}$. Nous avons $(\Pi^\infty X_i, d, e) \in \mathcal{M}_0$.

1.1.3 *Les espaces normés*

Définition 1.1.6 *Soit X un espace vectoriel sur $\Bbbk = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Une norme sur X est une application de X dans $\mathbb{R}_+$ ayant les propriétés suivantes :*

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *(défini)*
2. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ *(positivité)*
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \forall x \in X, \forall \lambda \in \Bbbk$ *(homogénéité)*
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$ *(inégalité triangulaire).*

Remarque 1.1.3 *Si on supprime le (1), on dit que $\|.\|$ est une semi-norme.*

Soit$\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel X sont équivalentes si

$$\exists \alpha, \beta \in]0, +\infty[, \forall x \in X : \alpha\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2.$$

Exemple 1.1.3 *Les trois normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et$\|.\|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

1.1.4 *Les espaces de Banach*

Définition 1.1.7 *On appelle un espace de Banach tout espace normé complet.*

Proposition 1.1.1 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé alors :*

1. *Toute suite convergente est de Cauchy, mais l'inverse n'est pas vraie.*
2. *Si toute suite de Cauchy est convergente, alors $(X, \|.\|)$ est complet.*

Proposition 1.1.2 *Un espace de Banach $(X, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé complet. Autrement dit X est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente est une série convergent.*

La boule unité fermée de l'espace X est définie par :

$$B_X = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

1.2 *Les applications linéaires*

1.2.1 *Les applications linéaires*

Définition 1.2.1 *Soit $u : X \longrightarrow Y$ une application entre deux espaces de Banach définis sur le mémé corps $\Bbbk$. Elle est un application linéaire si et seulement si*

$$\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \Bbbk : u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y) \; .$$

On note par $L(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires. On le muni de deux opérations algébriques suivantes :

1. $\forall x \in X \; (u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x)$.
2. $\forall x \in X, \forall k \in \Bbbk, \quad u(k.x) = k.u(x)$.

Définition 1.2.2 *L'application linéaire u est continue (borné) s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall x \in X : \| u(x) \| \leq C \| x \| \; .$$

Notation 1.2.1 *On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues.*

On défnit une norme des opérateurs qui est $\| \, . \, \|$ sur $\mathcal{L}(X, Y)$ par :

$$\| u \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| u(x) \| \; .$$

On a également

$$\| u \| = inf\{C : \textit{vérifier l'}\text{inégalité } \textit{précédente}\}.$$

Alors, la quantité $\| u \|$ défnit une norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$.

Remarque 1.2.1 *Si Y est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est aussi un espace de Banach.*

Définition 1.2.3 *(Dual topologique) Soit X un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note X^* l'espace de Banach des formes linéaires continues sur X, (i :e).,*

$$X^* = \mathcal{L}(X; \mathbb{R}).$$

Notons ici que l'espace X^* est toujours complet pour la norme des opérateurs.

Proposition 1.2.1 *Soit X un espace de Banach. Pour tout $x \in X$ on a,*

$$\| x \| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} | \langle x, x^* \rangle | .$$

1.2.2 *L'adjoint d'un opérateur linéaire*

Définition 1.2.4 *Soient X, Y deux espaces vectoriels normés. Pour un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(X; Y)$, on definie l'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(Y^*; X^*)$ par :*

$$T^*(y^*)(x) = y^*(Tx) \ (i.e.,) \ \langle x \ ; T^*y^* \rangle = \langle Tx \ ; y^* \rangle \ ,$$

pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$, T^*est appelé adjoint de T.

Proposition 1.2.2 1) *Soit $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ alors T^* linéaire et $||T|| = ||T^*||$.*

2) *Pour tout $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y; Z)$ on a $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.*

1.3 *Les applications Lipschitziennes*

1.3.1 *Les applications Lipschitziennes*

Définition 1.3.1 *Une application $f : (X,d) \longrightarrow (Y,\delta)$ telle que X et Y deux espaces vectorieles muni avec deux distances d respectivement δ. f est dite application Lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que*

$$\forall x, y \in X;\ \delta(f(x), f(y)) \leq k\ d(x,y) \tag{1.3.1}$$

Remarque 1.3.1 *Si $k = 1$;f est dit non expansive, Si $k < 1$; f est dit contraction.*

Notation 1.3.1 *On notera par $Lip_k(X,Y)$ l'ensemble des applications Lipschitziens de raport k de X dans Y, et $Lip(X;Y)$ la réunion de ces ensembles .*

Définition 1.3.2 *Pour une fonction Lipschitzienne f on défnit la constante de Lipschitz par :*

$$\begin{aligned} \| f \|_{lip} &= lip(f) \\ &= \sup_{x \neq y} \frac{\delta(f(x), f(y))}{d(x,y)} \\ &= inf\{k;\ k \text{ est la constante de la défnition } (1.3.1)\} \end{aligned}$$

1.3.2 *L'espace* $Lip(X)$

Définition 1.3.3 *Soit X un espace métrique et Y un espace de Banach .*

On note par $Lip(X,Y)$ l'espace de toutes les fonctions Lipschitziennes de X dans Y .

$$Lip(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \text{ fonctions Lipschitziennes}\},$$

muni de la norme

$$\| f \|_{Lip(X;Y)} = max\{\| f \|_{\infty} \quad , Lip(f)\}.$$

Remarque 1.3.2 *Si* $Y = \mathbb{R}$ *, alors* $Lip(X, Y) = Lip(X)$ *.*

$Lip(X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\| f \|_{Lip(X;Y)}$ pour tout espace métrique X le prédual de $Lip_0(X)$. Soit X un espace métrique complét à l'elément distingué $X = (X, d, e)$

$$X^{\#} = Lip_0(X) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Lipschitzienne telle que } f(e) = 0 \}.$$

Proposition 1.3.1 *L'espace $Lip_0(X)$ est complet pour tout espace métrique pointé X.*

1.3.3 *Adjoints d'opérateurs Lipschitziens*

Définition 1.3.4 *Soient X un espace métrique pointé et Y un espace de Banach. Sawashima a défini l'adjoint Lipschitzien $T^{\#} : Lip_0(Y) \longrightarrow Lip_0(X)$ d'une application lipschitzienne $T \in Lip_0(X, Y)$ par la formule :*

$$\begin{array}{rccc} T^{\#}: & Lip_0(Y) & \longrightarrow & Lip_0(X) \\ & f & \longrightarrow & T^{\#}(f) = f \circ T \end{array}$$

L'opérateur $T^{\#}$ est linéaire et continue de plus $\| T^{\#} \| = Lip(T)$. La restriction de $T^{\#}$ sur E^* défnit un opérateur linéaire continue appelé l'opérateur transposer Lipschitzien de T.

1.3.4 *Espace de Arens-Eells*

Définition 1.3.5 *Soit (X, d, e) un espace métrique pointé, une molécule sur X est une fonction $m : X \longrightarrow \mathbb{R}$ a support fini satisfaisant sur X que*

$$\sum_{x \in supp(m)} m(x) = 0$$

On note par $\mathcal{M}(X)$ l'espace vectoriel des molécules sur X . On peut écrire

$$m = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j (\mathbf{1}_{\{x_j\}} - \mathbf{1}_{\{x'_j\}}).$$

On peut écrir

$$m = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j m_{x_j, x'_j}.$$

La condition $\sum_{j=1}^{n} m(x_i) = 0$, montre que cette réprésentation existe.
On pose :

$$\| m \|_{\mathcal{M}(X)} = inf\{\sum_{j=1}^{l} | \lambda | \ d(x_j, x'_j) \text{ sur toute les réprésentation } \}.$$

Il s'ensuit que $\| m \|_{\mathcal{M}(X)}$ est une norme sur l'espace $\mathcal{M}(X)$. On note par Æ(X, d_X) le complété de l'espace normé $(\mathcal{M}(X), \| \cdot \|_{\mathcal{M}(X)})$.

Théorème 1.3.1 *Soit X un espace métrique pointé, alors*

$$Lip_0(X) = \text{Æ}(X)^*.$$

Théorème 1.3.2 *(Linéairisation) Soit X un espace métrique pointé, soit E un espace de Banach et soit $T : X \longrightarrow E$ un opérateur Lipschitzien tel que $T(0) = 0$.*

Alors ; il existe un unique opérateur linéaire borné $u : Æ(X) \longrightarrow E$

tel que

$$T : u \circ i_X \text{ et } \| T \| = Lip(T)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & Æ(X) & & u \\ i_X & & \uparrow & & \searrow \\ & & X & \underrightarrow{T} & E \end{array} .$$

Remarque 1.3.3 *On note par $T_L = u$ tel que T_L :linéaresation de T.*

1.4 *Les opérateurs linéaires p − sommants*

1.4.1 *Opérateurs linéaires $p-$sommants*

Définition 1.4.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, X et Y deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ on dit que T est un opérateur $p-$sommant s'il existe une constante positive C tel que pour tout $(x_i)_{i=1}^n \subset X$, ona*

$$(\sum_{i=1}^{n} \| T(x_i) \|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} | \langle x_i, \varphi \rangle |^p)^{\frac{1}{p}}.$$

(i-e),

$$\| T(x_i)_{i=1}^n \|_p \leq C \| (x_i)_{i=1}^n \|_{p,w} \tag{1.4.1}$$

On note l'espace des opérateurs linéaires $p-$sommants de X dans Y par :

$$\Pi_p(X, Y) = \{ T : X \longrightarrow Y, T \text{ est } p-sommants \}$$

est muni de la norme

$$\pi_p(T) = inf\{C : C \text{ verifait l'inegalité } (1.4.1)\}.$$

Remarque 1.4.1 *Si $T \in \Pi_p(X, Y)$ d'après la définition de l'inférieure alors on a ;*

$$\| T(x_i)_{i=1}^n \|_p \leq \pi_p(T) \| (x_i)_{i=1}^n \|_{p,w}.$$

Proposition 1.4.1 *Soit $T \in \Pi_p(X, Y)$*

1. $\| T \| \leq \pi_p(T)$.
2. *($\Pi_p(X, Y)$, $\pi_p(T)$) est un espace normé .*
3. *($\Pi_p(X, Y)$, $\pi_p(T)$) est un ideal de Banach.*

1.4.2 *Opérateurs linéaires fortement $p-$sommants*

Définition 1.4.2 *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et X, Y deux espaces de Banach, un opérateur linéaire boré $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est Cohen fortement $p-$sommant s'il transforme toute suite $p-$sommable à une suite Cohen fortement $p-$sommable. C'est-à-dire l'opérateur*

$$\begin{array}{rccc} T : & l_p(X) & \longrightarrow & l_p(Y) \\ & (x_i)_{i=1}^\infty & \longrightarrow & (T\ (x_i))_{i=1}^\infty \end{array}$$

est bien défini.

Notation 1.4.1 * $D_p(X; Y) = \{T : X \longrightarrow Y, \quad T$ *est Cohen fortement $p-$sommant$\}$.*

* *Pour $p = 1$, $D_1(X; Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.*

Remarque 1.4.2 *Si $T \in D_p(X; Y)$ alors*

$$\| T \| \leq d_p(T).$$

Proposition 1.4.2 $(D_p(X,Y);d_p(T))$ *est un idéal de Banach*

1.4.3 *Opérateurs positif fortement* $p-$*sommant*

Théorémes de domination et de factorisation de Pietsch

Théorème 1.4.1 *L'opérateur* $T \in L(X;F)$ *est positif fortement* $p-$*sommant* $(1 < p \leq \infty)$ *; si et seulement si il existe une positive constante* $C > 0$ *et une mesure de probabilité de Radon sur* $B^+_{F^{**}}$ *tels que pour tous* $x \in X^+$ *et* $y^* \in F^*$ *on a :*

$$| \langle T(x), y^* \rangle | \leq C \parallel x \parallel \left(\int\limits_{B^+_{F^{**}}} \langle | \, y^* \, |, \psi \rangle^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} \tag{1.4.2}$$

En plus, dans ce cas

$$d^+_p(T) = inf\{C; \text{vérifiant l'inégalité } (1.4.2)\}.$$

Théorème 1.4.2 *(Théoréme de factorisation de Pietsch)*

Soient $1 < p \leq \infty$ *; tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ *;* X *est un espace de Banach et* F *un Banach réticulé et* $T \in \mathcal{L}(X;F)$ *: Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $T \in D^+_p(X,F)$.
2. *Ils existent une mesure de probabilité de Borel* μ *sur* $B^+_{F^{**}}$ *; un espace de Banach* $L^{p*}_0(B^+_{F^{**}},\mu)$ *; et un opérateur linéaire continu* $\upsilon : X \longrightarrow (L^{p*}_0(\mu))$

tels que

$$k_F \circ T = i^*_{F^*} \circ J^*_{p^*,0} \circ \upsilon.$$

1.4.4 *Idéaux d'opérateurs linéaires*

Définition 1.4.3 *Un opérateur de rang fini est un opérateur linéaire continu T de X dans Y si*

$$dimT(X) < 1.$$

Notation 1.4.2 *L'espace des opérateurs linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X,Y)$.*

Exemple 1.4.1 *Si $dim(X) = n \Longrightarrow dimT(X) \leq dim(X) = n$; donc $T \in \mathcal{L}_f(X,Y)$.*

Proposition 1.4.3 *Soient X, Y deux espaces de Banach alors ;*

$$T \in \mathcal{L}_f(X,Y) \Longleftrightarrow T(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x) y_k$$

ou $x_k^* \in X^*$ et $y_k \in Y$; $1 \leq k \leq n$.

Définition 1.4.4 *Une classe $\mathcal{I}$ des opérateurs linéaires bornés, est dite idéal des opérateurs lineaires pour tous X et Y qui sont des espaces de Banach si et selement si :*

a) $\mathcal{I}(X,Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$ et

$$\mathcal{L}_f(X,Y) \subset \mathcal{I}(X,Y).$$

b) Propriété d'idéal :

$$E \quad \underset{\mathcal{L}_f(E,X)}{\overset{u}{\longrightarrow}} \quad X \quad \underset{\mathcal{I}(X,Y)}{\overset{T}{\longrightarrow}} \quad Y \quad \underset{\mathcal{L}(Y,F)}{\overset{v}{\longrightarrow}} \quad F$$

alors

$$v \circ T \circ u \in \mathcal{I}(E,F).$$

De plus, si la norme

$$\| \,.\, \|_{\mathcal{I}}\colon \ \mathcal{I}(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

satisfait :

1) $(\ \mathcal{I}(X,Y)\ ,\ \|\ .\ \|_{\mathcal{I}})$ *est un espace Banach (Quasi Banach) .*

2) $\|\ id_{\mathbb{k}}\ \|_{\mathcal{I}}= 1.$

3) $\|\ v \circ T \circ u\ \|_{\mathcal{I}} \leq \|\ v\ \| \|\ T\ \|_{\mathcal{I}} \|\ u\ \|$ *.*

alors ; $(\ \mathcal{I}(X,Y)\ ,\ \|\ .\ \|_{\mathcal{I}})$ *s'appele idéal de Banach (Quasi Banach) des opérateurs linéaires .*

Exemple 1.4.2 *Les espaces* $\mathcal{L}_f(X,Y)$ *et* $\mathcal{L}(X,Y)$ *sont des idéaux linéaires .*

Proposition 1.4.4 *est un espace de Banach. Si* $F = \mathbb{R}$*, alors* $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = \mathcal{L}^r(E,\mathbb{R})$*.*

1.4.5 Les espaces des suites $p-$sommables

Tout d'abord,si X un espace de Banach, nous noterons par :

$X^{\mathbb{N}} = \{x = (x_n)_n\ /\ x_n \in X,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ espace de toutes les suites $(x_n)_n$ d'éléments de X. L'ensemble $X^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi d'addition suivante,

$$(x_n)_n + (y_n)_n := (x_n + y_n)_n.$$

et la loi de multiplication suivante,

$$\lambda.(x_n)_n := (\lambda.x_n)_n \text{ ;où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Définition 1.4.5 (L'espace des suites $p-$sommables) *Une suite* (x_n) *(resp.* $(x_i)_{1\leq i\leq n}$*) dans* X *est absolument* $p-$*sommables si la suite scalaire* $(||x_n||)$*(resp.* $(||x_i||)_{1\leq i\leq n}$*) est dans* l_p

On note $l_p(X)$ (resp. $l_p^n(X)$) l'espace des suites (x_n) (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X absolument $p-$sommables muni de la norme:

$$\begin{cases} ||(x_n)_n||_{l_p(X)} = ||(x_n)_n||_p = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||^p)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leq p \leq \infty, \\ ||(x_n)_n||_{l_\infty(X)} = ||(x_n)_n||_\infty = \sup\limits_n ||x_n|| \qquad \text{si} \qquad p = \infty. \end{cases}$$

Définition 1.4.6 *Une suite (x_n) (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est faiblement $p-$sommables si la suite scalair $(\varphi(x_n))$ (resp.$(\varphi(x_i)_{1\leq i\leq n})$) est dans l_p pour tout $\varphi \in X^*$.*

On note $l_p^w(X)$ (resp. $l_{p,w}^n(X)$) l'espace des suites (x_n) (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X faiblement $p-$sommables telle que

$$l_p^w(X) := \{(x_n)_n \subset X : (\langle x_n, \varphi\rangle)_n \in l_p, \forall \varphi \in X^*\}$$

muni de la norme :

$$\begin{cases} ||(x_n)_n||_{p,w} = ||(x_n)_n||_{l_p^w(X)} = \sup\limits_{\varphi\in B_{X^*}} (\sum\limits_{i=1}^{n} |\langle x_n, \varphi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 1 \leq p \leq \infty, \\ ||(x_n)_n||_{l_\infty^w(X)} = \sup\limits_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sup\limits_{n} |\langle x_n, \varphi\rangle|\right) & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

1.5 ***Opérateurs Lipschitziens p − sommants***

Définition 1.5.1 *Soient X, Y deux espaces métriques. Un application Lipschitzienne $T : X \longrightarrow Y$ est dite Lipshitzienne $p-$sommant $(1 < p < \infty)$, s'il existe une constante $C > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \subset X, \forall (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathbb{R}_+$,ona*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_Y(T(x_i), T(y_i))^p \leq C^p \sup_{f\in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |f(x_i) - f(y_i)|^p \tag{1.5.1}$$

La classe des opérateurs Lipschitzienes $p-$sommant de X dans Y est notée par $\Pi_p^L(X,Y)$.

Muni de la norme

$$\pi_p^L(T) = inf\{C; C \ \ \textit{vérifiant l'inégalité } (1.5.1)\}$$

1. *Dans la défnition précédente, on peut prendre les $\alpha_i = 1; \forall 1 \leq i \leq n$.*
2. *$Lip(T) \leq \pi_p^L(T)$; pour tout $T \in \Pi_p^L(X,Y)$.*

Théorème 1.5.1 *Soient $(1 < p < \infty)$, supposons que X et Y sont des espaces de Banach. Alors,*

Si T est un opérateur linéaire borné de X dans Y ,on a

$$\pi_p^L(T) = \pi_p(T).$$

1.5.1 *Idéal des opérateurs Lipschitziens*

Définition 1.5.2 *Soient $X; Y; E; F$ des espaces métriques. Soient $v : E \longrightarrow X$; $w : Y \longrightarrow F$ des applications Lipschitziennes et $T : X \longrightarrow Y$, un opérateur Lipschitz $p-$sommant. Alors l'opérateur wTv est Lipschitz $p-$sommant et*

$$\pi_p^L(wTv) \leq Lip(w)\pi_p^L(T)Lip(v).$$

1.5.2 *Opérateurs Lipschitzien fortement $p-$sommants*

Définition 1.5.3 *Soient $1 < p \leq \infty$. Une Opérateur $T \in Lip_0(X, E)$ est appelée fortement p-sommation de Lipschitz, s'il y a un espace de Banach F et un opérateur $S \in D_p(F, E)$*

[c'est-à-dire $S^* \in \Pi p(E^*, F^*)$] tel que

$$|\langle y^*, T(x) - T(x')\rangle| \leq d(x, x')S^*(y^*). \tag{1.5.2}$$

Notation 1.5.1 *pour tout $x, x' \in X$, $y^* \in E^*$. Nous écrivons $D_{st,p}^L(X, E)$ pour l'ensemble de tous opérateurs $p-$sommation fortement Lipschitz entre X et E.*

Proposition 1.5.1 *Pour chaque $T \in D_{st,p}^L(X, E)$, soit $d_{st,p}^L(T)$ désignent l'infimum de $dp(S)$, pour S satisfaisant l'inégalité ci-dessus.*

Remarque 1.5.1 *Pour $p = 1$, on définit $D^L_{st,1}(X, E) = Lip_0(X, E)$. Notez que si T est un opérateur linéaire entre les espaces de Banach E et F alors,*

$T \in D^L_{st,p}(X, E)$ si et seulement si $T \in D_p(E, F)$.

Définition 1.5.4 *Soit $1 < p \leq q \leq \infty$. Il est bien connu que chaque opérateur absolument $q-$sommant est un opérateur absolument p-summant . Ensuite,*

il ressort clairement de la définition que

$$D^L_{st,q}(X, E) \subseteq D^L_{st,p}(X, E). \tag{1.5.3}$$

Notre premier résultat concernant les opérateurs fortement $p-$sommants Lipschitz qui relie avec les opérateurs linéaires fortement $p-$sommants .

Proposition 1.5.2 *Soient $1 < p \leq \infty$ et $T \in Lip_0(X, E)$. Puis $T \in D^L_{st,p}(X, E)$ si, et seulement si, $T_L \in D_p(AE(X), E)$.*

Dans ce cas, $d^L_{st,p}(T) = dp(T^L)$.

Théorème 1.5.2 *Soit $1 < p \leq \infty . T \in Lip_0(X, E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$T \in D^L_{st,p}(X, E)$.*
2. *Il existe une constante C et une mesure de probabilité μ sur$B_{E^{**}}$ telle que pour tout $x, x' \in X, y^* \in E^*$ on a*

$$|y^*, T(x) - T(x')| \leq Cd(x, x') \, (\int\limits_{B_{E^{**}}} |\varphi(y^*)\,|^{p'} d\mu(\varphi))^{\frac{1}{p'}}.$$

3. *Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $(x_i)_{i=1}^n$,$(x_i')_{i=1}^n$ dans X, tous $(y_i^*)_{i=1}^n \subset E^*$ et $(b_i)_{i=1}^n$ dans $\mathbb{R}$ nous avons bien que*

$$\sum_{i=1}^n | b_i || \langle y_i^*, T(x_i) - T(x_i') \rangle | \leq C(\sum_{i=1}^n | b_i |^p \, d(x_i, x_i')^p)^{\frac{1}{p}}) \sup_{\varphi \in B_{E^{**}}} (\sum_{i=1}^n | \varphi(y_i^*) \, |^{p'})^{\frac{1}{p'}}.$$

De plus, le minimum des constantes $C \geq 0$ dans les inégalitésqui sont dans (2) et (3) est noté par : $d_{st,p}^L(T)$.

1.6 Espaces de Banach réticulés

Définition 1.6.1 *Soit E un ensembel vide un espace vectoriel muni d'une relation binaire d'ordre notée " $\leq$ "*

(*i*) $\forall x \in E$, $x \leq x$ (*réflexive*),

(*ii*) $x, y \in E$, $x \leq y$ *et* $y \leq x \Longrightarrow x = y$ (*antisymetrique*),

(*iii*) $x, y, z \in E$, $x \leq y$ *et* $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (*transitive*).

Définition 1.6.2 *Un espace vectoriel ordonné X la dont pour les quel toute paire d'éléments à une borne supérieur est appelé espace vectoriel réticulé,i.e.,*

$$\forall x, y \in X, \sup(x, y) \in X \ \ \textit{et} \ \ \inf(x, y) \in X.$$

Définition 1.6.3 *Soit X un espace de Banach réel partiellement ordonné. X est un espace de Banach réticulé (resp. complètement réticulé) si*

$$\begin{cases} 1) \quad \forall x, y, z \in X & x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z, \\ 2) \quad \forall x \in X,\, \forall a \in \mathbb{R}_+ & x \geq 0 \Longrightarrow ax \geq 0, \\ 3) \quad \forall x, y \in X & \sup\{x, y\} \in X \qquad \text{et } \inf\{x, y\} \in X, \\ (\textit{resp. } \forall A (\neq \phi) \subset X & A \textit{majoré} \Longrightarrow \sup A \in X\, \textit{et} \quad A \textit{minoré} \Longrightarrow \inf A \in X) \\ 4) \quad \forall x, y \in X & |x| \leq |y| \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\| \qquad \textit{où } |x| = \sup\{x, -x\}. \\ 5) \quad \forall x \in X & \||x|\| = \|x\|. \end{cases}$$

Exemple 1.6.1 *Les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ avec leurs normes euclidiennes sont tous des espaces de Banach réticulés.*

Chapitre 2

Les Opérateurp − nucléaires et les opérateurs p − nucléaire Lipschitz

Dans ce chapitre on va prendre en étude un peut détaillé les opérateurs p-nucléaires et les opérateurs p-nucléaire Lipschitzien. La dont on citera les théorèmes de dominations de Pietsch. a la fin de ce chapitre on donne quelques résultats d'inclusions et relations entre ces types d'opérateurs.

2.1 *Déf initions de bases*

2.1.1 *Produit tensoriel*

Produit tensoriel algébrique

On considéré le dual algébrique $L(X_1, ..., X_m)^*$ *de l'espace* $L(X_1, ..., X_m)$*, tel que*

$$L(X_1, ..., X_m)^* = \{\Phi : L(X_1, ..., X_m) \longrightarrow \mathbb{k} : \Phi \text{ est une forme linéaire}\}.$$

Le produit tensoriel de $X_1, ..., X_m$ *sera construit à partir des éléments de l'espace* $L(X_1, ..., X_m)^*$.

Soit $x^1, ..., x^m \in X_1 \times ... \times X_m$ *on définit*

$$\begin{array}{rccc} x^1 \otimes ... \otimes x^m : & L(X_1, ..., X_m) & \longrightarrow & \Bbbk \\ & x^1 \otimes ... \otimes x^m(\varphi) & = & \varphi(x^1, ..., x^m) \end{array}$$

où φ *est une forme* $m-$ *linéaire.*

On pose D *l'ensemble formes définie par tous ces éléments,*

$$D: = \{x^1 \otimes ... \otimes x^m : x^1 \in X_1, ..., x^m \in X_m\} \subseteq L(X_1, ..., X_m).$$

La forme $x^1 \otimes ... \otimes x^m$ *s'appelle tenseur élémentaire..*

Définition 2.1.1 *Le sous-espace vectoriel de* $L(X_1, ..., X_m)^*$ *engendré par* D *est dit produit tensoreil algébrique de* $X_1 \times ... \times X_m$ *, et sera noté par* $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ *ainsi*

que les éléments de $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ *s'appellent tenseurs, et sont écrits sous la forme :*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m$$

tels que $(\lambda_i)_{i=1}^n \subset \Bbbk$, $(x_i^j)_{i=1}^n \subset X_j$ $(j = 1, ..., m)$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

Cette représentation de u *n'est pas unique.*

Si $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$ *et une forme multilinéaire sur* $X_1 \times ... \times X_m$*, alors*

$$u(\phi) = \langle \phi, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(x_i^1, ..., x_i^m).$$

La valeur de cette expression est indépendante du choix de u*. Par définition, le produit tensoriel* $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ *est un espace vectoriel sur* $\Bbbk$ *.*

Produit tensoriel projectif

Définition 2.1.2 *Soit $m \in \mathbb{N}$, pour chaque $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$; nous défnisons le nombre réel positif*

$$\pi(u) = \inf \sum_{i=1}^{n} \| x_i^1 \| \ldots \| x_i^m \| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j|| \right\}$$

où l'infimum portée sur toutes les représentations possibles de u de la forme

$u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m$. Alors π est une norme tensorielle sur l'espace $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ et en plus on a $\pi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = ||x^1|| \cdots ||x^m||$.

** On note $X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$ le produit tensoriel projectif des espaces $X_1, ..., X_m$ (i.e.) , le complété de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ pour cette norme.Si $X_1 = \cdots = X_m = X$ on écrit simplement $\hat{\otimes}_\pi^m X$.*

Alors π est une norme sur l'espace $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ et de plus, on a

$$\pi(x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m) = \| x_i^1 \| \ldots \| x_i^m \| .$$

Produit tensoriel injectif

Définition 2.1.3 *La norme injective sur $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ est définie par*

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ | \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i^1) ... \phi(x_i^m) | , \phi \in B_{X_j^*}, j = 1, ..., m \right\}$$

où

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m$$

est une représentation de $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$.

Notation 2.1.1 *On note par* $X_1 \otimes_\varepsilon ... \otimes_\varepsilon X_m$ *le produit tensoriel muni de la norme* ε *Cet espace n'est pas complet en général, alors on note par* $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon ... \widehat{\otimes}_\varepsilon X_m$ *son complété.*

L'espace de Banach $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon ... \widehat{\otimes}_\varepsilon X_m$ *s'appelle le produit tensoriel injectif des espaces de Banach* $X_1, ..., X_m$.

Proposition 2.1.1 (Le produit tensoriel des opérateurs) *Soient* $X_1, ..., X_m$, $Y_1, ..., Y_m$ *des espaces vectoriels normés et soient les opérateurs linéaires conituns* $T_j : X_j \longrightarrow Y_j$ *,pour tout,* $j = 1, ..., m$ *il existe un unique opérateur linéaire continu,*

$T_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi T_m : X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow Y_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi Y_m$, *tels que*

$T_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi T_m(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = T_1(x^1) \otimes \cdots \otimes T_m(x^m)$, *pour tout* $x^j \in X_j$ *, et en plus*

$||T_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi T_m|| = \prod_{j=1}^{m} ||T_j||$.

Proposition 2.1.2 *Si* $X_1 \times \cdots \times X_m$ *des epaces vectoriels de dimensions finies ,alors* $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ *est un espace à dimension finie.*

De plus si $X_1 \times \cdots \times X_m$ *sont normés,alors* $X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$ *est complet.*

(voir [27])

2.1.2 *Produit tenseur de Lipschitz* $X \boxtimes Y$

Soit X *un espace métrique pointé et soit* E *un espace de Banach. Le produit tensoriel de Lipschitz* $X \boxtimes E$ *est défini comme le sous-espace vectoriel de* $Lip_0(X; E^*)'$ *(le dual algébrique de* $Lip_0(X; E^*)$ *) engendré par l'ensemble*

$$\{\delta_{(x,y)} \boxtimes e : (x, y) \in X^2, e \in E\}$$

où

$$(\delta_{(x,y)} \boxtimes e)(f) = \langle f(x) - f(y), e \rangle, \forall f \in Lip_0(X; E^*).$$

On dit que $\delta_{(x,y)} \boxtimes e$ *est un tenseur de Lipschitz élémem (ntaty. On a* $u \in X \boxtimes E$ *si, et seulement si,* $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{(x_i,y_i)} \boxtimes e_i$ *et cette représentation n'est pas unique.*

Notez que chaque élément $u \in X \boxtimes E$ *peut représenté par :* $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{(x_i,y_i)} \boxtimes e_i$ *puisque* $\lambda\delta_{(x,y)} \boxtimes e = \delta_{(x,y)} \boxtimes \lambda e$. *nous avous aussi*

$$u(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x_i) - f(y_i), e_i \rangle; \text{ pour tout } f \quad \text{dans } Lip_0(X; E^*).$$

Norme injective de Lipschitz

Pour un espace de Banach E *et un espace métrique* X,

Définition 2.1.4 *Pour chaque* $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{(x_i,y_i)} \boxtimes e_i \in X \boxtimes E$, *défine*

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \mid \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(y_i)) \langle \varphi, e_i \rangle \mid : f \in \mathcal{B}_{X^\#}, \varphi \in B_{E^\#} \right\}.$$

Notez que le supremum sur le côté droite dans la définition précédente existe depuis :

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(y_i)) \langle \varphi, e_i \rangle & \leq \sum_{i=1}^{n} \mid (f(x_i) - f(y_i)) \langle \varphi, e_i \rangle \mid \\ & \leq \sum_{i=1}^{n} Lip(f) d(x_i, y_i) \parallel \varphi \parallel \parallel e_i \parallel \\ & \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i) \parallel e_i \parallel . \end{aligned}$$

Pour tous les $f \in B_{X^\#}$ *et* $\varphi \in B_{E^\#}$. *Noter que*

$$\sum_{i=1}^{n} \mid (f(x_i) - f(y_i)) \langle \varphi, e_i \rangle \mid = (f \boxtimes \varphi)(\sum_{i=1}^{n} \delta_{(x_i,y_i)} \boxtimes e_i).$$

Remarque 2.1.1 *La complétion* $X \hat{\boxtimes}_\varepsilon E$ *de* $X \boxtimes_\varepsilon E$ *est appelé le produit tenseur de Lipschitz injectif de* X *et* E. *Ensuite, nous justifions cette terminologie dans le cas* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

Norme projective de Lipschitz

Définition 2.1.5 *Pour chaque $u \in X \boxtimes E$, défine*

$$\pi(u) = inf \ \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i) \parallel e_i \parallel : u = \sum_{i=1}^{n} \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \right\}$$

l'infinimum étant repris par toutes les représentations de u.

Théorème 2.1.1 *La norme projective de Lipschitz π est une normale croisée de Lipschitz dualisable sur $X \boxtimes E$ telle que $L \leq \pi$.*

La complétition $X \hat{\boxtimes}_\pi E$ de $X \boxtimes_\pi E$ est appelé le produit tenseur projectif de Lipschitz de X et E.

(voir [26])

2.2 *Les opérateur linéaires p − nucléaires*

Un opérateur linéaire $T : E \to F$ est $p-$nucléaire ($1 \leq p \leq \infty$) [voir 7,14], si et seulement si, T peut être écrit sous la forme

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^* \otimes y_j$$

où $(x_j^*)_j \in E^*$ et $(y_j)_j \in F$ satisfaire

$$\parallel (x_j^*)_j \parallel_p \leq \infty \qquad et \sup_{\|y^*\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} \mid \langle y_j, y^* \rangle \mid^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} < \infty$$

ici

$$\mathcal{N}_p((x_j^*)_j, (y_j)_j) = \parallel (x_j^*)_j \parallel_p \sup_{\|y^*\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} \mid \langle y_j, y^* \rangle \mid^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} .$$

De plus

$$v_p(T) = \inf \mathcal{N}_p((x_j^*)_j, (y_j)_j)$$

l'infimum étant repris toutes les représentations telles que ci-dessus. Le collection de tous opérateurs linéaires p−nucléaires de E vers F est désigné par $\mathcal{N}_p(E, F)$. Interchanger les rôles du séquences $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ on obtient de la même manière un (autre espace de Banach des opérateurs $\mathcal{N}^p(E, F)$ [voir 14], la norme étant donné par :

$$v_p(T) = \inf \mathcal{N}^p((x_j^*)_j, (y_j)_j)$$

où

$$\mathcal{N}^p((x_j^*)_j, (y_j)_j) = \sup_{\|x\|\leq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} \mid \langle x, x_j^* \rangle \mid^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \parallel (y_j)_j \parallel_p .$$

Un opérateur linéaire $T : E \to F$ est p−nucléaire ($1 \leq p < \infty$), s'il y a deux opèrateurs une $a \in \mathcal{L}(l_p, F)$, $b \in \mathcal{L}(E, l_\infty)$ et une séquence $\lambda \in l_p$ de telle sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \underrightarrow{T} & F \\ b \downarrow & & \uparrow a \\ l_\infty & \underrightarrow{M_\lambda} & l_p \end{array}$$

où $M_\lambda \in \mathcal{L}(l_\infty, l_p)$ est l'opérateur diagonal défini comme suit :

$$M_\lambda(\zeta_n) = (\zeta_n \lambda_n)_n, \qquad (\zeta_n)_n \in l_\infty.$$

Puis

$$\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_p = \pi_p(M_\lambda).$$

Nous fixons

$$\nu_p(T) = inf\|a\|\|M_\lambda\|\|b\|,$$

l'infimum étant étendu à toutes les factorisations comme ci-dessus. De même, chaque $T \in \mathcal{N}^p(E,F)$ peut être factorisé

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ b\downarrow & & \uparrow a \\ l_{p^*} & \xrightarrow{M_\lambda} & l_1 \end{array}$$

avec a ,M_λ ,b comme ci-dessus et

$$\nu^p(T) = inf\|a\|\|M_\lambda\|\|b\|$$

2.2.1 *Opérateurs positivement* $p-$*nucléaires*

Définition 2.2.1 *Un opérateur $S : E \to F$ est appelé $p-$nucléaire si*

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} u_j^* \otimes \nu_j,$$

où $(u_j^*)_j \in l_p(E^*)$, $(\nu_j)_j \in l_{p^*}^w(F)$.

On a

$$\nu_p(S) := inf \ \| \ (u_j^*)_j\|_p \cdot \| \ (\nu_j^*)_j\|_{p^*}^{\omega},$$

où l'infimum est pris sur toutes les représentations dites $p-$nucléaires d'crites ci-dessus.

les opérateurs $1-$ nucléaires sont simplement appellés opérateurs nucléaires. La classe de tout nucléaire les opérateurs de norme nucléaire sont notés $[\mathcal{N}, \nu]$. O. I. Zhukova (voir [22]) a présenté le

concept d'opérateurs $p-$nucléaires latticiellement qui peuvent être considérés comme des analogues partiellement positifs des opérateurs $p-$nucléaires comme suit..

Définition 2.2.2 *On dit qu'un opérateur $T : X \to E$ est positivement $p-$nucléaire si*

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} x_j^* \otimes u_j \tag{2.2.1}$$

où $(x_j^*)_j \in l_{p^*}^w(X^*)_+, (u_j)_j \in l_p(F)$.

Nous appelons la représentation (2.2.1) un positivement représentation $p-$nucléaire de T.

$$\tilde{\nu}_p(T) := inf \parallel (x_j^*)_j \|_{p^*}^{\omega} \cdot \parallel (u_j^*)_j \|_p$$

où l'infimum est pris sur toutes les représentations positivement $p-$nucléaires de T.La classe de tous les opérateurs $p-$nucléaires positivement est noté $\tilde{N}_p$.

2.3 *Les opérateurs $p-$ nucléaire de Cohen Lipschitz*

Définition 2.3.1 *Un opérateur de Lipschitz $T : X \longrightarrow E$ est Cohen Lipschitz $p-$nucléaire $(1 < p < \infty)$, s'il existe une constante positive C telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$; $(x_i)_{1\leq i\leq n}$,$(x_i')_{1\leq i\leq n}$ dans X $(a_i^*)_{1\leq i\leq n}$ dans E et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ $\mathbb{R}_+$, nous avons*

$$|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle T(x_i) - T(x_i'), a_i^* \rangle | \leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mid f(x_i) - f(x_i') \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\|a\|_E \leq 1} (\sum_{i=1}^{n} | \langle a, a_i^* \rangle |^{\frac{1}{p^*}} \tag{2.3.1}$$

La plus petite constante C notée par $\eta_p^L(T)$, telle que l'inégalité (2.3.1) ci-dessus est vraie.

Remarque 2.3.1 *$\eta_p^L(T)$ est appelée la norme $p-$nucléaire de Cohen Lipschitz sur l'espace $\mathcal{N}_p^L(X,E)$ de tous les Opérateurs $p-$nucléaires de Cohen Lipschitz de X dans E qui est un espace de Banach.*

Remarque 2.3.2 *Pour $p=1$ et $p=\infty$ on a comme dans le cas linéaire $\mathcal{N}_1^L(X,E) = \Pi_1^L(X,E)$ et $\mathcal{N}_\infty^L(X,E) = D_{st,\infty}^L(X,E)$. La définition reste la même si on se limite $\lambda_i = 1$, comme dans (voir [24]).*

Nous avons (voir [23]) que $l^p(E) \equiv l_\omega^p(E)$ (le symbole indique que deux Banach les espaces sont isomorphes isométriquement) pour quelque $1 \leq p < \infty$ si et seulement si dim(E) est finite.

Si $p=\infty$, nous avons $l^\infty(E) \equiv l_\omega^\infty(E)$. On a aussi si 1 <p $\leq \infty$, $l_\omega^p(E) \equiv L(l^{p*},E)$ isométriquement.

En d'autres termes,

soit $\nu : l^{p*} \longrightarrow E$ un opérateur linéaire tel que $\nu(e_i) = a_i$ (à savoir, $\nu = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \otimes a_i$, e_i désigne la base du vecteur unitaire de l^p) ensuite,

$$\| \nu \| = \| (x_i) \|_{l_p^\omega(E)} \tag{2.3.2}$$

Définition 2.3.2 *Soit T un opérateur de Lipschitz entre X,E et $\nu : l_n^{p*} \longrightarrow E^*$être un opérateur linéaire borné opérateur. Par (2.3.2) l'opérateur de Lipschitz T est Cohen Lipschitz $p-$nucléaire si, et seulement si,*

$$|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle T(x_i) - T(x_i'), \nu(e_i) \rangle | \leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mid f(x_i) - f(x_i') \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} \| \nu \| \tag{2.3.3}$$

Proposition 2.3.1 *Considérons T dans $Lip_0(X,E)$, $\mathbb{R}$ dans $Lip_0(E,F)$ et S dans $Lip_0(Y,X)$. Si T est l'opérateur $p-$nucléaire de Cohen Lipschitz,. Alors, $R \circ T \circ S$ est un opérateur $p-$nucléaire de Cohen Lipschitz et*

$$\eta_p^L(R \circ T \circ S) \leq Lip(R)\eta_p^L(T)Lip(S)$$

Théorème 2.3.1 *Considérons $T \in Lip_0(X,E)$ et C une constante positive. Puis le suivant les assertions sont équivalentes.*

1. *L'opérateur$T$ est Cohen Lipschitz $p-$nucléaire et $\eta_p^L(T) \leq C$.*

2. *Pour tout n dans $\mathbb{N}$; $(x_i)_{1\leq i\leq n}$,$(x_i')_{1\leq i\leq n}$ dans X ; $(a_i^*)_{1\leq i\leq n}$ dans E^* et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ $\mathbb{R}_+$, nous avous*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i| \langle T(x_i) - T(x_i'), a_i^*\rangle | \\ \leq \quad & C \sup_{f\in B_{X^\#}} (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i| f(x_i) - f(x_i') |^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{\|a\|_E\leq 1} (\sum_{i=1}^{n}| \langle a, a_i^*\rangle |^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

3. *Il existe des mesures de probabilité de radon μ_1 sur $B_{X^\#}$ et μ_2 sur $B_{E^{**}}$; tel que pour tous x , x' dans X et a^* dans E,nous avous*

$$\begin{aligned}| \langle T(x_i) - T(x_i'), a_i^*\rangle | \\ \leq \quad & C \int_{B_{X^\#}} (| f(x) - f(x') |^p d\mu_1(f))^{\frac{1}{p}} \int_{B_{E^{**}}} | f(a^*(a^{**}) |^{p^*} d\mu_2(a^{**}))^{\frac{1}{p^*}}\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

De plus, dans ce cas

$$\eta_p^L(T) = inf\{C > 0 : \forall\ C \text{ vérifiant l'inégalité}(2.3.5\}.$$

2.3.1 *Opérateur fortement Lipschitz* $p-$*nucléaire*

Définition 2.3.3 *Un opérateur Lipschitz $T : X \to F$ est fortement Lipschitz $p-$nucléaire ($1 \leq p \leq \infty$), (voir [4]) si, T peut être écrit sous la forme*

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes y_j$$

où $(f_j)_j \subset X^{\#}$ et $(y_j)_j \subset F$ satisfaire

$$\| \, Lip(f_j)_j \|_p \leq \infty \text{ et } \sup_{\|y^*\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} | \, \langle y_j, y^* \rangle \, |^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} < \infty$$

ici

$$\mathcal{N}_p((f_j)_j, (y_j)_j) = \| \, Lip(f_j)_j \|_p \sup_{\|y^*\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} | \, \langle y_j, y^* \rangle \, |^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

De plus

$$v_p(T) = \inf \mathcal{N}_p((x_j^*)_j, (y_j)_j)$$

l'infimum étant repris toutes les représentations telles que ci-dessus.

Un opérateur Lipschitz $T : X \to F$ est fortement Lipschitz p- nucléaire ($1 \leq p \leq \infty$), s'il y a deux mappages Lipschitz $A \in \mathcal{L}(l_p, F)$, $B \in Lip_0(X, l_\infty)$ et une séquence $\lambda \in l_p$ de telle sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & F \\ B \downarrow & & \uparrow A \\ l_\infty & \xrightarrow{M_\lambda} & l_p \end{array}$$

Nous fixons

$$s\nu_p^L(T) = inf\|A\|\|M_\lambda\|\ Lip(B),$$

l'infimum étant étendu à toutes les factorisations comme ci-dessus (voir [4]).

2.3.2 *Relations entre* $\mathcal{N}_p^L(X,E)$*,* $\mathcal{D}_{st,p}^L(X,E)$ *et* $\Pi_p^L(X,Y)$

Théorème 2.3.2 *Nous avons pour un opérateur de Lipschitz* $T : X \longrightarrow E$*.*

1. $\mathcal{N}_p^L(X,E) \subseteq \mathcal{D}_{st,p}^L(X,E)$ *et* $d_{st,p}^L(T) \leq \eta_p^L(T)$ *pour* $1 < p \leq \infty$*.*
2. $\mathcal{N}_p^L(X,E) \subseteq \Pi_p^L(X,Y)$ *et* $\pi_p^L(T) \leq \eta_p^L(T)$ *pour* $1 < p \leq \infty$

Chapitre 3

Opérateurs up − nucléaires fortement Lipschitz

Dans Le présent chapitre qui s'articule sur la théorie des opérateurs pour ce là on va prendre en étude approfondi le plus important résultat dans article de Monsieur .A ; Belacel et mademoiselle Khedidja Bey, qu' est paru dans le journal : Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis en 2019 avec l'intitulé par : Strongly Lipschitz up-Nuclear operators. La dont ce troisième chapitre les auteurs introduisent le concept d'opérateurs up-nucléaires Lipschitzien. .Ils exposent une étude de types d'opérateurs up-nucléaires Lipschitzien et donne l'analogue linéaire qui a été trouvé dans le travail de Mr, A. Persson ils nous a donné le théorème de factorisation. Ils montrent autres résultats, qui permettent une transposition de l'opérateur up-nucléaire au fortement Lipschitzien est p-nucléaire et nous ont trouvé les mêmes résultats avec les opérateurs fortement Lipschitzien p-nucléaires qui sont introduits et étudiés par Chen et Zhen.

3.1 *Opérateurs up − nucléaires fortement Lipschitz*

Définition 3.1.1 *soit* $1 < p \leq \infty$, *et* $T \in Lip_0(X, F)$. T *est opérateur Lipschitz up−nucléaire, si* T *peut être écrit sous la forme suivante*

$$T = \sum_j f_j \otimes y_j$$

tel que $(f_j)_j \subset X^{\#}$ *satisfaire où* $X^{\#}$ *est l'espace de toutes les fonctions de Lipschitz à valeur réelle sous le (semi)−norm Lip(.) et* $(y_j)_j \subset F$ *satisfaire*

$$\sup_{\|m\| \leq 1} \sum_j | \langle f_j, m \rangle |^{p*})^{\frac{1}{p^*}} < \infty \quad et \quad \| (y_j)_j \|_p < \infty,$$

où $m \in Æ(X)$. *Ici*

$\mathcal{N}^{p^L}((f_j)_j, (y_j)_j) = \sup_{\|m\| \leq 1} \sum_j | \langle f_j, m \rangle |^{p*})^{\frac{1}{p^*}} \| (y_j)_j \|_p$

En autre terme

$$\nu^{p^L}(T) := \inf N^{p^L}((f_j)_j, (y_j)_j).$$

Le minimum étant repris toutes les représentations telles que ci-dessus. La collection de tous les opérateur up−nucléaires fortement Lipschitz de X *à* F *est noté* $\mathcal{N}^{p^L}(X, F)$.

Théorème 3.1.1 $\mathcal{N}^{p^L}(X, F), \nu^{p^L})$ *est un espace Banach d'opérateurs up−nucléaires fortement Lipschitz.*

Preuve. *(1) Il est clair que pour tout opérateur* $T \in Lip_0(X, F)$ *et tout scalaire* λ,

$$\nu^{p^L}(T) \geq 0 \text{ et } \nu^{p^L}(\lambda T) = |\lambda| \nu^{p^L}(T).$$

(2) Soit $T_1, T_2 \in Lip_0(X, F)$ *et* $\varepsilon > 0$. *on peut écrire*

$$T_i = \sum_j f_{j,i} \otimes y_{j,i} \qquad , i = 1, 2.$$

Par homogénéité, il est possible de choisir des représentations de T_1 *et* T_2 *telles que, pour* ε *réel positif donné,*

on a

$$\| (y_{j,i})_j \|_p \leq (\nu^{p^L}(T_i) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sup_{\|m\| \leq 1} \sum_j |(\langle f_{j,i}, m \rangle)_j|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \leq (\nu^{p^L}(T_i) + \varepsilon)^{\frac{1}{p^*}},$$

$i = 1, 2.$ *En conséquence ;*

$$\| (y_{j,i})_j \|_p \leq (\nu^{p^L}(T_1) + \nu^{p^L}(T_2) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}},$$

$$\sup_{\|m\| \leq 1} \sum_j |(\langle f_{j,i}, m \rangle)_j|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \leq (\nu^{p^L}(T_1) + \nu^{p^L}(T_2) + \varepsilon)^{\frac{1}{p^*}},$$

Puis

$$\sup_{\|m\| \leq 1} \sum_j |(\langle f_{j,i}, m \rangle)_j|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \ \| (y_{j,i})_j \|_p \leq (\nu^{p^L}(T_1) + \nu^{p^L}(T_2) + 2\varepsilon).$$

Donc ;

$$(\nu^{p^L}(T_1 + T_2) \leq (\nu^{p^L}(T_1) + \nu^{p^L}(T_2) + 2\varepsilon).$$

■

Proposition 3.1.1 . *Soit* $1 < p \leq \infty$, *et* $T \in Lip_0(X, F)$. *Alors* $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F)$ *si, et seulement si,* $T_L \in \mathcal{N}^p((Æ), F)$, *avec*

$$\nu^{p^L}(T) = \nu^p(T_L)$$

Preuve. *Il est bien connu que* $\mathcal{N}^p((Æ), F)$ *est idéal normé des opérateur (voir [16]) et* $T \in Lip_0(X, F)$,

puis par [1,Proposition 3.2] on obtient l'équivalence ci-dessus avec la norme nécessaire.

■

Théorème 3.1.2 *(*$\mathcal{N}^{p^L}(X, F)$, ν^{p^L}*) est un idéal de Banach Lipschitz.*

Preuve. *Puisque* $\mathcal{N}^p((Æ), F)$ *est un idéal d'opérateur normé,* $T \in \mathcal{N}^p((Æ), F) \circ Lip_0(X, Æ(X))$ *et par [1, Corollaire3.3],*

$\mathcal{N}^{p^L}((Æ), F)$ *est un idéal d'opérateur up−nucléaire de Banach fortement Lipschitz.* ■

3.2 *Théorème de f actorisation*

Théorème 3.2.1 *Soit* $1 < p \leq \infty$ *et* $T \in Lip_0(X, F)$. *Alors* $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F)$ *si et seulement si,* T *a une factorisation* $T = aM_\lambda B$ *de telle sorte que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & F \\ B\downarrow & & \uparrow a \\ l_{p^*} & \xrightarrow{M_\lambda} & l_1 \end{array}$$

où $B \in Lip_0(X, l_{p^*})$ *avec* $B(0) = 0, M_\lambda \in L(l_{p^*}, l_1)$ *un opérateur diagonal et* $a \in \mathcal{L}(l_1, F)$.

De plus,

$$\nu^{p^L}(T) := inf \parallel a \parallel\parallel M_\lambda \parallel Lip(B)$$

où l'infimum est pris sur toutes les factorisations ci-dessus.

Preuve. *On sait si* $T \in Lip_0(X, F)$ *il existe une application linéaire unique* $T_L : Æ(X) \longrightarrow F$ *telle que* $T = T_L \circ \delta_X$, *plus ils ont les mêmes caractéristiques.*

Puisque $T_L \in \mathcal{N}^p(\text{Æ}(X), F)$, *nous avons donc une factorisation comme suit*

$$\begin{array}{ccccc} X & & \underrightarrow{T} & & F \\ & \searrow \delta_X & & \nearrow T_L & \\ & & \text{Æ}(X) & & a \uparrow \\ & B \searrow & \downarrow & & \\ & & l_{p^*} & \underrightarrow{M_\lambda} & l_1 \end{array}$$

nous pouvons voir que $T = aM_\lambda B$, *où* $B = b \circ \delta_X$.

Inversement, une preuve similaire à celle de [4, Théorème 2.2], avec

$$\nu^{p^L}(T) := inf \parallel a \parallel \parallel M_\lambda \parallel Lip(B).$$

■

Remarque 3.2.1 *Pour* $p = 1$, *on a*

$$\mathcal{N}^{1^L}(X, F) = \mathcal{N}_1^L(X, F).$$

En utilisant le théorème (2.1), nous obtenons les résultats suivants :

Proposition 3.2.1 *Soit* $1 < p \leq q \leq \infty$, *alors* $\mathcal{N}^{p^L}(X, F) \subseteq \mathcal{N}^{q^L}(X, F)$,

avec

$$\nu^{p^L}(T) \geq \nu^{q^L}(T).$$

Preuve. *Nous savons qu'un opérateur de multiplication peut être factorisé comme (voir [17])*

$$M_\lambda : l_{p^*} \quad \underrightarrow{M_\alpha} \quad l_{q^*} \quad \underrightarrow{M_\beta} \quad l_1$$

Donc,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "B"] & & F \\ l_{p^*} \arrow[dr, "M_\alpha"'] & & l_1 \arrow[u, "a"'] \\ & l_{q^*} \arrow[ur, "M_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

où M_α *et* M_β *sont des opérateurs de multiplication donnés par* $\alpha_n = |\lambda_n|^{1-\frac{p^*}{q^*}}$ *et* $\beta_n = (sign\lambda_n)|\lambda_n|^{\frac{p^*}{q^*}}$ $(n \in \mathbb{N})$*.*

$$\begin{aligned} \nu^{p^L}(T) &= inf Lip(B) \parallel M_\lambda \parallel \parallel a \parallel \\ \nu^{p^L}(T) &= inf Lip(B) \parallel M_\alpha M_\beta \parallel \parallel a \parallel \\ \nu^{p^L}(T) &= inf Lip(B) \parallel M_\alpha \parallel \parallel M_\beta \parallel \parallel a \parallel \\ \nu^{p^L}(T) &\geq inf Lip(\tilde{B}) \parallel M_\beta \parallel \parallel a \parallel \\ \nu^{p^L}(T) &\geq \nu^{q^L}(T). \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.2.1 *Soit* $1 < p \leq \infty$ *et* $T \in Lip_0(X, F)$*. On a*

1. $J_E \circ T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F^{**}) \Leftrightarrow (T^t)^* \in \mathcal{N}^p((X^{\#}), F^{**})$
2. $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F) \Rightarrow (T^t)^* \in \mathcal{N}^p((X^{\#}), F^{**})$.

Problème 3.2.1 *Probléme ouvert : sous quelle condition l'implication suivante :* $J_E \circ T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F^{**}) \Leftrightarrow T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F)$ *sera vraie ?*

3.3 *Applications*

Cette section est consacrée à certaines applications telles que la dualité, les relations avec les espaces connus.

Proposition 3.3.1 *Si $T \in \mathcal{N}_p^L(X,F)$, alors sa transposition $T^t \in \mathcal{N}^p(F^*,X^{\#})$ et cela satisfait*

$$\nu^p(T^t) \leq s\nu_p^L(T).$$

De plus, supposons que F est réflexif. Alors, si $T^t \in \mathcal{N}^p(F^*,X^{\#})$ on a $T \in \mathcal{N}_p^L(X,F)$, avec $\nu^p(T^t) \leq s\nu_p^L(T)$.

Preuve. *Par [1, Proposition 2.7, Proposition 3.2],$T \in \mathcal{N}_p^L(X,F)$ si, et seulement si, $T_L \in \mathcal{N}_p(Æ(X),F)$.*

Puis, par [13,Proposition 1], on a $(T_L)^* \in \mathcal{N}^p(F^*,Æ(X)^*)$,

ce qui nous donne $T^t \in \mathcal{N}^p(F^*,X^{\#})$ car

$$T^t\colon\ F^* \ \underrightarrow{(T_L)^*}\ \ Æ(X)^* \ \ \underrightarrow{\delta_X^t}\ \ X^{\#}.$$

De plus, comme

$$T^t = \delta_X^t \circ (T_L)^*$$

donc

$$\begin{aligned}\nu^p(T^t) &= \nu^p(\delta_X^t \circ (T_L)^*) \leq \nu^p((T_L)^*)\\ &\leq \nu^p((T_L)\\ &= s\nu_p^L(T).\end{aligned}$$

D'où,

$$\nu^p(T^t) \leq s\nu_p^L(T). \tag{3.3.1}$$

Inversement, si $T^t \in \mathcal{N}^p(F^*, X^{\#})$*, puis* $(T^t)^* \in \mathcal{N}_p((X^{\#})^*, F^{**})$*, donc* $T \in \mathcal{N}_p^L(X, F)$ *car*

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dr, "J_F"] & \\
X \arrow[ur, "T"] \arrow[r, "K_X"] \arrow[dr, "a \circ K_X"'] & (X^{\#})^* \arrow[r, "(T^t)^*"] \arrow[d, "a"] & F^{**} \\
 & l_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] & l_p
\end{tikzcd}$$

où K_X *est la carte d'évaluation* $K_X(x)(f) = f(x), x \in X, f \in X^{\#}$ *et* J_F *est l'injection canonique de* F *dans* F^{**}*,*

donc,

$$s\nu_p^L(T) \leq \nu^p(T^t). \tag{3.3.2}$$

De (3.1) et (3.2) nous obtenons

$$s\nu_p^L(T) = \nu^p(T^t).$$

■

Théorème 3.3.1 *Si* $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F)$*, puis sa transposition* $T^t \in \mathcal{N}_p(F^*, X^{\#})$ *et cela satisfait*

$$\nu_p(T^t) \leq \nu^{p^L}(T).$$

De plus, supposons que F est réflexif. Alors, si $T^t \in \mathcal{N}_p(F^*, X^\#)$ on a $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F)$, avec

$$\nu_p(T^t) = \nu^{p^L}(T).$$

Preuve. *Par la proposition , $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F)$ si, et seulement si, $T_L \in \mathcal{N}^p(Æ(X), F)$. Ensuite, $(T_L)^* \in \mathcal{N}_p(F^*, Æ(X)^*)$, cette c'est-à-dire $T^t \in \mathcal{N}_p(F^*, X^\#)$ car*

$$T^t : \ F^* \xrightarrow{(T_L)^*} Æ(X)^* \xrightarrow{\delta_X^t} X^\#,$$

il est clair que $T^t = \delta_X^t \circ (T_L)^*$donc

$$\begin{aligned} \nu_p(T^t) &= \nu_p(\delta_X^t \circ (T_L)^*) \leq \nu_p((T_L)^*) \\ &\leq \nu_p(T_L) \\ &= \nu^{p^L}(T). \end{aligned}$$

D'où

$$\nu_p(T^t) \leq \nu^{p^L}(T). \tag{3.3.3}$$

Inversement, nous utilisons la même mèthode que celle utilisèe dans [13, Proposition 1], si $T^t \in \mathcal{N}_p(F^*, X^\#)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il peut

être écrit comme

$$T^t y^* = \sum_j \langle y^*, y_j^{**} \rangle f_j,$$

pour chaque $y^* \in F^*$ et $m \in Æ(X)$, avec

$$\sup_{\|m\|\leq 1}(\sum_j \mid \langle f_j, m\rangle \mid^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \| \, (y_j^{**})_j\|_p \leq \nu_p(T^t) + \varepsilon. \tag{3.3.4}$$

Puisque F est réflexif

$$\sup_{\|m\|\leq 1}(\sum_j \mid \langle f_j, m\rangle \mid^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \| \, (y_j)_j\|_p \leq \nu_p(T^t) + \varepsilon. \tag{3.3.5}$$

Par conséquent, nous avons

$$T = \sum_j f_j \otimes y_j,$$

et (3.5) montre

$$\upsilon^{p^L}(T) \leq \nu_p(T^t). \tag{3.3.6}$$

De (3.3) et (3.6) nous obtenons

$$\nu^{p^L}(T). = \nu_p(T^t)$$

■

Remarque 3.3.1 *Soit $T \in \mathcal{N}_p^L(X,F)^{dual}$, alors par [1, Theorem 3.9] on obtient $T \in \mathcal{N}_p(X,F)^{dual} \circ Lip_0$ et par [13, Proposition1] $T \in \mathcal{N}^p(X,F) \circ Lip_0$ donc $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X,F)$.*

Proposition 3.3.2 *Soit $1 < p \leq \infty$ et $T \in Lip_0(X,F)$. Si $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X,F)$, puis $T^t \in \Pi_p(F^*, X^{\#})$, avec*

$$\pi_p(T^t) \leq \nu^{p^L}(T).$$

Preuve. *Par le Théoréme 3.1, $T^t \in \mathcal{N}_p(F^*, X^{\#})$ si $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X,F)$.*

Alors par [7, Proposition 5.5, Corollaire 5.24], on obtient $T^t \in \Pi_p(F^*, X^\#)$, *avec*

$$\pi_p(T^t) \leq \nu_p(T^t) \leq \nu^{p^L}(T).$$

■

Proposition 3.3.3 *Soit* $1 < p \leq \infty$ *et* $T \in Lip_0(X, F)$. *Si* $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F)$, *puis* $T \in D^L_{st,p^*}(X, F)$, *avec*

$$d^L_{st,p^*}(T) \leq \nu^{p^L}(T).$$

Preuve. *On a par la proposition 3.2,* $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F)$, *puis* $T^t \in \Pi_p(F^*, X^\#)$.

Donc par [19, Théorème 4.1], $T \in D^L_{st,p^*}(X, F)$ *et*

$$d^L_{st,p^*}(T) = \pi_p(T^t) \leq \nu^{p^L}(T).$$

Nous présentons la proposition précédente d'une autre maniére, en utilisant la propriété idéale. ■

Proposition 3.3.4 *Soit* $1 < p \leq \infty$ *et* $T \in Lip_0(X, F)$. *Si* $T \in \mathcal{N}^{p^L}(X, F)$, *alors il existe un espace de Banach* G, $u \in D_{p^*}(G, F)$ *et* $S \in Lip_0(X, G)$ *tels que*

$$T = u \circ s.$$

Preuve. C'est directement de la proposition 3.3 et [19, corollaire 3.6]. ■

Bibliographie

[1] D. Achour, P. Rueda, E.A. Sánchez-Pérez and R. Yahi, Lipschitz operator ideals and the approximation property, J. Math. Anal. Appl., 436 (2016), 217-236.

[2] R.F. Arens and J. Eells Jr., On embedding uniform and topological spaces, Pacific J. Math., 6 (1956), 397-403..

[3] A. Belacel and D. Chen, Lipschitz (p,r,s)-integral operators and Lipschitz (p,r,s)-nuclear operators, J. Math. Anal. Appl., 461 (2018), 1115-1137.

[4] D. Chen and B. Zheng, Lipschitz p-integral operators and Lipschitz p-nuclear operators, Nonlinear Anal., 75 (2012), 5270-5282

[5] J.S. Cohen, Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann., 201 (1973), 177-200

[6] A. Defant and K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals, North-Holl. Math. Stud., vol. 176, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1993).

[7] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, (1995)

[8] J.D. Farmer and W.B. Johnson, Lipschitz p-summing operators, Proc. Am. Math.Soc., 137(9)(2009), 2989-2995..

[9] D.J.H. Garling : Inequalities, A journey into Linear Analysis, Cambridge University Press, (2007).

[10] H. Hogbe-Nlend and V. B. Moscatelli, Nuclear and Conuclear Spaces, North- 52. North-Holland Publishing Company, (1981).

[11] R. Khalil, A. Yousef, Isometries of P-nuclear operator spaces, J. Comput. Anal. Appl. 16(2)(2014), 368-374.

[12] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces, Tome 1. Sequence Springer-Verlag, (1977).

[13] K. Miyazaki, (p,q)-Nuclear and (p,q)-Integral Operators, Hiroshima Math. J., 4 (1974), 99-132.

[14] A. Persson, On some properties of p-nuclear and p-integral operators, Studia Math., (1969), 113-222.

[15] A. Pietsch, Operator ideals, North-Holland Publishing Company, (1980).

[16] O.I. Reinov, On Linear operators with p-nuclear adjoints, Math. FA, (2001).

[17] S. Reisner, A factoriztion theorem in Banach lattices and its application to Lorentz spaces, Annales de l'institut Fourier, tome 31, n 0 1, p. (1981), 239-255.

[18] I. Sawashima, Methods of Lipschitz Duals, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, vol. 419, SpringerVerlag, pp. (1975), 247-259.

[19] R. Yahi, D. Achour and P. Rueda, Absolutely summing Lipschitz conjugates, Mediterr. J. Math., 13 (2016), 1949-1961.

[20] N. Weaver, Lipschitz Algebras, World Scientific Publishing Co., Singapore, (1999).

[21] Achour, D., & Alouani, A. (2010). On multilinear generalizations of the concept of nuclear operators. In Colloquium mathematicum (Vol. 120, pp. 85-102). Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk.

[22] O. I. Zhukova, On modifications of the classes of p-nuclear, p-summing and p-integral operators,Sib. Math. J. 30(1998), 894-907.

[23] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely Summing Operators,Cambridge Stud. Adv. Math., 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[24] J.-D. Farmer and W.-B. Johnson, Lipschitz p-summing operators, Proc.Amer. Math. Soc. 137 (9) (2009), 2989-2995.

[25] A Belacel, K Bey - Strongly. Lipschitz up-Nuclear Operators Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis, 2019 - Sciendo.

[26] A- TALLAB,Thése doctorat ,Généralisation des propriétés des opérateurs p-sommants aux opérateurs Lipschitz p-sommants , 2017.

[27] A- BOUGOUTAIA,Thése doctorat,Quelques idéaux des opérateurs linéaires et non-linéaires et leurs applications,2019

Résumé

Résumé : *Le présent travail s'articule sur la théorie des opérateurs pour ce là on va prendre en étude approfondi un article de Monsieur .A ; Belacel et mademoiselle Khedidja Bey, qu' est paru dans le journal : Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis en 2019 avec l'intitulé par : Strongly Lipschitz up-Nuclear operators. La dont les auteurs introduisent le concept d'opérateurs up-nucléaires Lipschitzien. .Ils exposent une étude de types d'opérateurs up-nucléaires Lipschitzien et donne l'analogue linéaire qui a été trouvé dans le travail de Mr, A. Persson ils nous a donné le théorème de factorisation. Ils montrent autres résultats, qui permettent une transposition de l'opérateur up-nucléaire au fortement Lipschitzien est p-nucléaire et nous ont trouvé les mêmes résultats avec les opérateurs fortement Lipschitzien p-nucléaires qui sont introduits et étudiés par Chen et Zhen.*

Abstract : *Our memory is part of the theories of operators for this we will take in depth study an article of Mr. .A ; Belacel et mademoiselle Khedidja Bey, which appeared in the journal : Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis in 2019 with the title of : Strongly Lipschitz up-Nuclear Operators The authors introduce the concept of Lipschitzirn fortement up-nuclear operators. By presenting a study of the class of Lipschitzian p-nuclear operators whose linear analogue was found in [14] they gave us the factorization theorem. They show other results, which allow a transposition of the p-nuclear operator to the strongly Lipschitz is p-nuclear and we found the same results with the strong Lipschitzian p-nuclear operators which are introduced and studied by Chen and Zheng in [4].*

ملخص: *هذا العمل مبني على نظرية التطبيقات لهذا الغرض هناك سنقوم بدراسة متعمقة لمقال كتبه السيد أ. بالعسل والآنسة خديجة باي التي ظهرت في مجلة: المجلة المغربية للآنا الصرفة والتطبيقية.*

تحلل في عام 2019 بعنوان: ***Strongly Lipschitz up-Nuclear Operators***

من يقدم المؤلفون مفهوم تطبيق ليبشيتس up-Nucléaire . يعرضون دراسة أنواع تطبيقات ليبشيتس up-Nucléaire وإعطاء التناظرية الخطية التي تم العثور عليها في عمل السيد أ. بيرسون أعطونا نظرية العوامل.

تظهر نتائج أخرى، والتي تسمح بتبديل التطبيق الليبتشيزي up-Nucléaire بالتطبيق الليبتشيزي القوي هو p-Nucléaire ووجدنا نفس النتائج مع التطبيق الليبتشيزي القوي هو p-Nucléaire التي تم تقديمها ودراستها بواسطة شين وزين.