

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA



N° d'Ordre...../.....

Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'Obtention du Diplôme de

MAGISTER

En Génie Mécanique
Option : Energétique

Par

M^{me} Benkherbache Souad

THEME

SIMULATION NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT SUR UNE MARCHE DESCENDANTE

Soutenu le : 01 / 06 / 2005

Devant le Jury:

Pr. R. ZEGGADI	Prof.	Président	Université de Sétif
Dr. M. Si-AMEUR	M.C	Rapporteur	Université de Batna
Dr. B. BOUDERAH	M.C	Examineur	Université de M'sila
Dr. A. TAIBI	C.C	Examineur	Université de M'sila
Mr. A.M. CHAHHAT	M..A.C.C	Membre invité	Université de M'sila

ملخص

السريان المستقر و الضغوط من أجل أعداد رينولدز ضئيلة، على درجة منزلة بسطح خاضع لدرجة حرارة أكبر من درجة حرارة المحيط، محاكي عدديا باستعمال النظرية العددية للحجوم المنتهية. اخترنا كأساس للعمل القانون (TEAM(Turbulent Elliptic Algorithm Manchester) ترجمته الأصلية تسمح بحل المعادلات المستقرة لنافيي ستوكس للسريان التشارري للسيلان الاضغوط. هذا القانون TEAM ألغوريتم التحليل (SIMPLE(Semi Implicit for Linked Pression) خضعوا لعدة تغييرات من أجل التكيف لهذا النوع من السريان و الهندسة. في الحالة الأولى قمنا بالمقارنة للتحقق من فعالية الإصلاحات المقدمة. نتائج الحساب العددي أبدت توافق مرضي مع النتائج المتاحة في الحالة الثانية قمنا بالتحاكي العددي للسريان المستقر الحر على درجة منزلة من أجل أعداد رينولدز $Re=150$, $Re=800$ و إرتفاعات مختلفة للدرجة أي بنسب تمدد $ER=1.5$, $ER=2$.
الكلمات المفتاحية : الدرجة المنزلة، التحاكي العددي، السريان المنفصل.

Abstract

The stationary compressible flow at low Reynolds number, over a backward-facing step, with wall temperature is simulated numerically, by finite volumes method.

We chose as bases work the code TEAM (Turbulent Elliptic Algorithm Manchester), whose original version solves the stationary Navier-Stokes equations for an isothermal flow of incompressible fluid.

This code TEAM and the algorithm of resolution SIMPLE(Semi Implicit for Linked Pression) were the object of several modifications, to adapt them to our type of flow and geometry. In a first case, comparisons are made to check the effectiveness of the improvements made. The results of computations showed a satisfactory agreement with the literature.

The second case relates to the numerical simulation of a free compressible flow over a backward-facing step, for low Reynolds numbers, $Re =150$ and $Re=800$, and different step height i.e. An expansions ratios $ER=1.5$ and $ER=2$.

Key words: Backward –facing step, Numerical Simulations, Separated flow.

Résumé

L'écoulement compressible stationnaire et à faible nombres de Reynolds, sur une marche descendante, et a paroi maintenue à une température constante est simulé numériquement, par la méthode des volumes finis.

Nous avons choisi comme base de travail le code TEAM (Turbulent illiptic Algorithm Manchester), dont la version originale permet de résoudre les équations stationnaires de Navier-Stokes pour un écoulement isotherme de fluide incompressible.

Ce code TEAM et sont algorithme de résolution SIMPLE (Semi Implicit for Linked Pression) ont été l'objet de plusieurs modifications pour, les adapter à notre type d'écoulement et de géométrie.

Dans un premier cas, des comparaisons sont faites pour vérifier l'efficacité des améliorations apportées. Les résultats de calcul ont montrées un accord satisfaisant avec la littérature. Le deuxième cas concerne la simulation numérique d'un écoulement compressible libre sur une marche descendante, pour des faibles nombres de Reynolds, $Re =150$ et $Re=800$, pour des différentes hauteur de la marche c'est-à-dire des rapports d'expansions $ER=1.5$ et $ER=2$.

Mots clés : Marche descendante, Simulation Numérique, Ecoulement détaché.

SOMMAIRE

Liste des figures.....	i
Nomenclature.....	iv
INTRODUCTION GENERALE.....	1

CHAPITRE I :

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	4
I.1.Introduction.....	4
I.2.Travaux Antécédents	5
I.3.Approche Numérique.....	18
I.4.Description du Problème.....	21

CHAPITRE II :

FORMULATION MATHEMATIQUE.....	24
II.1.Introduction.....	24
II.2.Equation Représentative de L'écoulement.....	24
II.3.Conditions aux Limites.....	28
II.4.Adimensionnement des Equations.....	29
II.5.Equations de Conservation Adimensionnelles.....	29
II.6.Calcul du Coefficient de Frottement	31
II.7.Calcul du Nombre de Nusselt.....	32

CHAPITRE III :

METHODE NUMERIQUE.....	34
III.1.Introduction.....	34
III.2.Présentation de la Méthode.....	34

III.3.Maillage.....	35
III.3.1. Stockage des Variables	36
III.3.2. Maillage Décalé	37
III.4.Discrétisation des Equations Différentielles.....	38
III.4.1.Intégration de l'Equation de Transport.....	40
III.5.Schémas de Discrétisation.....	43
III.5.1.Schémas de Discrétisation Spatiale.....	43
III.5.2.Discrétisation des Termes Source.....	46
III.6.Discrétisation des Conditions aux Limites.....	48

CHAPITRE IV :

RESOLUTION DES EQUATIONS ALGEBRIQUES.....	49
IV.1.Introduction.....	49
IV.2.Algorithme SIMPLE.....	49
IV.3.Séquences des Opérations Itératives.....	53
IV.4.La Méthode de Sous-Relaxation.....	54
IV.5.Critères de Convergence.....	54
IV.6.Solution Numérique du Système Algébrique.....	55
IV.7.Structure du Code de Calcul.....	58

CHAPITRE V :

RESULTATS ET DISCUSSIONS.....	60
V.A.Validation du Code de Calcul.....	60
V.A.1.Introduction.....	60
V.A.2.Commentaire.....	71
V.B.Résultats et Discussions	72
V.B.1.Introduction.....	72
V.B.2.Ecoulement sur une Marche Descendante.....	72
V.B.3.Maillage.....	72
V.B.4.Adaptation du Code de Calcul TEAM.....	73

V.B.4.1 Technique de la Zone Inactive.....	73
V.B.4.2.Mise en Application.....	75
V.B.6.Propriétés Physiques du Fluide.....	75
V.B.7.Champs des Vitesses.....	76
V.B.8.Champs de Pression.....	82
V.B.9.Champs de Température.....	82
V.B.10.Coefficient de Frottement.....	83
V.B.11.Nombre de Nusselt.....	88
CONCLUSION GENERALE.....	91
BIBLIOGRAPHIE.....	93
ANNEXE	

Liste Des Figures

Fig(I-1) :	Couche de mélange dans un écoulement cisailé.....	4
Fig(I-2) :	Schéma du montage de la Vélocimétrie à Laser Doppler.....	6
Fig(I-3) :	Schéma de la configuration de la marche.....	8
Fig(I-4) :	Schéma du dispositif Expérimental.....	9
Fig(I-5) :	Domaine de calcul de la Configuration.....	11
Fig(I-6) :	Schéma du diagramme de contrôle par Feedback.....	13
Fig(I-7) :	Montage expérimental.....	13
Fig(I-8) :	Montage expérimental du canal avec la section test à marche descendante.....	15
Fig(I-9) :	Configuration de la section test.....	15
Fig(I-10) :	Montage expérimental [37].....	16
Fig(I-11) :	Montage expérimental [38].....	16
Fig(I-12) :	Montage expérimental [39].....	17
Fig(I-13) :	DNS d'une couche limite turbulente à séparation.....	19
Fig(I-14) :	Simulation des Grandes Echelles (LES) d'un écoulement derrière Une Marche Descendante.....	20
Fig(I-15) :	Caractéristiques géométriques de la marche descendante.....	22
Fig(I-16a)	Caractéristiques physiques générales d'écoulement en aval de	
Fig(I-16b) :	la marche descendante.....	23
Fig(III-1) :	Schémas représentant un volume de contrôle.....	31
Fig(III-2):	Maillage à espacement non uniforme.....	36
Fig(III-3) :	Localisation des variables	37
Fig(III-4) :	Maillage décalé	37
Fig(V-1) :	Marche descendante dans un canal $ER=2$	60
Fig(V-2a):	Contours de la pression pour des différentes valeurs de Re comparaison Avec la littérature.....	62

Fig(V-2b):	Contours de la pression pour des différentes valeurs de Re comparaison Avec la littérature.....	63
Fig(V-3) :	Variation de la longueur de rattachement en fonction du nombre de Reynolds comparaison avec la littérature	64
Fig(V-4a) :	Profils des vitesses pour des différentes positions x	65
Fig(V-4b) :	Profils des vitesses pour des différentes positions x.....	66
Fig(V-5) :	Profils des vitesses pour des différentes positions x Comparaison avec la littérature.....	68
Fig(V-6) :	Profil des vitesses u/u_0 pour des différentes stations X/H Comparaison avec d'autres auteurs.....	70
Fig(V-7) :	Configuration étudiée et conditions aux limites de la marche descendante dans un canal pour un rapport d'expansion ER=1.5.....	72
Fig(V-8) :	Maillage du domaine de calcul.....	73
Fig(V-9) :	Discretisation de la configuration.....	74
Fig(V-10) :	Les lignes de courant pour des différentes valeurs Re et un rapport d'expansion ER=1.5.....	78
Fig(V-11) :	Les lignes de courant pour des différentes valeurs Re et un rapport d'expansion ER=2.....	78
Fig(V-12):	Champs de vitesse dans les différentes zones.....	79
Fig(V-13) :	Profils des vitesses u/u_0 dans les différentes stations x, ER=1.5.	80
Fig(V-14) :	Profils des vitesses u/u_0 dans les différentes stations x, ER=2...	81
Fig(V-15) :	Représentation spatiale des champs de pression pour un rapport d'expansion ER=1.5.....	84
Fig(V-16) :	Représentation spatiale des champs de pression pour un rapport d'expansion ER=2.....	84
Fig(V-17) :	Evolution de la pression dans les différentes Station x pour un rapport d'expansion ER =1.5.....	85

Fig(V-18):	Evolution de la pression dans les différentes Station x pour un rapport d'expansion $ER = 2$	85
Fig(V-19) :	Représentation spatiale des champs de température pour un rapport d'expansion $ER = 1.5$	86
Fig(V-20) :	Représentation spatiale des champs de température pour un rapport d'expansion $ER = 2$	86
Fig(V-21) :	Evolution de la température pour des différentes stations x et un rapport d'expansion $ER=1.5$	87
Fig(V-22) :	Evolution de la température pour des différentes stations x et un rapport d'expansion $ER=2$	87
Fig(V-23a):	Evolution du coefficient de frottement $ER = 1.5$	89
Fig(V-23b):	Evolution du coefficient de frottement $ER = 2$	89
Fig(V-24a):	Evolution du nombre de Nusselt le long du canal pour un rapport d'expansion $ER=1.5$	90
Fig(V-24b):	Evolution du nombre de Nusselt le long du canal pour un rapport d'expansion $ER=2$	90

NOMENCLATURE

a_N, a_S, a_E, a_W	: Coefficients dans le système d'équation algébrique Discrétisé	[-]
a, b, c, d	: Eléments de la matrice tri diagonale	[-]
A_n, A_S, A_E, A_W	: Aires des faces du volume de contrôle	[-]
$A P $: Fonction d'un schéma numérique en fonction du Nombre de Peclet	[-]
b	: Terme source dans le système d'équation algébrique Discrétisée.	[-]
C_p	: Chaleur spécifique à pression constante	[J/KgK]
D_n, D_s, D_e, D_w	: Termes de diffusion dans le système d'équation Algébrique.	[-]
D	: Section d'entrée	[m]
F_n, F_s, F_e, F_w	: Termes de convection dans le système d'équation Algébrique	[-]
I	: Indice des nœuds suivant x	[-]
J	: Indice des nœuds suivant y	[-]
NI	: Nombre total de nœuds suivant x	[-]
NJ	: Nombre total de nœuds suivant y	[-]
Re	: Nombre de Reynolds	[-]
Pr	: Nombre de Prandtl	[-]
P	: Nombre de Peclet	[-]
p	: Pression	[N/m ²]
p_0	: Pression de référence	[N/m ²]
p^*	: Pression adimensionnelle	[-]
P'	: Correction de la pression	[-]

Sc	: La partie indépendante de la variable Φ du terme source	[-]
Sp	: La partie dépendante de la variable Φ du terme source	[-]
$S\Phi$: Le terme source moyen de la variable Φ	[-]
T_p	: La température de la paroi	[°K]
T_o	: La température ambiante	[°K]
t_0	: Temps de référence	[S]
u^*	: Composante adimensionnelle de la vitesse selon La direction x	[-]
u^*	: Estimation de la vitesse	[m/s]
u_0	: la vitesse de référence	[m/s]
u'	: Correction de la vitesse selon la direction x	[-]
v	: Composante de la vitesse selon la direction y	[m/s]
v^*	: Composante de la vitesse adimensionnelle selon la direction y	[-]
v^*	: Estimation de la vitesse selon la direction y	[-]
v'	: Correction de la vitesse selon la direction y	[-]
e,w,n,s	: Faces Est, Ouest, Nord, Sud du volume de contrôle	[-]
J_e, J_w, J_n, J_s	: Densités de flux total à travers les faces e,w,n,s	[-]
$\Delta x, \Delta y$: Dimensions du volume de contrôle	[-]
C_f	: Coefficient de frottement	[-]
Nu	: Nombre de Nusselt	[-]
U	: Vecteur vitesse	[m/s]
u	: Composante de la vitesse selon la direction des x	[m/s]
v	: Composante de la vitesse selon la direction des y	[m/s]
Symboles Grecs		
α	: Coefficient de sous relaxation	[-]
θ	: Température adimensionnelle	[-]

θ_p	: Température adimensionnelle de la paroi	[-]
λ_0	: Conductivité thermique de référence	[W/mK]
λ	: Conductivité thermique	[W/mK]
μ_0	: Viscosité dynamique de référence	[Kg/ms]
ρ_0	: Masse volumique de référence	[Kg/m ³]
μ	: Viscosité dynamique	[Kg/ms]
ρ	: Masse Volumique	[Kg/m ³]
Φ	: Variable de transport	[-]
τ_w	: Contrainte de cisaillement pariétale	[Kg/m ²]
Γ	: Coefficient de diffusion	[-]
δ_{ij}	: Cronecker	[-]
ν	: Viscosité cinématique	[m ² /s]
β_i	: Coefficients de la matrice	[-]
γ_i	: Coefficients de la matrice	[-]

INTRODUCTION

L'écoulement sur une marche descendante, est une configuration de base utilisée dans de nombreuses applications industrielles. Ce type d'écoulement a fait l'objet de beaucoup de travaux et recherches scientifiques, qu'on trouve dans la littérature.

La caractéristique principale de cet écoulement est liée au sillage qui se développe à l'aval de la marche, la bulle de recirculation constitué de fluide qui se replie sur lui-même et en rotation dans le sens d'une aiguille d'une montre.

L'étude de l'écoulement sur une marche descendante se fait soit expérimentalement, ou numériquement.

Il est vraisemblable que la première méthode est la plus sûre, néanmoins elle reste handicapée par le coût élevé du matériel et la difficulté de réalisation.

La simulation numérique est confrontée à des problèmes de calcul et de stockage dans la mémoire, principalement le cas des calculs tridimensionnels. Cette difficulté croit particulièrement en géométrie complexe, en présence de phénomènes physiques complexe, néanmoins c'est une méthode moins coûteuse et la plus utilisée dans les laboratoires de recherche.

Dans la présente étude, nous avons utilisé la simulation numérique comme outil d'investigation, l'écoulement considéré est stationnaire, compressible (Il est a noté que compte-tenu des faibles écarts de température l'utilisation des équations de Navier-Stokes incompressible peuvent être utilisées dans ce contexte) sur une marche descendante, dont la paroi est maintenue à une température constante supérieure à celle du milieu ambiant. L'objectif de ce mémoire est de traiter ce problème, dans ce type de géométrie et de mettre en évidence numériquement comment la structure de l'écoulement et le taux de transfert de chaleur évoluent lorsque nous faisons varier simultanément les paramètres géométriques (de la marche) et physiques de l'écoulement. La discrétisation des équations de Navier-

Stockes est faite par la méthode des volumes finis décrite par **Patankar**[1], avec un schémas dit « PLDS » (Power Low Differencing Scheme) pour la discrétisation du terme de convection.

Comme base de travail nous avons utilisé le code TEAM (Turbulent Elliptic Algorithm Manchester) dont la version original résout les équations de Navier-Stockes moyennées avec une approximation des grandeurs turbulentes par le modèle $k-\varepsilon$, dans lequel nous avons fait les modifications suivantes pour l'adapter à notre type d'écoulement et de géométrie.

- § *Enlèvement du modèle $k-\varepsilon$ initialement associé au code.*
- § *Introduction de la zone inactive pour obtenir la géométrie rectangulaire de la marche*
- § *Raffinage du maillage pour assurer une capture des changements rapides.*
- § *Introduction des conditions aux limites appropriées*
- § *Perfectionnement des facteurs de balayage et de sous relaxation.*

La pression est évaluée par le biais de l'équation de continuité en utilisant l'algorithme « SIMPLE » : (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) qui a été adapter aussi pour considérer les modifications citées ci-dessus, le système d'équations est résolu par l'algorithme « TDMA » (Tri-Diagonal Matrix Système).

Le travail présenté dans ce mémoire est organisé en cinq chapitres, dont le premier représente une description des caractéristiques physiques générales des écoulements en aval d'une marche descendante et une recherche bibliographique des différents travaux qui ont traité ce type de phénomène.

Le deuxième chapitre décrit la formulation mathématique du problème. Cette dernière est basée sur les lois classiques de la variation de la quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie.

Dans le troisième chapitre nous donnons une explication détaillée de la procédure numérique.

Le quatrième chapitre a été consacré aux algorithmes de résolutions utilisés par la méthode des volumes finis.

Afin de vérifier le bon déroulement du code de calcul, une comparaison entre nos résultats et ceux de la littérature est représentée dans le cinquième chapitre.

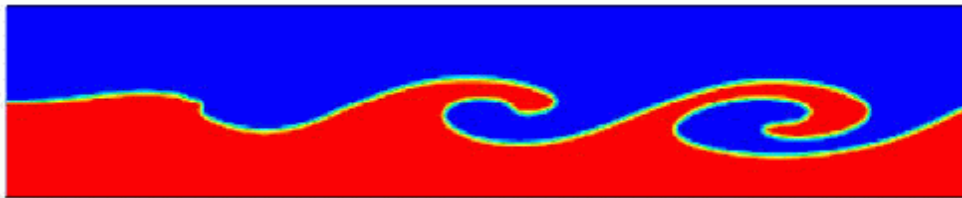
Dans ce chapitre nous présentons les résultats obtenus et les interprétations assignées à ces résultats dans le cas d'un écoulement stationnaire sur une marche descendante en variant les paramètres physiques et géométriques de la marche, c'est-à-dire pour des nombres de Reynolds $Re = 150$ et $Re = 800$ pour des rapports d'expansions $ER = 1.5$ et $ER = 2$.

CHAPITRE I

Etude Bibliographique

I.1.Introduction :

Les écoulements peuvent être classés selon leur nature, dans l'une des deux catégories suivantes : les écoulements cisailés libre (mélange des courants de fluides de vitesses différentes) et les écoulements cisailés autour d'un obstacle ou proche d'une paroi (couche limite écoulement dans un canal ...etc.).



Fig(I-1) : Couche de mélange dans un écoulement cisailé

La figure (I-1) représente le développement spatial d'une couche de mélange dans un écoulement cisailé. Dans cette figure les tourbillons cohérents se manifestent sous la forme de spirales et sont connus comme tourbillons de **Kelvin Helmholtz**.

L'écoulement sur une marche descendante est un exemple de configuration complexe combinant les deux types d'écoulements dans une géométrie simple. Sa dynamique est le résultat de l'interaction des instabilités caractéristiques des écoulements cisailés libres et des écoulements pariétaux.

En aval de la marche, la couche limite décolle, le profil de vitesse devient inflexionnel avec un courant de retour dans la poche de recirculation, ce qui déclenche l'instabilité de **Kelvin Helmholtz**. Des instabilités visqueuses se développent également dans les couches limites des parois du domaine et interagissent avec la zone de recirculation et les tourbillons de **Kelvin Helmholtz**.

I.2. Travaux Antécédents

L'étude de l'écoulement sur une marche, dont l'importance est dictée par le rôle qu'il joue dans divers secteurs industriels, a conduit à une imposante bibliographie spécialisée qui s'est accumulée au fur des années.

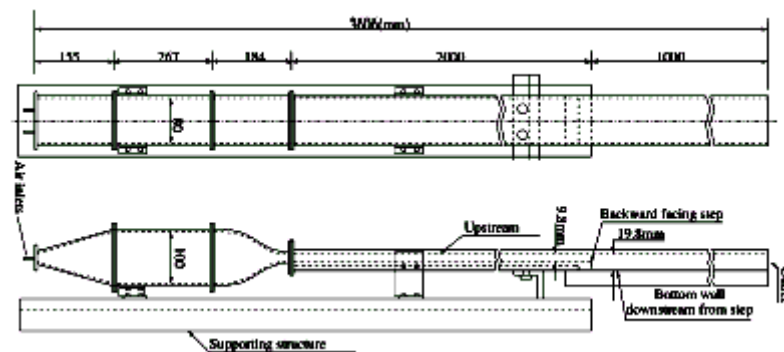
Une revue de la littérature montre que la marche descendante est un exemple de configuration extensivement étudié [2]. Les travaux numériques et expérimentaux s'y rattachant sont en fait si nombreux et variés qu'il devient impossible de les citer tous. De plus malgré cette abondance apparente, le problème reste loin d'être épuisé.

Armaly, Durst et al [3] dans leurs travaux numériques expérimentaux par Vélocimétrie à Laser Doppler (voir Annexe), de l'écoulement bidimensionnel de l'air dans un canal à marche descendante, pour les régimes laminaire, transitoire et turbulent, à des nombres de Reynolds compris entre 70 et 8000 et un rapport d'expansion $ER=1.94$, ont montrés qu'en plus de la zone de recirculation primaire, il y a présence d'autres zones de recirculation qui n'étaient pas prises en considération par la littérature, l'une en aval de la 1^{ère}, l'autre dans la paroi supérieur et l'écoulement demeure bidimensionnel pour les deux cas expérimental et numérique qui étaient en très bon accord. En écoulements laminaires **Durst et Pereira** [4] ont entrepris une étude numérique d'un écoulement impulsif, dans un canal contenant une marche descendante, et en variant les nombres de Reynolds Re de (10, 368 et 648), ils ont montrés que l'écoulement commence à se séparer en aval de la marche et il y a apparition d'une zone de recirculation qui augmente de taille dans le temps, et une seconde zone de recirculation apparaît à la paroi supérieur du canal quand le nombre de Reynolds est plus élevé et qui disparaît quand l'écoulement est établi.

Les mesures sont présent pour un écoulement laminaire et stationnaire pour deux types de conditions d'entrées en un premier cas l'écoulement est stationnaire en deuxième cas il est instationnaire.

Armaly et Nie [5] ont fait une simulation numérique à trois dimensions d'un écoulement incompressible sur une marche descendante dans une conduite rectangulaire, ils ont présentés l'effet de la hauteur de la marche et les

caractéristiques du transfert de la chaleur sur l'écoulement, ils ont montrés que la zone de recirculation augmente de taille quand la hauteur de la marche augmente. D'autres mesures entreprises par ces mêmes auteurs [6], mais cette fois expérimentalement par utilisation de la Vélocimétrie à Laser Doppler(LDV)(voir Annexe), pour mesurer les champs de vitesses longitudinales et transversales d'un écoulement à trois dimensions , en variant le nombre de Reynolds entre les valeurs(98.5 et 525) voir figure(I-2) ,ils ont montrés que la zone de recirculation en aval de la marche augmente de taille quand le nombre de Reynolds augmente , les mesures prisent des profils des vitesses étaient en bon accord avec des travaux antécédents , qui ne pouvaient pas être déterminés pour un écoulement à deux dimensions.



Fig(I-2) : Schéma du Montage de la Vélocimétrie à Laser Doppler [6]

Valencia et al [7] ont utilisé un canal contenant une marche descendante, pour mettre en évidence les caractéristiques du transfert de la chaleur sur l'écoulement incompressible et stationnaire ou pulsatile, et pour voir l'influence de la vitesse d'entrée, le nombre de Reynolds et la hauteur de la marche sur la longueur de rattachement.

Pour un même nombre de Reynolds ($Re=100$), la contrainte de frottement varie d'une manière remarquable quand l'écoulement est pulsatile et le transfert de

chaleur devient constant, ces résultats sont plus meilleurs que ceux de l'écoulement stationnaire.

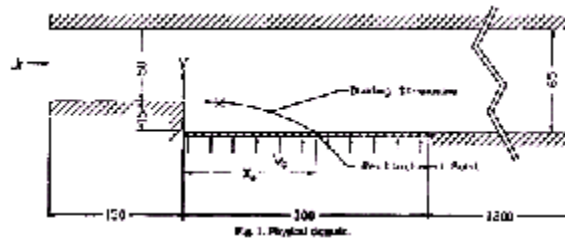
D'autres travaux numériques entrepris par **Seo.Young** et **Hyung.Sung** et al [8] par analyse des caractéristiques de l'écoulement et le transfert thermique en convection mixte dans un canal avec des blocks rectangulaires attachés à une paroi du canal, ils ont affirmés que les hypothèses trop simplificatrices comme surface de paroi isotherme ou adiabatique ne sont pas appropriées pour simuler le refroidissement des équipements électroniques modernes

Il s'en suit d'autres travaux par ces mêmes auteurs [9], mais cette fois pour traiter les caractéristiques d'un écoulement pulsatile associé à un transfert de chaleur de deux blocks uniformément chauffés (les blocks caractérisent la géométrie de la marche) , les résultats comparés à d'autres travaux antérieurs d'un écoulement stationnaire montrent que la zone de recirculation en aval des blocks aussi bien que dans la région entre ces deux derniers ,est affectée par la fréquence de pulsation,et il y a une grande influence de la hauteur des blocks sur le transfert de la chaleur vers l'écoulement pulsatile .

Dans le cas des écoulements turbulents toujours pour la géométrie de la marche descendante plusieurs travaux expérimentaux et numériques ont fait l'objet dans cette recherche.

Dans l'étude statistique et topologique de **Silveira** [10] d'un écoulement turbulent en aval d'une marche descendante, par une simulation directe et simulation des grandes échelles(voir paragraphe I-3) il a mis en évidence la formation des structures cohérentes qui composent la couche de mélange bidimensionnelle, il a aussi étudié l'influence d'une stratification stable sur la couche de mélange pour ce cas il a montré comment la gravité inhibe la croissance de la couche de mélange ,et l'apparition d'ondes de gravité internes ceci par simulation directe et par simulation des grandes échelles,pour des écoulements tridimensionnelles en utilisant pour ce cas le modèle sous maille la validation de ces résultats ont été faite pour une marche de faible hauteur.

Yue.Tzu.Yang et **Chung.Lun.Kuo** [11] ont fait une étude numérique d'un écoulement de fluide avec une purge ou injection de masse normale et uniforme figure (I-3), dans la zone de recirculation en utilisant le modèle standard K- ϵ et le nouveau modèle de turbulence, ils ont conclu qu'en augmentant la vitesse d'injection de la masse il y a une diminution de la vitesse longitudinale dans la zone de recirculation ainsi que l'intensité turbulente et les contraintes de Reynolds.



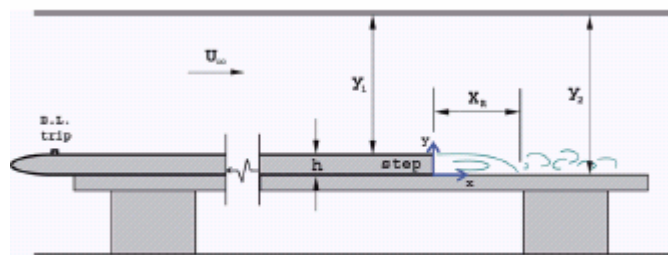
Fig(I-3) :Schéma de la configuration [11]

Hung. Le. Moin et **Kim** [12] ont fait une DNS (Voir paragraphe I-3) des écoulements turbulents sur une marche descendante, par la résolution directe des équations de Navier-Stokes et pour un nombre de Reynolds $Re=5100$ basé sur la hauteur de la marche et le maximum de la vitesse, une vitesse d'entrée constante et un rapport d'expansion de $ER=1.2$, ils ont mis en évidence les fluctuations moyennes du contour de pression et la longueur de rattachement d'un comportement périodique et ont montré que le champ de vitesse instantanée indique que la zone de rattachement varie dans la direction horizontale et oscille autour d'une même valeur en fonction de la hauteur de la marche . Les résultats statistiques étaient en très bon accord avec les données expérimentaux de **Seegmiller** et **Driver** [44]. Ils ont montrés aussi que pour des nombres de Reynolds faibles la contrainte de frottement est négative dans la zone de recirculation.

Le profil de la vitesse dans la région de recouvrement baisse en dessous de la loi- Log universelle, la déviation en dessous de la loi- Log universelle indique que la couche limite turbulente n'est pas complètement développée à 20 pas de hauteurs derrière la région de séparation. Le maximum de dissipation est 60% du maximum de production les corrections du gradient de vitesse et de pression et la diffusion visqueuses sont négligeables dans la couche de cisaillement par contre sont

signifiantes dans la région proche paroi. Ces résultats en régimes laminaire montrent une bonne concordance avec les expériences du tracé de la longueur de rattachement en fonction du nombre de Reynolds, aussi du profil de la vitesse horizontale. **Olivier Isnard [13]** a entrepris une étude sur la dispersion du polluant dans l'atmosphère en présence de groupes d'obstacles de forme cubique par modélisation et simulation numérique des écoulements atmosphérique, les obstacles schématisant la géométrie de la marche, il a ainsi considéré l'influence de l'organisation géométrique des obstacles, la taille et la distance de séparation entre eux. **Gwang.Hoon.Rhé et Hyung.Jim.Sung [14]** ont entrepris une étude numérique d'un écoulement instable localement forcé à séparation et rattachement. Pour cela ils ont utilisé un gicleur d'oscillations sinusoïdales inséré dans la ligne de séparation, ils ont employés les modèles K- ϵ - f_h . Le nombre de Reynolds est fixé à 33000, la fréquence des oscillations étant variable. Les visualisations effectuées sur le vortex de la zone de recirculation montrent que celui-ci est convecté en fonction du temps. Les résultats obtenus étaient en bon accord avec les résultats expérimentaux d'autres travaux antécédents.

Kostas, Soria, Chang[15] ont utilisés la vélocimétrie par image de particule(PIV)(voir Annexe) pour mesurer le champs de vitesse et de vorticité instantanées figure(I-4),le nombre de Reynolds $Re=4660$ (basé sur la hauteur de la marche et une vitesse U_∞). Ils ont montrés qu'il y a apparition d'un vortex instantané, dans la couche de cisaillement, ils ont aboutit à une conclusion que les structures de grandes échelles contribuent aux tensions de Reynolds l'énergie cinétique turbulente dans la zone de rattachement, alors que les structures des petites échelles contribuent aux tensions de Reynolds les plus intenses au voisinage de cette zone.



Fig(I-4) : Schéma du dispositif expérimental [15]

AbuMulaweh, chen et Armaly [16] ont fait des travaux expérimentaux par vélocimétrie à laser à effet Doppler (LDV) (voir Annexe), pour mesurer respectivement la vitesse et la température instantanées, ainsi leurs fluctuations turbulentes, d'un écoulement turbulent en convection mixte, le long d'un canal vertical à parois chauffées contenant une marche descendante adiabatique.

Dans leurs expérience ils ont pris comme hauteurs de la marche les valeurs (0,11e t 22) et une vitesse $U_{\infty}=0.41\text{m/s}$, une différence de température $DT=30^{\circ}\text{C}$ entre les parois chauffées du canal et l'écoulement . Ils ont conclu que l'intensité turbulente, les fluctuations de la vitesse transversale et l'intensité des fluctuations de la température en aval de la marche augmentent quand la hauteur de la marche augmente ainsi que la longueur de rattachement et le rapport du transfert de chaleur de la paroi chauffée.

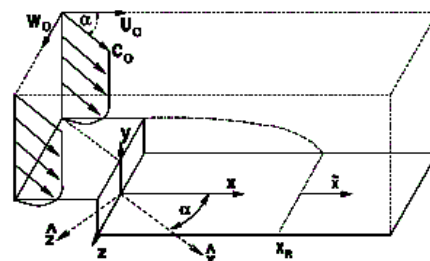
Danet[17], Delcayre[18], Ravikhan,Avancha et Pletcher[19] et **Kaltenback[20],[21] ,Keating ,Promelli et al [22]** ont utilisé la méthode de simulation des grandes structures (**LES**) (voir paragraphe I-3).

Danet[17] a entrepris une étude de la configuration de la marche par cette méthode pour voir l'influence des conditions aux limites en amont de la marche sur l'écoulement ,en utilisant en premier cas comme condition d'entrée un profil de vitesse moyen turbulent perturbé par un bruit blanc. Les données de la seconde condition d'entrée sont quant à elles issues d'un calcul précurseur de la couche limite turbulente, la visualisation de l'écoulement portant sur les vitesses et la pression montrent comment la couche cisailée après la séparation est modifiée par la nature de la condition d'entrée, malgré les différences de conditions initiales, les écoulements des deux simulations développent une structure relativement similaire à l'approche du rattachement , si bien que l'influence de la condition d'entrée est négligeable dans cette zone et plus loin dans l'écoulement .

Delcayre[18] a utilisé cette méthode pour caractériser les tourbillons cohérents en forme de lambda générés juste en aval de la marche, se réfléchissant sur la paroi inférieure et sont transportés vers l'aval témoignant la persistances des structures des grandes échelles .

Ravikanth,Avanchar et Pletcher [19] ont utilisés cette méthode pour voir les variations et les propriétés du coefficient du transfert de chaleur d'un écoulement turbulent sur une marche descendante ,pour cela ils ont utilisés la formulation compressible avec un faible nombre de Mach et un nombre de Reynolds $Re = 5540$ basé sur la hauteur de la marche , et un rapport d'expansion $ER = 1.5$,un filtre compact du 6^{ème} ordre est utilisé pour prévenir le couplage vitesse pression et le modèle de Smagorinsky pour capturer les petites échelles, la paroi inférieure en aval de la marche est soumise d'un flux de chaleur uniforme . Trois simulations sont faites par augmentation du flux de chaleur ont conduit à que la sous couche visqueuse joue un rôle critique sur le contrôle du rapport de transfert de chaleur ,ce dernier est maximal dans la région juste en amont de la zone de rattachement .

Kaltenback[20], [21] dans son étude de la simulation des grandes échelles d'un écoulement turbulent sur une marche descendante ,il a utilisé un profil de vitesse parabolique entrant sous différentes déviations (de 0° à 70°),Figure(I-5) , et un nombre de Reynolds $Re=5000$, il a montré que la longueur de rattachement est presque constante pour des angles de déviations inférieur à 30° , elle diminue graduellement pour des angles plus grand, et cet angle de déviation n'influe pas sur les structures statistiques de la turbulence, contrairement l'effet est considérable dans les propriétés dynamiques dans la région proche paroi en aval de la ligne de rattachement .



Fig(I-5) : Domaine de calcul de la configuration [20],[21]

Dans l'étude entreprise par **Keating, piomelli** et al [22] sur le transfert de chaleur des écoulements à séparation et rattachement par simulation des grandes échelles, avec un nombre de Reynolds $Re= 28000$, et un rapport d'expansion $ER=1.25$, ils ont fait des tests avec deux différents modèles, le modèle sous maille nommé le modèle à échelle visqueuse, échelle diffusive dynamique et le modèle dynamique mixte. Ils ont montrés que le coefficient de chaleur est maximal en amont de la zone de rattachement, ce maximum de transfert de chaleur montre une corrélation directe avec le maximum des fluctuations des contraintes pariétales.

Pirto, Saarenrienne et al [23] ont utilisé la vélocimétrie par image de particule (**PIV**) (voir Annexe), pour mesurer l'énergie turbulente d'un écoulement turbulent de l'eau sur une marche descendante, avec un nombre de Reynolds de 15000, basé sur la hauteur de la marche, ils ont conclu que les mesures de l'intensité turbulente, diffusions visqueuses et tensions de Reynolds sont plus élevés que ceux mesurés par la DNS de **Le, Moin** [12] .

Lambros ,kaiktis et al [24] ont utilisés la configuration de cette géométrie pour la simulation à faible nombre de Reynolds avec autoexcitation d'oscillations , l'écoulement est entièrement instable par l'induction d'aspiration respectivement de refoulement massique à la paroi adjacente de la marche .

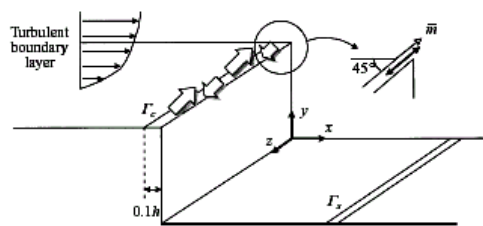
Le nombre de Reynolds étant fixé à 1000 et à égales masses de refoulement et d'aspiration, la limite entre le régime stable et instationnaire est déterminée comme une fonction de la variation de la longueur de la longueur de refoulement.

Jungyi. Zhu [25] a démontré la validité de la méthode de projection du second ordre pour un écoulement visqueux et incompressible dans un domaine irrégulier d'un canal à deux dimensions contenant une marche descendante , particulièrement le phénomène de séparation et de rattachement .Les calculs sont fait pour des différents nombres de Reynolds en différents régimes laminaire, transitoire et turbulent à des différents rapports d'expansions $ER= 2$ et $ER=1.5$, en comparant ses résultats avec les travaux expérimentaux de **Denham**[26], **Ghoniem**[27]. **Jungyi**[25], a montré l'influence du nombre de Reynolds sur la longueur de rattachement, cette longueur augmente quand le nombre de Reynolds augmente, il y

a présence d'un gradient de pression défavorable dans la zone de recirculation . Ainsi ses résultats étaient en bon accord ceux de l'expérience pour un écoulement à trois dimensions, il a conclu alors que l'on pouvait utiliser la méthode de projection pour les écoulements à trois dimensions.

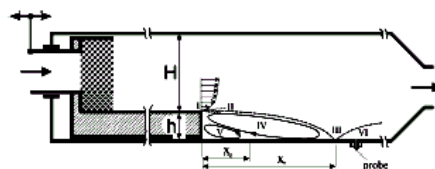
Seongwong Kang et al [28] ont présentés une étude dont l'objective était d'augmenter le mélange turbulent dans l'écoulement sur une marche descendante, en utilisant une méthode de contrôle systématique (Feed back) spatiaux- temporelle .

L'installation dites de Feedback consiste en l'aspiration respectivement et refoulement d'une fente très étroite placée sur le bord de la marche d'une masse de fluide voir Figure (I-6) ,une simulation des grandes échelles de l'écoulement turbulent et avec un nombre de Reynolds $Re=5100$,basé sur la hauteur de la marche ,a montré que les fluctuations de la vitesse et la vorticité augmentent en aval de la marche , aussi bien dans la zone de recirculation ,la longueur de rattachement est réduite par ce procédé .



Fig(I-6) :Schéma du diagramme de contrôle par Feed back [28]

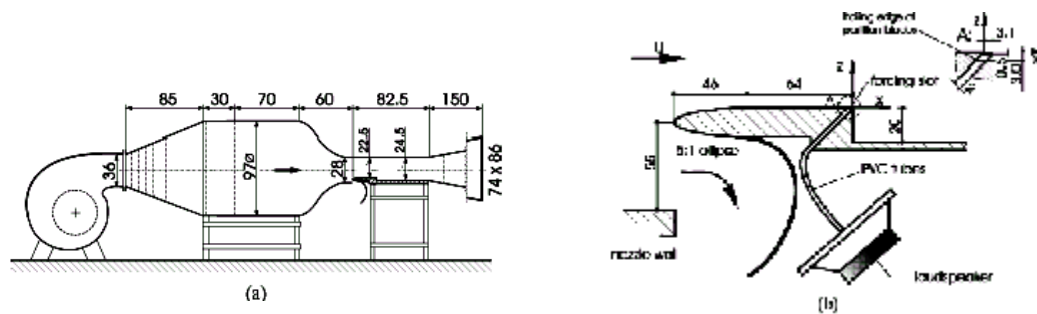
Tilan ,Legrand et al [29] ont fait des études expérimentaux par utilisation d'une technique d'électro-diffusion voir figure(I-7), pour l'exploitation de l'écoulement sur une marche descendante, ils ont montrés que pour des différents nombres de Reynolds, dans la région proche paroi, dans la zone de recirculation et avec une basse fréquence de fluctuation l'écoulement est très instable .



Fig(I-7) :Montage expérimental [29]

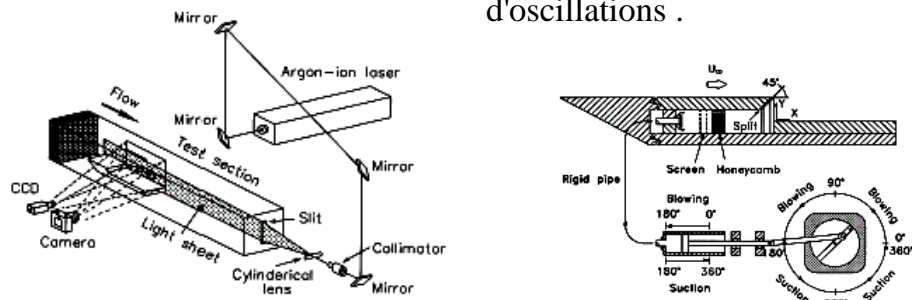
Iwai ,Nakabe et al [30] ont fait une simulation numérique d'un écoulement à trois dimensions dans une conduite rectangulaire à marche descendante a faible nombre de Reynolds, pour montrer l'effet du rapport d'aspect de la conduite et les caractéristiques du transfert de la chaleur. **Perot et Hudong [31]** ont proposés un nouveau modèle de turbulence pour la résolution des équations de transport et pour comprendre ce modèle ils l'on appliqué à des cas test tel que la marche et le jet pour comparer ces travaux avec les travaux expérimentaux de **Driver ,Seegmiller[44]** ,et de DNS de **Le,Moin [12]**, qui étaient en très bon accord . **Chiang ,Tony et al [32]** ont fait une simulation numérique d'un écoulement incompressible à trois dimensions dans un canal contenant une marche, un nombre de Reynolds $Re = 800$ et un rapport d'expansion $ER = 1.9432$,en variant les conditions de l'écoulement (Nombre de Reynolds, hauteur de la marche et la largeur de la conduite), leurs calculs ont révélés des détails intéressants sur la structure topologique et le mécanisme de développement de l'écoulement à trois dimensions, quand le nombre de Reynolds augmente. **Sckote, Henningson[33]** ont fait une simulation numérique directe de deux écoulements turbulents à couche limite sur une marche descendante pour étudier la couche limite dans la région de recirculation et de séparation des deux écoulements en variant la condition de la vitesse d'entrée .

Barkley,Gabriella et al [34], le but de leurs calculs est d'analyser les instabilités à trois dimensions d'un écoulement sur une marche descendante, avec un rapport d'expansion $ER = 2$,et des nombres de Reynolds entre 450 et 1050, ils ont montrés que la bifurcation primaire de l'écoulement est une instabilité tridimensionnelle. **Wengle,Hupperts et al [35]** ont entrepris des travaux expérimentaux et de DNS d'un écoulement sur une marche descendante, manipulé par des excitations périodiques de refoulement et d'aspiration , à travers une petite fente sur la bord de la marche voir figure (I-8) , les comparaisons entre ces deux méthodes ont montrées que la DNS donne des résultats qu'on ne peut pas avoir expérimentalement .



Fig(I-8):Montage expérimental du canal avec la section test à marche descendante[35]

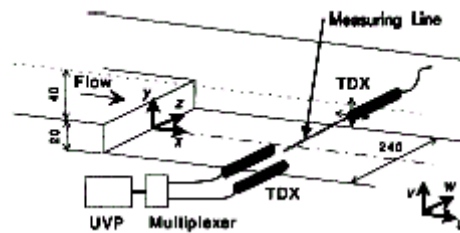
Chun, Sung [36] ont effectués des travaux expérimentaux, d'un écoulement d'eau dans un canal à séparation et rattachement. L'écoulement est excité par un jet d'oscillations sinusoïdales émises par la ligne de séparation pour voir la fusion du vortex dans cette zone voir figure (I-9), un système de LDV (vélocimétrie à Laser à Doppler) (voir Annexe), est utilisé pour mesurer les vitesses instantanées dans la zone de recirculation pour un nombre de Reynolds $Re = 1200$ et à des différentes fréquences d'oscillations .



Fig(I-9) : Configuration de la section test [36]

Fessler, Eaton [37] ont entrepris une étude expérimentale pour voir les modifications de la turbulence par les particules, d'un écoulement dans un canal à marche descendante, pour cela ils ont utilisé un écoulement à plusieurs particules de différents diamètres (particules de glace et des particules sphérique en métal), figure (I-10).

Furuichi, Kumada [39] dans leur étude expérimentale d'un écoulement bidimensionnel sur une marche descendante, avec un nombre de Reynolds $Re=5000$ et un rapport d'expansion $ER = 1.5$, en utilisant un profil de vitesse ultrason pour mesurer, les profils instantanés de la vitesse axiale figure(I-12) ,ils ont montrés que l'écoulement est complexe et que le vortex dans la zone de recirculation à la structure tridimensionnelle .



Fig(I-12) : Montage expérimental [39]

Glockner [40] a choisi de travailler sur l'aspect dynamique, thermique et chimique de la pollution et ceux aux différentes échelles de phénomènes l'échelle local autour d'un groupe de bâtiments, pour laquelle a utilisé la géométrie de la marche comme un cas test et la méso-échelle pour la modélisation complète d'une ville, pour cela il a insisté sur les modèles de turbulence $k-\epsilon$, RNG (voir paragraphe I-5), pour le développement du code de calcul de la simulations numérique. D'autres chercheurs ont contribué expérimentalement et numériquement dans le même sujet [41],[42],[43],[44],[45],[46].

I.3.Approche Numérique :

L'utilisation de la simulation numérique pour la modélisation d'écoulements turbulents est relativement récente.

C'est il y a cinquante ans, **Von Newman (1949)** proposait une première approche numérique des problèmes de turbulence. Depuis de nombreuses méthodes virent le jour, et à l'heure actuelle on peut dire qu'il existe plusieurs catégories principales de méthodes pour la simulation de l'écoulement turbulent parmi lesquelles on peut citer :

§ La Simulation Numérique Directe (DNS)

La DNS (Direct Numerical Simulation) est une méthode numérique basée sur la résolution directe des équations de Navier-Stokes instantanées, tridimensionnelles. Elle suppose que toutes les échelles de la turbulence sont calculées sans moyenne ni approximation, le résultat est une réalisation de l'écoulement étudié.

Ainsi ce type de modèle doit simuler les grandes échelles de la turbulence qui contiennent la majeure partie de l'énergie (l'échelles intégrales), mais également les échelles les plus petites, c'est-à-dire les échelles de dissipation visqueuse de Kolmogorov ce qui permet d'estimer une taille critique en deçà de laquelle les tourbillons sont immédiatement dissipés par viscosité moléculaire et ne pourront pas se développer.

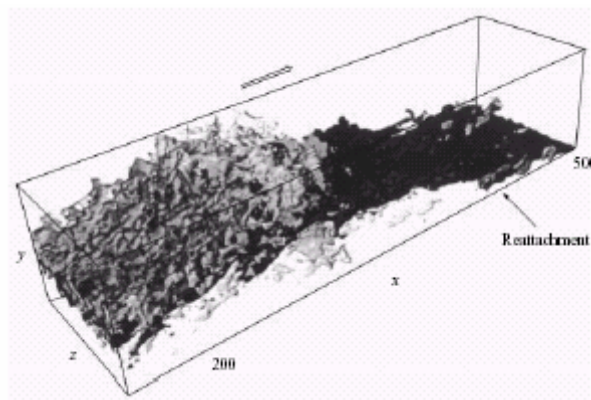
Une simulation directe de la turbulence n'est donc envisageable que si la maille de discrétisation est de l'ordre de cette échelle. Le rapport entre l'échelle des gros tourbillons et celle de Kolmogorov étant de l'ordre de $Re^{3/4}$. Il faut en toute rigueur, un nombre de nœuds proportionnels à $Re^{9/4}$.

Une des conséquences importantes est que pour des nombres de Reynolds grands (pour que l'écoulement soit considéré comme turbulent) il est nécessaire de considérer des maillages extrêmement coûteux en nombres de points.

Malgré le désavantage dû à la taille mémoire indispensable à une réalisation d'un tel écoulement, ainsi que le temps de calcul nécessaire pour obtenir une

statistique représentative sur plusieurs réalisations (pour obtenir des quantités moyennes), cette méthode est un outil très utile pour comprendre le comportement de la turbulence [13].

Ainsi cette approche directe nécessite de puissants moyens de informatique, elle ne peut être conduite actuellement que sur des écoulements en géométrie relativement simple et pour des nombres de Reynolds peu élevés. Elle a été aussi utilisée pour tester, à des nombres de Reynolds turbulents relativement faibles, la validité des modèles de sous-maille ou les modèles de fermeture en un point [47].



Fig(I-13) : DNS d'une couche limite turbulente à séparation [33]

§ La Simulation des Grandes Echelles (LES)

L'idée de base de cette méthode est de simuler directement les grandes échelles de la turbulence et d'approximer les plus petites (l'influence des petites échelles est modélisée par une approche statistique) on utilise une représentation numérique de l'écoulement et des équations de Navier-Stokes comme dans le cas de la DNS, mais le nombre de Reynolds est tel que la résolution spatiale du schémas numérique est insuffisante pour décrire les échelles les plus fines.

La LES appelée aussi (Large Eddy Simulation) fait donc une approximation de l'écoulement réel, dans lequel les échelles de la turbulence à partir d'une certaine taille, manquent. Mais on sait que toutes les échelles de la turbulence jouent un rôle dynamique important et que l'absence de certaines échelles doit être, d'une manière ou d'une autre corrigée. Cette correction est faite en additionnant un terme dit de sous maille dans les équations de mouvement. Ce terme est supposé n'agir

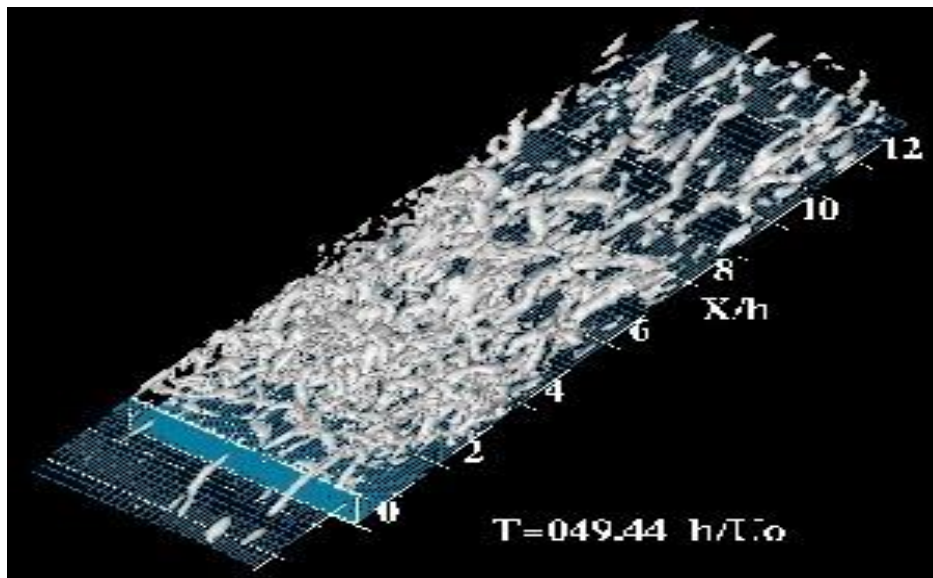
que sur les petites échelles et n'affecte pas les grandes structures qui sont simulées comme avec la DNS.

Il est indispensable de définir avec précision les quantités à calculer, et donc de définir un champ de vitesse qui ne contient que les grandes échelles de champ total. Ceci est mis en œuvre en utilisant un filtre sur ce champ de vitesse, une fois les équations du mouvement filtrées, il apparaît un tenseur inconnu dit contrainte de Reynolds, de sous maille qu'il faut modéliser [13].

Il existe de très nombreux modèles de cette contrainte, un des plus connus et des plus utilisés est sans doute le modèle de **Smagorinsky**.

Cette méthode est coûteuse du point de vue de l'ampleur des calculs numérique sans être toute fois toujours prohibitive. La méthode devrait être particulièrement utile pour les écoulements dans lesquelles les grandes structures jouent un rôle déterminant.

Dans les écoulements cisailés ces grosses structures marquées par la géométrie de l'écoulement doivent posséder quelques caractères ordonnés (structures cohérentes). Cependant l'existence des structures cohérentes pose encore des problèmes aux spécialistes [47].



Fig(I-14) : Simulation des Grandes Echelles (LES) d'un écoulement derrière Une Marche Descendante [17]

§ Les Méthodes Statistiques :

Dans la majorité des cas réels, on est intéressée par la connaissance de quantités moyennes d'un écoulement turbulent (forces moyennes sur une surface, distribution spatiale de ces forces)L'utilisation, dans un cas complexe, des deux méthodes précédentes citées est généralement trop coûteuses .Il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes faisant intervenir les équations de Navier-Stokes moyennées .

A cause du caractère non linéaire des équations de Navier-Stokes les opérateurs de moyenne font apparaître des termes supplémentaires qu'il faut modéliser, de plus le caractère non local de certaines variables (comme la pression par exemple implique également une modélisation).

La nature complexe de la turbulence implique qu'il n'est pas réaliste d'espérer traiter l'ensemble des situations à l'aide d'un seul modèle de turbulence .Ainsi donc les modèles de turbulence devrons être adoptés à chaque situation rencontrée et ils sont vus comme des outils d'approximation plus que comme des lois scientifiques [13].

I.4.Description du Problème :

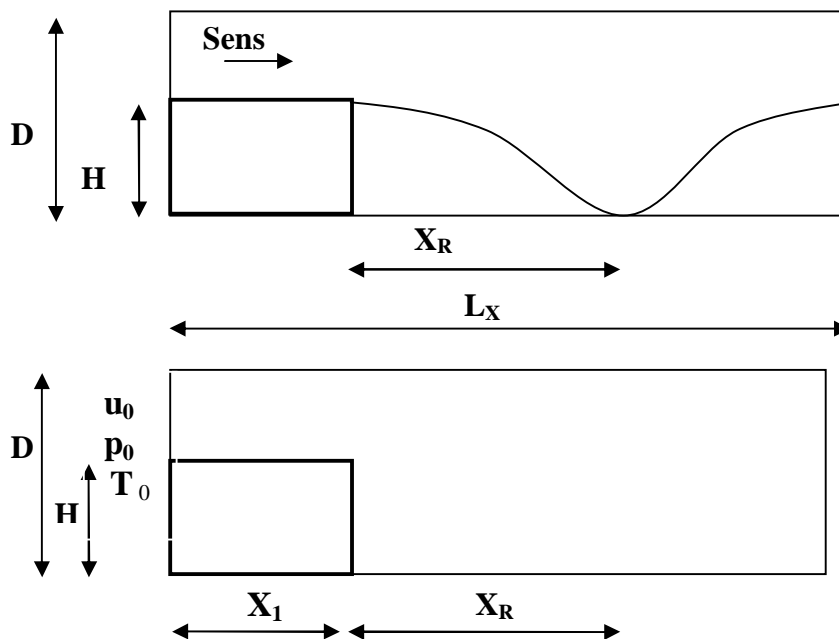
L'étude bibliographique que nous avons présenté montre que la configuration de la marche descendante a été abondamment étudiée numériquement et expérimentalement.

L'objectif de la présente étude est simuler l'écoulement sur une marche descendante. L'écoulement qui s'y développe présente des caractéristiques proches de celles des écoulements industriels. Cette géométrie est un des cas test les plus répondus dans le domaine des recherches fondamentales de la dynamique des fluides expérimentales et numériques. Il s'agit d'une géométrie intéressante puisqu'elle génère des écoulements très instables. De plus, il est facile d'y maintenir le point ou la ligne de détachement sur une position donnée. Ceci est important quand on essaye de contrôler certains paramètres qui jouent sur la dynamique de l'écoulement. En outre, l'écoulement qui se développe en aval de l'expansion garde

un grand degré de complexité, étant donné les instabilités caractéristiques de plusieurs types d'écoulements qu'on y retrouve, comme illustre la figure (I-15). La configuration est celle d'une plaque plane horizontale au quelle a été rajoutée en amont une marche figure (I-16a-16b) le fluide est soumis à un brusque élargissement où l'écoulement se sépare en deux donnant naissance à des zones de forts cisaillements. Derrière le saut de section se forme une zone de recirculation où l'écoulement se ferme pour revenir vers la marche et former ainsi un tourbillon. Elle prend fin au point de recollement à partir duquel la couche limite se redéveloppe.

A noter la présence au pied de la marche d'une seconde zone de recirculation (de sens de rotation opposé à la première) qui n'est pas toujours mise en évidence à la fois par les codes de calculs et par les mesures expérimentales.

Les écoulements avec séparation et rattachement impliquant un transfert de chaleur sont utilisés dans les turbines à gaz, dans les échangeurs de chaleur, dans les chambres de combustion et dans les équipements électronique, la grande variation du transfert de chaleur local est causée par ces écoulements.



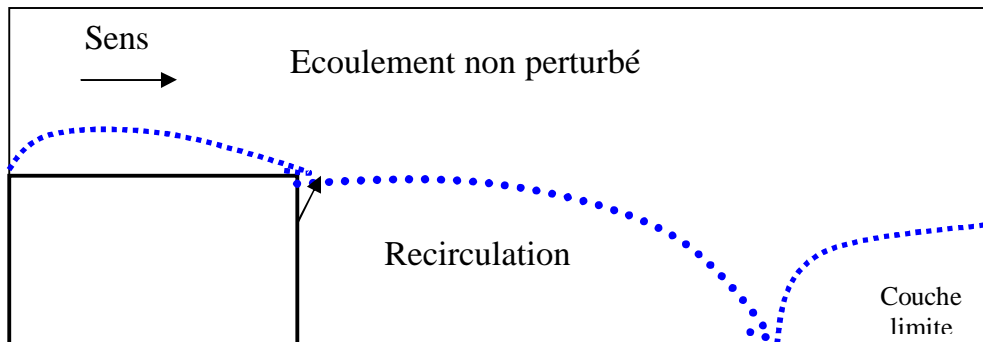
Fig(I-15) : Caractéristiques géométriques de la marche descendante

D : La largeur de la section d'entrée

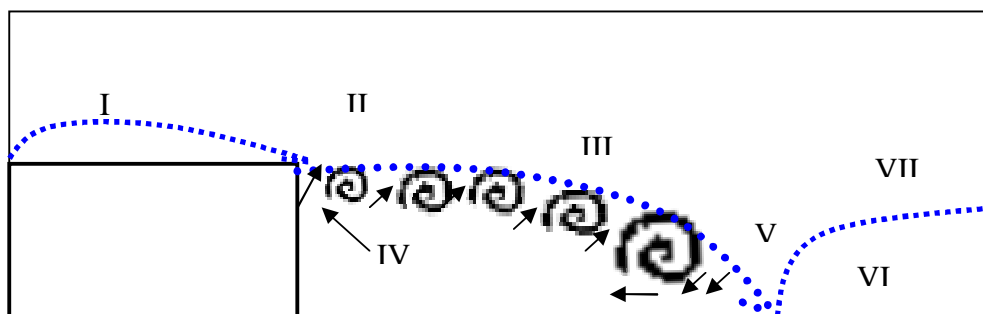
H : La hauteur de la marche

X_R : La longueur de rattachement (mesurée du pied de la marche au point de recollement).

L_x : La longueur du domaine de calcul.



(a)



(b)

Fig(I-16-a, b) : Caractéristiques physiques générales d'écoulement en aval de la marche descendante

I : Couche limite en développement

II : Détachement de la couche limite

III : Ecoulement cisailé

IV : Recirculation

V : Rattachement

VI : Redéveloppement de la couche limite

VII : Région d'interaction cisailante et la couche limite en développement.

CHAPITRE II

Formulation Mathématique

II.1.Introduction :

Pour formuler un phénomène physique, on utilise souvent des équations mathématiques. Ces dernières représentent une modélisation de ce phénomène .Une formulation mathématiques doit obligatoirement exprimer le comportement du phénomène dans l'espace et dans le temps.

En mécanique des fluides, on suppose que le fluide est un milieu continu ,ce qui permet d'utiliser les lois classiques de conservation ,à savoir

- § Conservation de masse
- § Conservation d'énergie
- § Conservation de la quantité de mouvement

Ce chapitre expose les équations mathématiques générales gouvernant l'écoulement, illustrées dans plusieurs ouvrages de mécanique des fluide et de transfert de chaleur comme [48],[49],[50],[51] et [52].

II.2. Equations Représentatives de L'écoulement:

Les équations de base d'un écoulement bidimensionnel d'un fluide compressible dans une géométrie cartésienne sont les équations de continuité et de (Navier-Stockes)

Avec la compressibilité il se manifeste des phénomènes thermiques importants, par conséquent on doit prendre en considération dans nos raisonnements aussi bien que l'équation d'énergie que l'équation de continuité et de conservation de la quantité de mouvement, il faudra naturellement rajouter l'équation d'état du fluide supposé parfait.

Nous avons utilisé les équations de Navier-Stokes compressible pour pouvoir aborder en perspective les mêmes problèmes mais avec des taux de compressibilité assez importants.

Ces équations s'écrivent :

§ *Equation de continuité:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (\text{II-1})$$

§ *Equation de conservation de la quantité de mouvement:*

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \quad (\text{II-2})$$

§ *Equation d'énergie:*

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}) \quad (\text{II-3})$$

§ *Equation d'état:*

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (\text{II-4})$$

F_i : l'ensemble des forces de gravité et les forces produites par unité de volume.

R et C_p sont constantes et déterminées par la nature du gaz.

τ_{ij} est le tenseur de contrainte donné par:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \eta \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (\text{II-5})$$

λ , μ , η sont des paramètres physiques dépendant de l'état du gaz.

$$\eta = -\frac{2}{3}\mu \quad (\text{Relation de Stokes [48],[49]}) \quad (\text{II-6})$$

Ces équations s'écrivent :

§ *Equation de continuité.*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (\text{II-7})$$

§ *Equation de conservation de la quantité de mouvement selon x.*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{u \partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{v \partial \rho u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + F_x \quad (\text{II-8})$$

§ *Equation de conservation de la quantité de mouvement selon y.*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{u \partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{v \partial \rho v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + F_y \quad (\text{II-9})$$

§ *Equation d'énergie.*

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad} T}) + \frac{dp}{dt} \quad (\text{II-10})$$

§ *Equation d'état.*

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (\text{II-11})$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= \eta \nabla^2 v + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= \eta \nabla^2 v + 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \mu_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-12})$$

En introduisant les termes (II-12) dans les équations (II-8) et (II-9) les équations s'écrivent alors :

§ *Equation de continuité:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (\text{II-13})$$

§ *Equation de conservation de la quantité de mouvement selon x.*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{u \partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{v \partial \rho u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \nabla^2 \mathbf{r} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + F_x \quad (\text{II-14})$$

§ *Equation de conservation de la quantité de mouvement selon y.*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{u \partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{v \partial(\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \nabla^2 \mathbf{r} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F_y \quad (\text{II-15})$$

§ *Equation d'énergie.*

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}) + \frac{dp}{dt} \quad (\text{II-16})$$

• *Equation d'état.*

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (\text{II-17})$$

Nous avons simplifié nos équations en posant les hypothèses suivantes :

- § L'écoulement est compressible et stationnaire (c'est-à-dire que toutes les variations en fonction du temps sont nulles)
- § Le fluide considéré est l'air.
- § On suppose que toutes les variations de la pression en fonction du temps sont négligeables.
- § Les forces gravitationnelles, les forces produites sur unité de volume ainsi que la production d'énergie par frottement visqueux sont négligeables.

II.3. Conditions aux Limites:

Types de conditions :

Les conditions limites à imposer aux frontières du domaine peuvent être plusieurs types. Il est possible d'imposer des conditions du type **Dirichlet** (imposée) ou conditions de type **Newman** (dérivée normale imposée) les frontières du domaine peuvent se décomposer comme suit :

§ Frontière d'entrée : les valeurs sont imposées pour toutes les grandeurs transportées.

$$X = 0, H \leq Y \leq D$$

$$u = u_0, v = 0, p = p_0, T = T_0 \quad (\text{II-18})$$

§ Frontières de sorties, les valeurs sont imposées (dérivée normale) pour presque toutes les grandeurs transportées.

$$X = L_X, 0 \leq Y \leq D$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, v = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-19})$$

§ La frontière supérieure horizontale.

$$0 \leq X \leq L_X, Y = D$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-20})$$

§ Frontière du type paroi :

Sur la paroi, la vitesse doit respecter les conditions de non glissement (conditions d'adhérence). Les composantes de la vitesse sont nulles.

$$X_1 \leq x \leq L_X, Y = 0$$

$$u = 0, v = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, T = T_p (\text{paroi chaude}) \quad (\text{II-21})$$

II.4. Adimensionnement des Equations:

On introduit ici, des grandeurs adimensionnelles qui permettent d'une part, d'écrire les équations avec un minimum de paramètres et d'autre part, conférer une certaine généralité aux résultats numériques. Pour cela nous avons utilisé des échelles caractéristiques pour adimensionner les équations et sont analogue à celle de la références [4 8] et de **Ravikhanth** et al [19].

§ La hauteur de la marche : H.

§ La vitesse de référence u_0 .

§ La pression de référence : P_0 .

§ La température de référence T_0 .

§ La masse volumique de référence ρ_0 .

§ La conductivité de référence λ_0 .

§ La viscosité de référence μ_0 .

§ Le temps de référence : $t_0 = \frac{H}{u_0}$

Les quantités adimensionnelles sont les suivantes :

$$x^* = \frac{x}{H}, \quad y^* = \frac{y}{H}, \quad u^* = \frac{u}{u_0}, \quad v^* = \frac{v}{u_0}, \quad \theta = \frac{T}{T_0},$$

$$p^* = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_0},$$

II.5. Equations de Conservation Adimensionnelles :

L'introduction de l'adimensionnement grâce aux grandeurs de références et hypothèses simplificatrices permet d'écrire les équations de continuité, de conservation de quantité de mouvement, d'énergie et de l'état comme suit

§ *Equation de continuité.*

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* v^*) = 0 \quad (\text{II-22})$$

§ *Equation de conservation de la quantité de mouvement.*

$$\frac{u^* \partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{v^* \partial(\rho^* u^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(-\frac{2}{3} \nabla \bar{U} + 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\mu^*}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \right] \quad (\text{II-23})$$

$$\frac{u^* \partial(\rho^* v^*)}{\partial x^*} + \frac{v^* \partial(\rho^* v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\mu^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(+2 \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \frac{2}{3} \nabla \bar{U} \right) + \frac{\mu^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \quad (\text{II-24})$$

§ *Equation d'énergie.*

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* u^* \theta) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* v^* \theta) = \frac{\lambda^*}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{II-25})$$

§ *Equation d'état.*

$$\frac{p^*}{\rho^*} = RT^* \quad (\text{II-26})$$

Ainsi apparaissent les nombres caractéristiques adimensionnels dont les valeurs influencent l'écoulement du fluide.

§ Le nombre de **Reynolds**, Re caractéristique de l'écoulement :

$$\text{Re} = \frac{u_0 H}{\nu_0} = \frac{\rho_0 u_0 H}{\mu_0}$$

§ Le nombre de **Prandtl**, Pr caractéristique intrinsèque du fluide sa dépendance de la température est faible.

$$\text{Pr} = \frac{\mu_0 C_p}{\lambda_0}$$

La théorie cinétique montre que la viscosité et la conductivité produisent des effets de même ordre de grandeur.

Pour l'air la variation de μ et λ avec la température T est donnée par :

$$\mu/\mu_0 = (T/T_0)^{0.71}, \quad \lambda/\lambda_0 = (T/T_0)^{0.71} \quad [19], [48].$$

Remarque :

Enfin nous avons à déterminer 5 variables (u, v, p, T, ρ) et 5 équations (II-22) à (II-26) : le système est donc fermé .

Pour alléger l'écriture dans ce qui suit les variables adimensionnelles seront notées sans astérisque.

II.6. Calcul du coefficient de frottement

Nous calculons le coefficient de frottement dans la paroi inférieure du canal, il nous donne des informations sur l'intensité des recirculations et sur celle de la zone de recollement en aval de la marche.

Il est donné en fonction de la contrainte pariétale τ_w , la vitesse d'entrée et la masse volumique par donné dans plusieurs références[49], Hirochi et al [30], Valencia et al [7] par :

$$C_f = \frac{\tau_w}{0.5 \cdot \rho u_0^2} \quad (\text{II-27})$$

Avec :

$$\tau_w = \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (\text{II-28})$$

τ_w est la contrainte qu'exerce la paroi sur le fluide, est la composante du gradient de la vitesse à la paroi c'est-à-dire en $y=0$.

Sous forme adimensionnelle le terme C_f s'écrit :

$$C_f = \left(\frac{2}{\text{Re}} \right) \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{II-29})$$

II.7. Calcul du nombre de Nusselt.

Les phénomènes qu'on observe au sein de l'écoulement lorsqu'il y a une différence de température entre la paroi et le fluide, résultent de la superposition d'actions aérodynamiques et d'effets thermiques consécutifs à une absorption(ou perte)de chaleur à la paroi, c'est au niveau de celle-ci qu'interviennent les coefficients d'échanges, par conséquent le nombre de Nusselt qui est un nombre adimensionnel qui compare le flux conductif et le flux convectif de chaleur, il est défini dans plusieurs revues de transfert de chaleur[54],[55],[56],[57] par :

$$\text{Nu} = \frac{\text{Flux convectif}}{\text{Flux conductif}} = \frac{hm(T_p - T_0)}{\lambda \frac{(T_p - T_0)}{L_x}} = hm L/\lambda$$

hm : représente le coefficient moyen d'échange de la chaleur par convection

L : est la longueur caractéristique du problème étudiée dans ce cas on $L = H$

Nous avons utilisé la même relation des références **Valencia** et al [7], **Hiroshi** et al[30]et **Ravikhanth** et al[19].

Alors le nombre de Nusselt s'écrit donc:

$$\text{Nu} = \text{H} \cdot \left(\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{T_m - T_p} \right) \quad (\text{II-30})$$

$$T_m = \frac{\int_0^D \rho u T dy}{\int_0^D \rho u dy} \quad (\text{II-31})$$

Avec T_m , la température moyenne de mélange, c'est la température uniforme que devrais avoir le fluide pour transporter la même quantité de chaleur.

Le terme $\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$ désigne le flux de chaleur échangé à la paroi.

Sous la forme adimensionnelle le nombre de Nusselt s'écrit :

$$\text{Nu} = \left(\frac{\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0}}{\theta_m - \theta_p} \right) \quad (\text{II-31})$$

Avec θ_m et θ_p , respectivement les températures adimensionnelles du mélange et de la paroi. Pour déterminer θ_m , on utilise numériquement la méthode des trapèzes.

CHAPITRE III

Méthode Numérique

III.1.Introduction:

L'étude du comportement de fluide sur une marche descendante a fait l'objet de plusieurs travaux. Des différentes méthodes numériques ont été utilisées pour la résolution analytique des équations différentielles partielles qui régissent ce type d'écoulement. Parmi les méthodes on cite, la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis.

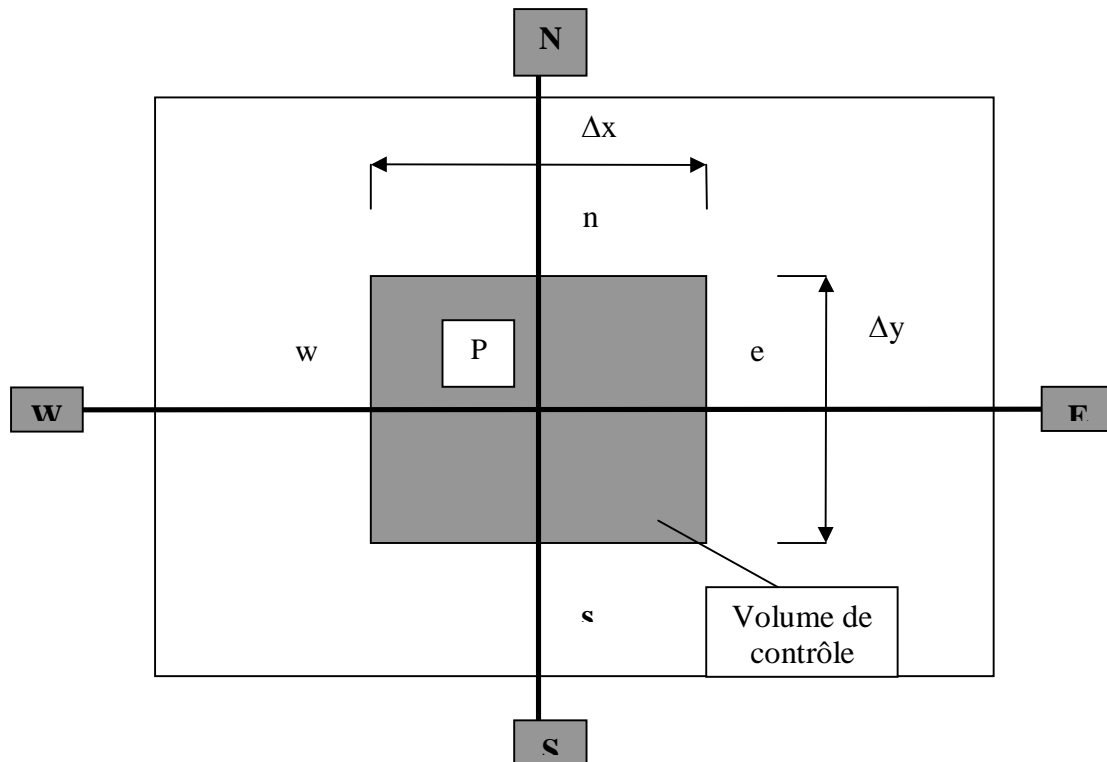
Ces méthodes tendent toutes à linéariser les systèmes d'équations en des systèmes algébriques dont la résolution est possible.

Dans le travail que nous proposons de faire, nous avons utilisé la méthode des volumes finis, développée par **Patankar[1]** pour les raisons suivantes:

- § La méthode est bien adaptée à la formulation vitesse, pression.
- § La disponibilité du code de calcul "TEAM" qu'il suffit d'adopter pour notre problème.
- § Conservation de toute les variables transportables et aptitude à résoudre les écoulements complexes.
- § La qualité de la méthode est de réduire les instabilités pour les sollicitations élevées.

III.2. Présentation de la Méthode:

La méthode des volumes finis consiste à subdiviser le domaine de calcul en un nombre fini des volumes jointifs à faces rectangulaires, et cela en utilisant un schéma d'approximation convenable.



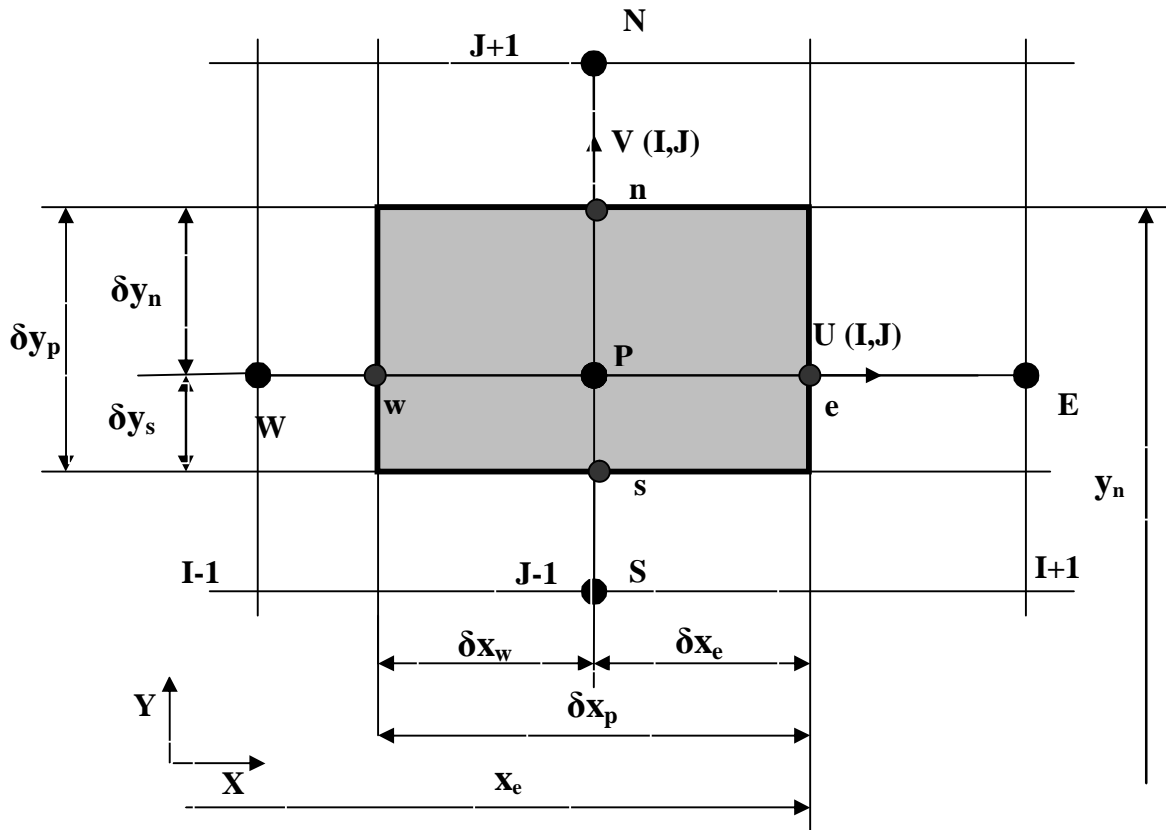
Fig(III-1) :Schémas représentant un volume de contrôle

III.3. Maillage :

Le domaine physique est discrétisé en domaine de calcul suivant un maillage uniforme ou non uniforme dans les deux directions, horizontales verticales (figure III-2). Une suite géométrique est utilisée afin de raffiner d'avantage le maillage au niveau où on a des variables dépendantes (u , v , p , θ , ρ). Dans ces régions les frontières du domaine coïncident avec les faces des volumes de contrôle, ce qui facilite l'incorporation des conditions aux limites. Chaque noeud du maillage est repéré par deux indices I et J , donnant sa position suivant les directions x et y . Le nombre total des noeuds est NI et NJ , tel que :

NI nombre total suivant x .

NJ nombre total suivant y .

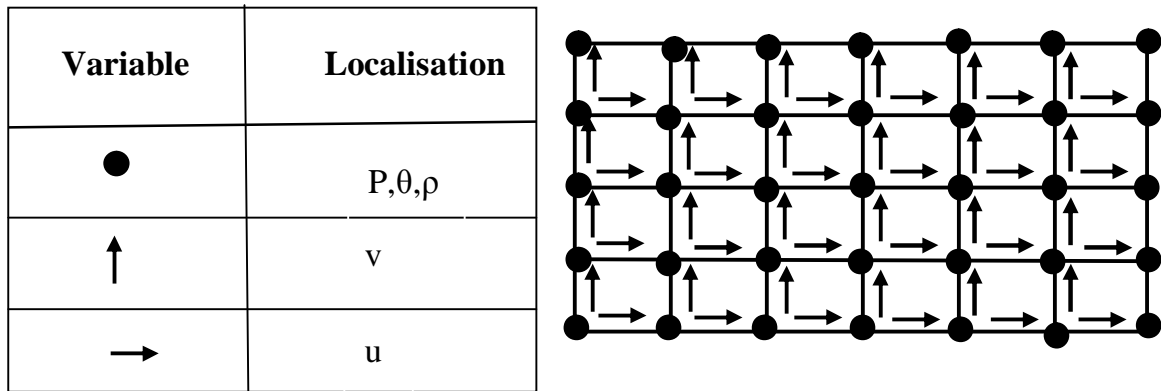


Fig(III-2): Maillage à espacement non uniforme

III.3.1. Stockage des Variables :

Les variables dépendantes scalaires (P, θ, ρ) sont stockées aux noeuds du maillage, tan disque les variables dépendantes vectorielles (u, v) sont stockées au milieu des segments reliant les noeuds.

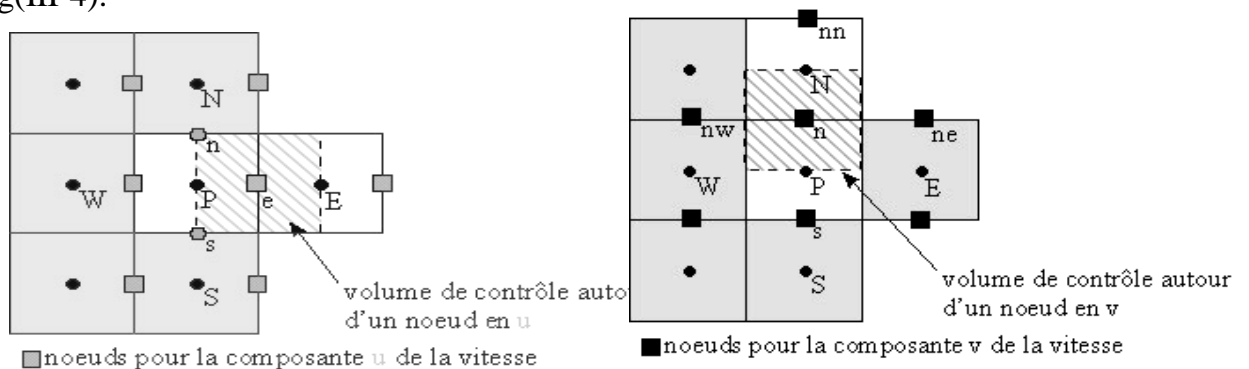
Si on note par P le centre du volume de contrôle de la variable Φ et E, W, Net S les noeuds voisins des volumes de contrôle adjacents comme illustre les figures (III-2) et (III-3). Ces noeuds seront les lieux de stockage des variables scalaires (P, T, ρ). Au milieu de chaque segment reliant deux noeuds adjacents on note par e, w, n et s où sont stockées les variables vectorielles.



Fig(III-3) : Localisation des variables

III.3.2. Maillage Décalé (Staggered grid) :

La discrétisation d'une équation de transport de diffusion sur un volume de contrôle par la méthode des volumes finis fait intervenir les valeurs des vitesses aux interfaces des volumes (u_e, u_w, v_n, v_w). Il est donc intéressant de les calculer directement sur les interfaces sans avoir à effectuer d'interpolation. D'autre part, la discrétisation de l'équation de continuité et du gradient de pression avec l'utilisation d'une interpolation linéaire peut induire des erreurs importantes du fait qu'une répartition de pression ou de vitesse en "damier" est vue comme un champ uniforme. Pour contourner ces difficultés on préfère utiliser des grilles décalées "staggered grid". Une grille principale est construite sur laquelle on calcule la pression et la température. Deux grilles décalées vers la droite et vers le haut respectivement sont utilisées pour le calcul des vitesses horizontales et verticales (Fig(III-4)).



Fig(III-4) : Maillage décalé

III.4. Discrétisation des Equations Différentielles:

La discrétisation consiste à intégrer les équations différentielles partielles dans l'espace et par rapport au temps dans un domaine limité par les quatre interfaces (Est, Ouest, Nord et Sud) d'un volume de contrôle.

En se basant sur la méthode de **Patankar [1]**, l'équation différentielle générale correspondant au transport d'une grandeur Φ , s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i\Phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Gamma_\Phi \partial\Phi}{\partial x_i}\right) + S \quad (\text{III-1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\Phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Gamma_\Phi \partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + S_\Phi \quad (\text{III-2})$$

Le premier terme de gauche représente le taux de variation de la quantité de $\rho\Phi$ en fonction du temps (négligeable dans notre cas), le deuxième est le terme qui exprime le taux de transport par convection. Les termes de droites correspondent respectivement aux termes de diffusion et aux termes de source.

La variable Φ peut représenter diverses grandeurs physiques, telles que la vitesse, la température etc. Le coefficient Γ peut représenter la viscosité ou la conductivité. Le terme source peut représenter la génération interne de chaleur, l'action d'une force sur l'élément du fluide le débit massique pu et pv , doit satisfaire l'équation de continuité qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (\text{III-3})$$

Nous pouvons écrire l'équation (III-2) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x}(J_x) + \frac{\partial}{\partial y}(J_y) = S\Phi \quad (\text{III-4})$$

Avec :

$$J_x = \rho \cdot u \cdot \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (\text{III-5})$$

$$J_y = \rho \cdot v \cdot \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (\text{III-6})$$

J: est le flux de la variable Φ à travers le milieu séparant deux noeuds I et I+1.

Nous pouvons généraliser les grandeurs Φ , Γ_Φ et S_Φ dans le tableau (III-1):

Tableau III-1:

Equation	Φ	Γ_Φ	Terme source
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant x	u	$\frac{\mu}{\text{Re}}$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + S^u$
Quantité de mouvement suivant y	v	$\frac{\mu}{\text{Re}}$	$-\frac{\partial p}{\partial y} + S^v$
Energie	θ	$\frac{\lambda}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}$	0

Avec:

$$S^u = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla \cdot \mathbf{U}) \right] \quad (\text{III-7})$$

$$S^v = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \nabla \cdot \mathbf{U}) \right] \quad (\text{III-8})$$

III.4.1.Intégration de l'Equation de Transport :

Intégrons l'équation (III-4) à travers le volume de contrôle décrit par la figure (III-1).

$$\int_{ws}^{en} \frac{\partial}{\partial x} J_x dx dy + \int_{ws}^{en} \frac{\partial}{\partial y} J_y dx dy = \int_{ws}^{en} S_\Phi dx dy \quad (III-9)$$

Ainsi l'intégration (III-9) dans le volume de contrôle donne:

$$J_e A_e + J_w A_w + J_n A_n + J_s A_s = \bar{S}_\Phi \Delta x \Delta y \quad (III-10)$$

Où:

A_e, A_w, A_s, A_n sont les aires Est, Ouest, Nord et Sud des faces du volume de contrôle,

S_Φ sont les valeurs moyennes du terme source dans le volume de contrôle élémentaire.

J_e, J_w, J_s et J_n sont les flux à travers les faces est, ouest, nord et sud du volume de contrôle.

$$\left. \begin{aligned} J_e &= (\rho u \Phi)_e - \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e \\ J_w &= (\rho u \Phi)_w - \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \\ J_n &= (\rho v \Phi)_n - \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_n \\ J_s &= (\rho v \Phi)_s - \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_s \end{aligned} \right\} \quad (III-11)$$

§ Linearisation du terme Source

Le terme source linéarisé s'écrit sous forme suivante:

$$S_\Phi = S_c + S_p \Phi_p \quad (III-12)$$

S_p : est le coefficient de Φ_p .

S_c : la partie constante de S_Φ qui ne dépend pas de Φ_p .

La linéarisation de l'équation de continuité pour ($\Phi=1$ et $S_\Phi=0$) donne:

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (\text{III-13})$$

Où:

$$\left. \begin{aligned} F_e &= (\rho u)_e A_e \\ F_w &= (\rho u)_w A_w \\ F_s &= (\rho v)_s A_s \\ F_n &= (\rho v)_n A_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-14})$$

F_i ($i= e, w, n, s$) est le débit massique à travers les faces du volume de contrôle.

En multipliant l'équation (III-13) par Φ_p et en soustrayant cette équation de l'équation (III-10) on obtient:

$$(J_e - F_e \Phi_p) - (J_w - F_w \Phi_p) + (J_n - F_n \Phi_p) - (J_s - F_s \Phi_p) = (S_c - S_p \Phi_p) \Delta x \Delta y \quad (\text{III-15})$$

Les termes entre parenthèse de l'équation (III-15) peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} J_e - F_e \Phi_p &= a_E (\Phi_p - \Phi_e) \\ J_w - F_w \Phi_p &= a_W (\Phi_p - \Phi_w) \\ J_n - F_n \Phi_p &= a_N (\Phi_p - \Phi_n) \\ J_s - F_s \Phi_p &= a_S (\Phi_p - \Phi_s) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-16})$$

Où les a_i ($i= E, W, N, S$) sont les coefficients voisins du point P du volume de contrôle. En introduisant ces équations dans l'équation discrétisée (III-15) on obtient pour chaque point P du maillage une équation discrétisée de la forme:

$$a_p \Phi_p = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b \quad (\text{III-17})$$

Avec $a_E = D_e A(P_e) + \|-F_e, 0\|$

$$a_w = D_w A(P_w) + \|\text{Fw}, 0\|$$

$$a_N = D_n A(P_n) + \|\text{-F}_n, 0\|$$

$$a_S = D_s A(P_s) + \|\text{F}_s, 0\|$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y + a_p^0 \Phi_p^0$$

$$a_p = a_E + a_w + a_N + a_S + S_p \Delta x \Delta y$$

La notation $\|A, B\|$ désigne la plus grande valeur de A et de B c'est à dire

Di (i = e, w, s, n) sont les coefficients de diffusion donnés par les relations:

$$D_e = \Gamma_e \frac{A_e}{(\delta x)_e}$$

$$D_w = \Gamma_w \frac{A_w}{(\delta x)_w}$$

$$D_n = \Gamma_n \frac{A_n}{(\delta y)_n}$$

$$D_s = \Gamma_s \frac{A_s}{(\delta y)_s}$$

Pi (i = e, w, s, n) sont les nombres de pecllet définis par :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e}$$

$$P_w = \frac{F_w}{D_w}$$

$$P_n = \frac{F_n}{D_n}$$

$$P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

III.5.Schémas de Discrétisation :

Les schémas de discrétisation sont des méthodes de calcul adoptées pour évaluer les grandeurs à calculer aux différents points du domaine d'étude. Ils sont choisis, d'après les problèmes traités, suivant la concordance des résultats qu'ils donnent avec les résultats physiques et la stabilité numérique.

III.5.1.Schéma de Discrétisation Spatiale :

Patankar[1] a proposé plusieurs schémas approchés permettant d'exprimer la fonction $A(|P|)$ qui sont les suivantes

§ Schéma des Différences Centrées:

La fonction $A(|P|)$ est donnée par l'expression:

$$A(|P|) = 1 - 0,5 |P| \quad (\text{III-18})$$

Les coefficients de l'équation de transport discrétisé seront:

$$\left. \begin{aligned} a_E &= D_e(1 - 0,5 |P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W &= D_w(1 - 0,5 |P_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_N &= D_N(1 - 0,5 |P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S &= D_S(1 - 0,5 |P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-19})$$

Le schéma des différences centrées est basé sur une interprétation linéaire des valeurs de Φ sur les interfaces.

Ce schéma est stable pour $|P| \leq 2$ et donne des coefficients de discrétisation (a_E, a_W, a_N, a_S) positifs.

§ Schéma Upwind :

La fonction $A(|P|)$ est donnée par l'équation:

$$A(|P|) = 1 \tag{III-20}$$

Où les expressions suivantes des coefficients:

$$\left. \begin{aligned} a_E &= D_e + \max(-F_e, 0) \\ a_W &= D_w + \max(F_w, 0) \\ a_N &= D_N + \max(-F_n, 0) \\ a_S &= D_S + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \tag{III-21}$$

Ce schéma est conditionnellement stable. Il est souvent utilisé lorsque la convection est dominante suivant le sens de l'écoulement.

§ Schéma Hybride :

La fonction $A(|P|)$ est exprimée comme suit:

$$A(|P|) = \max(0, 1 - 0,5 |P|) \tag{III-22}$$

D'où les expressions suivantes des coefficients:

$$\left. \begin{aligned} a_E &= \max(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0) \\ a_W &= \max(F_w, D_w - \frac{F_w}{2}, 0) \\ a_N &= \max(-F_n, D_N - \frac{F_n}{2}, 0) \\ a_S &= \max(F_s, D_S - \frac{F_s}{2}, 0) \end{aligned} \right\} \tag{III-23}$$

Ce schéma est la combinaison des deux schémas précédents rassemblant ainsi leurs caractéristiques.

En appliquant ce schéma on aura un compromis entre stabilité et précision de la méthode numérique.

§ Schéma Exponentiel :

$$A(|P|) = A(|p|) = \frac{|p|}{e^{|p|} - 1} \tag{III-24}$$

Les coefficients de l'équation générale de transport sont exprimés comme suit :

$$\left. \begin{aligned} a_E &= \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} & a_W &= \frac{F_w}{\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right) - 1} \\ a_N &= \frac{F_n}{\exp\left(\frac{F_n}{D_n}\right) - 1} & a_S &= \frac{F_s}{\exp\left(\frac{F_s}{D_s}\right) - 1} \end{aligned} \right\} \tag{III-25}$$

Ce schéma est plus précis et moins utilisé en pratique car le calcul des exponentielles est coûteux en temps de machine.

§ Schéma de la Loi de Puissance "Power Law":

La fonction A(|P|) est donnée par l'expression suivante:

$$A(|P|) = \max [0, (1 - 0,1 |P|)^5] \tag{III-26}$$

Les coefficients de l'équation générale discrétisée s'écrivent:

$$\left. \begin{aligned} a_E &= D_e \max [0, (1 - 0,1 |P_e|)^5] + \max (-F_e, 0) \\ a_W &= D_w \max [0, (1 - 0,1 |P_w|)^5] + \max (F_w, 0) \\ a_N &= D_N \max [0, (1 - 0,1 |P_n|)^5] + \max (-F_n, 0) \\ a_S &= D_S \max [0, (1 - 0,1 |P_s|)^5] + \max (F_s, 0) \end{aligned} \right\} \tag{III-27}$$

Ce schéma donne une très bonne approximation de la solution exacte, en plus il est recommandé par **Patankar[1]**; c'est pourquoi notre choix s'est posé sur ce schéma.

III.5.2. Discrétisation des Termes Source :

Dans notre problème le terme source apparaît dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant l'axe X et suivant l'axe Y comme indiqué sur le tableau(III-1).

- Terme source pour la composante longitudinale u de la vitesse sur un volume de contrôle on discrétise le terme.

$$S^u = S_c^u + S_p^v u_p$$

$$S_p^v = 0$$

$$S_c^u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla \cdot \mathbf{U}) \right]$$

$$\bar{S}^u = \int_s^e \int_w^e S^u dx dy = \int_s^e \int_w^e \left(\left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla \cdot \mathbf{U}) \right] \right) dx dy$$

Il suffit d'intégrer chaque terme de cette équation dans le volume de contrôle figure(III-2) alors on a :

$$\int_s^e \int_w^e \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy = \frac{p_w - p_p}{\delta x} \cdot \Delta v$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx dy = \frac{1}{Re} \left[\mu_e \frac{u_e - u_p}{\delta x} A_e - \mu_w \frac{u_p - u_w}{\delta x} A_w \right]$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy = \frac{1}{Re} \left[\mu_n \frac{v_n - v_p}{\delta x} A_n - \mu_s \frac{v_p - v_s}{\delta x} A_s \right]$$

$$\nabla \mathbf{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

- Terme source pour la composante de la vitesse v selon l'axe des y sur le volume de contrôle on discrétise le terme.

$$S^v = S_c^v + S_p^v v_p$$

$$S_p^v = 0$$

$$S_c^v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \nabla \mathbf{U}) \right]$$

$$\bar{S}^v = \int_s^e \int_w^e S^v dx dy = \int_s^e \int_w^e \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \nabla \mathbf{U}) \right] \right) dx dy$$

Il suffit d'intégrer chaque terme de cette équation dans le volume de contrôle figure(III-2) alors on a :

$$\int_s^e \int_w^e -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy = \frac{p_s - p_p}{\delta y} \Delta v$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy = \mu_n \frac{u_{ep} - u_{es}}{\delta y} A_e - \mu_s \frac{u_p - u_{ps}}{\delta y} A_w$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy = \mu_n \frac{v_n - v_p}{\delta x} A_n - \mu_s \frac{v_p - v_s}{\delta x} A_s$$

III.6. Discrétisation des Conditions aux Limites :

a- Conditions de Sorties:

Les équations de discrétisation des conditions aux limites seront exprimés comme suit:

La condition de **Newman** sur la vitesse et les scalaires à la sortie, est discrétisé en substituant les coefficients dans les équations discrétisées associées à u , P , θ par les valeurs suivantes:

Dans le cas général
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

Sa discrétisation est
$$\frac{\Phi(NI, J) - \Phi(NI - 1, J)}{\delta x(NI - 1)} = 0$$

b- Conditions aux Frontières:

La condition du type **Newmann**, d'une manière générale :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

La discrétisation de cette condition à la frontière supérieure est :

$$\frac{\Phi(I, NJ) - \Phi(I, NJ - 1)}{\delta y(NJ - 1)} = 0$$

CHAPITRE IV

Résolution des Equations Algébriques

IV.1.Introduction :

Dans la solution des problèmes d'écoulement des fluides compressibles, en termes de variables primitives une difficulté se présente, elle est due à l'absence d'une équation qui gouverne explicitement la pression. La pression est impliquée dans l'équation de continuité qui impose une condition de compatibilité sur les vitesses u et v . des méthodes indirectes sont alors utilisées pour obtenir le champ de pression.

Trois algorithmes sont considérées pour le traitement de la vitesse-pression nommées les méthodes semi-implicites des équations de liaison de pression "simple" (semi-implicit for Pressure Linked Equation) simple revised (Simpler) et la méthode à opérateur Split pour la solution implicite de pression (Piso); les deux dernières méthodes sont relativement récentes et sont plus stable que l'algorithme original simple.

IV.2 Algorithme SIMPLE :

Pour la résolution des équations de conservation de quantités de mouvement, il faut connaître le champ de pression où ce dernier est inconnu, grâce à l'algorithme simple envisagé par **Patankar** [1] les équations de conservation sont couplées entre elles par l'intermédiaire du champ de pression et de vitesse.

L'équation de mouvement discrétisé s'écrit :

$$\begin{aligned}
 a_e u_e &= \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_p - p_E) A_e \\
 a_e u_w &= \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_w - p_p) A_w \\
 a_n v_n &= \sum a_{nb} v_{nb} + b + (p_p - p_N) A_n \\
 a_s v_s &= \sum a_{nb} v_{nb} + b + (p_s - p_p) A_s
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(IV-1)} \\ \\ \text{(IV-2)} \end{array}$$

a_{nb} : coefficients de l'équation des vitesses discrétisé (nb = e, w, n, s).

Les équations de la quantité de mouvement ne peuvent être résolues que si le champ de la pression est donné ou estimé. Sauf pour un champ de pression correct employé; les résultats du champ de la vitesse ne satisferont pas l'équation de continuité. Un tel champ vitesse incorrect, basé sur un champ de pression, estimé (p^*) sera noté par u^* , v^* .

Ces vitesses sont les résultats de la solution des équations discrétisées suivantes.

$$\begin{aligned}
 a_e u^*_e &= \sum a_{nb} u^*_{nb} + b + (p^*_p - p^*_E) A_e \\
 a_w u^*_w &= \sum a_{nb} u^*_{nb} + b + (p^*_w - p^*_p) A_w \\
 a_n v^*_n &= \sum a_{nb} v^*_{nb} + b + (p^*_p - p^*_N) A_n \\
 a_s v^*_s &= \sum a_{nb} v^*_{nb} + b + (p^*_s - p^*_p) A_s
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(IV-3)} \\ \\ \text{(IV-4)} \end{array}$$

(*)': L'exposant note l'estimation et(') sa correction.

Les valeurs exactes des paramètres sont données par:

$$p = p^* + p' \tag{IV-5}$$

$$u = u^* + u' \quad \text{et} \quad v = v^* + v' \tag{IV-6}$$

Si on soustrait l'équation (IV-1) de (IV-3) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} a_e u_e^* &= \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_p^* - p_E^*) A_e \\ a_w u_w^* &= \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_w^* - p_p^*) A_w \end{aligned} \right\} \tag{IV-7}$$

$$\left. \begin{aligned} a_n v_n^* &= \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_p^* - p_N^*) A_n \\ a_s v_s^* &= \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_s^* - p_p^*) A_s \end{aligned} \right\} \tag{IV-8}$$

Le terme $\sum a_{nb} u_{nb}^*$ négligé pour des raisons numériques.

Les équations (IV-7) et (IV-8) s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} u_e^* &= d_e (p_p^* - p_E^*) \\ u_w^* &= d_w (p_w^* - p_p^*) \end{aligned} \right\} \tag{IV-9}$$

$$\left. \begin{aligned} v_n^* &= d_n (p_p^* - p_N^*) \\ v_s^* &= d_s (p_s^* - p_p^*) \end{aligned} \right\} \tag{IV-10}$$

Avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \quad , \quad d_w = \frac{A_w}{a_w} \tag{IV-11}$$

$$d_n = \frac{A_n}{a_n} \quad , \quad d_s = \frac{A_s}{a_s} \tag{IV-12}$$

Les équations (IV-9) et (IV-10) s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} u_e &= u_e^* + d_e(p_p^* - p_E^*) \\ u_w &= u_w^* + d_w(p_W^* - p_p^*) \end{aligned} \right\} \quad (IV-13)$$

$$\left. \begin{aligned} v_n &= v_n^* + d_n(p_p^* - p_N^*) \\ v_s &= v_s^* + d_s(p_S^* - p_p^*) \end{aligned} \right\} \quad (IV-14)$$

Le terme (ρu) sera approximativement de la manière :

$$(\rho^* + \rho') (u' + u^*) = \rho^* u^* + \rho' u' \quad (IV-15)$$

L'équation de continuité s'écrit:

$$[(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta x = 0 \quad (IV-16)$$

Qui s'écrit aussi :

$$\rho_e u_e A_e - \rho_w u_w A_w + \rho_n v_n A_n - \rho_s v_s A_s = 0 \quad (IV-17)$$

On remplace (IV-13) et (IV-14) dans (IV-17):

$$\begin{aligned} & A_e (\rho_e^* u_e^*) - A_w (\rho_w^* u_w^*) + A_n (\rho_n^* u_n^*) - A_s (\rho_s^* u_s^*) + \\ & A_e \rho_e^* \left(d_e (p_e' - p_e') \right) + A_w \rho_w^* (d_w (p_p' - p_w')) + A_n \rho_n^* (d_n (p_e' - p_n')) - A_s \rho_s^* (d_s (p_e' - p_s')) = 0 \end{aligned} \quad (IV-18)$$

Cette équation prendra la forme suivante :

$$a_p p'_p = a_E p'_E + a_w p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (\text{IV-19})$$

$$\left. \begin{aligned} a_E &= A_e \rho_e^* d_e \\ a_W &= A_w \rho_w^* d_w \\ a_N &= A_n \rho_n^* d_n \\ a_S &= A_s \rho_s^* d_s \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-20})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{IV-21})$$

Et

$$b = A_e (\rho_e^* u_e^*) - A_w (\rho_w^* u_w^*) + A_n (\rho_n^* v_n^*) - A_s (\rho_s^* v_s^*) \quad (\text{IV-22})$$

La procédure de résolution de l'équation (IV-21) avec l'ensemble des équations de mouvement constitué l'algorithme simple.

IV.3. Séquences des Opérations Itératives :

Les étapes sont les suivantes :

1. Donner un champ de pression initial P^* .
2. Résoudre les équations de quantité de mouvement pour les vitesses u^* et v^* .
3. Résoudre l'équation de correction de pression.
4. Corriger p : $p = p' + p^*$.
5. Corriger les champs des composantes de vitesses u et v en utilisant les formules de correction de vitesses.
6. Calculer la densité de l'équation d'état du fluide supposé parfait.
7. Résoudre l'équation de transport pour $(\Phi=T)$.

8. Prendre la pression corrigée comme une valeur estimée p^* et retourner à l'étape 2.
9. Répéter la procédure jusqu'à la convergence.

IV.4. La Méthode de Sous-Relaxation :

Le procédé de résolution itérative consiste à modifier successivement les valeurs de Φ de manière à approcher la solution correcte; le changement trop rapide des valeurs de Φ d'un tour à l'autre risque de provoquer des instabilités numériques. Par conséquent, pour minimiser les risques de divergences, il est toujours souhaitable d'amortir l'amplitude de ces changements en utilisant la technique de sous relaxation reflété dans la formule suivante:

$$\Phi_p = \Phi_p^0 + \alpha_\Phi (\Phi_p^1 - \Phi_p^0) \quad (\text{IV-23})$$

Où : Φ_p^0 Est la valeur obtenue de l'itération précédente

Φ_p^1 Est la valeur obtenue de la résolution en cours.

α_Φ Est le facteur de sous relaxation dont la valeur varie entre (0 et 1).

IV.5. Critère de Convergence :

Le critère de convergence de la résolution itérative est basé sur les résidus absolus des équations à résoudre. La convergence est atteinte si la condition suivante est satisfaite.

$$\text{RESOR } \Phi = \sum \left| \sum A_i \Phi_i + S_c - A_p \Phi_p \right| \langle \text{SORMAX} \quad (\text{IV-24})$$

$$(\Phi = u, v, P, T)$$

RESOR Φ est la somme des résidus normalisée en valeur de l'équation pour Φ associée à tous les volumes de contrôle du domaine.

SORCE : Maximum de RESOR Φ (RESORM, RESORu, RESORv, RESORP, RESORT).

$$\text{RESORM} = \sum |m_{ij}| / \min \quad (\text{IV-25})$$

RESORM est la somme des résidus de masse normalisé en valeurs absolues.

Un autre test se fait durant le calcul, sur le nombre d'itérations, ce dernier (niter) est fixe à une valeur maximale (maxit) si cette valeur est atteinte (niter = maxit) sans que le premier test soit vérifié (SORCE < SORMAX). Le calcul s'arrêtera dans ce cas la solution n'a pas convergé.

IV.6. Solution Numérique du Système Algébrique :

Le choix d'une méthode de résolution numérique ne dépend pas seulement des caractéristiques intrinsèques du problème, mais aussi et surtout des possibilités du calculateur (micro-ordinateur). Les deux facteurs essentiels sont la capacité de stockage de la mémoire et le temps d'exécution.

Les méthodes de calcul d'un système algébrique sont classées en deux catégories principales :

- § Méthodes directes qui sont limitées aux seuls systèmes linéaire et elles exigent une mémoire énorme et un temps de calcul relativement grand.
- § Méthodes indirectes qui peuvent s'appliquer aux systèmes non linéaires et surtout aux problèmes où de nombreux éléments matriciels sont nuls. Par conséquent, ces derniers exigent moins de mémoire d'ordinateur que les méthodes directes.

Dans notre cas, le système d'équation obtenu :

$$a_p \Phi_p = a_E \Phi_E + a_w \Phi_w + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + \overline{S\Phi} \quad (\text{IV-26})$$

Ou encore pour un nœud (I, J) où I désigne le numéro de la ligne et J le numéro de la colonne. On peut écrire :

$$a_p(I, J)\Phi(I, J) = a_E(I, J)\Phi(I-1, J) + a_w(I, J)\Phi(I-1, J) + a_N(I, J)\Phi(I-1, J) + a_S\overline{\Phi} \quad (IV-27)$$

$$\text{Avec : } 1 \leq I \leq NI \qquad 1 \leq J \leq NJ$$

Les coefficients de cette équation sont fonction des variables de transport Φ et la résolution d'un tel système est très compliquée une méthode semi-itérative a été suggérée pour rendre le système moins dense que sa forme initiale, c'est-à-dire diminuer le nombre de variables que dans les équations (pour occuper moins de mémoire d'ordinaire).

La méthode semi-itérative consiste à faire un balayage ligne par ligne, donc rendre le système précédent à un système à matrice tri-diagonale. Le balayage suivant x se fait comme suit : pour déterminer les valeurs d'une grandeur Φ sur une ligne i ; les valeurs sur les lignes voisines $(i+1)$ et $(i-1)$ sont connues, par conséquent on aura un système tri diagonal.

On pose

$$a_S(I, J-1) = b(J) \quad (IV-28)$$

$$a_N(I, J+1) = a(J) \quad (IV-29)$$

$$a_p(I, J) = d(J) \quad (IV-30)$$

$$a_E(I, J)\Phi(I+1, J) + a_w(I, J)\Phi(I-1, J) + \overline{S}\Phi = c(J) \quad (IV-31)$$

On peut écrire :

$$-b(J)\Phi(J-1) + d(J)\Phi(J) - a(J)\Phi(J+1) = c(J) \quad (IV-32)$$

Ce système peut être représenté sous forme matricielle :

$$\{A\}\Phi + c = 0$$

Avec:

$$\{A\} = \begin{bmatrix} d(2) & -a(2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b(3) & d(3) & -a(3) & 0 & \dots & \\ 0 & -b(4) & d(4) & -a(4) & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 - b(NJ - 1)d(NJ - 1) & \dots \end{bmatrix}$$

(IV-33)

La matrice $\{A\}$ est une matrice tri diagonale, l'algorithme de THOMAS (TDMA : Tri Diagonal Matrix Algorithm) se résume à sa réduction en une matrice bidiagonale dont les termes de la diagonale principale sont égaux à l'unité.

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_2 & 0 & - & - & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 & - \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \mathbf{M} \\ \Phi_{NJ-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_{NJ-1} \end{bmatrix} \tag{IV-34}$$

(IV-35)

$$\gamma_2 = \frac{a(2)}{d(2)}$$

$$\gamma_j = \frac{a(j)}{d(j) - c(j)\gamma_{j-1}} \quad j=3, nj-1 \tag{IV-36}$$

$$\beta_2 = \frac{c(2) + b(2)\Phi}{d(2)} \tag{IV-37}$$

$$\beta_j = \frac{c(j) + b(j)\beta_{j-1}}{d(j) - b(j)\gamma_{j-1}} \quad j=3, nj \tag{IV-38}$$

La résolution est comme suit :

Donnée aux conditions aux limites;

$$\Phi_{nj} = \beta_{nj} \tag{VI-39}$$

$$\Phi_j = \beta_j - \gamma_j \Phi_{j+1} \tag{IV-40}$$

$$j = n - 1, \dots, 1$$

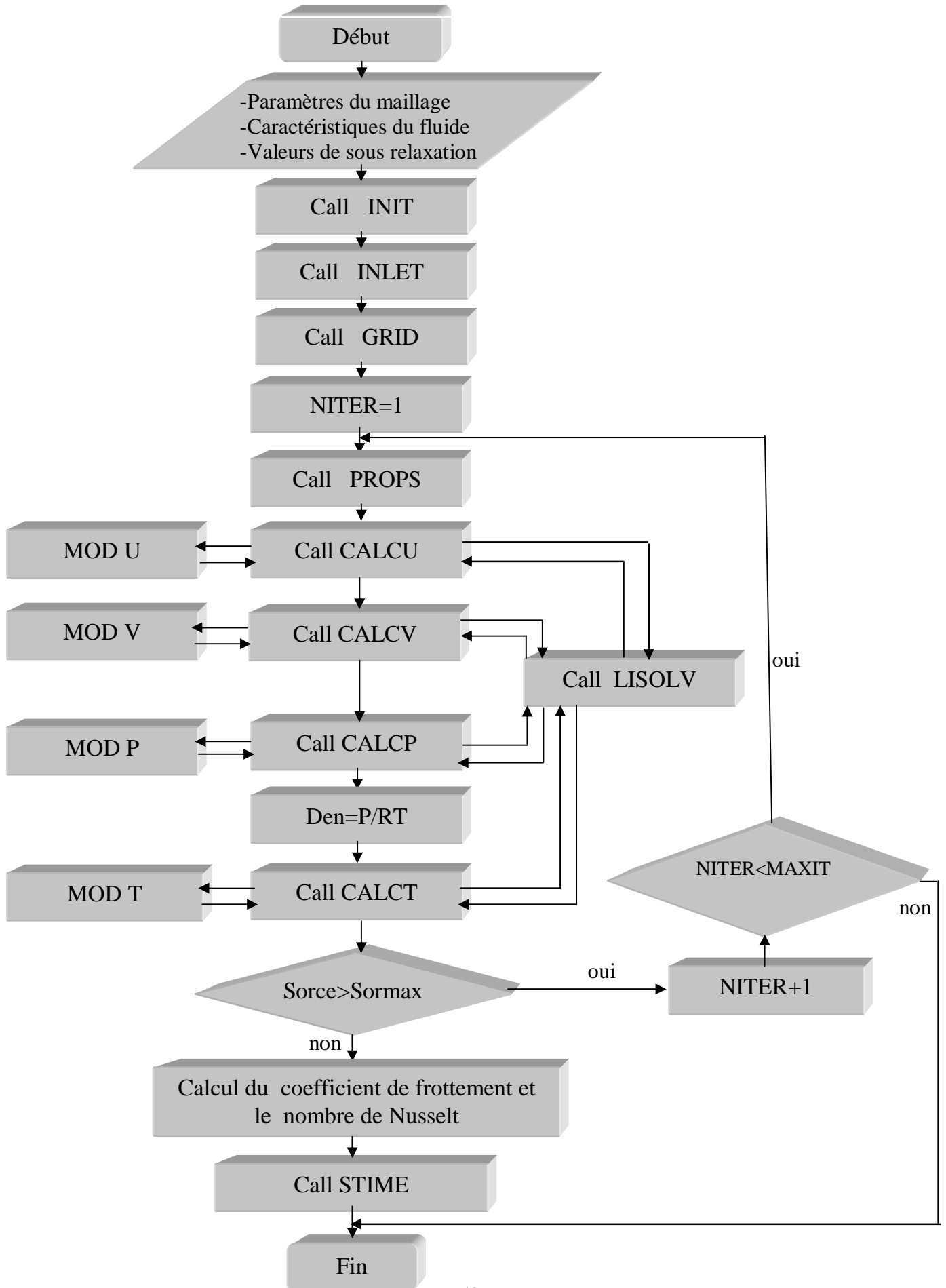
Après la résolution de la colonne I, on procède à la résolution des colonnes I+1, I+2 jusqu'à la frontière du domaine. Une fois tout le domaine balayé cette opération est répétée jusqu'à ce que les champs des Φ ne change plus au cours du balayage.

IV.7. Structure du Code de Calcul :

Le code de calcul est constitué d'un programme principal et sous programmes. La fonction de chaque subroutine est :

1. **INIT**: calcul les différents paramètres géométriques du maillage et initialisation des variables de l'écoulement.
2. **INLET** : Détermine les conditions aux limites des vitesses de la température et de la pression.
3. **GRID** : permet d'établir le maillage.
4. **PROPS** : Calcul la viscosité et la conductivité en fonction de la température.
5. **CALCU**: calcul des coefficients a_i et résolution de l'équation de transports de la vitesses u^* .
6. **CALCV**: calcul des coefficients a_i et résolution de l'équation de transports de la vitesses v^* .
7. **CALCP**: calcul des coefficients a_i et résolution de l'équation de correction de pression p' et correction des composantes de la vitesses u et v .
8. **CALCT** : calcul des coefficients a_i et résolution de l'équation de transports de T.
9. **MOD Φ** : calcul les conditions aux limites de la variable de transport ($\Phi = u, v, p, T$).
10. **LISOLV**: Résolution du système d'équation algébrique associé à la variable Φ .
11. **PRINT**: impression des résultats.

Organigramme du Programme principal



CHAPITRE V

Résultats et Discussions

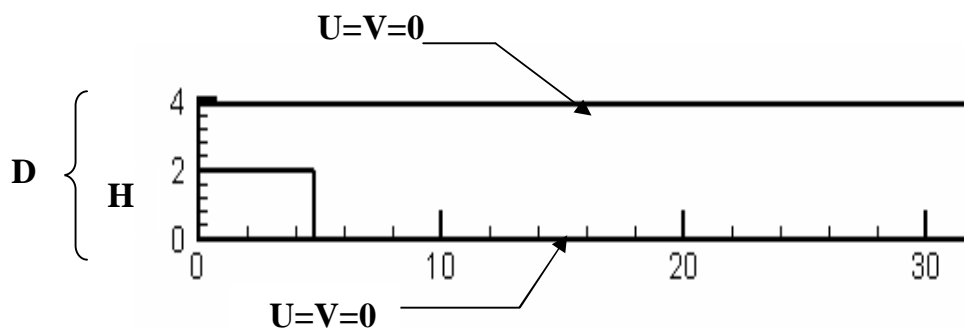
V.A. Validation du Code de Calcul

V.A.1. Introduction :

Il existe pour les écoulements sur une marche descendante plusieurs travaux et résultats expérimentaux et numériques, que nous avons utilisé ici pour vérifier le code "TEAM" que nous avons exploité. Nous avons constaté qu'il donne de bons résultats. En effet nous l'adoptons au cas d'un canal rectangulaire contenant à l'entrée une marche descendante. Dans ce qui suit plusieurs comparaisons sont faites dans ce but.

Nous commençons la comparaison et la vérification de nos résultats avec les résultats numériques de **Jingyi Zhu [25]** et les résultats expérimentaux de **Armaly et al [6]** pour des faibles nombre de Reynolds basé sur la hauteur de la marche (cas laminaire $Re < 600$) d'un écoulement dans un canal à parois basse et haute, avec un profil de vitesse uniforme à l'entrée.

Une géométrie de la marche caractérisée par un rapport d'expansion (**ER = 2 et ER = 1.5, ER = D/D-H**) voir Figure(V-1).



Fig(V-1) : Marche descendante dans un canal ER=2

Nous avons utilisé les mêmes conditions aux limites de la référence [25], un profil de vitesse uniforme à l'entrée, la hauteur de la marche en 1^{er} cas $H=1$, la hauteur du canal $D=2$ pour un rapport d'expansion $ER=2$, en 2^{ème} cas $D=3$ et $H=1$,

pour un rapport d'expansion $ER=1.5$, nous avons varié la hauteur d'entrée pour voir son effet sur le développement de l'écoulement.

Les Figures (V-2a) et (V-2b) représentent les contours des champs de pression pour des différents nombres de Reynolds (**Re=25, 75, 125 et 250**) en régime laminaire, pour comparer nos résultats avec ceux de **Jingyi Zhu [25]**.

On remarque que la zone de recirculation augmente quand le nombre de Reynolds augmente, cette zone de recirculation est due au changement brusque dans la section d'entrée et un gradient défavorable de pression par la présence de la marche, les figures (V-2a) et (V-2b), montrent un changement de direction du gradient de pression, nous constatons qu'il y a un bon accord entre nos résultats et ceux de **Jingyi Zhu [25]**.

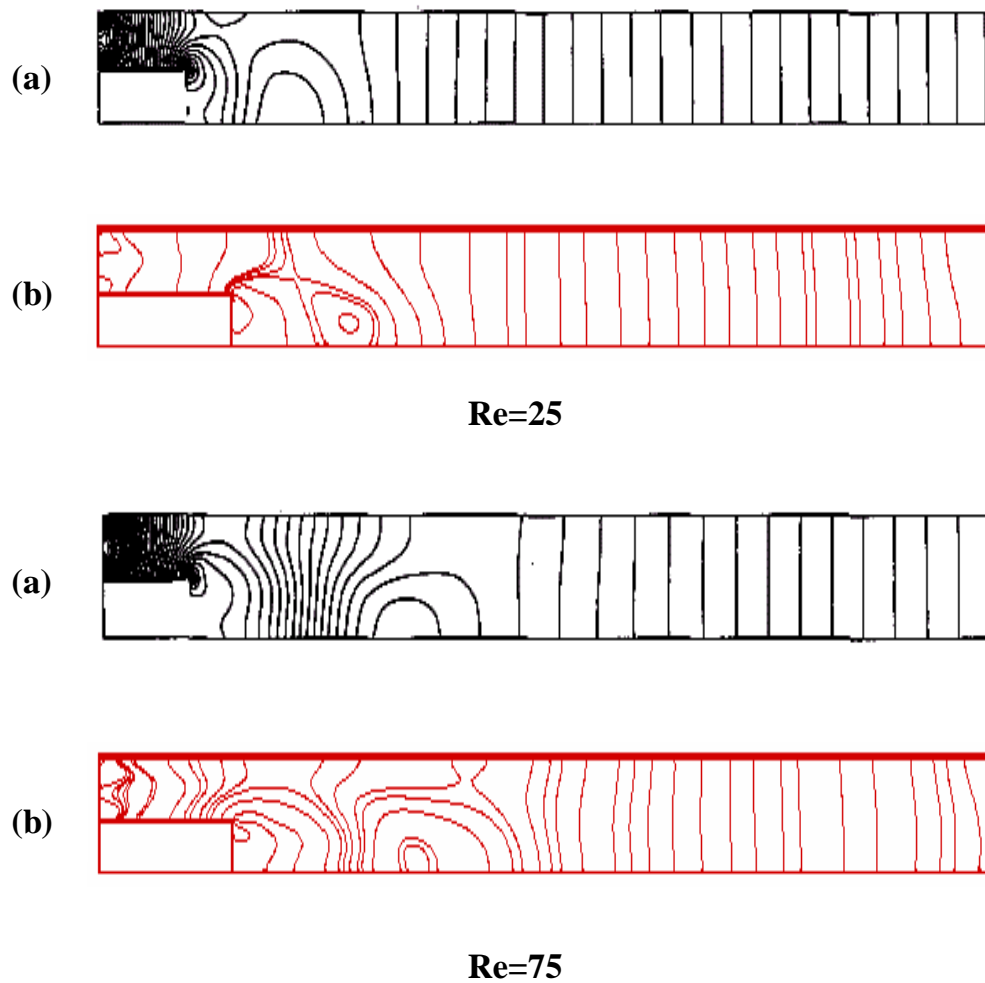
La figure (V-3), illustre la variation de la longueur de rattachement en fonction du nombre de Reynolds Re . La comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature et les travaux expérimentaux de **Armaly et al [6]**, de DNS de **Le et Moin [12]**, la simulation de **Kaiktis et al [24]**, **Osswaled et al [59]**, les travaux de CFD **[58]** pour un rapport d'expansion $ER=1.2$.

Nous remarquons bien l'influence du nombre de Reynolds sur la longueur de rattachement, quand le nombre de Reynolds augmente la longueur de rattachement augmente. La figure montre un bon accord entre tous ces résultats.

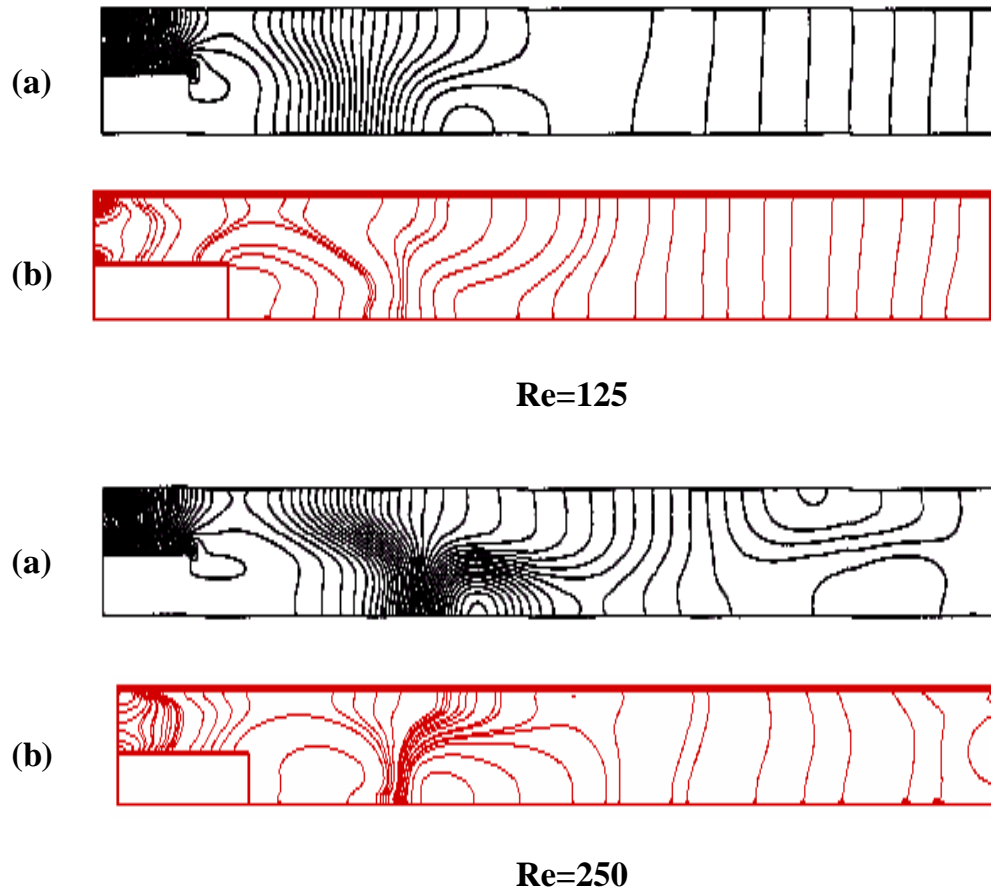
L'effet de la région de recirculation peut être vu dans le tracé de la vitesse u/u_0 dans les différentes sections du canal comme illustré dans les figures (V-4a),(V-4b), nous avons tracé les profils de la vitesse dans des différentes stations ($X=0,1,2,4,6,8,10,12$), en aval de la marche et pour des différentes valeurs du nombre de Reynolds ($Re=25,75,125$ et 250).

A l'entrée sur la marche en ($X=0$) et ($Re=25$ et 75), les profils sont des profils de Poiseuille, en ($X=1$) nous constatons un effet réversible de l'écoulement puis tout de suite ce profil se restabilise, ceci indique que l'effet de la zone de recirculation est local et limité.

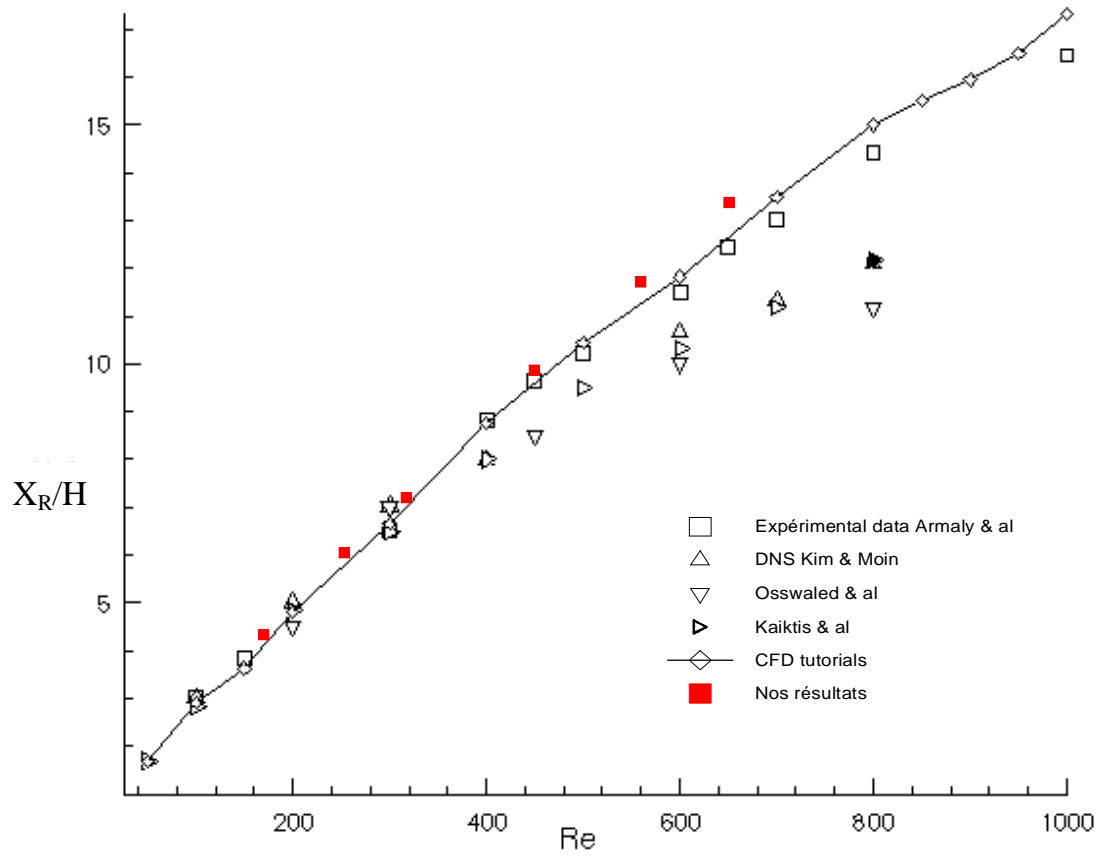
Quand $Re=75$ et 125 , nous constatons que la zone de recirculation s'élargit un peu et augmente encore quand $Re=250$ et il y a tendance d'apparition d'une seconde zone



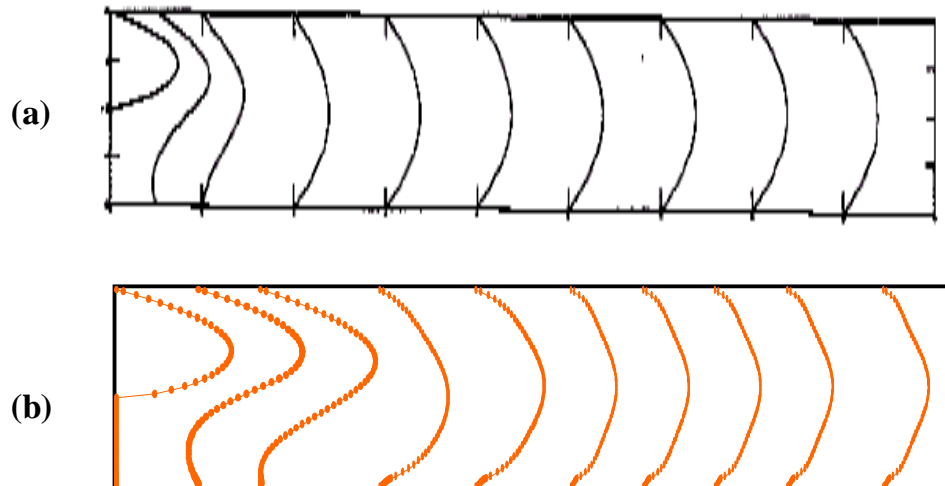
Fig(V-2a): Contours de la pression pour des différentes valeurs de Re comparaison de nos résultats avec ceux de **Jingyi [25]**
(a) Résultats de Jingyi[25] (b) Nos travaux



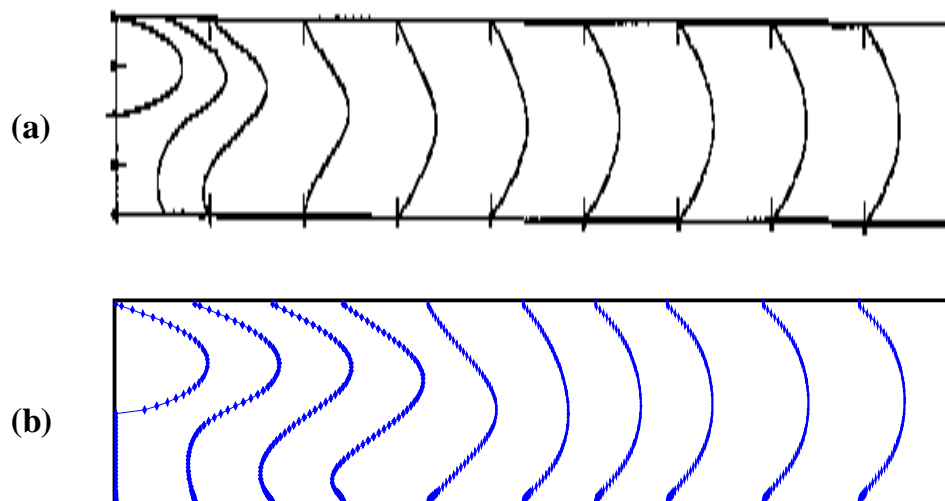
Fig(V-2b): Contours de la pression pour des différentes valeurs de Re comparaison de nos résultats avec ceux de **Jingyi [25]**
(a) Résultats de Jingyi (b) Nos travaux



Fig(V-3) : Variation de la longueur de rattachement en fonction du nombre de Reynolds comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature



Re=25



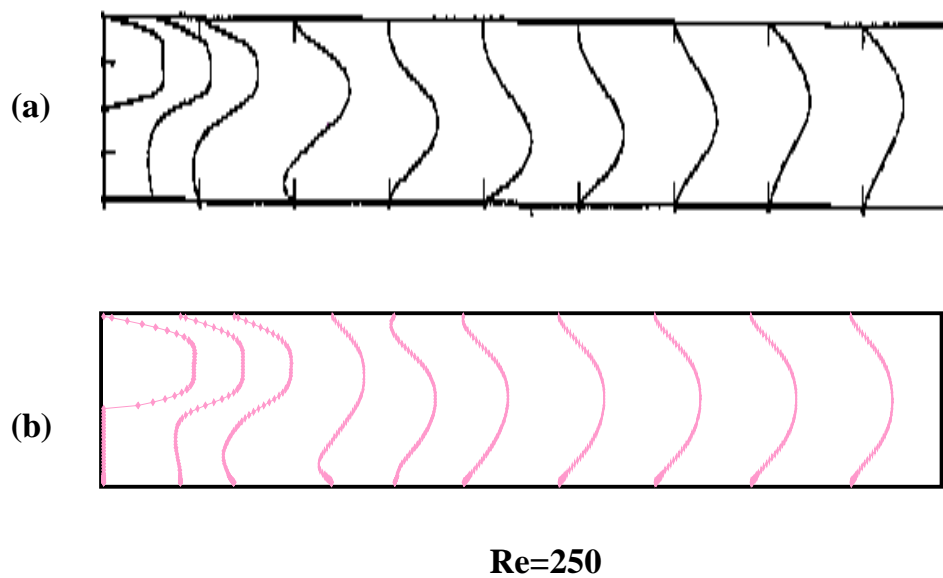
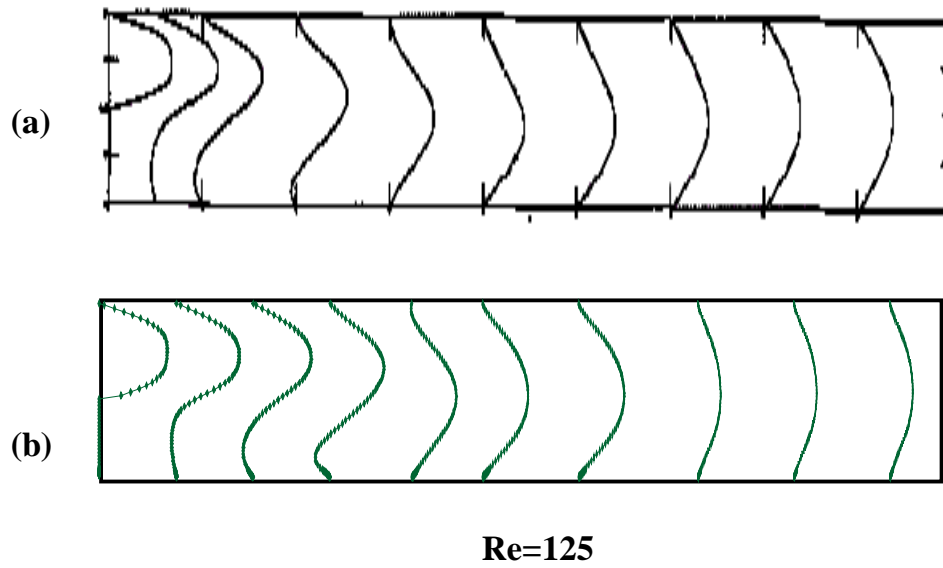
Re=75

Fig(V-4a): Profils des vitesses pour des différentes positions x .

Comparaison de nos résultats avec ceux de **Jingyi** [25]

(a) Résultats scannés de la référence [25]

(b) Nos résultats



Fig(V-4b): Profils des vitesses pour des différentes positions x .

Comparaison de nos résultats avec ceux de **Jingyi** [25]

(a) Résultats scannés de la référence [25]

(b) Nos résultats

de recirculation dans la paroi haute du canal. A cause de la faible section d'entrée l'écoulement n'est pas complètement développé.

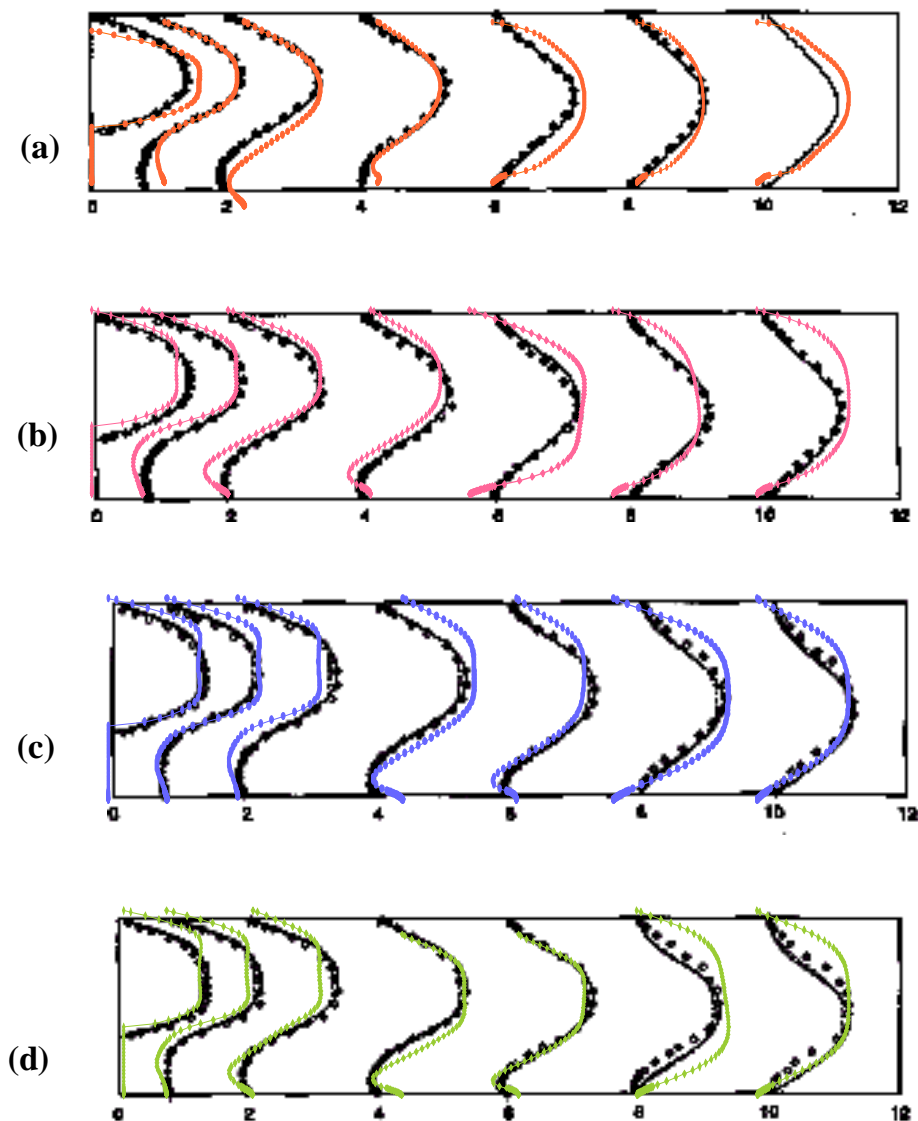
Nous avons utilisé les comparaisons des résultats numériques de **Jingyi [25]** et expérimentaux de **Denham[26]** pour un rapport d'expansion (**ER=1.5**) et des différentes valeurs du nombre de Reynolds, pour les comparer avec nos travaux comme illustré dans la figure(V-5). Les résultats de **Jingyi[25]** en traits continus et ceux **Denham[26]** tracés en forme de petits cercles .

Cette figure montre la variation de la vitesse u en plusieurs stations x , pour des différents nombres de Reynolds ($Re=73, 125, 191$ et 229).

Nous avons utilisé les mêmes conditions d'entrées, le rapport d'expansion étant **ER=1.5** c'est-à-dire on a changé la section d'entrée ($D=3$ et $H=1$) l'écoulement est aussi stationnaire.

En premier quand $Re=73$, à l'entrée le profil de vitesse de poiseuille est bien développé analogue à ceux de la littérature, dans la 2^{ème} station commence la zone de recirculation et continue jusqu'à diminuer en $x=4$, en ($x=6, 8, 10$) les profils de poiseuilles se redéveloppent jusqu'à la sortie.

Quand $Re=125$ le profil de Poiseuille est bien développé mais légèrement aplatis au milieu, ainsi que pour $Re=191$ et 229 , l'élargissement de la région de recirculation est très visible pareil à ceux **Jingyi[25]** et **Denham[26]**, la différence seulement au léger aplatissement au milieu de ces profils, qui est visible aussi dans les profils **Jingyi[25]**. Ceci est dû peut être à la méthode de calcul utilisée ou bien de l'effet stationnaire, ou sinon des conditions sortie imposées.



Fig(V-5): Profils des vitesses pour des différentes positions x .

Comparaison de nos résultats avec ceux de **Jingyi[25] & Denham[26]** pour un rapport d'expansion **ER=1.5**

(a) $Re=73$ (b) $Re=125$ (c) $Re=191$ (d) $Re=229$

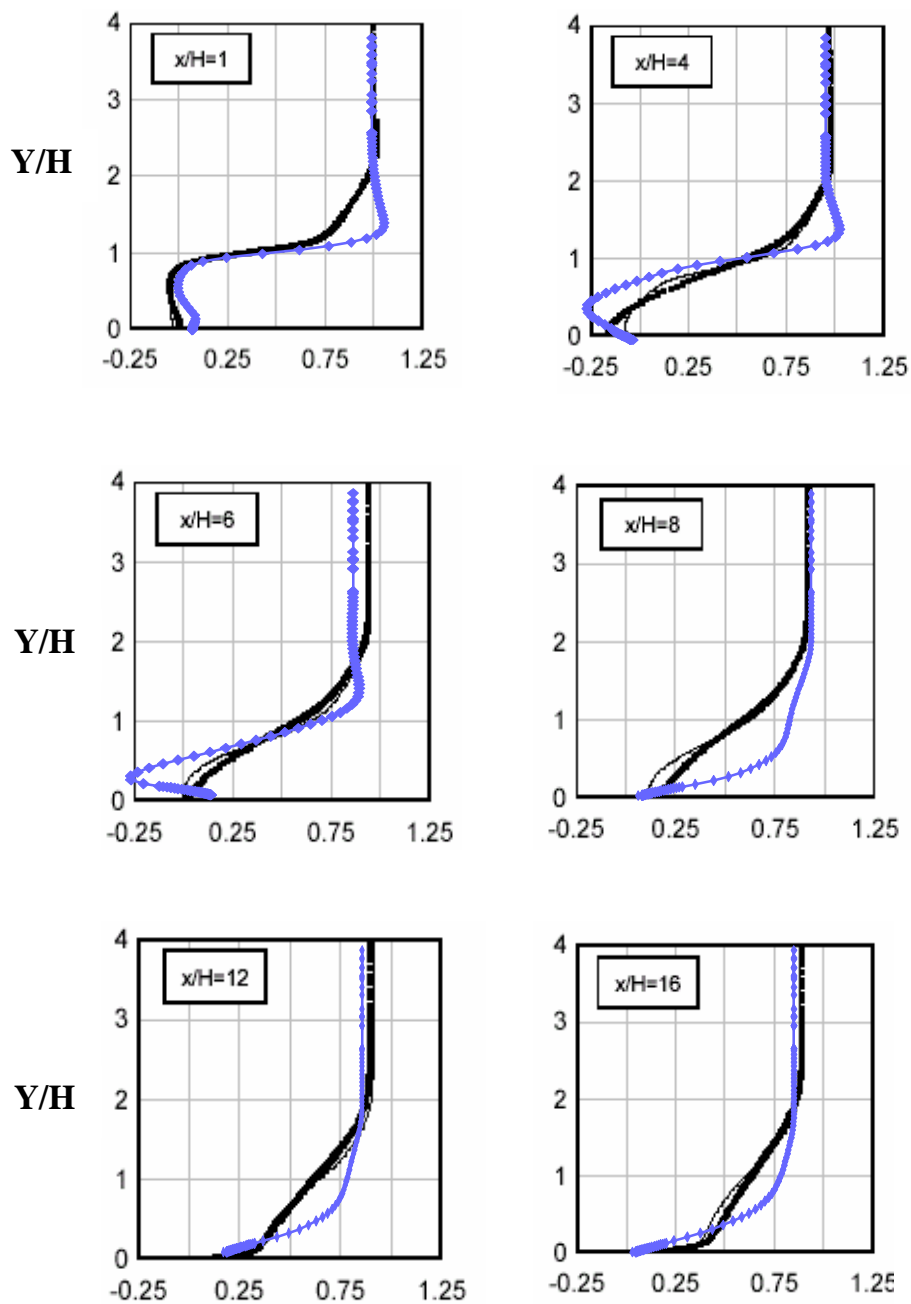
Pour renforcer les validations de nos résultats, nous avons effectué une autre comparaison avec des travaux numériques **Perot et al [31]**, de DNS de **Moin et al [12]**, d'un écoulement sur une marche descendante, avec un profil uniforme à l'entrée et de conditions aux limites à la sortie libre, un nombre de Reynolds égal à $Re=3100$ basé sur la hauteur de la marche et un maximum de vitesse.

Les Figures (V-6) illustrent la variation du profil de la vitesse u dans des différentes stations x , nos résultats sont donnés pour un nombre de Reynolds $Re=500$ basé aussi sur la hauteur de la marche, nous avons choisi les mêmes conditions aux limites d'entrée et sortie de **Le, Moin [12]**, ($D=3$, $H=1$) et nous n'avons pas pris explicitement en compte l'instantanéité dans nos simulations.

En aval de la marche, en $X/H = 1$ débute la zone de recirculation où l'écoulement présente un effet réversible, qui continue en $X/H = 4$ et $X/H = 6$, nos résultats présentent une zone de recirculation un peu plus large que celle des comparaisons cette différence est probablement due à la méthode de calcul utilisée de l'instantanéité ou bien du domaine de calcul ou aussi du nombre de Reynolds basé sur le maximum de la vitesse.

En $X/H = 8$ commence la zone de rattachement et $X/H = 12$, $X/H = 16$ vers la sortie l'écoulement est stable, la couche limite est développée et on a des profils de vitesse parabolique semblable aux profils sur une plaque plane.

Nos résultats sont presque analogues à ceux de **Moin [12]** et **Perot et al [31]** ce qui prouve la fiabilité de notre code de calcul.



Fig(V-6) : Profil des vitesses u/u_0 pour des différentes stations X/H
 Comparaison avec les travaux **B.Perot [31]** et DNS de **Le & Moin [12]**

- Modèle de B Perot
- ◆— DNS de Le & Moin
- ◆— Nos résultats

V.A.2.Commentaire

Cette partie concerne la comparaison entre nos résultats obtenus par le code "TEAM" adapté d'une part à la résolution des équations de Navier-Stokes pour un écoulement sur une marche descendante, et ceux de la littérature, dont certains sont déjà classiques.

Il ressort de cette comparaison une bonne concordance avec les résultats expérimentaux de **Jingyi Zhu [25]**, **Armaly et al[6]**, **Perot[31]** et **Moin [12]**. La confrontation de nos résultats avec ceux des autres auteurs, s'est faite dans les cas suivants.

- § Un canal rectangulaire avec un rapport d'expansion **ER=1.5** puis **ER=2**
- § Un canal rectangulaire avec un rapport d'expansion **ER=1.5**.
- § Un canal rectangulaire à une seule paroi basse.

Dans ces trois cas il ressort, de bonnes correspondances, nous croyons que cette étape de notre travail est très importante dans le sens où elle nous permet de valider le code "TEAM" que nous projetons d'adapter au cas de la simulation à faible nombre de Reynolds d'un écoulement stationnaire sur une marche descendante.

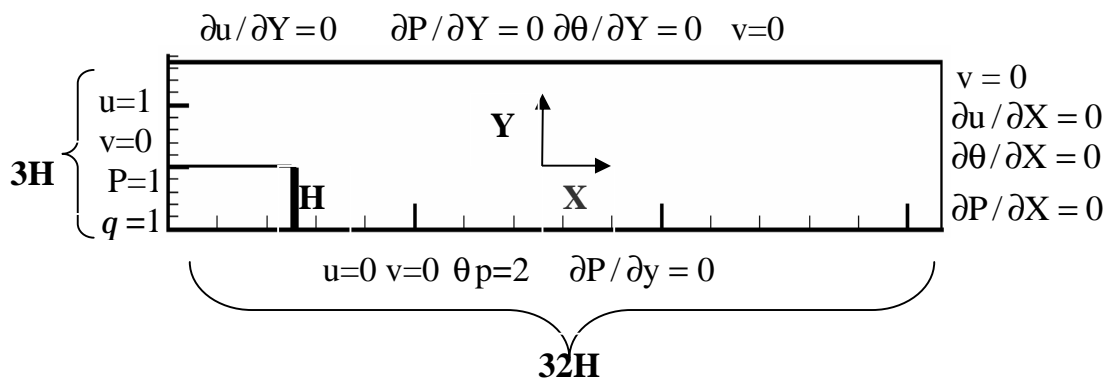
V. B. Résultats et Discussions

V.B.1. Introduction :

Nous présentons dans cette section du travail, les résultats obtenus par le code que nous exploitons, d'un écoulement stationnaire, compressible pour des différents rapports d'expansion et des différents nombres de Reynolds (faibles) basé sur la hauteur de la marche.

V.B.2. Ecoulement sur une Marche Descendante

La configuration est comme nous l'avons cités plus haut chap (I-4) est celle d'une plaque plane dont la partie en amont on a une marche descendante comme le montre la Figure (V-7).



Fig(V-7) : Configuration étudiée et conditions aux limites de l'écoulement sur une marche descendante pour un rapport d'expansion **ER=1.5**

V.B.3. Maillage

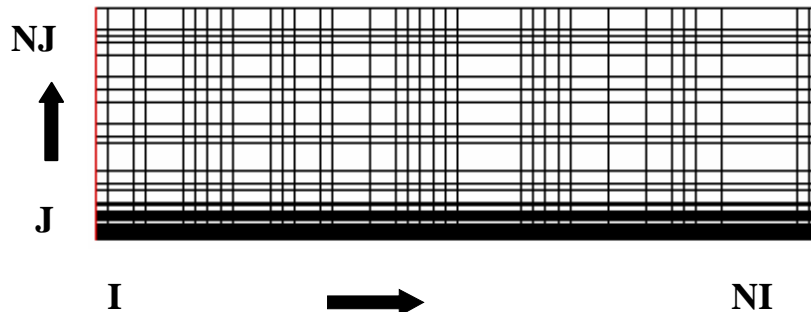
Nous décomposons la configuration en deux zones (1et 2), la zone 1 représente la zone solide ou la marche, la zone 2, représente la zone dans laquelle se passent les phénomènes de transport et de mélange.

Nous examinons deux maillages différents;

- § Maillage à pas constant le long de l'axe des X
- § Maillage à pas variable le long de l'axe des Y, pour avoir un raffinement au niveau de la paroi (voir Figure (V-8)).

Pour générer un maillage à pas variable, nous avons utilisé la relation suivante :

$$Y(J) = Y_L [1 - \cos((J-1)\pi/NJ)]$$



Fig(V-8) : Maillage du domaine de calcul

Avec NI et NJ sont les nombres de nœuds suivant les axes X et Y

I : Indice des nœuds suivant X

J : Indice des nœuds suivant Y

Dans notre travail nous avons choisi, NI=400 et NJ=80.

La grille (400X80) permet d'atteindre des faibles résidus et de diminuer la divergence.

V.B.4.Adaptation du Code de Calcul "TEAM"

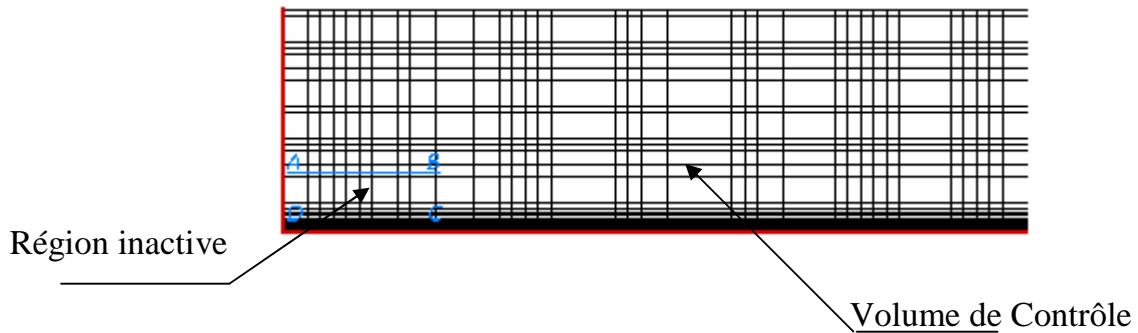
LA partie programmation de notre travail consiste à adopter au code de calcul "TEAM" la géométrie de la marche descendante de notre problème, pour cela plusieurs techniques sont envisageables dont la principale est :

L'utilisation de la technique dites de la zone inactive (Blocked off Region)

V.B.5a.Technique de la Zone Inactive

L'utilisation de la technique dite de la zone inactive (Blocked-of Région) est la technique qui est utilisée ici. Le code "TEAM" que nous exploitons utilise cette méthode mise au point par **Patankar[1]**, pour permettre de s'adopter le plus rapidement possible à des géométries complexes.

Cette technique consiste à inscrire le domaine étudié dans un domaine rectangulaire et à rendre inactive les zones non concernées du rectangle, en bloquant le mouvement et en imposant la température et la pression, comme il sera expliqué plus bas voir Figure(V-9).



Fig(V-9) : Discrétisation de la configuration

(Les volumes situés dans la zone ABCD sont inactifs)

Dans la région inactive, nous définissons les fonctions Φ_s , pour imposer la valeur de la fonction Φ nous affectons

§ Une valeur très grande du terme source S_Φ dans l'équation d'énergie.

Il en résulte

Un terme source s'exprimant comme suit :

$$S_\Phi = S_c + S_p \Phi_p$$

Avec $S_c = 10^{30}$
 $S_p = -10^{30}$

Les termes sources des équations (II-25) deviennent, dans la zone morte :

$$S_c + S_p \Phi_p \approx 0$$

D'où

$$\Phi_p = -S_c / S_p = \Phi_{\text{désirée}}$$

De cette façon, nous assurons la constance de la température.

Une valeur très grande de $\Gamma\Phi$ dans les équations (II-23) et (II-24), il vient une viscosité très grande dans la région ABCD qui se comporte comme une zone solide d'où un champ de vitesse nul.

Bien que des calculs inutiles soient exécutés dans la région inactive, l'application de cette technique n'entraîne pas de modifications importantes du programme.

V.5b.Mise en Application

§ Pour les champs de vitesses

On fixe dans ce cas $\Gamma\Phi = 10^{30}$ pour $\Phi = u$ et $\Phi = v$

§ Pour les champs de température et de pression

Pour avoir la température et la pression fixée

On fixe $S_C = 10^{30}$

$S_p = -10^{30}$

V.B.6.Propriétés Physiques du Fluide

Dans la présente étude, nous avons fixé la température ambiante à 20°C et celle de la paroi à 40°C, le fluide qui s'écoule est de l'air, les propriétés physiques de l'air sont :

$$R = 287$$

$$C_p = 1006.228 \text{ J/Kg.K}$$

$$\mu = 1.85 \times 10^{-5} \text{ Kg/m.s}$$

$$\lambda = 25.7 \times 10^{-3} \text{ W/m.K}$$

$$\rho = 1.123 \text{ Kg/m}^3$$

$$Pr = 0.71$$

Dans la présente étude nous avons simulé numériquement l'écoulement sur une marche descendante, pour des nombres de Reynolds $Re = 150$ et $Re = 800$ basé sur la hauteur de la marche et cela pour des rapports d'expansions $ER = 1.5$ et $ER = 2$ ($ER = D / D-H$, D étant la largeur d'entrée et H la hauteur de la marche) pour $H = 1$ et $H = 1.5$. Cette étude a portée essentiellement sur les zones de décollement et de rattachement de l'écoulement.

V.B.7.Champs des Vitesses

Les figures (V-10), (V-11), (V-12) montrent l'allure générale de l'écoulement par des lignes de courant et les champs des vecteurs vitesse dans la région de recirculation de rattachement et à la sortie.

Il y a présence de structures cohérentes, elles montrent la présence d'un phénomène de détachement tourbillonnaire au nez de la marche descendante dans la couche cisailée.

Les structures cohérentes sont créées dans la couche cisailée à cause des forts gradients de vitesse entre l'écoulement principal et la zone de recirculation .

Ce phénomène présente les mêmes caractéristiques qu'une zone de mélange entre deux écoulements le premier avec une vitesse d'entrée uniforme le deuxième avec une vitesse nulle.

Les figures (V-10), (V-11) montrent que la zone de recirculation est nettement visible pour les quatre cas que nous avons traités, cette zone s'élargit quand le nombre de Reynolds et la hauteur de la marche (rapport d'expansion) augmentent, par conséquent la longueur de rattachement X_R augmente aussi.. Cette longueur de rattachement est la distance entre le bord de la marche et le point d'intersection du premier vortex venant impacter sur la paroi.

Les valeurs de X_R que nous avons trouvé dans nos simulations sont :

$$\begin{array}{ll}
 X_R = 6.32H & \text{Re}=150 \\
 X_R = 7.99H & \text{Re}=800 \\
 X_R = 10H & \text{Re}=150 \\
 X_R = 12H & \text{Re}=800
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 ER=1.5 \\
 ER= 2
 \end{array}$$

Nous constatons que ces valeurs ne sont pas trop loin des résultats de DNS de **Le, Moin [12]**, dont $X_R = 6.28H$. D'autres travaux expérimentaux montrent que la variation de la longueur de rattachement est fonction du rapport d'expansion c'est-à-dire : pour $1.10 < ER < 1.3$ On a $5H < X_R < 7H$.

Pour visualiser les champs de vitesse nous avons choisi de représenter leurs profils dans des différentes stations, c'est-à-dire à l'entrée sur la marche dans la zone de recirculation, dans la zone de rattachement et enfin à la sortie.

Les figures (V-13), (V-14) représentent les profils de la vitesse pour les deux nombres de Reynolds, $Re=150$ et $Re=800$ à des différents rapports d'expansions c'est-à-dire pour une hauteur de la marche $H=1$ et $H=1.5$.

Nous constatons qu'il y a présence de gradient de vitesses négative à cause de la zone de recirculation.

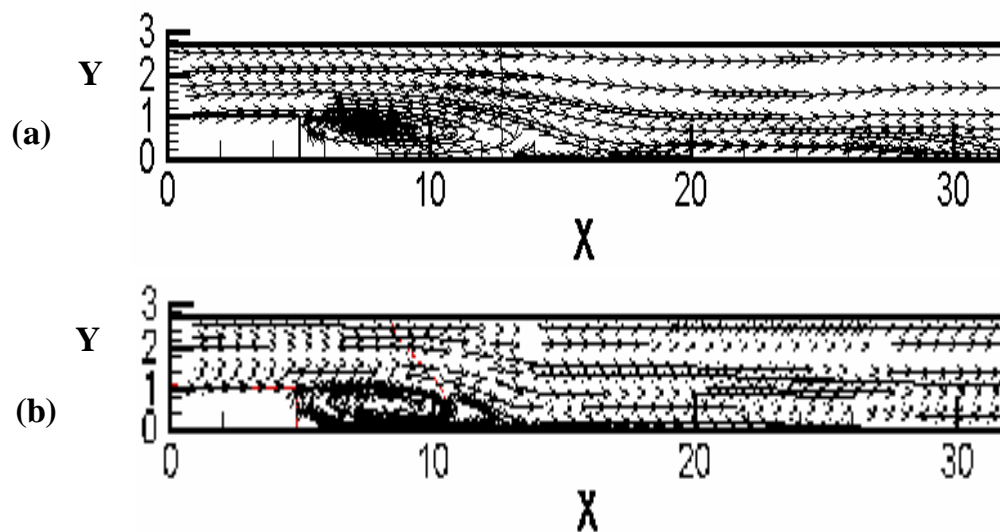
Dans la figure (V-13), en $Re=150$ en $X=4H$ c'est-à-dire à l'entrée sur la marche le profil de vitesse est uniforme, en $X=6H$ la zone de recirculation apparaît dans l'effet réversible des profils de vitesse, jusqu'à $X=10H$ et puis ce profil s'établit et devient parabolique mais moins intense qu'à l'entrée. Ces mêmes caractéristiques sont présentes quand $Re=800$, la zone de recirculation est un peu plus large, débute en $X=6H$ jusqu'à $X=12H$

Dans la figure (V-14), en $Re=150$ la zone de recirculation apparaît dans les stations de $X=6H$ jusqu'à $X=12H$, c'est-à-dire elle est plus large quand la hauteur augmente, en $X=18H$ le profil est stable et parabolique.

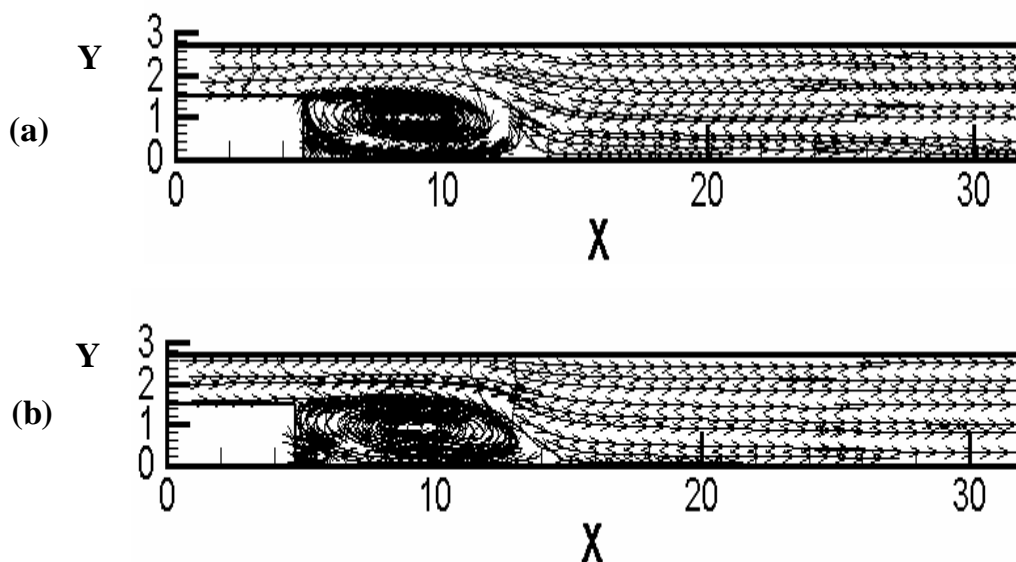
Pour $Re=800$, la zone de recirculation s'étend de $X=6H$ jusqu'à $X=14H$ elle est beaucoup plus large que pour $ER=1.5$, le petit tourbillon qui apparaît dans la partie basse de la marche quand la hauteur est plus grande c'est à dire $ER=2$, se présente par une petite déviation du profil de la vitesse en $X=6H$. figure(V-11), il est visible lorsque le nombre de Reynolds augmente aussi.

En $X=18H$ l'écoulement commence à se stabiliser pour prendre l'allure parabolique. Nous pouvons dire que le nombre de Reynolds a une grande influence sur l'allure du profil de la vitesse ainsi que le changement de la section d'entrée.

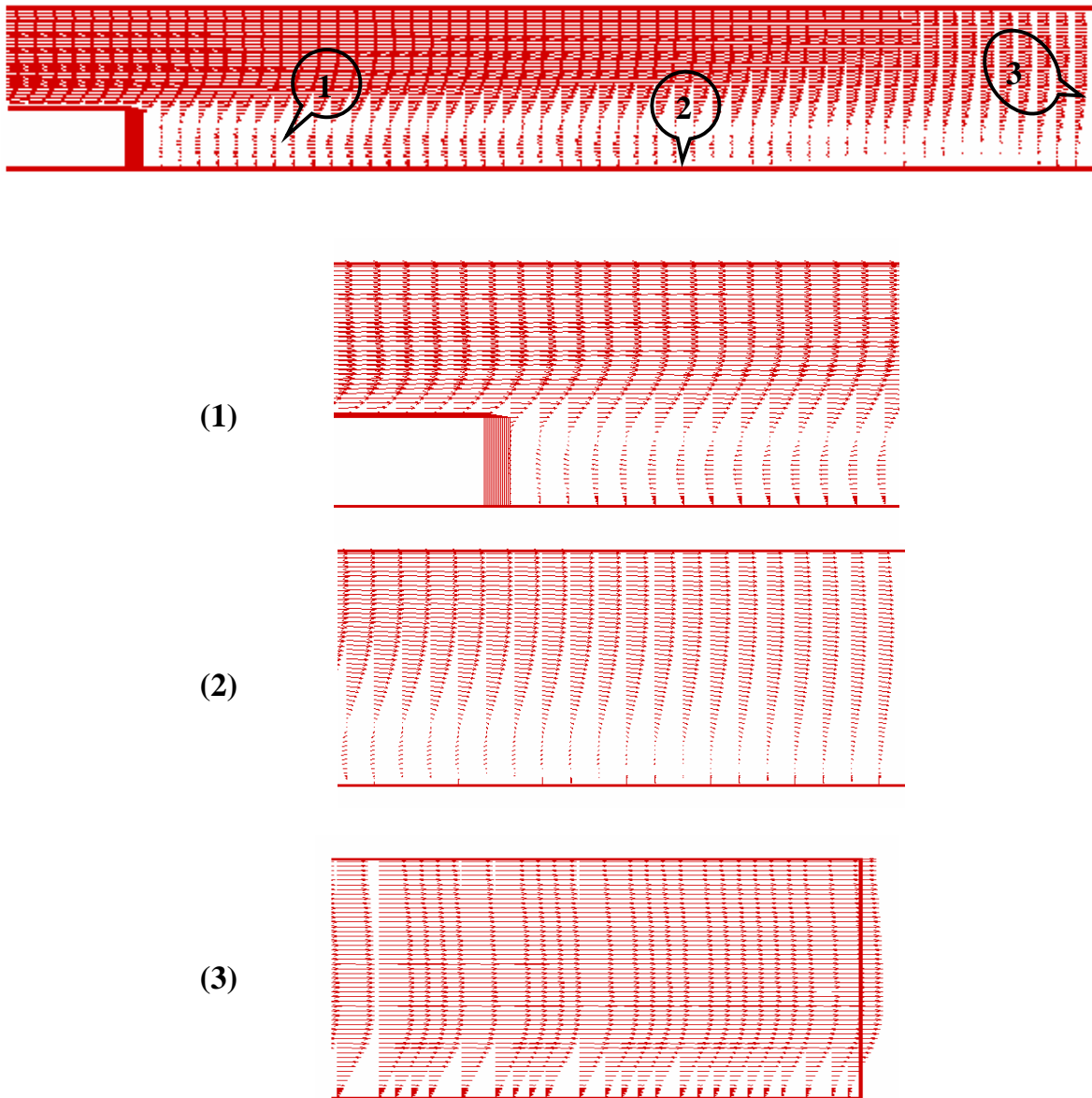
Ainsi nos résultats sont en bon accord avec ceux de la littérature.



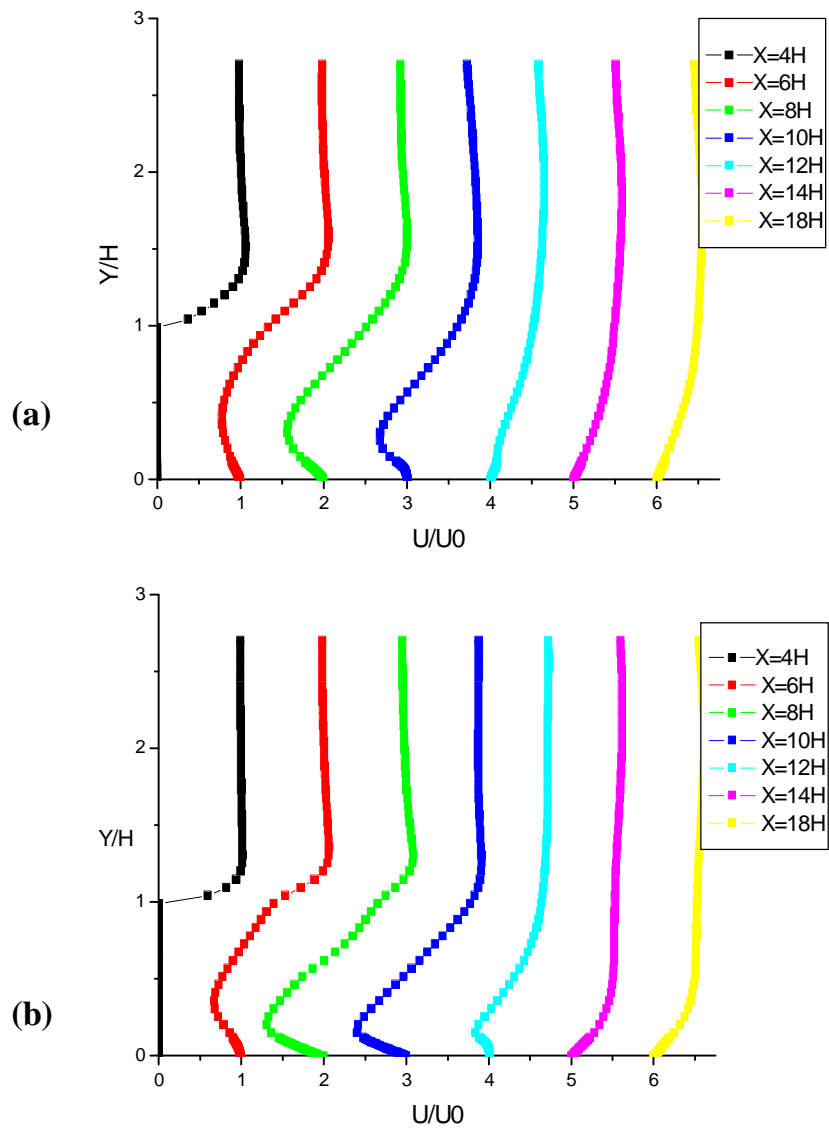
Fig(V-10) :Les lignes de courant pour des différentes valeurs **Re** et un rapport d'expansion **ER=1.5**
 (a) **Re=150** (b) **Re=800**



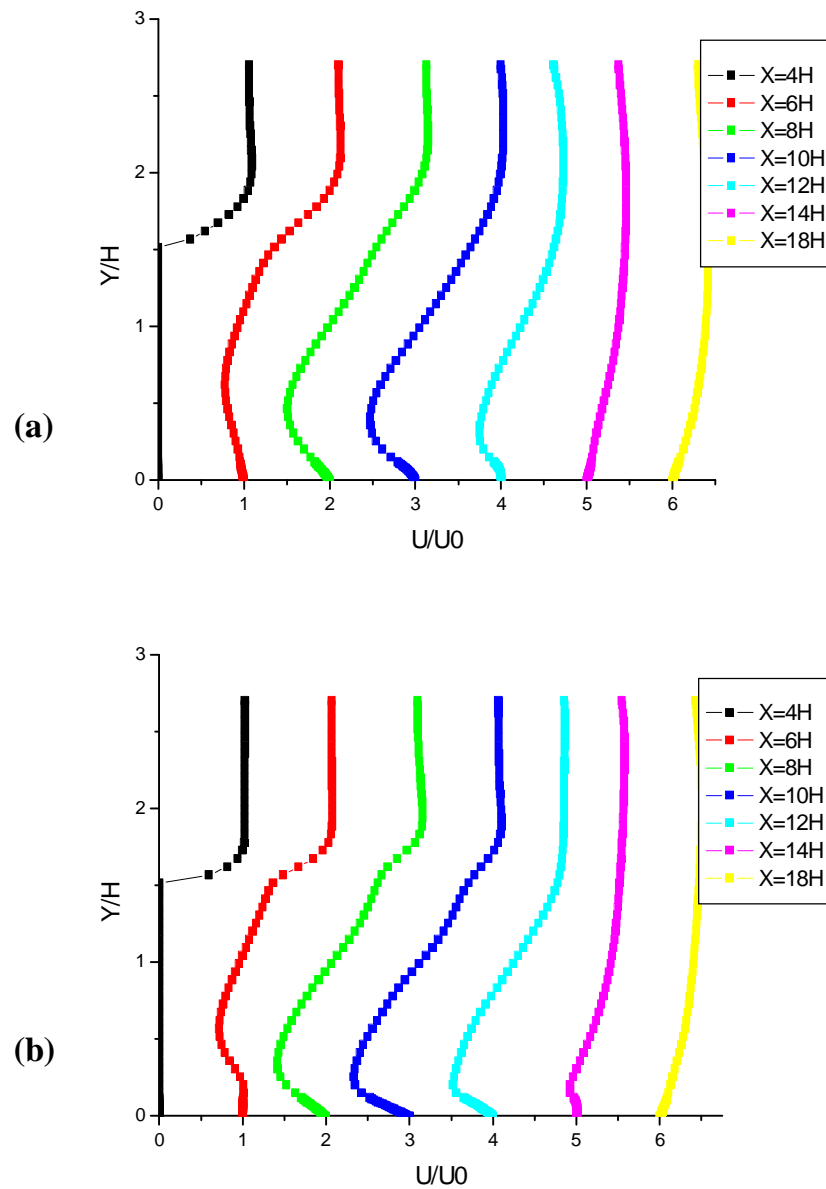
Fig(V-11) :Les lignes de courant pour des différentes valeurs **Re** et un rapport d'expansion **ER=2**
 (a) **Re=150** (b) **Re=800**



Fig(V-12): Champs de vitesse dans les différentes zones
 (1) A l'entrée et dans la zone de recirculation
 (2) La zone de rattachement
 (3) La sortie



Fig(V-13) :Profils des vitesses u/u_0 dans les différentes stations x pour un rapport d'expansion **ER=1.5**
(a) Re=150 (b) Re=800



Fig(V-14) :Profils des vitesses u/u_0 dans les différentes stations x pour un rapport d'expansion $ER=2$
 (a) $Re=150$ (b) $Re=800$

V.B.8.Champs de Pression

Les figures (V-15), (V-16) représentent les contours de la pression pour deux différents nombres de Reynolds $Re=150$ et $Re=800$ et des différents rapports d'expansion, $ER=1.5$ et $ER=2$.

D'après ces figures, nous remarquons que le contour de pression a un effet réversible en aval de la marche, dû au changement brusque de la section qui a provoqué une diminution de la pression dans la zone de recirculation, cette diminution est importante quand le rapport d'expansion augmente ainsi que le nombre de Reynolds.

Ceci est aussi clair dans les figures (V-17), (V-18) représentant l'évolution de la pression pour ces mêmes nombres de Reynolds et rapports d'expansions, dans la zone de recirculation et à la sortie, c'est-à-dire quand $X=8H$ et $X=14H$ pour $Re=800$ et $ER=2$ nous avons pris puisque la zone de recirculation pour ce cas est plus large.

V.B.9.Champs de Température

Les figures (V-19), (V-20) représentent des visualisations des contours des champs de température pour $Re=150$ et $Re=800$ et cela pour des rapports d'expansions $ER=1.5$ et $ER=2$.

Ces figures montrent que la hauteur de la marche affecte les caractéristiques du champs thermique en aval de la marche, le tourbillon en rotation de la région de recirculation pousse vers le haut les paquets de fluide froid et les empêche de retomber, les conséquences de la convection mixte c'est interdire les gradients importants de température dans les autres régions de l'écoulement.

Quand la hauteur de la marche augmente, et par conséquent on a une diminution de la section d'entrée du fluide dans ce cas le transfert de chaleur par conduction est dominant, dans la zone en aval de la marche nous constatons que le transfert de chaleur par convection domine celui par conduction puisqu'il y'a échange de chaleur entre la paroi chaude et le fluide froid.

Ceci est visible dans les figures (V-21), (V-22) qui montrent l'évolution du profil de températures en fonction de y pour les différents nombres de Reynolds et les rapports d'expansions cités plus haut, dans quatre stations.

A l'entrée sur la marche en $X=4H$ où le profil de température est parabolique a la même allure que celle qui donne la variation de la vitesse en fonction de y .

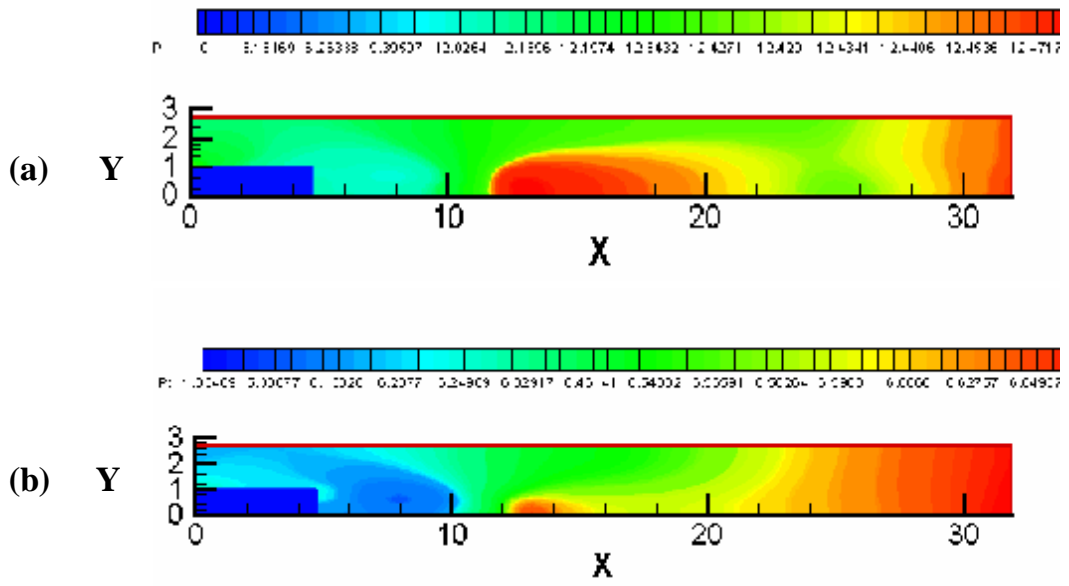
La température part d'une certaine valeur sur la paroi de la marche et tend très rapidement vers la valeur asymptotique $\theta=1$ qui est la température de l'écoulement. Dans la zone de recirculation et un peu en aval en ($X/H=8,14$ et 16) la température diminue lorsqu'on s'éloigne de la paroi pour atteindre la température initiale à la surface, ce qui vérifie les conditions aux limites.

V.B.10. Coefficient de Frottement.

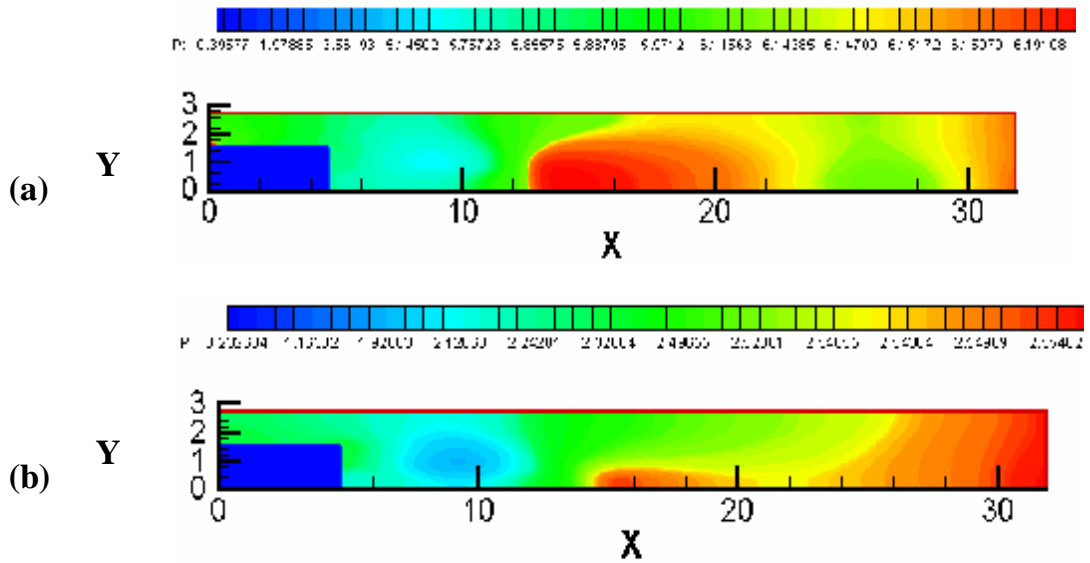
Les figures (V-23a) (V-23b) montrent l'évolution du coefficient de frottement C_f le long de x pour des différents nombres de Reynolds et différents rapports d'expansions.

Nous constatons que ce coefficient passe par plusieurs étapes, il est nul sur la marche, négatif dans la zone de recirculation s'annule aussi dans la longueur de rattachement et passe par un maximum au delà de cette région, ceci est dû à la variation du transfert de chaleur.

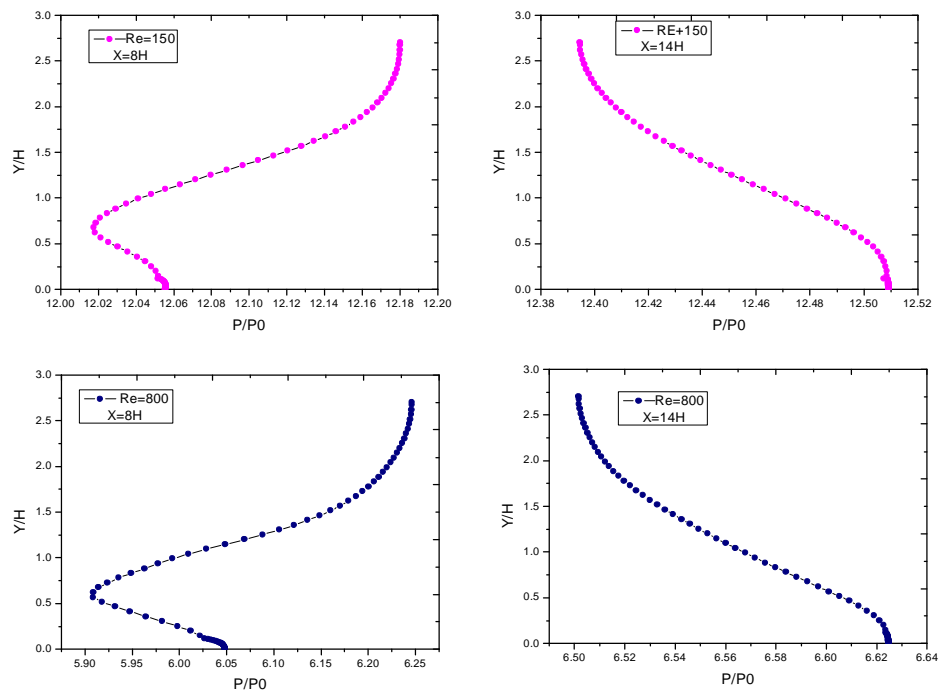
On peut remarquer l'influence du nombre de Reynolds sur ce coefficient, il diminue quand le nombre de Reynolds augmente et la présence du minuscule tourbillon au bord inférieur de la marche est visible dans les courbes quand Re augmente.



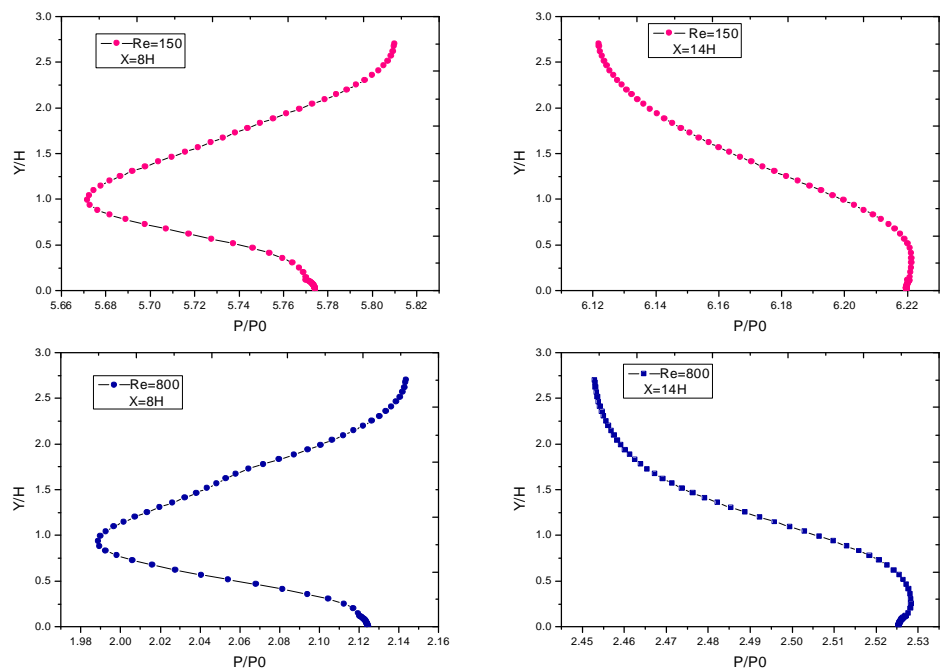
Fig(V-15) : Représentation spatiale des champs de pression pour un rapport d'expansion $ER=1.5$
 (a) $Re=150$ (b) $Re=800$



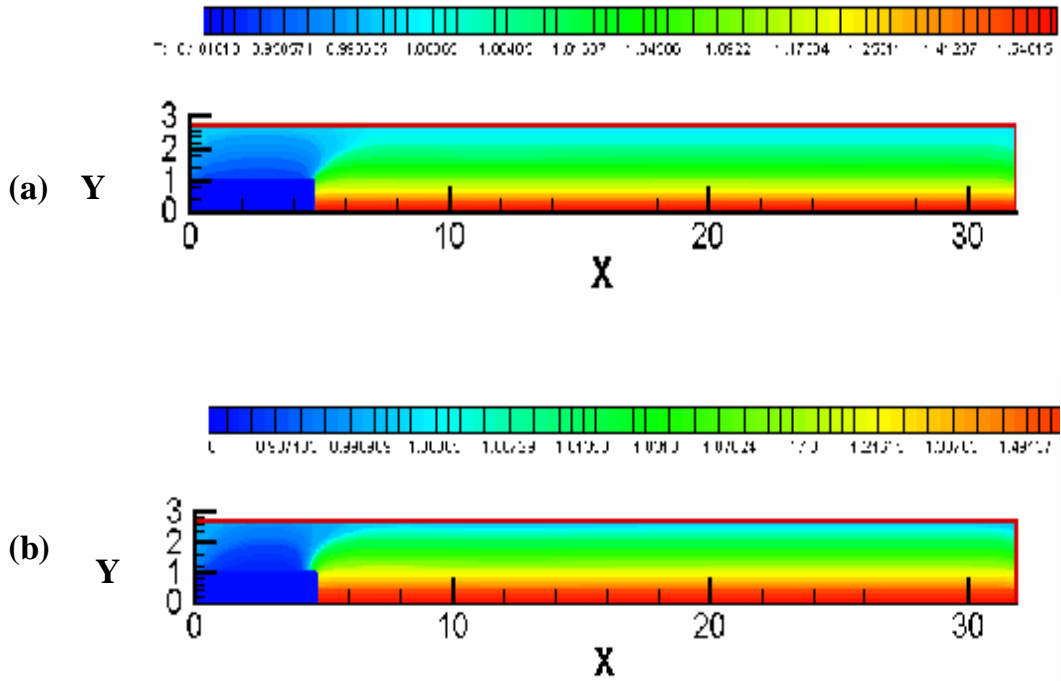
Fig(V-16) : Représentation spatiale des champs de pression pour un rapport d'expansion $ER=2$
 (a) $Re = 150$ (b) $Re=800$



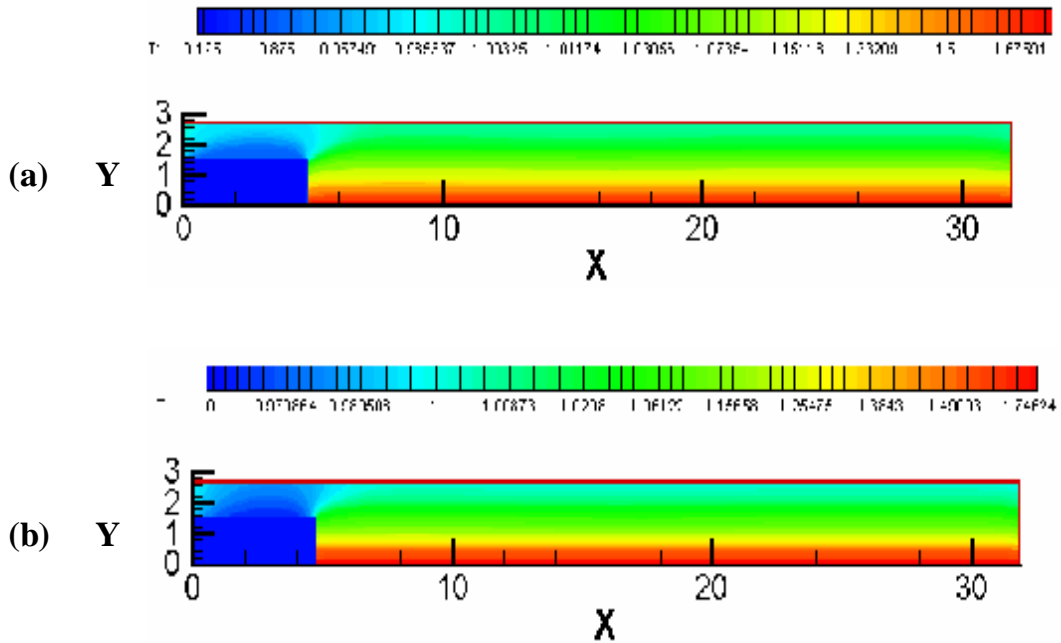
Fig(V-17): Evolution de la pression dans les différentes Station x pour un rapport d'expansion $ER = 1.5$



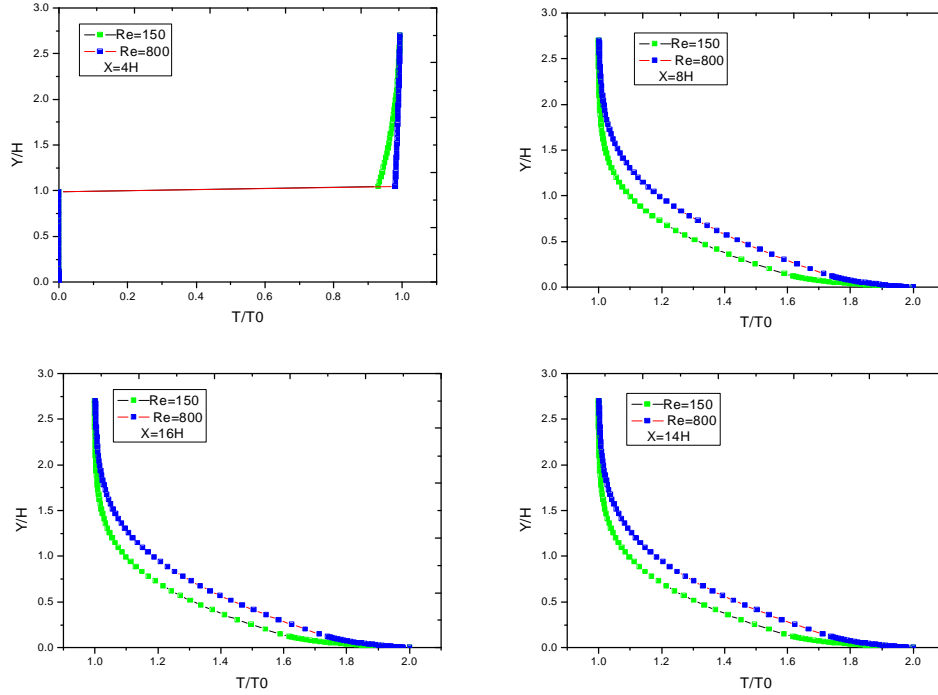
Fig(V-18): Evolution de la pression dans les différentes Station x pour un rapport d'expansion $ER = 2$



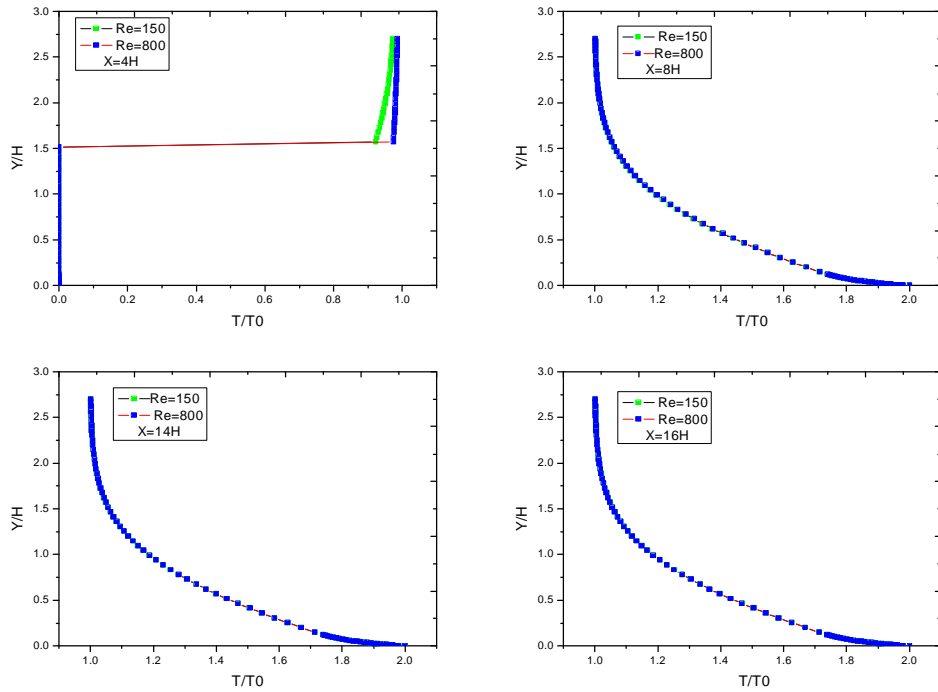
Fig(V-19) :Représentation spatiale des champs de température pour un rapport d'expansion **ER = 1.5**
 (a) **Re= 150** (b) **Re= 800**



Fig(V-20) :Représentation spatiale des champs de température pour un rapport d'expansion **ER = 2**
 (a) **Re= 150** (b) **Re= 800**



Fig(V-21) :Evolution de la température pour des différentes stations x et un rapport d'expansion $ER=1.5$



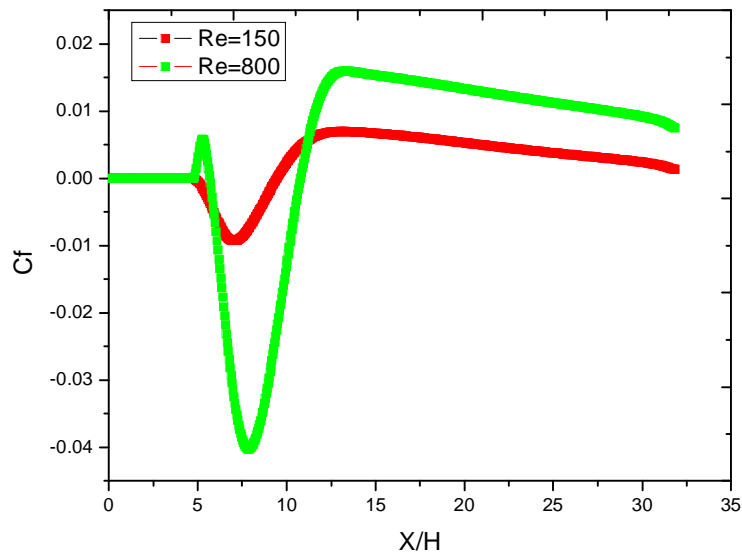
Fig(V-22) :Evolution de la température pour des différentes stations x et un rapport d'expansion $ER=2$

V.B.11. Le Nombre de Nusselt.

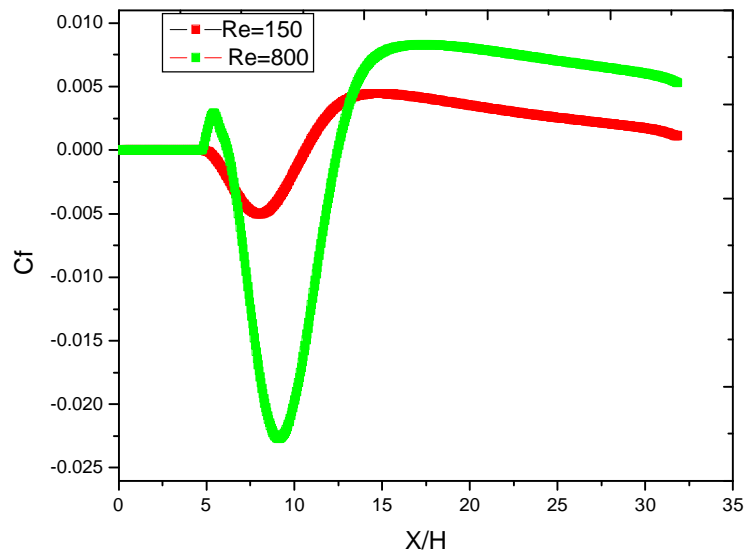
Les figures (V-24a), (V-24b), montrent l'évolution du nombre de Nusselt local le long de la plaque, pour des nombres de Reynolds $Re=150$ et $Re=800$ et à des différents rapports d'expansion.

Nous constatons que ces courbes sont presque analogues. Le transfert de chaleur c'est-à-dire le nombre de Nusselt local est minimal sur la marche puisque cette dernière est considérée comme zone inactive. En aval il est maximal dans la zone de recirculation. Les échanges de chaleur sont importants quand le nombre de Reynolds augmente, ceci est montré par le décalage entre les deux courbes (pour un même rapport d'expansion).

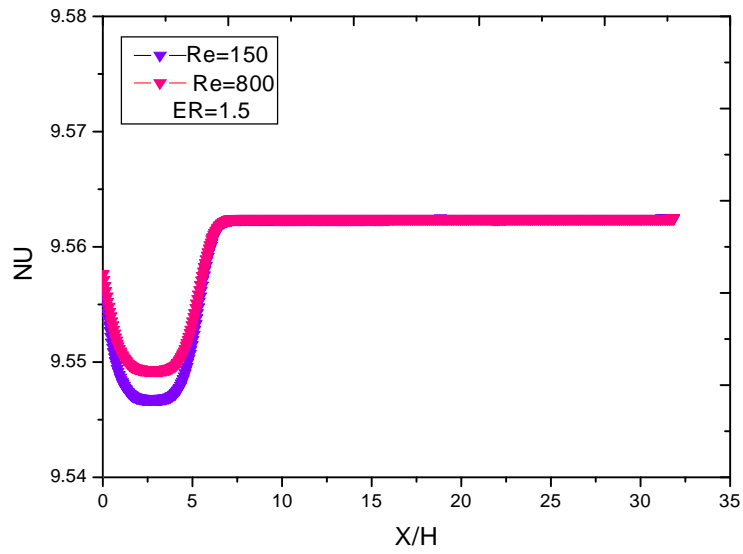
Dans la région en aval de la zone de recirculation, le nombre de Nusselt est maximal et constant puisque les échanges de chaleur par convection existent dans cette région et sont faible, l'air est dans son état stagnant le mode de transfert de chaleur dominant est la conduction.



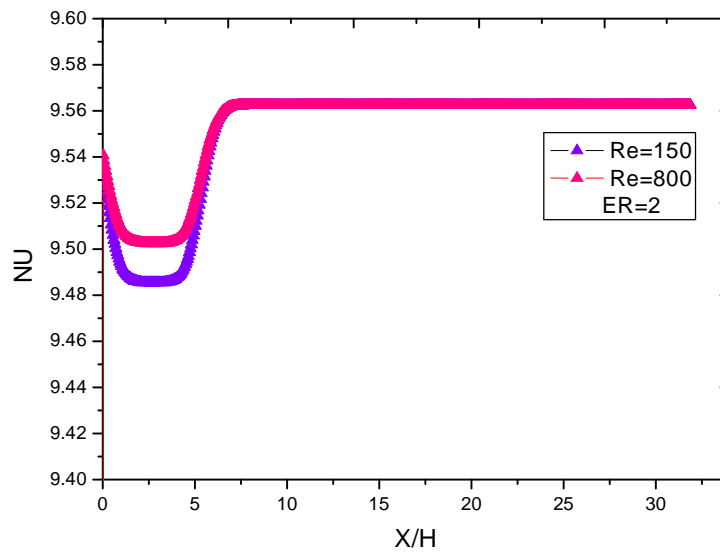
Fig(V-23a): Evolution du coefficient de frottement
ER = 1.5



Fig(V-23b): Evolution du coefficient de frottement
ER = 2



Fig(V-24a) : Evolution du nombre de Nusselt pour un rapport d'expansion **ER=1.5**



Fig(V-24b) : Evolution du nombre de Nusselt pour un rapport d'expansion **ER=2**

Conclusion Générale

Dans cette étude nous avons considéré l'écoulement stationnaire de fluide compressible sur une marche descendante, à paroi maintenue à une température plus élevée que la température ambiante. La configuration étudiée est simulée numériquement par la résolution directe des équations de Navier –Stokes.

La discrétisation des équations est faite par la méthode des volumes finis. Le code TEAM qui calcule les écoulements turbulents stationnaires, incompressibles et isothermes a été choisi comme base de travail. Le code et son algorithme SIMPLE ont fait l'objet de plusieurs améliorations, pour les adapter à notre type de géométrie. L'algorithme de Thomas : « TDMA » appliqué pour la résolution du système d'équations algébriques. Le logiciel Tec Plot est utilisé pour la visualisation des champs hydrodynamiques et thermiques.

Dans la première partie de ce travail, des comparaisons sont faites pour valider le code. Les résultats obtenus pour des différents nombres de Reynolds et des différents rapports d'expansions sont en bon accord avec ceux de la littérature.

Dans la deuxième partie du travail, des simulations sont faites pour des faibles nombres de Reynolds et à des différentes hauteurs de la marche, c'est-à-dire des rapports d'expansions $ER=1.5$ et $ER=2$. Les calculs ont montré que la variation de ces paramètres influence sur l'écoulement, et principalement sur la longueur de rattachement, cette dernière augmente quand le nombre de Reynolds ou la hauteur de la marche augmente. Les effets de la compressibilité sont faibles dans notre cas. Cet écoulement a le même aspect que l'écoulement incompressible.

Nous avons remarqué, que le nombre de Reynolds a une influence sur le coefficient de frottement pariétal ce dernier diminue quand le nombre de Reynolds augmente.

Nous avons tracé le nombre de Nusselt et nous n'avons remarqué aucune l'influence du nombre de Reynolds et le rapport d'expansion sur l'échange de chaleur, puisque les variations de la température n'étaient pas importantes.

Pour un travail futur, nous recommandons l'étude de la même configuration dans le cas instationnaire et à trois dimensions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **S.V. Patankar**, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, ed Hemisphere, New York, 1980 .
- [2] **V.C. Patel, J.Y. Yoon** . Application of Turbulent Model to Separated flow Over Rough Surfaces, Journal of Fluids Engineering. Vol 117 June 1999.
- [3] **B.F. Armaly , F. Durst , J.C.F. Pereira , B. Schönung** ,Experimental and Theoretical Investigation of backward-facing step flow. J.Fluids.Mech. (1983) vol 127 .473-496 .
- [4] **F.Durst , J.F.C .Pereira** , Time Dependant Laminar Backward-facing step Flow in a Two Dimensional Duct, Journal of Fluids Engineering Sept(1988) Vol 110/289 .
- [5] **J.H. Nie, B.F. Armaly**, Three-dimensional Convective Flow adjacent to Backward-facing Step-effects of Step Height International Journal of Heat and Mass Transfer 45(2002)2431-2438.
- [6] **B.F. Armaly, A. Li, J.H. Nie**, Measurements in three-Dimensional Laminar Separated Flow. International Journal of Heat and Mass Transfer 46(2003) 3573-3582.
- [7] **A. Valencia ,L. Hinojosa** , Numérical Solution of Pulsating Flow and Heat Transfer Characteristics in a Channel With Backward-facing Step, Heat and Mass Transfer 32(1997)143-148.
- [8] **Seo Young Kim, H Jin Sung, Jae Min Hyun**, Mixed Convection from Multiples-Layered Boards with Cross-Streamwise Periodic Boundary Conditions. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol.35.N°11.pp.2941-2952. 1992.

- [9] **Seo Young Kim, B. Ha Kang, Jae Min Hyun** , Forced Convection Heat Transfer From two Heated Blocks in Pulsating Channel Flow, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol.41 .N°.3.pp.625-634, 1998.
- [10] **Silveira Neto Aristeu**, Simulation Numérique des grandes Echelles d'un Ecoulement Turbulent Décollé en Aval d'une marche. Thèse de Doctorat. Institut National Polytechnique de Grenoble. Juin 1991.
- [11] **Yue-Tzu Yang, Chung-Lun Kuo**, Numerical Study of a Backward-Facing Step with Uniform normal Mass Bleed. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 40 N°7. pp. 1677-1686, 1997.
- [12] **Hung Le, Parviz Moin, John Kim**, Direct Numerical simulation of Turbulent Flow over a Backward-facing Step, J. Fluid. Mech.(1997), vol.330,pp,349-374.
- [13] **Olivier Isnard**.Dispersion atmosphérique en présence de groupes d'obstacles. Thèse de doctorat .ECOLE CENTRALE DE LYON -1999.
- [14] **Gwang.Hoon.Rhee,Hyung Jin Sung**,Numerical Prediction of Locally Forced Turbulent Separated and Reattaching Flow.Fluid Dynamics Research 26 (2000) 421-436 .
- [15] **J. Kostas, J. Soria, M.S. Chong** ,Particle Image Velocimetry Measurements of a Backward-facing Step Flow .Experiments in Fluids 33 (2002) 838-853.
- [16] **H.I. Abu-Mulaweh, T.S. Chen , B.F. Armaly** ,Turbulent Mixed Convection Flow Over a Backward-facing Step-The effect of the Step Heights.International Journal of Heat and Fluid Flow .23 (2002)758-765.
- [17] **A. Danet**. Influence des Conditions Amont sur l'Ecoulement Derrière une Marche par la Simulation des Grandes Echelles, Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, France , 2001.
- [18] **Franck Delcayre**. Etude par Simulation des Grandes Echelles d'un Ecoulement Décollé : La marche Descendante. Thèse de Doctorat. Institut National Polytechnique de Grenoble 1999.

- [19] **Ravikanth V.R. Avancha, Richard H. Pletcher**, Large eddy Simulation of the Turbulent Flow Past a Backward-facing Step with Heat Transfer and Property Variations, *International Journal of Heat and Fluid Flows* 23 (2002)601-614.
- [20] **H.-J. Kaltenbach**, The Effect of Sweep-Angle Variation on the Turbulence Structure in a Separated, Three-Dimensional Flow.Theoret. Comput. Fluid Dynamics(2003) 16: 187-210.
- [21] **Hans-Jakob Kaltenbach**, Turbulent Flow Over a Swept Backward-Facing Step. *European Journal of Mechanics* (2003).
- [22] **A Keating, U Piomelli, K Bremhorst and Nesic**,Large-eddy Simulation of Heat Transfer Downstream of a Backward-Facing Step. *Journal of Turbulence* . May (2004).
- [23] **M. Piirto, P. Saarenrinne, H. Eloranta, R. Karvinen**, Measuring Turbulence Energy With PIV in a Backward-Facing Step Flow, *Experiments in Fluids* 35(2003) 219-236 .
- [24] **Lambros Kaiktsis, Peter A. Monkewitz**,Global Destabilization of Flow over a Backward-Facing Step. *Physics of Fluids Volume 15.Number 12* Dec(2003).
- [25] **Jingyi Zhu**,The Second-Order Projection Method for The Backward-Facing Step Flow, *Journal of Computational Physics* 117,318-331 (1995).
- [26] **M.K.Denham, M.A..Patrick**, Laminar Flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow channel. *Trans. Inst. Chem. Eng.* 52,361(1974).
- [27] **A.F.Ghoniem, Y.Cagnon**, Vortex Simulation of Laminar Recirculation Flow. *AIAA Journal*. Vol 25 N°1, 1987, pp. 168-171.
- [28] **Seongwong Kang, Haecheon Choi**, Suboptimal Feedback Control of Turbulent Flow Over a Backward –Facing Step.*J. Fluid. Mech*, (2002), vol. 463, pp. 201-227.
- [29] **J. Tihon, J. Legrand, P. Legentilhomme**, Near-Wall Investigation of Backward-Facing Step Flows. *Experiments in Fluids* 31(2001)484-493.

- [30] **Hiroshi Iwai, Kazuyoshi Nakabe, Kenjiro Suzuki**, Flow and Heat Transfer Characteristics of Backward-Facing Step Laminar Flow in a Rectangular Duct. *International Journal and Mass Transfer* 43(2000) 457-471.
- [31] **Blair Perot, Hudong wang**, Modeling Separation and Reattachment Using the Turbulent Potential Model, Department of Mechanical Engineering University of Massachusetts, Amherst, MA 01003.
- [32] **T.P. Chiang, Tony W. H. Sheu, S. F. Tsai**, Topological Flow Structures In Backward-Facing Step Channels. *Computers & Fluids*. Vol. 26, N°.4, pp. 321-337, 1997.
- [33] **Martin Skote, Dans S. Henningson**, Direct Numerical of a Separated Turbulent Boundary Layer, *J. Fluid .Mech* .(2002), Vol .471. pp. 107-136.
- [34] **Dwight Barkley, M. Gabriela M. Gomes & Roland D. Henderson**, Three-Dimensional Instability in Flow over a Backward-Facing Step, *J . Fluid. Mech* . (2002), vol . 473, pp.167-190.
- [35] **Hans Wengle, André Huppertz, Grünter Bärwolff, Gerd Janke**, The Manipulated Transitional Backward-facing Step Flow: An Experimental And Direct Numerical Simulation Investigation, *Eur. J. Mech. B-Fluids* 20(2001)25-46.
- [36] **K.B. Chun, H. J. Sun**, Visualization of Locally-Forced Separated Flow over a Backward-Facing Step. *Experiments in Fluids* 25(1998) 133-142.
- [37] **John R. Fessler, John K. Eaton**, Turbulence Modification by Particles in a Backward-facing Step Flow, *J. Fluid. Mech.*(1999). Vol .394. pp.97 117.
- [38] **Jean-François Beaudoin, Olivier cadot, Jean-Luc Aider**, Three-Dimensional Stationary Flow over a Backward-facing Step, *European Journal of Mechanics B/Fluids* 23(2004)147-155 .
- [39] **N. Furuichi, M. Kumada**. An experimental Study of a Span wise Structure around a Reattachment Region of a Two-Dimensional Backward-facing Step. *Experiments in Fluids* 32(2002) 179-187.

- [40] **Stéphane GLOCKNER.** Contribution à la modélisation de la pollution atmosphérique dans les villes. Thèse de doctorat :
Université de Bordeaux I -2000.
- [41] **S. D. Hall, M. Behnia, C.A.J. Fletcher, G.I. Morrison.** Investigation of the Secodary Corner Vortex in a benchmark Turbulent backward-Facing Step Using Cross-Correlation particle Imaging Velocimetry. *Experiment in Fluids* 35 (2003) 139-151.
- [42] **Jens Neumann, Hans Wengle.** DNS and LES of Passively Controlled Turbulent Backward-Facing Step Flow. *Flow,Turbulentce and Combustion* 71: 297-310,2003.
- [43] **A. J. Morgan, I. E Barton.** Comparaison of Lagragian Tracking schemes to Flow over Backward-Facing Step. *Communications in Numerical Methods in Ingneering.* 2000; 16:831-837.
- [44] **Driver, D.M. Seegmiller, H.L.** Features of Reattaching turbulent Shear Layer in Divergent Channel Flow,"*AIAA Journal*, Vol.23, Feb.1985, pp.163-171.
- [45] **Thierry Maître, Christian Pellone.** Numerical Modelling of Unsteady Partial Cavities Behind a Backward-Facing Step. *Fourth International Symposium*, June 20-23,2001, PASADENA ,CALIFORNIA,USA.
- [46] **J.S. Perez Guerrero, R. M. Cotta.** Benchmark Integral Transform Results for Flow Over a Backward-Facing Step. *Computers and Fluids* Vol. 25,N° 5, PP. 527-540,1996.
- [47] **Roland Schiestel.** Modélisation et simulation des écoulements turbulents. Edition Hermes.
- [48] **R.Comolet,** *Mécanique Expérimentale des Fluides,Tome II , Dynamique des Fluides Réels.*
- [49] **E.A. Brun,A. Martino-Lagarde, J.Mathieu.** *Mécanique des fluides Tome3. Exemples de phénomènes instationnaires, couches limites et écoulements visqueux.*

- [50] **C.A.J.Fletcher.** Computational and General Techniques for Fluid Dynamics Fundamental and General Techniques Springer Series. 2nd Edition 1991 -3rd Printing 1997.
- [51] **C.A.J.Fletcher.** Computational and General Techniques for Fluid Dynamics II. Specific Techniques for Different Flow Categories.Springer Series. 2nd Edition 1991 -3rd Printing 1997.
- [52] **John.F.Wendt.**Computational Fluid Dynamics. An introduction Springer Series Oct 1995.
- [53] **S.Biringen H.Örs A. Tezel , J.H.Ferziger.**Industrial and Environmental Applications of Direct and Large –Eddy Simulation Lecture Notes in Physics. Springer Series August 1998.
- [54] **Ch. Bory,** Energétique des échanges de Chaleur par Convection (Tome I) Collectio Etudes Supérieures ,Bordas/Mouton.
- [55] **R. Giblin,** Transmission de la Chaleur par Convection Naturelle. Collection de l’A.N.R.T. Eyrolles
- [56] **Jean François sacadura,** Initiation aux Transferts Thermiques, 4^e tirage 1993.
- [57] **M .Damou.** Méthodes Expérimentales en Mécanique des Fluides et en Thermique .Ed. OPU, 12-2001.
- [58] Backward-facing Flow (Sudden Enlargement in a channel) Computational Fluid Dynamics (Nov 2001).
- [59] **G. A. Osswald, K. N. Ghia and U. Ghia,** Study of Incompressible Separated Flow Using Implicit Time-dependent Technique, AIAA Sixth CFD Conference, Danvers, MA, pp. 686-692, 1983.

ANNEXE

Moyens de Mesures Expérimentaux :

Il existe de nombreuses méthodes pour mesurer la vitesse dans les écoulements en présence d'obstacles.

Les techniques les plus courantes sont :

- ü L'Anémométrie à fil chaud.
- ü L'Anémométrie Laser à effet Doppler (LDV).
- ü La Vélocimétrie par Image de Particule (PIV).

Nous donnons une brève description de ces techniques de mesure de la vitesse et la température.

§ L'Anémométrie à Fil Chaud :

C'est une technique très utilisée elle permet d'effectuer des mesures de vitesse et de température au sein de l'écoulement en fonction du temps.

On considère un fil métallique très fin (de diamètre de l'ordre de quelques micromètre) chauffé par un courant électrique et placé dans un écoulement, ce fil se refroidit par convection forcée. Les fluctuations de vitesse et de température induisent une variation de la température du fil par la suite des variations de sa résistance électrique. Ce sont ces dernières variations qui sont mesurées.

§ L'Anémométrie Laser Doppler (LDV) :

Les méthodes classiques de mesure de vitesse dans les écoulements de fluides utilisent des sondes telles que, les tubes de Pitot ou fils chauds. Ces sondes sont introduites dans l'écoulement et perturbent ainsi l'écoulement. De plus, en présence de vitesses importantes, il y a production d'ondes de choc.

L'anémométrie Laser Doppler (LDV) appelée aussi (Laser Doppler Vélocimetry) est un moyen optique de détermination de la vitesse instantanée de particules, supposées assez fines pour suivre les mouvements d'agitation du fluide. L'objectif de cette méthode est donc de mesurer localement la vitesse et les

fluctuations à travers une technique basée sur le phénomène de changement de fréquences qui survient lorsqu'une particule mobile reçoit puis diffuse de la lumière.

L'essence de la vélocimétrie Laser Doppler repose sur la reconnaissance du fait qu'une particule en mouvement, éclairée par un rayonnement de fréquence f diffuse un rayonnement de fréquence légèrement différente de la première. Cela est dû à l'effet Doppler.

La vélocimétrie Laser Doppler est une technique de mesure qui ne perturbe pas l'écoulement. Par conséquent, elle est bien adaptée dans l'étude des écoulements dans les systèmes de combustion, surtout en présence de zones de recirculation.

Elle peut être utilisée pour des écoulements fortement turbulents, elle peut couvrir une plage qui s'étend des vitesses extrêmement faibles jusqu'aux vitesses supersoniques. La LDV peut être utilisée aussi dans les écoulements diphasiques pour la mesure de vitesse de bulles ou de particules solides. La possibilité de mesure dans des écoulements transsonique ou supersonique est due au fait que la technique détecte une information propre à la vitesse indépendamment de la température, de la masse volumique ou des changements dans la composition chimique[].

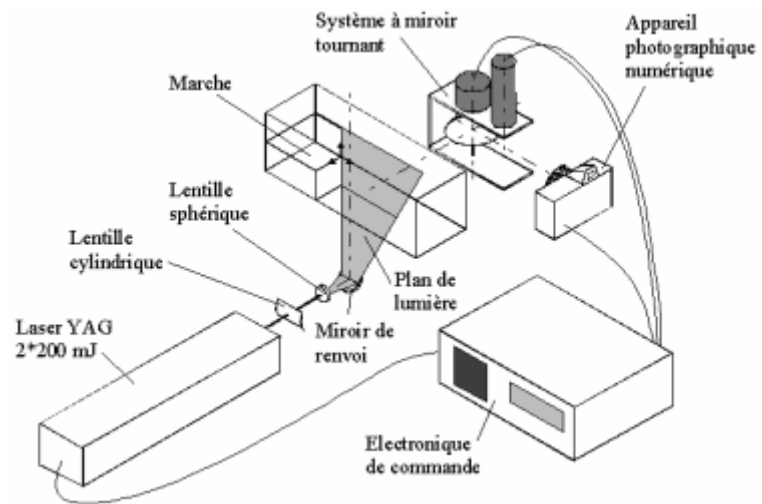
§ la vélocimétrie par image de particule (PIV)

La vélocimétrie par image de particule (PIV) appelé aussi (Particle Image Velocimetry) est une technique optique qui permet d'obtenir un champ de vitesse instantané dans un plan illuminé d'un écoulement, grâce au suivi des positions successives de particules initialementensemencées.

Une source Laser pulsée génère sur un même axe optique deux impulsions lumineuses décalées dans le temps d'un intervalle Δt programmable. Ces impulsions traversent un dispositif optique réalisant un plan de lumière et les particules sont donc éclairées à deux instants. La succession d'images d'une même particule définit la trajectoire de celle-ci voir figure (A-1).

Cette technique de mesure donne donc accès à des informations quantitatives très utiles pour la caractérisation des écoulements. Elles utilisable tant en aéro

qu'en hydrodynamique et la gamme de vitesse mesurable va de très basses vitesse au supersonique [].



Fig(A-1) :Schémas du montage de la PIV sur une marche descendante