



**UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA**

**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique**

**Département de Mathématiques**



## **MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Analyse Fonctionnelle

**Par**

**HACHROUF Youcef**

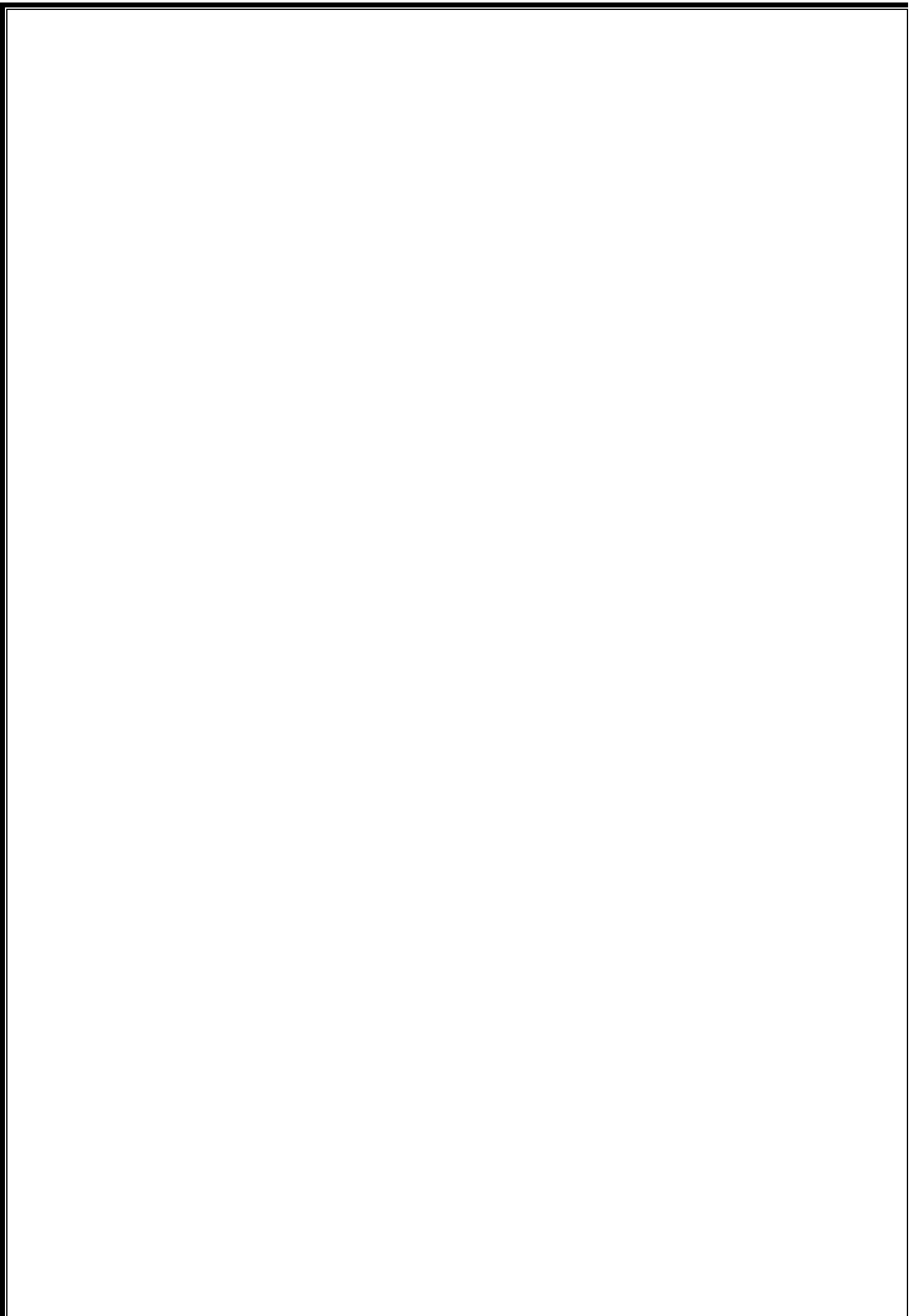
**Sujet**

**Caractérisation des espaces de type de  
Triebel-Lizorkin par les différences**

**Devant le jury :**

Mr. MOUSSAI Madani	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. DRIHEM Douadi	Prof. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. DJERIOU Aissa	MCB. Univ de M'sila	Examineur

**Promotion : 2017 / 2018**



# Remerciements

En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant,  
de m'avoir donné la possibilité de terminer ce travail .Je remercie mon encadreur de  
mémoire, Pr.Douadi Drihem pour sa soutien et pour sa bonne humeur .

Je remercie également les Professeurs **Madani Moussai** et **Aissa Djeriou** ,  
président de jury et examinateur ,respectivement.

Enfin je remercie aussi mes parents, mes amis pour leur soutient tout au  
long de  
mes études.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>Notation et conventions</b>	<b>3</b>
<b>1 Quelques résultats préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Les espaces $L^p(\ell_{q,J+}^s)$ . . . . .	5
1.2 L'espace de Triebel-Lizorkin . . . . .	9
<b>2 Les espaces <math>F_{p,q}^{s,\tau}</math></b>	<b>12</b>
2.1 Définition et quelques propriétés . . . . .	12
2.2 Préparation . . . . .	13
<b>3 Caractérisation par les différences</b>	<b>20</b>
3.1 Quelques inégalités . . . . .	20
3.2 Résultat principale . . . . .	25
<b>Conclusion</b>	<b>29</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>29</b>

# Introduction

Les espaces fonctionnels ont été utilisés dans plusieurs domaines d'analyse tels que l'analyse harmonique et les équations aux dérivées partielles. Quelques exemples de ces espaces peuvent être mentionnés tels que: les espaces de Besov et Triebel-Lizorkin, ont été introduits entre 1959 et 1975. Aussi les espaces de type de Triebel-Lizorkin  $F_{p,q}^{s,\tau}$ .

Cet espace à étudié auparavant par D. Yang and W. Yuan en 2008. Le but de ce mémoire est d'étudier les propriétés principaux de ces espaces . Plus précisément la caractérisation par différence.

Le mémoire se divise en trois chapitres.

Dans le premier on donne quelques rappelés sur les espaces de Triebel-Lizorkin et quelques resultats qu'on utilisera par la suite.

Dans le deuxième chapitre on donne la définition et les propriétés des espaces  $F_{p,q}^{s,\tau}$  et on donne quelques lemmes techniques.

Dans le troisième chapitre on donne une caractérisation pour les espaces de type de Triebel-Lizorkin par les différences.

# Notation et conventions

- $\mathbb{N}$  : la collection de tous les nombres naturels.
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .
- $\mathbb{Z}$  : l'ensemble de tous les nombres entiers.
- $\mathbb{R}^n$  : l'espace Euclidien.
- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, \dots, n.$
- Si  $J \in \mathbb{Z}$ , alors on pose  $J^+ = \max(0, J)$ .
- $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$ .
- Le produit scalaire de  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  est définie par:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

- $|\Omega|$  la mesure de Lebesgue de  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux espaces.  $A_1 \hookrightarrow A_2$  s'il existe  $c > 0$ , telle que:

$$\|f\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_1}, \quad \forall f \in A_1.$$

- $p'$  est l'exposant conjugué de  $p$  où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .
- Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\text{supp } f$  est le support de  $f$ :

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}.$$

- Soient  $0 < p \leq \infty$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $L^p(\Omega)$  est l'espace, de Lebesgue, de fonction mesurable  $f$  telle

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 0 < p < \infty \\ \text{supess } |f(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , on pose  $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$  et  $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p$ .

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support compact.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est le dual de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  à décroissances rapides.
- On définit la transformation de Fourier par:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

et sa transformée de Fourier inverse est:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x) dx.$$

- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des distributions tempérées.
- $B(x, r)$ , la boule de centre  $x$  et de rayon  $r$ :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

# Chapitre 1

## Quelques résultats préliminaires

L'objet de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire.

### 1.1 Les espaces $L^p(\ell_{q,J+}^s)$

Dans ce partie on présent quelques propriétés de l'espace  $L^p(\ell_{q,J+}^s)$ . On commence par l'espace de suites  $\ell_p$ .

**Définition 1.1.1** *Soit  $0 < p \leq \infty$ . On appelle  $\ell_p$  l'espace de suites  $\{f_j\}_{j \geq 0}$  à valeurs réelles ou complexes telles que*

$$\left\| \{f_j\}_{j \geq 0} \mid \ell_p \right\| = \left( \sum_{j \geq 0} |f_j|^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } 0 < p < \infty$$

et

$$\left\| \{f_j\}_{j \geq 0} \mid \ell_\infty \right\| = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} |f_j|.$$

Ces espaces sont de Banach. De plus si  $0 < p \leq q \leq \infty$ , alors on a  $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$ . En particulier

$$\left( \sum_{j \geq 0} |f_j| \right)^\theta \leq \sum_{j \geq 0} |f_j|^\theta,$$

si  $0 < \theta \leq 1$ .

**Définition 1.1.2** Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $J \in \mathbb{Z}$ ,  $J^+ = \max(J, 0)$  et  $0 < p \leq \infty$ . On appelle  $\ell_{p,J+}^s$  l'espace de suites  $\{f_j\}_{j \geq 0}$  à valeurs réelles ou complexes telles que

$$\left\| \{f_j\}_{j \geq J^+} \mid \ell_{p,J+}^s \right\| = \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{j s p} |f_j|^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } 0 < p < \infty$$

et

$$\left\| \{f_j\}_{j \geq J^+} \mid \ell_\infty \right\| = \sup_{j \geq J^+} |f_j|.$$

**Proposition 1.1.1** Soient  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ ,  $J \in \mathbb{Z}$  et  $0 < p \leq \infty$ .

- (i)  $\ell_{p,0}^0 = \ell_p$
- (ii)  $\ell_{p,J+}^{s_1} \hookrightarrow \ell_{p,J+}^{s_2}$ , si  $s_2 \leq s_1$ .
- (iii)  $\ell_{p,J+}^{s_1} \hookrightarrow \ell_{q,J+}^{s_1}$ , si  $0 < p \leq q \leq \infty$ .

**Preuve.** Sont des conséquences des propriétés de l'espace  $\ell_p$ . ■

**Définition 1.1.3** Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p, q \leq \infty$  et  $J \in \mathbb{Z}$ . On appelle  $L^p(\ell_{q,J+}^s)$  l'espace de suites de fonctions  $\{f_j\}_{j \geq J^+}$  telle que

$$\left\| \{f_j\}_{j \geq J^+} \mid L^p(\ell_{q,J+}^s) \right\| = \left\| \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{s j q} |f_j|^q \right)^{1/q} \mid L^p(\Omega) \right\| < \infty,$$

avec une petite modification si  $p = \infty$  ou/et  $q = \infty$ .

**Proposition 1.1.2** Soient  $0 < a < 1$  et  $0 < q \leq \infty$ . Pour toute suite réelle à terme positif  $\{\omega_j\}_{k \geq J^+}$  dans  $\ell_{q,J+}^0$ , les suites  $\delta_k = a^k \sum_{j=J^+}^k a^{-j} \omega_j$  et  $\eta_k = a^{-k} \sum_{j \geq k} a^j \omega_j$  appartiennent à  $\ell_{q,J+}^0$ , de plus, il existe une constante  $c = c(a, q) > 0$  tel que

$$\left\| \{\delta_k\}_{k \geq J^+} \mid \ell_{q,J+}^0 \right\| + \left\| \{\eta_k\}_{k \geq J^+} \mid \ell_{q,J+}^0 \right\| \leq c \left\| \{\omega_j\}_{k \geq J^+} \mid \ell_{q,J+}^0 \right\|.$$

**Preuve.** On étudie deux cas.

**Le cas  $1 < q < \infty$ .** On peut écrire la suite  $\{\delta_k\}$  sous la forme

$$\delta_k = \sum_{j=J^+}^k a^{(k-j)/q} a^{(k-j)/q'} \omega_j.$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\delta_k^q \leq \left( \sum_{j=J^+}^k a^{(k-j)} \omega_j^q \right) \left( \sum_{j=J^+}^k a^{(k-j)} \right)^{q/q'},$$

donc

$$\sum_{k \geq J^+} \delta_k^q \leq \left( \sum_{i \geq 0} a^i \right)^{q/q'} \sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{J^+ \leq j \leq k} a^{(k-j)} \omega_j^q \right).$$

Comme

$$\sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{j=J^+}^k a^{k-j} \omega_j^q \right) = \left( \sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right) \left( \sum_{k \geq j} a^{k-j} \right) \leq \left( \sum_{i \geq 0} a^i \right) \left( \sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right),$$

alors la somme de  $\delta_k^q$  pour  $k \geq J^+$  est majorée par

$$\left( \sum_{i \geq 0} a^i \right)^q \left( \sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right),$$

ce qui donne

$$\|\{\delta_k\} | \ell_{q,J^+}^0\| \leq \frac{1}{1-a} \|\{\omega_j\} | \ell_{q,J^+}^0\|.$$

Pour  $\{\eta_k\}$ , on peut écrire  $\{\eta_k\}$  sous la forme

$$\eta_k = \sum_{j \geq k} a^{(j-k)/q} a^{(j-k)/q'} \omega_j.$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\eta_k^q \leq \left( \sum_{j \geq k} a^{(j-k)} \omega_j^q \right) \left( \sum_{j \geq k} a^{(j-k)} \right)^{q/q'},$$

il vient que

$$\sum_{k \geq J^+} \eta_k^q \leq \left( \sum_{i \geq 0} a^i \right)^{q/q'} \sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{j \geq k} a^{(j-k)} \omega_j^q \right).$$

Comme

$$\begin{aligned} \sum_{K \geq J^+} \left( \sum_{j \geq k} a^{(j-k)} \omega_j^q \right) &= \left( \sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right) \left( \sum_{J^+ \leq k \leq j} a^{(j-k)} \right) \\ &\leq \left( \sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right) \left( \sum_{i \geq 0} a^i \right), \end{aligned}$$

alors la somme de  $\eta_k^q$  pour  $k \geq J^+$  est majorée par

$$\left( \sum_{i \geq 0} a^i \right)^q \left( \sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right),$$

ce qui donne

$$\|\{\eta_k\} | \ell_{q,J^+}^0\| \leq \frac{1}{1-a} \|\{\omega_j\} | \ell_{q,J^+}^0\|.$$

**Le cas  $0 < q \leq 1$ .** On a

$$\delta_k^q \leq \sum_{J^+ \leq j \leq k} a^{(k-j)q} \omega_j^q,$$

il vient que

$$\sum_{k \geq J^+} \delta_k^q \leq \sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{J^+ \leq j \leq k} a^{(k-j)q} \omega_j^q \right).$$

Comme

$$\sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{j=J^+}^k a^{(k-j)q} \omega_j^q \right) = \left( \sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right) \left( \sum_{k \geq j} a^{(k-j)q} \right),$$

alors la somme de  $\delta_k^q$  pour  $k \geq J^+$  est majoré par

$$\left( \sum_{i \geq 0} a^{iq} \right) \left( \sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right),$$

c'est-à-dire

$$\|\{\delta_k\} | \ell_{q,J^+}^0\| \leq \left( \frac{1}{1-a^q} \right)^{1/q} \|\{\omega_j\} | \ell^q\|.$$

Pour  $\{\eta_k\}$ , on a

$$\eta_k^q \leq \sum_{j=J^+}^k a^{(j-k)q} \omega_j^q,$$

donc

$$\sum_{k \geq J^+} \eta_k^q \leq \sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{J^+ \leq j \leq k} a^{(j-k)q} \omega_j^q \right).$$

Comme

$$\sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{j=J^+}^k a^{(j-k)q} \omega_j^q \right) = \left( \sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right) \left( \sum_{j=J^+}^k a^{(j-k)q} \right),$$

alors la somme de  $\eta_k^q$  pour  $k \geq J^+$  est majorée par  $\left(\sum_{i \geq 0} a^{iq}\right) \left(\sum_{j \geq J^+} \omega_j^q\right)$ . Ce qui donne

$$\|\{\eta_k\} | \ell_{q,J^+}^0\| \leq \left(\frac{1}{1-a^q}\right)^{1/q} \|\{\eta_k\}_{k \geq J^+} | \ell_{q,J^+}^0\|.$$

Par les mêmes raisonnements, on peut démontrer le cas  $q = \infty$ . ■

**Définition 1.1.4** Soient  $0 \leq \tau < \infty$  et  $0 < p \leq \infty$ . On note l'espace  $L_\tau^p(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble de tout fonction  $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$  tel que

$$\|f | L_\tau^p(\mathbb{R}^n)\| = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left( \int_{B_J} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

où le sup est sur tous boules  $B_J \subset \mathbb{R}^n$  de rayon  $2^{-J}$ ,  $J \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ .

On note que si  $\tau = 0$ ,  $L_0^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ . De plus

$$L_\tau^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

see [6, page 46].

**Définition 1.1.5** Soit  $f$  une fonction arbitraire définie sur  $\mathbb{R}^n$  et soit  $x, h \in \mathbb{R}^n$ . L'opérateur de différence  $\Delta_h$  est défini par

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), \Delta_h^{M+1} f(x) = \Delta_h(\Delta_h^M f)(x), M \in \mathbb{N}.$$

Par récurrence on peut montrer la formule:

$$\Delta_h^M f(x) = \sum_{j=0}^M (-1)^j C_j^M f(x + (M-j)h),$$

où  $C_j^M$  sont les coefficients binomiaux.

## 1.2 L'espace de Triebel-Lizorkin

Nous allons définir maintenant les espaces de Triebel-Lizorkin qui jouent un rôle important en analyse fonctionnelle. Pour cela, on rappelle la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.

Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$  telle que

- (i)  $\text{supp } \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$ .
- (ii)  $\varphi(\xi) > 0$  pour  $1 \leq |\xi| \leq 3$ .
- (iii)  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1$  pour  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

La construction de  $\varphi$  ne pose aucune difficulté, voir par exemple [1]. On pose

$$\varphi_0(\xi) = 1 - \sum_{j \geq 1} \varphi(2^{-j}\xi),$$

on obtient une fonction  $\varphi_0 \in C^\infty$ , portée par la boule  $|\xi| < 3$ .

Dans tout ce qui suit, on fixe la partition de l'unité qui résulte

$$\sum_{j \geq 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n).$$

A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolutions  $\Delta_j : \mathcal{S}' \rightarrow C^\infty$ , définis par

$$\mathcal{F}(\Delta_j f)(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi) \hat{f}(\xi)$$

pour  $j = 1, 2, \dots$  et  $\mathcal{F}(\Delta_0 f)(\xi) = \varphi_0(\xi) \hat{f}(\xi)$ . Pour toute  $f \in \mathcal{S}'$ , la décomposition de Littlewood-Paley de  $f$  est alors l'identité

$$f = \sum_{j \geq 0} \Delta_j f. \tag{1.1}$$

La série (1.1) converge au sens des distributions tempérées.

Soit  $f \in \mathcal{S}'$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$  et  $a > 0$ . On définit les opérateurs maximaux associés (fonction maximale de Peetre) aux  $\Delta_k$  par:

$$\Delta_j^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_j f(x-y)|}{(1+2^j|y|)^a}$$

et

$$\Delta_{j,J}^{*,a} f(x) = \sup_{y \in B_J} \frac{|\Delta_j f(y)|}{(1+2^j|x-y|)^a}.$$

**Remarque 1.1.1**

Notre définition dépend de toute façon du choix de la couronne  $\{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$ , puis de  $\varphi$ . L'intérêt d'une telle décomposition réside dans les propriétés de presque-orthogonalité

des opérateurs  $\Delta_j$ . En effet, si  $|j - k| > 2$ , alors  $\Delta_j \Delta_k f = 0$ , pour toute  $f \in \mathcal{S}'$ , puisque le support de  $\varphi(2^{-j}\cdot)$  et  $\varphi(2^{-k}\cdot)$  sont disjoints.

Nous allons rappeler dans ce paragraphe la définition des espaces de Triebel-Lizorkin, ainsi que quelques propriétés.

**Définition 1.2.1** Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p < \infty$  et  $0 < q \leq \infty$ . L'espace de Triebel-Lizorkin  $F_{p,q}^s$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  telles que

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} = \left\| \left( \sum_{j \geq 0} 2^{sjq} |\Delta_j f|^q \right)^{1/q} \right\|_p < +\infty, \quad \text{si } 0 < q < \infty$$

et

$$\|f\|_{F_{p,\infty}^s} = \left\| \sup_{j \geq 0} (2^{sj} |\Delta_j f|) \right\|_p < +\infty.$$

Les espaces de Triebel-Lizorkin sont des généralisations des espaces de  $L^p$  et les espaces des potentiels de Bessel  $H_p^s$  des  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  telles que

$$\|f\|_{H_p^s} = \left\| \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi)) \right\|_p < +\infty,$$

autrement dit

$F_{p,2}^0 = L^p$  si  $1 < p < \infty$ ,  $F_p^{s,2} = H_p^s$ , espace de potentiel de Bessel, pour  $s \in \mathbb{R}$  et  $1 < p < \infty$ .

De plus

$$F_{p,2}^m = W_p^m, \text{ espace de Sobolev, si } 1 < p < \infty, m = 1, 2, 3, \dots$$

Les espaces de Triebel-Lizorkin  $F_{p,q}^s$  sont des espaces de quasi-Banach (espaces de Banach si  $\min(p, q) \geq 1$ ). Pour une présentation détaillée de ces espaces, on pourra consulter H. Triebel [7], [8] et [9].

# Chapitre 2

## Les espaces $F_{p,q}^{s,\tau}$

Nous allons rappeler dans ce chapitre la définition des espaces de type de Triebel-Lizorkin, ainsi que quelques propriétés. Le lecteur souhaitant approfondir pourra trouver plus de détails sur ces espaces on pourra consulter [1], [2], [4], [10], [11] et [6].

### 2.1 Définition et quelques propriétés

Pour définir les espaces  $F_{p,q}^{s,\tau}$  on utilise la méthode d'analytique de Fourier (Fourier analytical approach) autrement dit. D'après le premier chapitre une distribution tempérée  $f$  peut être décomposée comme une série de Littlewood-Paley

$$f = \sum_{j \geq 0} \Delta_j f.$$

**Définition 2.1.1** Soit  $s \in \mathbb{R}, \tau \geq 0$  et  $0 < p, q < \infty$ . L'espace  $F_{p,q}^{s,\tau}$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  telles que

$$\|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left\| \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} |\Delta_j f|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(B_J)} < \infty,$$

où le sup est sur tout  $J \in \mathbb{Z}$  et toute boule  $B_J$  de  $\mathbb{R}^n$ .

En remarque que pour  $\tau = 0$ , on a

$$F_{p,q}^{s,\tau} = F_{p,q}^s.$$

Puisque la norme dans les espaces  $F_{p,q}^{s,\tau}$  est localisée (les intégrales sur des boules), alors on utilise une modification convenable pour démontrer mon résultats.

**Théorème 2.1.1** Soient  $s \in \mathbb{R}, 0 \leq \tau < \infty, 0 < p < \infty, 0 < q < \infty$  et  $a > n/\min(p, q)$ .

Alors

$$\|f | F_{p,q}^{s,\tau}\|^* = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left\| \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} |\Delta_{j,J}^{*,a} f|^q \right)^{1/q} | L^p(B_J) \right\|,$$

et

$$\|f | F_{p,q}^{s,\tau}\|^* = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left\| \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} |\Delta_j^{*,a} f|^q \right)^{1/q} | L^p(B_J) \right\|,$$

sont des normes équivalentes dans  $F_{p,q}^{s,\tau}$ .

Pour la preuve voir [12].

## 2.2 Préparation

Pour prouver nos résultats, nous avons besoin de quelques lemmes techniques.

**Lemme 2.2.1** Soient  $s \in \mathbb{R}, 0 \leq \tau < \infty, 0 < p < \infty$  et  $0 < q \leq \infty$ . Alors, il y a une constante  $c > 0$ , indépendante de  $j$ , telle que pour tout  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\|\Delta_j^{*,a} f\|_\infty \leq c 2^{j(n/p-s-n\tau)} \|f | F_{p,q}^{s,\tau}\|, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

**Preuve.** Soient  $\psi, \psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , telle que  $\mathcal{F}\psi = 1$  et  $\mathcal{F}\psi_0 = 1$  sur  $\text{supp } \varphi_1$  et  $\text{supp } \varphi_0$  respectivement, alors

$$|\Delta_j f(y)| = |\psi_j * \Delta_j f(y)|, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

avec  $\psi_j = 2^{(j-1)n} \psi(2^{j-1} \cdot)$  si  $j \in \mathbb{N}$ , comme  $\psi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  alors  $|\psi_j * \Delta_j f(y)|$  est borné par

$$c \eta_{j-1,N} * |\Delta_j f|(y),$$

pour tout  $N > N$ . Par conséquent nous obtenons pour tout  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta_j^{*,a} f(x) \leq c \sup_{y \in \mathbb{R}^n} c\eta_{j-1,N} * |\Delta_j f|(y)$$

Par la même méthode de [6, proposition 2.6] nous obtenons pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$

$$c\eta_{j-1,N} * |\Delta_j f|(y) \leq c2^{j(n/p-s-n\tau)} \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}}.$$

■

**Lemme 2.2.2** *Soit  $M \in \mathbb{N}, J \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, A > 0, \tau \in [0, \infty)$  et  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors, il y a une constante  $C > 0$ , indépendant de  $J$  et  $A$ , tel que*

$$\left\| \int_{|h| \leq A} |\Delta_h^M f(\cdot)| dh \right\|_{L^p(B_J)} \leq cA^n |B_J|^\tau \|f\|_{L_\tau^p(\mathbb{R}^n)}$$

Pour toute boule  $B_J$  de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $2^{-J}$  et toute fonction  $f$  telle que

$$\|f\|_{L_\tau^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

**Preuve.** Par la définition de  $\Delta_h^M f$ , on a

$$|\Delta_h^M f(x)| \leq \sum_{m=0}^M C_m^M |f(x + (M-m)h)|.$$

Alors d'après l'inégalité de Minkowski, car  $p \geq 1$ , on obtient

$$\int_{|h| \leq A} \|\Delta_h^M f\|_{L^p(B_J)} dh \leq \sum_{m=0}^M C_m^M \int_{|h| \leq A} C_m^M \|f\|_{L^p(\tilde{B}_J)} dh$$

où si  $x_0$  le centre de  $B_J$  alors  $x_0 + (M-m)h$  est le centre de  $\tilde{B}_J$ . Comme  $|\tilde{B}_J| = |B_J|$  alors on peut estimer

$$\|f\|_{L^p(\tilde{B}_J)}$$

par

$$c|B_J|^\tau \|f\|_{L_\tau^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Ce qui accomplit la preuve du lemme. ■

**Remarque 2.2.1** Soient  $A, M, \tau$  et  $p$  comme dans le lemme précédent. Si  $J \in \mathbb{N}_0$  alors

$$L^p(B_0) \hookrightarrow L^p(B_J)$$

d'où l'existence  $c > 0$ , indépendant de  $J$  et  $A$ , telle que

$$\left\| \int_{|h| \leq A} |\Delta_h^M f(\cdot)| dh \mid L^p(B_J) \right\| \leq cA^n \|f \mid L^p_\tau(\mathbb{R}^n)\|$$

Pour  $s > 0, M \in \mathbb{N}, 0 \leq \tau < \infty, 1 \leq p < \infty, \text{ et } 0 \leq q < \infty$ , on pose

$$\|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|_M = \|f \mid L^p_\tau(\mathbb{R}^n)\| + \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left\| \left( \int_0^{2^{-J^++1}} t^{-sq} \sup_{|h| \leq t} |\Delta_h^M f(\cdot)|^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \mid L^p(B_J) \right\|$$

ici le sup est sur tout  $J \in \mathbb{Z}$  et tout boule  $B_J$  de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $2^{-J}$ .

**Lemme 2.2.3** Soient  $s > 0, M \in \mathbb{N}, J \in \mathbb{Z}, 0 \leq \tau < \infty, 1 \leq p < \infty$  et  $0 < q \leq \infty$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $J$  telle que

$$\left\| \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} \left( \int_{|v| \leq 1} |\Delta_{2^{-jv}}^M f(\cdot)| dv \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \mid L^p(B_J) \right\| \leq c |B_J|^\tau \|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|_M, \quad (2.2.1)$$

$$\left\| \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} \left( \int_{|v| > 1} |\Delta_{2^{-jv}}^M f(\cdot)| dv \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \mid L^p(B_J) \right\| \leq c |B_J|^\tau \|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|_M,$$

pour toute boule  $B_J$  de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $2^{-J}$ , toute  $\omega \in S(\mathbb{R}^n)$ , et toute fonction  $f$  telle que

$$\|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|_M < \infty.$$

**Preuve.** La preuve est donnée seulement quand  $0 < q < \infty$ . Pour prouver ce résultat, nous avons besoin de montre que pour tout  $i \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{v \geq i} 2^{(s+n)vq} \left( \int_{|h| \leq 2^{-v}} |\Delta_h^M f(x)| dh \right)^q \right)^{1/q} \\ & \leq c \left( \int_0^{2^{-i+1}} t^{-(s+n)q} \left( \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^M f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} 2^{js} \int_{|v|>1} |\Delta_{2^{-j}v}^M f(x) \omega(v)| dv &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{js} \int_{2^k < |v| \leq 2^{k+1}} |\Delta_{2^{-j}v}^M f(x) \omega(v)| dv \\ &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(s+n)j-Nk} \int_{2^{k-j} < |h| \leq 2^{k-j+1}} |\Delta_h^M f(x)| dh \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

où  $N > n$ . Comme  $\omega \in S(\mathbb{R}^n)$ , il existe une constante  $c > 0$ , telle que,

$$|\omega(x)| \leq c(1 + |x|)^{-N},$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $N > n$ . Le côté droit de (2.2.2) dans  $\ell_{q, J^+}^s$ -norm est borné par

$$\begin{aligned} &c \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-N\sigma k} \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{(s+n)jq} \left( \int_{2^{k-j} < |h| \leq 2^{k-j+1}} |\Delta_h^M f(x)| dh \right)^q \right)^{\sigma/q} \right)^{1/\sigma} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{J^+-1} \dots + \sum_{k \geq J^+} \dots \right)^{1/\sigma} \\ &= (I_J(x) + II_J(x))^{1/\sigma} \\ &\leq 2^{1/\sigma-1} \left( (I_J(x))^{1/\sigma} + (II_J(x))^{1/\sigma} \right), \end{aligned}$$

où nous avons utilisés

$$(a + b)^d \leq \max(1, 2^{d-1})(a^d + b^d), \quad a \geq 0, b \geq 0, d > 0. \quad (2.2.3)$$

On pose

$$\sum_{k=0}^{J^+-1} \dots = 0 \quad \text{si } J^+ = 0.$$

On prend la norme  $L^p(B_J)$  on trouve que (2.2.1) est majoré par

$$2^{1/\sigma-1} \|(I_J)^{1/\sigma} | L^p(B_J)\| + 2^{1/\sigma-1} \|(II_J)^{1/\sigma} | L^p(B_J)\|.$$

On étulise le changement de variable  $j - k - 1 = v$ , on trouve que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} I_J(x) &\leq c \sum_{k=0}^{J^+-1} 2^{(s+n-N)\sigma k} \left( \sum_{v \geq J^+-k-1} 2^{(s+n)vq} \left( \int_{|h| \leq 2^{-v}} |\Delta_h^M f(x)| dh \right)^q \right)^{\sigma/q} \\ &= \sum_{k=0}^{J^+-2} \dots + \sum_{k=J^+-1}^{J^+-1} \dots \\ &= M_1(x) + M_2(x), \end{aligned}$$

où on pose  $\sum_{k=0}^{J^+-2} \dots = 0$  si  $J^+ \leq 1$ . On trouve

$$M_1(x) \leq c \sum_{k=0}^{J^+-2} 2^{(s+n-N)\sigma k} \left( \int_0^{2^{-J+k+2}} t^{-(s+n)q} \left( \int_{|h|\leq t} |\Delta_h^M f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\sigma/q}.$$

Comme  $L^{p/\sigma}(B_J)$  est un espace normé et  $B_J \subset B_{J-k-2}$ , la dernière terme en  $L^{p/\sigma}(B_J)$ -norme est majoré par

$$\begin{aligned} & c \sum_{k=0}^{J^+-2} 2^{(s+n-N)\sigma k} \left\| \left( \int_0^{2^{-J+k+2}} t^{-sq} \sup_{|h|\leq t} |\Delta_h^M f(\cdot)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \mid L^p(B_{J-k-2}) \right\|^\sigma \\ & \leq c |B_J|^{\tau\sigma} \sum_{k=0}^{J^+-2} 2^{(s+n-N+n\tau)\sigma k} \|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|_M^\sigma. \end{aligned}$$

On prend  $N > 2(s+n) + \tau n$ . On trouve que

$$\sum_{k=0}^{J^+-2} 2^{(s+n-N+n\tau)\sigma k} \|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|_M^\sigma \leq c \|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|_M^\sigma,$$

où  $c > 0$  est indépendant de  $J$ . Maintenant  $(M_2)^{1/\sigma}$  dans  $L^p(B_J)$ -norme est estimé par

$$\begin{aligned} & c 2^{(s+n-N)J^+} \left\| \left( \sum_{v\geq 0} 2^{(s+n)vq} \left( \int_{|h|\leq 2^{-v}} |\Delta_h^M f(\cdot)| dh \right)^q \right)^{1/q} \mid L^p(B_J) \right\|^\sigma \\ & \leq c 2^{(s+n-N)J^+} \left\| \left( \sum_{v\geq 1} 2^{(s+n)vq} \left( \int_{|h|\leq 2^{-v}} |\Delta_h^M f(\cdot)| dh \right)^q \right)^{1/q} \mid L^p(B_J) \right\|^\sigma \\ & \quad + c 2^{(s+n-N)J^+} \left\| \int_{|h|\leq 1} |\Delta_h^M f(\cdot)| dh \mid L^p(B_J) \right\|^\sigma, \end{aligned}$$

par (2.2.3). Par l'inclusion

$$L^p(B_0) \hookrightarrow L^p(B_J)$$

et la remarque 2.2.1, on trouve

$$\begin{aligned} \|M_2 \mid L^{p/\sigma}(B_J)\| &= \left\| (M_2)^{1/\sigma} \mid L^p(B_J) \right\|^\sigma \\ &\leq c 2^{(s+n-N)\sigma J^+} \|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|_M^\sigma \\ &= c 2^{(s+n-N+n\tau)\sigma J^+} |B_J|^{\tau\sigma} \|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|_M^\sigma \\ &\leq c |B_J|^{\tau\sigma} \|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|_M^\sigma, \end{aligned}$$

comme  $N > s + n + n\tau$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} \|(I_J)^{1/\sigma} | L^p(B_J)\|^\sigma &= \|I_J | L^{p/\sigma}(B_J)\| \\ &\leq \|M_1 | L^{p/\sigma}(B_J)\| + \|M_2 | L^{p/\sigma}(B_J)\| \\ &\leq c |B_J|^{\tau\sigma} \|f | F_{p,q}^{s,\tau}\|_M^\sigma. \end{aligned}$$

On estimat  $(II_J)^{1/\sigma}$  dans  $L^p(B_J)$ -norme. on a

$$\begin{aligned} II(\cdot) &= c \sum_{k \geq J^+} 2^{-N\sigma k} \left( \sum_{j=J^+}^{k+J^++1} \cdots + \sum_{j=k+J^++2}^{\infty} \cdots \right)^{\sigma/q} \\ &\leq c \sum_{k \geq J^+} 2^{-N\sigma k} \left( \left( \sum_{j=J^+}^{k+J^++1} \cdots \right)^{\sigma/q} + \left( \sum_{j=k+J^++2}^{\infty} \cdots \right)^{\sigma/q} \right) \\ &= c \sum_{k \geq J^+} 2^{-N\sigma k} (S_k^1(\cdot) + S_k^2(\cdot)). \end{aligned}$$

Après un changement de variable  $j - k - 1 = v$ , on trouve

$$\begin{aligned} (S_k^1(x))^{1/\sigma} &\leq c 2^{(s+n)k} \left( \sum_{v=J^+-k-1}^{J^+} 2^{(s+n)vq} \left( \int_{|h| \leq 2^{-v}} |\Delta_h^M f(x)| dh \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq c 2^{(s+n)k} \left( \int_{2^{-J^+}}^{2^{k-J^++2}} t^{-(s+n)q} \left( \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^M f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq c 2^{(s+n)k} \int_{|h| \leq 2^{k-J^++2}} |\Delta_h^M f(x)| dh \left( \int_{2^{-J^+}}^{2^{k-J^++2}} t^{-(s+n)q} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq c 2^{(s+n)J^++(s+n)k} \int_{|h| \leq 2^{k-J^++2}} |\Delta_h^M f(x)| dh. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante  $c > 0$  indépendant de  $J$  et  $k$  tel que

$$\begin{aligned} \|(S_k^1)^{1/\sigma} | L^p(B_J)\| &\leq c 2^{(s+n)J^++(s+n)k} \left\| \int_{|h| \leq 2^{k-J^++2}} \Delta_h^M f(\cdot) dh | L^p(B_J) \right\| \\ &\leq c 2^{(s+n)J^++(s+n)k} |B_J|^\tau \|f | L_\tau^p\| \\ &\leq c 2^{(2s+2n+\tau n)k} |B_J|^\tau \|f | F_{p,q}^{s,\tau}\|_M, \end{aligned}$$

par le lemme 2.2.2, la remarque 2.2.1 et que  $k \geq J^+$ . Maintenant, on estime  $(S_k^2)^{1/\sigma}$  dans  $L^p(B_J)$ . On a

$$\begin{aligned} (S_k^2(x))^{1/\sigma} &\leq c 2^{(n+s)k} \left( \sum_{v=J^++1}^{\infty} 2^{(s+n)vq} \left( \int_{|h|\leq 2^{-v}} |\Delta_h^M f(x)| dh \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq c 2^{(n+s)k} \left( \int_0^{2^{-J^+}} t^{-sq} \sup_{|h|\leq t} |\Delta_h^M f(x)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \left\| (S_k^2)^{1/\sigma} \mid L^p(B_J) \right\| &\leq c 2^{(n+s)k} \left\| \left( \int_0^{2^{-J^+}} t^{-sq} \sup_{|h|\leq t} |\Delta_h^M f(\cdot)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \mid L^p(B_J) \right\| \\ &\leq c 2^{(n+s)k} |B_J|^\tau \|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|. \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \left\| (II_J)^{1/\sigma} \mid L^p(B_J) \right\|^\sigma &= \left\| II \mid L^{p/\sigma}(B_J) \right\| \\ &\leq \sum_{k \geq J^+} 2^{-N\sigma k} \left( \left\| (S_k^1)^{1/\sigma} \mid L^p(B_J) \right\|^\sigma + \left\| (S_k^2)^{1/\sigma} \mid L^p(B_J) \right\|^\sigma \right) \\ &\leq c \sum_{k \geq J^+} 2^{(2s+2n+\tau n-N)\sigma k} |B_J|^{\tau\sigma} \|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|^\sigma \\ &\leq c |B_J|^{\tau\sigma} \|f \mid F_{p,q}^{s,\tau}\|^\sigma, \end{aligned}$$

comme  $N > 2(s+n) + \tau n$ .  $\square$

■

# Chapitre 3

## Caractérisation par les différences

Dans ce chapitre on présente les principaux résultats sur l'espace de type de Triebel-Lizorkin.

### 3.1 Quelques inégalités

Nous commencerons ce chapitre par quelques résultats qu'on va utiliser par la suite.

**Lemme 3.1.1** *Soient  $1 \leq p < \infty, 0 < q \leq \infty, 0 \leq \tau < \infty, M \in \mathbb{N}$  et  $s > 0$ . Si  $f \in F_{p,q}^{s,\tau}$ , alors on a*

$$\|f\|_{L_\tau^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}}.$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} |\Delta_j f| &= \sum_{j \geq 0} 2^{-js} 2^{js} |\Delta_j f| \leq c \sup_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{js} |\Delta_j f| \\ &\leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} |\Delta_j f|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Si  $f \in F_{p,q}^{s,\tau}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_\tau^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\| \sum_{j \geq 0} |\Delta_j f| \right\|_{L_\tau^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} |\Delta_j f|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_\tau^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}}. \end{aligned}$$

■

**Lemme 3.1.2** Soient  $1 \leq p < \infty, 0 < q \leq \infty, 0 \leq \tau < \infty, M \in \mathbb{N}$  et  $s > 0$ . On pose

$$H_J(x) = \int_0^{2^{-J^+}} t^{-sq} \sup_{|h| \leq t} |\Delta_h^M f(x)|^q \frac{dt}{t}.$$

Si  $f \in F_{p,q}^{s,\tau}$ , alors on a

$$\begin{aligned} (H_J(x))^{1/q} &\leq c 2^{Jn(1/p-\tau)} \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} \\ &+ c \left( \sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{i \geq 0} \sum_{j=J^+}^k 2^{(j-k)(M-s)+sj-iN} |\Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(x)| \right)^q \right)^{1/q} \\ &+ c \left( \sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{j \geq k} 2^{(j-k)(a-s)+sj} |\Delta_{j,J}^{*,a} f(x)| \right)^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

**Preuve.** Par le changement de variable  $t = 2^{-y}$ , on obtient

$$H_J(x) = \ln 2 \int_{J^+}^{+\infty} 2^{y sq} \sup_{|h| \leq 2^{-y}} |\Delta_h^M f(x)|^q dy.$$

Alors

$$H_J(x) \leq c \sum_{k \geq J^+} 2^{ksq} \sup_{|h| \leq 2^{-k}} |\Delta_h^M f(x)|^q.$$

Soient  $\psi, \psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  deux fonctions telles que  $\mathcal{F}\psi = 1$  et  $\mathcal{F}\psi_0 = 1$  dans le support de  $\text{supp}\varphi_1$  et  $\text{supp}\Psi$  respectivement. En utilisant le théorème de la croissance finis, nous obtenons pour tout  $x \in B_J, j \in \mathbb{N}_0$  et  $|h| \leq 2^{-k}$

$$\begin{aligned} |\Delta_h^1 \Delta_j f(x)| &= |\Delta_h^1(\psi_j * \Delta_j f)(x)| \\ &\leq 2^{-k} \sup_{|x-y| \leq c 2^{-k}} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha \psi_j * \Delta_j f(y)|, \end{aligned}$$

avec une constante positive  $c$ , indépendant de  $j$  et  $k$ , et

$$\psi_j(\cdot) = 2^{(j-1)n} \psi(2^{j-1}\cdot)$$

pour  $j = 1, 2, \dots$ . Par induction sur  $M$ , nous montrons que

$$|\Delta_h^M \Delta_j f(x)| \leq 2^{-kM} \sup_{|x-y| \leq c 2^{-k}} \sum_{|\alpha|=M} |D^\alpha \psi_j * \Delta_j f(y)|.$$

On sait que  $s|\alpha| = M$  et  $a > 0$ , alors

$$\begin{aligned} |D^\alpha \psi_j * \Delta_j f(y)| &= 2^{(j-1)n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha (\psi(2^{j-1}(y-z))) \Delta_j f(z) dz \right| \\ &\leq 2^{(j-1)(n+M)} \int_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha \psi)(2^{j-1}(y-z))| |\Delta_j f(z)| dz. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Supposons que  $0 \leq j \leq J^+ - 1$ . Le membre de droite dans (3.1.2) peut être estimé comme suit:

$$\begin{aligned} &c 2^{j(n+M)} \Delta_j^{*,a} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha \psi)(2^{j-1}(y-z))| (1 + 2^j |y-z|)^a dz \\ &\leq c 2^{jM} \Delta_j^{*,a} f(y). \end{aligned}$$

Ensuite, nous obtenons pour tout  $x \in B_J$ ,  $|h| \leq 2^{-k}$  et tout  $k \geq J^+$

$$\begin{aligned} |\Delta_h^M \Delta_j f(x)| &\leq c 2^{(j-k)M} \sup_{|x-y| \leq c 2^{-k}} \Delta_j^{*,a} f(y) \\ &\leq c 2^{(j-k)M} (1 + 2^{j-k})^a \sup_{|x-y| \leq c 2^{-k}} \frac{\Delta_j^{*,a} f(y)}{(1 + 2^j |x-y|)^a} \\ &\leq c 2^{(j-k)M} \Delta_j^{*,a} f(x), \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

mais si  $0 \leq j \leq J^+ - 1$ . Supposons maintenant que  $J^+ \leq j \leq k$ . Par notre hypothèse sur  $x$  et  $k$  on obtient

$$|y - x_0| \leq |x - x_0| + |x - y| < 2^{-J} + c 2^{-k} \leq (c+1)2^{-J},$$

ce qui implique que  $y$  est situé dans une boule  $\tilde{B}_J$ , où

$$\tilde{B}_J = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| < (c+1)2^{-J}\}.$$

Ecrire l'intégrale (3.1.2) comme suit

$$\int_{\tilde{B}_{J-1}} \dots dz + \sum_{i \geq 0} \int_{\tilde{B}_{J-i-2} \setminus \tilde{B}_{J-i-1}} \dots dz = I_{j,J}(y) + \sum_{i \geq 0} II_{j,J-i}(y).$$

Nous rappelons que

$$\Delta_{j,l}^{*,a} f(y) = \sup_{z \in \tilde{B}_l} \frac{|\Delta_j f(z)|}{(1 + 2^j |y-z|)^a}, \quad (3.1.4)$$

pour tout  $j \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et tout  $l \in \mathbb{Z}$ . On a

$$\begin{aligned} I_{j,J}(y) &\leq \Delta_{j,J-1}^{*,a} f(y) \int_{\tilde{B}_{J-1}} |(D^\alpha \psi)(2^{j-1}(y-z))| (1 + 2^j |y-z|)^a dz \\ &\leq c 2^{-jn} \Delta_{j,J-1}^{*,a} f(y) \leq c 2^{-jn} \Delta_{j,J-2}^{*,a} f(y). \end{aligned}$$

Laissez-nous de estimer  $II_{j,J-i}$ . Comme  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on obtient

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq c(1 + |x|)^{-2N},$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $N > 0$ . Alors pour tout  $N$  assez grand,  $II_{j,J-i}(y)$  est majoré par

$$\begin{aligned} & c \Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(y) \int_{\tilde{B}_{J-i-2} \setminus \tilde{B}_{J-i-1}} (1 + 2^{j-1} |y - z|)^{-2N+a} dz \\ & \leq c 2^{-iN} \Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} (1 + 2^{j-1} |y - z|)^{-N+a} dz \\ & \leq c 2^{-iN-jn} \Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(y), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé  $2^{j-1} |y - z| > (c+1)2^{j-J+i-1} \geq (c+1)2^{i-1}$ . Donc

$$|D^\alpha \psi_j * \Delta_j f(y)| \leq c 2^{jM} \sum_{i \geq 0} 2^{-iN} \Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(y).$$

Ensuite, nous obtenons pour tout  $x \in B_J$ ,  $|h| \leq 2^{-k}$  et  $J^+ \leq j \leq k$

$$\begin{aligned} |\Delta_h^M \Delta_j f(x)| & \leq c 2^{(j-k)M} \sum_{i \geq 0} 2^{-iN} \sup_{|x-y| \leq c 2^{-k}} \Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(y) \\ & \leq c 2^{(j-k)M} (1 + 2^{j-k})^a \sum_{i \geq 0} 2^{-iN} \sup_{|x-y| \leq c 2^{-k}} \frac{\Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(y)}{(1 + 2^j |x - y|)^a}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout  $J^+ \leq j \leq k$  il y a une constante  $c > 0$  indépendant de  $J$ ,  $j$  et  $k$  tel que

$$|\Delta_h^M \Delta_j f(x)| \leq c 2^{(j-k)M} \sum_{i \geq 0} 2^{-iN} \Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(x).$$

Pour  $j \geq k + 1$  on trouve si  $x \in B_J$  et  $|h| \leq 2^{-k}$

$$\begin{aligned} |\Delta_h^M \Delta_j f(x)| & \leq \sum_{m=0}^M C_m^M |\Delta_j f(x + (M - m)h)| \\ & \leq 2^M \sup_{|x-y| \leq C 2^{-k}} |\Delta_j f(y)| \\ & \leq 2^M \sup_{|x-y| \leq C 2^{-k}} \frac{|\Delta_j f(y)|}{(1 + 2^j |x - y|)^a} (1 + 2^j |x - y|)^a. \end{aligned}$$

Nous remarquons aussi que par notre hypothèse sur  $x$  et  $k$  nous avons

$$|y - x_0| \leq |x - x_0| + |x - y| < 2^{-J} + C 2^{-k} \leq (C + 1)2^{-J}$$

et cela implique que  $y$  est situé dans une boule  $\tilde{B}_J$ , où  $\tilde{B}_J = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| < (C+1)2^{-J}\}$ .

Alors,

$$|\Delta_h^M \Delta_j f(x)| \leq c 2^{(j-k)a} \Delta_{j,J}^{*,a} f(x),$$

si  $j \geq k+1$ . Maintenant,

$$\begin{aligned} \Delta_h^M f(x) &= \sum_{j \geq 0} \Delta_h^M \Delta_j f(x) \\ &= \sum_{j=0}^{J^+-1} \cdots + \sum_{j=J^+}^k \cdots + \sum_{j \geq k+1} \cdots, \end{aligned}$$

où on pose

$$\sum_{j=0}^{J^+-1} \cdots = 0 \quad \text{si} \quad J^+ = 0.$$

Laissez-nous de estimer chaque terme dans  $\ell_{q,J^+}^s$ -norme. On trouve par (3.1.3) et le lemme 2.2.1

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J^+-1} |\Delta_h^M \Delta_j f(x)| &\leq \sum_{j=0}^{J^+-1} 2^{(j-k)M} \Delta_j^{*,a} f(x) \\ &\leq c \sum_{j=0}^{J^+-1} 2^{(j-k)M+j(n/p-s-n\tau)} \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} \\ &\leq c 2^{-kM} \sum_{j=0}^{J^+-1} 2^{j(M+n/p-s-n\tau)} \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} \\ &\leq c 2^{J(M+n/p-s-n\tau)-kM} \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité peut être obtenue par notre hypothèse sur  $s$  et  $\tau$ . La dernière expression dans  $\ell_{q,J^+}^s$ -norme est majoré

$$\begin{aligned} &c 2^{Jn(1/p-\tau)} \left\| \left\{ 2^{(k-J^+)(s-M)} \right\}_{k \geq J^+} \right\|_{\ell_{q,J^+}^0} \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} \\ &\leq c 2^{Jn(1/p-\tau)} \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}}, \end{aligned}$$

car  $s < M$ . Alors,

$$\begin{aligned} (H_J(x))^{1/q} &\leq c 2^{Jn(1/p-\tau)} \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} \\ &+ c \left( \sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{i \geq 0} \sum_{j=J^+}^k 2^{(j-k)(M-s)+sj-iN} |\Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(x)| \right)^q \right)^{1/q} \\ &+ c \left( \sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{j \geq k} 2^{(j-k)(a-s)+sj} |\Delta_{j,J}^{*,a} f(x)| \right)^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

■

■

## 3.2 Résultat principale

Nous énonçons maintenant le résultat principale de ce chapitre.

**Théorème 3.2.1** Soient  $1 \leq p < \infty, 0 < q \leq \infty, 0 \leq \tau < \infty$  et  $M \in \mathbb{N}$ . On suppose que

$$\frac{n}{\min(p, q)} < s < M \quad \text{et} \quad 0 \leq \tau < 1/p$$

ou

$$\frac{n}{\min(p, q)} < s < M - n\tau + n/p \quad \text{et} \quad \tau \geq 1/p.$$

Alors  $\|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} \|M$  est une norme équivalente dans  $F_{p,q}^{s,\tau}$ .

**Preuve.** Soit  $B_J$  une boule de centre sur  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et de rayon  $2^{-J}$ ,  $J \in \mathbb{Z}$ .

Etape 1. Par le lemme 3.1.1,

$$\|f\|_{L_\tau^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}}$$

pour toute  $f \in F_{p,q}^{s,\tau}$ .

Etape 2. On pose

$$H_J(x) = \int_0^{2^{-J^+}} t^{-sq} \sup_{|h| \leq t} |\Delta_h^M f(x)|^q \frac{dt}{t}.$$

Par le lemme 3.1.2

$$(H_J(x))^{1/q} \leq c 2^{Jn(1/p-\tau)} \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} + c \left( \sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{i \geq 0} \sum_{j=J^+}^k 2^{(j-k)(M-s)+sj-iN} |\Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(x)| \right)^q \right)^{1/q} \quad (3.2.6)$$

$$+ c \left( \sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{j \geq k} 2^{(j-k)(a-s)+sj} |\Delta_{j,J}^{*,a} f(x)| \right)^q \right)^{1/q}. \quad (3.2.7)$$

Le second terme peut être estimé par

$$c \left( \sum_{i \geq 0} 2^{-iN\sigma} \left( \sum_{k \geq J^+} \left( \sum_{j=J^+}^k 2^{(j-k)(M-s)+sj} |\Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(x)| \right)^q \right)^{\sigma/q} \right)^{1/\sigma},$$

avec  $\sigma = \min(1, q)$ . Comme  $s < M$ , alors nous pouvons appliquer la proposition 1.1.2 pour estimer la dernière expression par

$$c \left( \sum_{i \geq 0} 2^{-iN\sigma} \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} |\Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f(x)|^q \right)^{\sigma/q} \right)^{1/\sigma}.$$

Comme  $L^{p/\sigma}(B_J)$  est un espace normé, alors (3.2.6) dans  $L^p(B_J)$ -norme est majoré par

$$c \left( \sum_{i \geq 0} 2^{-iN\sigma} \left\| \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} |\Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f|^q \right)^{\sigma/q} \right\|_{L^{p/\sigma}(B_J)} \right)^{1/\sigma} \\ = c \left( \sum_{i \geq 0} 2^{-iN\sigma} \left\| \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} |\Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(B_J)} \right)^{1/\sigma}.$$

Par l'inclusion

$$L^p(\tilde{B}_{J-i-2}) \subset L^p(B_J)$$

et le fait que  $J^+ \geq (J-i-2)^+$  pour estimer cette expression par

$$c \left( \sum_{i \geq 0} 2^{-iN\sigma} \left\| \left( \sum_{j \geq (J-i-2)^+} 2^{jsq} |\Delta_{j,J-i-2}^{*,a} f|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\tilde{B}_{J-i-2})} \right)^{1/\sigma} \\ \leq c |B_J|^\tau \left( \sum_{i \geq 0} 2^{i(n\tau-N)\sigma} \right)^{1/\sigma} \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} \\ \leq c |B_J|^\tau \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}},$$

où la première inégalité est obtenue par théorème 2.1.1 et la deuxième inégalité par le fait que  $N > n\tau$ . On prend  $a \in (\frac{n}{\min(p,q)}, s)$ , puis en utilisant à nouveau la proposition 1.1.2 pour estiméé (3.2.7) par

$$c \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} |\Delta_{j,J}^{*,a} f(x)|^q \right)^{1/q}.$$

Cette expression, par théorème 2.1.1, dans  $L^p(B_J)$ -norme majoréé par

$$c |B_J|^\tau \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}}.$$

Nous avons donc pour tout  $J \in \mathbb{Z}$  et toute ball  $B_J$  de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $2^{-J}$

$$\frac{1}{|B_J|^\tau} \left\| (H_J)^{1/q} \mid L^p(B_J) \right\| \leq c \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}},$$

De ceci il résulte que

$$\|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} \mid M \leq c \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}},$$

pour tout  $f \in F_{p,q}^{s,\tau}$ .

*Etape 3.* Soit  $\Psi$  la fonction introduite dans le deuxième chapitre et en plus symétrie radiale. Nous utilisons une observation faite par Nikol'skij [3] (ou [5]). On pose

$$\psi(x) = (-1)^{M+1} \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^i C_i^M \Psi(x(M-i)).$$

La fonction  $\psi$  satisfait  $\psi(x) = 1$  pour  $|x| \leq 1/M$  et  $\psi(x) = 0$  pour  $|x| \geq 3/2$ . Alors, on prend

$$\varphi_0(x) = \psi(x),$$

$$\varphi_1(x) = \psi(x/2) - \psi(x)$$

et

$$\varphi_j(x) = \varphi_1(2^{-j+1}x)$$

pour  $j = 2, 3, \dots$ , on obtienr que  $\{\varphi_j\}$  est une partition de l'unité. Donc

$$\sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left\| \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} |\Delta_j f|^q \right)^{1/q} \mid L^p(B_J) \right\|$$

est une norme équivalente à  $F_{p,q}^{s,\tau}$ . Laissez-nous de prouver que

$$\frac{1}{|B_J|^\tau} \left\| \left( \sum_{j \geq J^+} 2^{jsq} |\Delta_j f|^q \right)^{1/q} \middle| L^p(B_J) \right\| \leq c \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau} \big|_M}, \quad (3.2.8)$$

pour toute boule  $B_J$  de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $2^{-J}$ . D'abord le côté gauche contient  $\Delta_0 f$  seulement quand  $J^+ = 0$ . Ce qui donne

$$\|\Delta_0 f\|_{L^p(B_J)} \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^p(\overline{B_J})} |\mathcal{F}^{-1}\psi(y)| dy,$$

où  $\overline{B_J}$  est une boule de centre  $x_0 + y$  et de rayon  $2^{-J}$ . Alors

$$\begin{aligned} \|\Delta_0 f\|_{L^p(B_J)} &\leq c |B_J|^\tau \|f\|_{L^p_\tau} \\ &\leq c |B_J|^\tau \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau} \big|_M}, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

où nous avons utilisé le fait que  $|\overline{B_J}| = |B_J|$ . De plus, cela vaut pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $j = 1, 2, \dots$

$$\Delta_j f(x) = (-1)^{M+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{2^{-j}v}^M f(x) \mathcal{F}^{-1}\tilde{\Psi}(v) dv,$$

with  $\tilde{\Psi}(\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\Psi(\cdot) - 2^{-n}\mathcal{F}^{-1}\Psi(\cdot/2)$ , voir [2, Theorem 3.1]. Pour  $j \in \mathbb{N}$  on écrit

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{2^{-j}v}^M f(x)| |\mathcal{F}^{-1}\tilde{\Psi}(v)| dv \\ &= \int_{|v| \leq 1} |\Delta_{2^{-j}v}^M f(x)| |\mathcal{F}^{-1}\tilde{\Psi}(v)| dv + \int_{|v| > 1} |\Delta_{2^{-j}v}^M f(x)| |\mathcal{F}^{-1}\tilde{\Psi}(v)| dv. \end{aligned}$$

Ensuite, l'estimation de (3.2.8) est une conséquence évidente de (3.2.9) et le lemma 2.2.3.

Alors,

$$\|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau} \big|_M},$$

ce qui complète la preuve. ■

# Conclusion

Dans notre travail on a donne la caractérisation des espaces de type de Triebel-Lizorkin par les différences. Tous ces résultats sont des généralisations des résultats classiques connus dans les espaces de Triebel-Lizorkin.

# Bibliographie

- [1] D. Drihem, *Atomic decomposition of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces*, Sci. China. Math. 56 (2013), no. 5, 1073–1086.
- [2] D. Drihem, *Characterizations of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces by differences*, J. Funct. Spaces Appl., 2012, Article ID 328908, 24 pp.
- [3] S. M. Nikol'skij, *Approximation of function of several variables and imbedding theorem*, Springer, Berlin, 1975.
- [4] Y. Sawano, D. Yang, W. Yuan, *New applications of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces*, J. Math. Anal. Appl. 363 (2010), no. 1, 73-85.
- [5] W. Sickel, *On pointwise multipliers for  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  in case  $\sigma_{p,q} < s < n/p$* , Ann. Mat. Pura. Appl. 176 (1999), 209-250.
- [6] W. Sickel, D. Yang, W. Yuan, *Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2005, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [7] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.
- [8] H. Triebel, *Theory of function spaces. II*, Birkhäuser, Basel, 1992.
- [9] H. Triebel, *Theory of Function Spaces. III*, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [10] D. Yang, W. Yuan, *A new class of function spaces connecting Triebel-Lizorkin spaces and  $Q$  spaces*, J. Funct. Anal. 255 (2008), 2760-2809.
- [11] D. Yang, W. Yuan, *New Besov-type spaces and Triebel-Lizorkin-type spaces including  $Q$  spaces*, Math. Z. 265 (2010), 451-480.

- [12] D. Yang, W. Yuan, *Characterizations of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces via maximal functions and local means*, *Nonlinear Anal.* 73 (2010), 3805-3820.

## ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة فضاءات من نوع ليزور كين-تريبيل حيث قمنا بإعطاء تعريفات وتطرقتنا لبعض الخصائص لهذه الفضاءات بالإضافة إلى توصيف الفرق المحدد لهذه الفضاءات.

## **كلمات مفتاحية :**

الفرق المحدود, فضاء ليزور كين-تريبيل , فضاء من نوع ليزور كين-تريبيل , الدالة القصوى لبيتر.

## Résumé:

Dans ce mémoire nous avons étudié les espaces de type de Triebel-Lizorkin, où nous devons donner quelque définitions et quelques propriétés pour ces espaces. On plus on donne une caractérisation par les différences finies pour ces espaces.

## **Mots clés:**

Différence finie, l' espace de Triebel-Lizorkin, l' espace de type de Triebel-Lizorkin , fonction maximale de Peetre.

## Abstract:

In this thesis we have studied the Triebel-Lizorkin type spaces, where we have to give some definitions and some properties for these spaces. We give a finite difference characterization for these spaces.

## **Key words:**

Finite difference, the Triebel-Lizorkin space, the Triebel-Lizorkin type space, the maximum function of Peetre.