



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse mathématique et numérique

Par

Khanous Soulef

Sujet

Problème d'écoulement bidimensionnel à surface libre
linéaire

Devant le jury :

Mr. Nadir Mostafa	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. Gasmi Abdellcader	Prof. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. Blizak Tahar	M.A.A. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

*Je tiens à remercier en premier lieu, **ALLAH** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.*

*J'exprime toute ma reconnaissance et mes sincères sentiments à mon encadreur **Mr GASMI ABDELKADER** qui ma permis d'effectuer ce travail dans les meilleurs conditions, et m'apporté une aide précieuse et un soutien amical.*

Je remercie également les membres de jury et tous mes enseignants.

Merci enfin à ma famille et à tous mes amis de m'avoir soutenue et supportée tout au long de ce cheminement.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A ma soeur.

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les Étudiants et Étudiantes de ma promotion,

En fin je dèdie ce mèmorie à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions fonctions à variable complexe et quelques sur la mécanique des fluides	1
1.1 Fonctions à variable complexe	1
1.1.1 Fonctions analytiques	1
1.1.2 Conditions de Cauchy-Riemann	2
1.1.3 Théorème de Bernoulli	2
1.1.4 Fonction Harmonique	3
1.1.5 Formules de Green	4
1.1.6 Théorème de Schwartz	5
1.1.7 Différentielle totale	5
1.2 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides	5
1.2.1 Les fluides	5
1.2.2 La masse volumique	6
1.2.3 La densité	6
1.2.4 Poids volumique	7
1.2.5 Volume massique (volume spécifique)	8
1.2.6 Les différentes cas de la matiere	8
1.2.7 Ecoulements bidimensionnels	9
1.2.8 Ecoulement stationnaire ou permanent	9
1.2.9 Type des écoulements	9

1.2.10	La viscosité	11
1.2.11	Vitesse en un point de l'écoulement	12
1.2.12	Vitesse moyenne	12
1.2.13	Lignes équipotentiellles et ligne le courant	12
1.2.14	Fonction de courant en 2 dimension	12
1.2.15	Fonction de potentiel	13
1.2.16	La Potentiel complexe	14
1.2.17	Equations de Stokes	15
1.2.18	Equation d'Euler	15
2	Quelques types d'écoulement	16
2.1	Écoulement permanent	16
2.2	Écoulement permanent uniforme	16
2.3	Écoulement permanent varié	17
2.4	Régime transitoire	17
2.5	Calcul des écoulements Permanents uniformes	18
2.5.1	Rappel de définitions	18
2.5.2	Equation de continuité	18
2.5.3	Equation de régime uniforme	18
2.6	Écoulements permanents graduellement variés	21
2.6.1	Présentation du problème considéré	21
2.6.2	Equation de la ligne d'eau tirant d'eau normal	21
2.6.3	Tirant d'eau critique	22
2.6.4	Écoulements transitoires	23
3	Les transformations conformes	24
3.1	La transformation	24
3.2	Forme complexe d'une transformation	24
3.3	Représentation conforme	25
3.4	Quelques transformations	27
3.4.1	Quelques transformations generales	27

3.5	La transformation de Schwartz-Christoffel	30
4	Écoulement linéaire à surface libre générés par le déplacement d'un objet	34
4.1	Introduction	34
4.2	Les équation non linéaires exactes	34
4.3	Théorie linéaire	35
4.3.1	Solution dans l'eau de profondeur finie	35
	Conclusion	39
	Bibliographie	40

Introduction

Les méthodes mathématiques pour la résolution des problèmes à surface libre dans de la mécanique des fluides a reconnu des développements rapides. Aujourd'hui, on constate que la mécanique des fluides est un domaine très vaste de la recherche scientifique avec de nombreux problèmes ouverts.

Dans ce travail on donne une étude de modélisation et formulation puis de résolution d'un problème d'un écoulement bidimensionnel à surface libre linéaire généré par le déplacement d'une perturbation, le fluide est considéré comme incompressible et inviscide, le problème est caractérisé par la surface libre qui est de forme inconnue et qui doit être déterminée comme une partie de la solution du problème.

Ce mémoire se décompose de quatre chapitres:

Dans le premier chapitre nous rappelons les notions fondamentales de la mécanique des fluides, telle que on traite les types des écoulements et quelques équations de la mécanique des fluides (Bernoulli, d'Euler, Stokes, ...etc), et on définit aussi les lignes de courant, et la viscosité.

Dans le deuxième chapitre, l'équation de continuité, l'équation de régime uniforme, les écoulements permanents graduellement variés.

Dans le troisième chapitre on définit la transformation, et représentation conforme, et quelques transformations, et on définit la transformation de Schwarz-Christoffel.

Dans le quatrième chapitre on traite un problème d'un écoulement bidimensionnel généré par le déplacement d'une perturbation d'un fluide incompressible et non visqueux où on considère que les effets de la gravité et la tension superficielle seront négligés. On a utilisé la technique de perturbation linéaire pour résoudre ce problème.

Chapitre 1

Notions fonctions à variable complexe et quelques sur la mécanique des fluides

Introduction

Dans ce chapitre, on présente quelques concepts de base de la mécanique des fluides, propriétés des fluides, et Équations fondamentales du mouvement des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et la viscosité et les ligne de courant.

1.1 Fonctions à variable complexe

1.1.1 Fonctions analytiques

Définition 1.1.1 Soit Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. f est dit holomorphe sur Ω si f dérivable en toute point de Ω .

Définition 1.1.2 Tout fonction analytique peut être développée en série entière c'est-à-dire :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n . \quad (1.1.1)$$

Théorème 1.1.1 Soit f une fonction analytique à l'intérieure d'un domaine Ω et sur sa frontière fermé σ , on a pour chaque valeur $z_0 \in \Omega$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad . \quad (1.1.2)$$

Proposition 1.1.1 Toute fonction analytique sur Ω est holomorphe sur Ω .

1.1.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Définition 1.1.3 Une condition nécessaire pour que $w = f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ soit analytique dans un ouvert connexe Ω est que dans Ω , P et Q vérifient les conditions suivantes dites de Cauchy -Riemann:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad . \quad (1.1.3)$$

les fonction $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont souvent appelées fonctions conjuguée, si on le connaît l'une entre elle, on peut déterminer l'autre (à une constante additive près) de telle manière que $P + iQ = f(z)$ soit analytique.

1.1.3 Théorème de Bernoulli

Si l'écoulement est stationnaire l'équation d'Euler se réduit à :

$$(\nabla \times q) \times q = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + \varphi \right) \quad . \quad (1.1.4)$$

En prenant le produit scalaire de (1.4) avec q on obtient:

$$q \cdot \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + \varphi \right) = 0 \quad . \quad (1.1.5)$$

De sorte que pour un fluide idéal :

$$\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi = H \right) \quad . \quad (1.1.6)$$

est constant le long d'une ligne de courant (**Bernoulli**).

1.1.4 Fonction Harmonique

Définition 1.1.4 Une fonction $f = \varphi + i\psi$ définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{C} est **harmonique** si elle est de classe \mathcal{C}^2 et vérifie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad (1.1.7)$$

Définition 1.1.5 Si les dérivées secondes des φ et ψ existent par rapport à x et y sont continues les conditions de Cauchy-Riemann nous donne:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = 0 \quad . \quad (1.1.8)$$

les fonctions harmoniques sont intimement liées aux fonctions holomorphes ainsi:

- toute fonction holomorphe est harmonique (C'est une conséquence des équations de Cauchy -Riemann);

- **La propriété de la moyenne :**

Si f est harmonique dans un ouvert Ω , si $D(a, r)$ est un disque contenu dans Ω , alors:

$$f(a) = \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \quad . \quad (1.1.9)$$

Autrement dit, la valeur de f en a est la moyenne des valeurs prises par f sur le cercle de centre a et de rayon r

Réciproquement, si une fonction f est continue et si elle vérifie la propriété de la valeur moyenne, alors elle est harmonique (en particulier, elle est C^2 et même analytique comme toute fonction harmonique)

- **Le prolongement harmonique:**

Si U est continue sur le cercle de centre a et de rayon r , il existe une unique fonction f définie sur le disque fermé de centre a et de rayon r qui est harmonique et qui est égale à U sur le cercle. En particulier, le problème de Dirichlet admet toujours une solution pour un disque

1.1.5 Formules de Green

Théorème 1.1.2 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière $\partial\Omega$ de classe C^1 . Soit u, v deux fonctions de classe C^2 dans $\overline{\Omega}$

Alors:

Première formule de Green:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\lambda = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma . \quad (1.1.10)$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue et $d\sigma$ la mesure Euclidienne sur $\partial\Omega$.

Une formule de Green utile pour les fonctions harmoniques:

Théorème 1.1.3 Soit u une fonction définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , à valeurs dans \mathbb{R} on pose $z = x + iy$, et D le disque de centre z_0 et de rayon $r > 0$. Alors on a:

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) \frac{d\theta}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \iint_D \Delta u(z) \log \frac{|z - z_0|}{r} \, dx dy . \quad (1.1.11)$$

1.1.6 Théorème de Schwartz

Théorème 1.1.4 Si les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues au voisinage de (x_0, y_0) alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) . \quad (1.1.12)$$

Corollaire 1.1.1 Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Si f est deux fois dérivable en un point, alors sa matrice hessienne en ce point est symétrique.

1.1.7 Différentielle totale

On appelle différentielle totale de 1^{er} ordre d'une fonction f l'expression:

$$\partial f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy . \quad (1.1.13)$$

1.2 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.2.1 Les fluides

Un fluide est un milieu matériel continu déformable, sans rigidité qui peut s'écouler c'est-à-dire subir de grandes variations de forme sous l'action de force plus les forces sont faibles, plus les variations de forme se déroulent lentement.

La notion de fluide s'oppose à celle de solide, cependant on considère les fluides et les solides comme des ensembles de particules matérielles infiniment petites.

-Solidement liées entre elles dans le cas des solides.

-Libres de se déplacer les unes par rapport aux autres le cas des fluides.



Crue de la Loire au barrage de Grangent en novembre 2008 : chute et ressaut hydraulique (régime rapidement varié)

figure 1.2

1.2.2 La masse volumique

La masse volumique d'une substance est la quantité de matière contenue dans une unité de volume de cette substance c'est-à-dire:

c'est le rapport entre la masse (M) et le volume occupé (v). Elle peut être exprimée de différentes manières :

$$\rho = \frac{M}{v} . \quad (1.2.1)$$

1.2.3 La densité

d'une substance est égale à la masse volumique de la substance divisée par la masse volumique du corps de référence à la même température. Pour les liquides et les solides, l'eau est utilisée comme référence, pour les gaz, la mesure s'effectue par rapport à l'air. Elle est notée (d) et n'a pas d'unité (grandeur physique sans dimension).

1.2.4 Poids volumique

Le poids volumique d'un fluide représente le rapport entre le poids et le volume de ce fluide:

$$w = \frac{Mg}{v} = \rho g . \quad (1.2.2)$$

Où:

w:Poids volumique en (N/m^3)

M:masse en (kg)

g:accélération de la pesanteur en (m/s^2)

v:volume en (m^3)

Exemple 1.2.1

Calculer la masse volumique, le poids volumique et la densité de $6m^3$ d'huile pèsent $47KN$.

la solution

$$P = 47000N = Mg \implies M = \frac{p}{g} = \frac{47000}{9.81} = 4791.03Kg .$$

· **masse volumique**

$$\rho = \frac{M}{v} = \frac{4791.03}{6} = 798.5Kg/m^3 .$$

· **poids volumique**

$$\bar{w} = \rho g = 7833.33N/m^3 .$$

· **densité**

$$d = \frac{\rho}{\rho_{eau}} = \frac{798.5}{1000} = 0.798 .$$

Poids $\bar{w} = \frac{G}{V} \implies G = \bar{w} * v = \rho g v = 0.9 \cdot 10^3 \cdot 9.81 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 26.48N$

masse $M = \rho * v = 0.9 \cdot 10^3 * 3 \cdot 10^{-3} = 2.7 kg$ $M = \frac{G}{g} = \frac{26.48}{9.81} = 2.7kg$

Exemple 1.2.2

Déterminer le poids volumique de l'essence sachant que sa densité $d = 0,7$. On donne:

- l'accélération de la pesanteur $g = 9,81m/s^2$.
- la masse volumique de l'eau $\rho = 1000kg/m^3$.

la solution

$$\bar{w} = \rho g \implies 0.7 * 1000 * 9.81 = 6867 N/m^3 .$$

1.2.5 Volume massique (volume spécifique)

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance, c'est l'inverse de la masse volumique:

$$v = \frac{V}{M} = \frac{v}{\rho v} = \frac{1}{\rho} \quad m^3/kg . \quad (1.2.3)$$

1.2.6 Les différents cas de la matière

on distingue trois états de la matière:

1-État Solide: Caractérisé par une grande cohésion des molécules il a une forme et un volume propres.

2- État Liquide: Peut être lié → liquides très déformable il n'a pas de forme propre et il a un volume propre → incompressible.

3- État gazeux: Un fluide est un milieu matériel parfaitement déformable on groupe sous cette application les plasmas, les gaz qui sont l'exemple des fluides compressibles et les liquides qui sont des fluides peu compressibles.

1.2.7 Écoulements bidimensionnels

Les problèmes à surface libre peuvent être définies comme des problèmes dont la formulation mathématique produit des surfaces à déterminer comme une partie de la solution du problème chaque surface est appelée: **surface libre**

On dit qu'un écoulement est bidimensionnel si le vecteur vitesse à chaque point est parallèle à un plan fixe c'est-à-dire l'une de ses composantes du vecteur vitesse est nulle

- On dit qu'un écoulement est stationnaire si la vitesse U est constante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 . \quad (1.2.4)$$

par rapport au temps

-Il existe une fonction φ tel que:

$$U = \nabla\varphi . \quad (1.2.5)$$

- L'équation de continuité devient:

$$\Delta\varphi = 0 . \quad (1.2.6)$$

au lieu de considérer le plan (x, y) on introduit la notion des variables complexes $Z = x + iy$

1.2.8 Écoulement stationnaire ou permanent

Un écoulement est stationnaire par rapport à un référentiel lorsque la vitesse et les autres variables ne dépendent plus du temps. il y a alors identité entre trajectoire, ligne d'émission et ligne de courant, les systèmes référentiels devenant identiques.

1.2.9 Type des écoulements

*Écoulement irrotationnel

Un fluide est dite irrotationnel si:

$$\vec{rot}(\vec{V}) = 0 . \quad (1.2.7)$$

$$rot \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

(V la vitesse d'écoulement)

*Écoulement permanent

on dit qu'un écoulement est permanent ou stationnaire, si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 . \quad (1.2.9)$$

*Écoulement incompressible

on appelle un écoulement incompressible si la densité ou masse par unité de volume est constante, si V_n désigne la composante normale du vecteur vitesse sur C cette condition s'écrite sous la forme:

$$\oint_c V_n ds = \oint_c V_x dy - V_y dx = 0 . \quad (s1)$$

ou

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad . \quad (\text{s2})$$

ce que exprime que la quantité de fluide contenue dans C est constant , **i.e** la quantité de fluide entrant dans C est égale la quantité de fluide qui en sort.

pour cette raison l'équation **s1** et **s2** est appelée l'équation de continuité .

***Écoulement parfait**

Un écoulement parfait est une approximation dans le cas où les effets visqueux sont négligeable, et un fluide parfait possédant une viscosité rigoureusement nulle il n'y a aucune implication que un sens.

fluide parfait \implies écoulement parfait.

voir figure(1.3)

1.2.10 La viscosité

La viscosité d'un liquide constitue une résistance à la déformation ou bien au glissement relatif de ses couches, cette propriété se manifeste par le fait que dans un liquide réel toutes les conditions déterminées naissant des contraintes tangentielles.

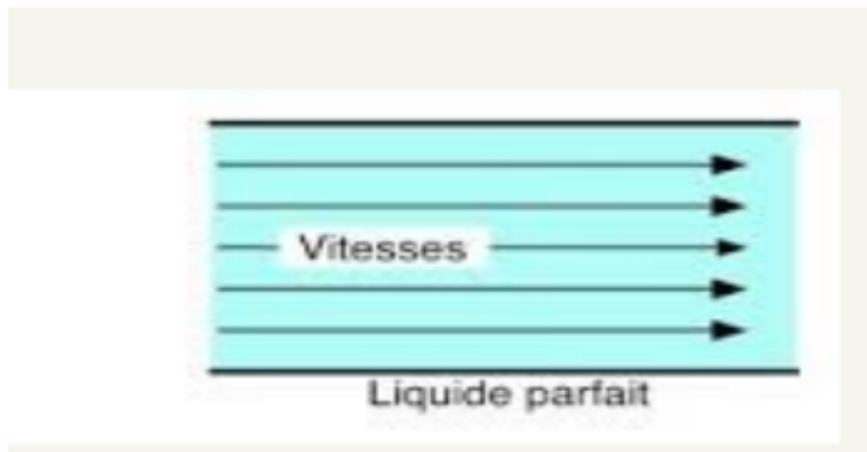


figure 1.3:Représentation de la vitesse dans un écoulement parfait

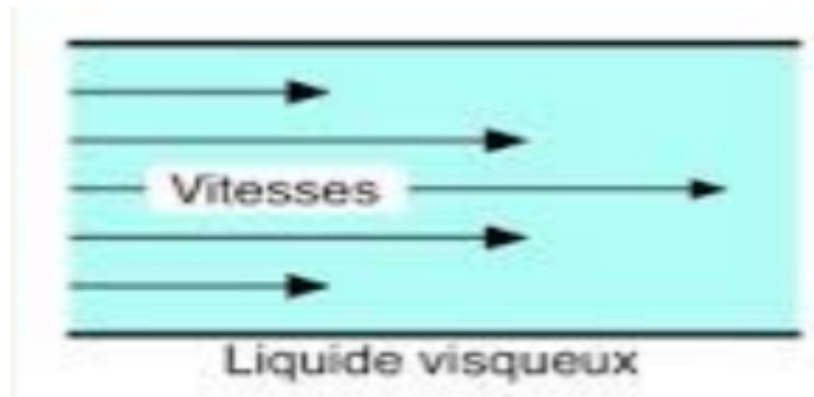


figure 1.4:Représentation de la vitesse dans un écoulement visqueux

Exemple 1.2.3

Déterminer la viscosité dynamique d'une huile moteur de densité $d = 0.9$ et de viscosité cinématique $v = 1.1St$.

la solution

$$v = \frac{\mu}{\rho} \implies \mu = v * \rho = 1.1 * 10^{-4} . 900 = 0.099 Pa.s$$

1.2.11 Vitesse en un point de l'écoulement

La vitesse (v) en un point de l'écoulement est celle de la particule qui passe en ce point au moment considéré d'après la discription.

1.2.12 Vitesse moyenne

La vitesse moyenne est par définition $V = Q/S$ C'est à dire:

$$V = \frac{\iint v.ds}{S} . \quad (1.2.10)$$

désignant un élément de surface ($S = \iint ds$) .

1.2.13 Lignes équipotentiellles et ligne le courant

Les familles des courbes:

$$\phi(x, y) = \alpha \quad \psi(x, y) = \beta \quad . \quad (1.2.11)$$

Où α et β désignent des constantes, sont des familles orthogonales et sont appelées respectivement les lignes équipotentiellles et les lignes de courant. dans le cas d'un écoulement permanent les lignes de courant représentent les trajectoires des particules du fluide, la fonction ψ est appelée la fonction de courant cependant que comme déjà - la fonction ϕ est appelée le potentiel des vitesses .

1.2.14 Fonction de courant en 2 dimension

Définition 1.2.1 On suppose que l'écoulement est clairement subsonique soit $\vec{w} = u\vec{i} + v\vec{j}$ le champ des vitesses, on considère le champ complexe des vitesses $w = u + iv$ et on définit $\zeta = x + iy$ on définit $z = -i\zeta$ comme $\nabla \vec{w} = 0$,la fonction $w(z)$ est holomorphe. En application du théorème intégrale de Cauchy il existe une fonction complexe $\psi(z)$ telle que:

$$w(z) = \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} \quad . \quad (1.2.12)$$

soit $\psi(z)$ la partie réelle de ψ . En coordonnées cartésiennes , on a alors:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad . \quad (1.2.13)$$

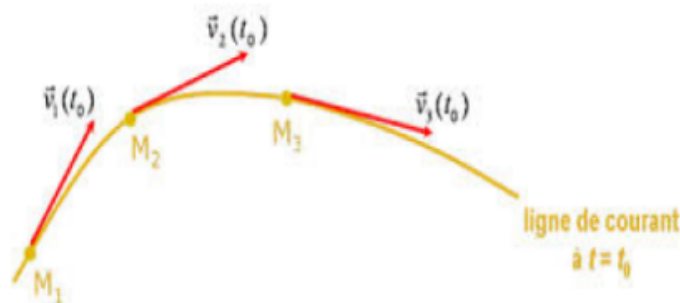


Figure 1.5 S'écoulant autour d'un solide

1.2.15 Fonction de potentiel

On dit que un écoulement est irrotationnel si on a:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \vec{0} . \quad (1.2.14)$$

on peut toujours représentée la vitesse par le gradient d'une fonction scalaire:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi . \quad (1.2.15)$$

La fonction ϕ s'appelle fonction potentiel

On peut donc écrire que :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} . \quad (1.2.16)$$

1.2.16 La Potentiel complexe

Définition 1.2.2 On dit que f est analytique au point z_0 s'il existe un voisinage v de z_0 :
 $|z - z_0| < \delta$ tel que $f(z)$ existe à chaque point de v .

la fonction potentielle de vitesse f et la vitesse est donnée par $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$f = \varphi + i\psi$$

alor on:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} , \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} . \end{array} \right. \quad (1.2.17)$$

$$df = d\varphi + id\psi \quad (1.2.18)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + i \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + i \frac{\partial \psi}{\partial y} dy , \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy , \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} (dx + i dy) - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} (dx + i dy) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} , \\ &= u_x - i v_y . \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} , \\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} . \end{cases} \quad (1.2.19)$$

la vitesse (applée aussi vitesse complexe) est donc donnée par:

$$v = V_x - i V_y = \overline{\partial f / dz} = \overline{f'(z)} . \quad (1.2.20)$$

et a pour module:

$$V = |v| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = | \overline{f'(z)} | = \overline{|f'(z)|} . \quad (1.2.21)$$

les points pour les quels la vitesse est nulle, i.e. $f'(z)=0$ sont appellées points d'arrêt, la fonction $f(z)$ dont l'importance est fondamentale dans la caractérisation d'un écoulement est appelée le potentiel complexe.

1.2.17 Equations de Stokes

Le système de stokes qui décrit l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible en régime permanent et à faible nombre de reynolds s'écrit :

$$\eta \Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad} p} - \rho \vec{f} \text{div} . \vec{v} = 0 . \quad (1.2.22)$$

1.2.18 Equation d'Euler

L'équation d'euler découle de l'équation de **Navier-Stokes** le cas des fluides non-visqueux cette dernière découle du principe fondamental de la dynamique (PFD) dans le cas des fluides:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + X . \quad (1.2.23)$$

v : est la vitesse du fluide

t : temps

ρ : est la masse volumique du fluide

p :est la pression dans le fluide

X : est la force du corps

Chapitre 2

Quelques types d'écoulement

2.1 Ecoulement permanent

On dit qu'un écoulement est régime permanent, si son débit \dot{Q} est constant dans le temps, le tirant d'eau y en un point donné est donc aussi constant.

En pratique, on peut calculer en régime permanent des canaux d'irrigation, des écoulements en rivière à l'étiage ou en régime moyen, mais le calcul d'un écoulement en crue rapide ne peut pas être abordé par le régime permanent.

le régime permanent peut être uniforme ou varié selon la géométrie du chenal.

2.2 Ecoulement permanent uniforme

On dit qu'un écoulement est uniforme lorsque les caractéristiques géométriques de domaine de l'écoulement sont constantes tout le long du tronçon.

section mouillée S , pente; ainsi que la rugosité des parois. le tirant d'eau est constant tout au long du tronçon "appelé tirant d'eau normal", dans le cas contraire l'écoulement est dit varié

permanent uniforme:

S , i (>0) et rugosité, indépendantes de x ; \dot{Q} indépendant de T ;

y indépendant de x et de T

"appelé tirant d'eau normal"

2.3 Écoulement permanent varié

L'écoulement est varié lorsque la géométrie ou la rugosité ne sont pas constantes, mais il l'est aussi dans un tronçon dont la géométrie et la rugosité sont constantes si le tirant d'eau n'est pas constant .

Nous distinguerons les écoulements graduellement ou rapidement variés.

2.4 Régime transitoire

En régime transitoire le débit varie en fonction du temps, et il en va donc de même du tirant d'eau en chaque point du cours d'eau, le calcul du laminage d'une crue par un banage est typiquement un problème de calcul transitoire, de même le calcul d'un écoulement de rivière en crue.

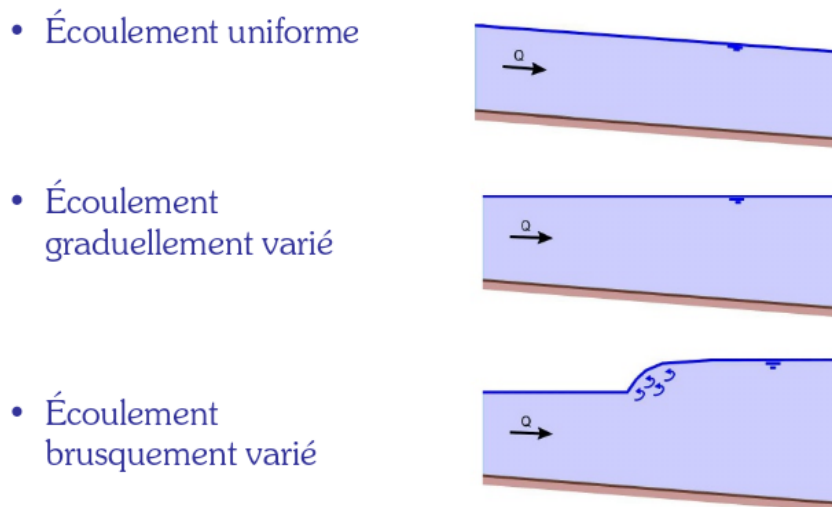


Figure2.1 Différents types d'écoulements

2.5 Calcule des écoulements Permanents uniformes

2.5.1 Rappel de définitions

Un écoulement permanent est un autre uniforme lorsque la géométrie, la pente et la nature des parois restent inchangées et lorsque le tirant d'eau (y) garde une valeur constante, un écoulement réellement uniforme se rencontre rarement dans les rivières. mais plutôt dans les canaux de grande longueur à section et pente constantes. C'est néanmoins un écoulement auquel on se réfère souvent même dans l'étude des problèmes réels non uniformes souvent par simplifications de parler d'écoulement uniforme, au sens d'écoulement permanent uniforme.

2.5.2 Equation de continuité

En mécanique des fluides, le principe de la conservation de la masse peut être décrit par l'équation de continuité sous plusieurs formes différentes :

- conservation local " dérivée en temps normale " ,
- non conservative local " la dérivée en temps suit la particule dans son mouvement " ,
- $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ la masse volumique du fluide au point repéré par le vecteur \vec{x} à l'instant t ,
- $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ la vitesse d'une particule de fluide se trouvant au point repéré par la vecteur \vec{x} à l'instant t ,

cette écriture est la plus générale et la plus répandue de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 . \quad (2.5.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\vec{u}) = 0 . \quad (2.5.2)$$

2.5.3 Equation de régime uniforme

Soit :

$$i = -dz_f/dx . \quad (2.5.3)$$

la pente du fond , la pente de la surface libre lui est aussi égale car le tirant d'eau est constant dans l'espace , la charge moyenne en une section est par définition :

$$H = y + z + v^2/2g . \quad (2.5.4)$$

C'est le théorème de bernoulli qui exprime que dans un écoulement permanent d'un fluide parfait "**viscosité nulle**" la charge est constante le long d'une ligne de courant .

mais nous intéressons à des liquide réels, donc visqueux , le théorème de bernoulli généralisé exprime simplement que la variation de la charge ΔH est égale à la la perte de charge $j \cdot \Delta x$

le perte de charge linéaire (**j**) est donc identique à la pente de la ligne de charge :

$$j = -dH/dx . \quad (2.5.5)$$

D'où:

$$j = -\frac{d}{dx} \left(y + z_f + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{dz_f}{dx} . \quad (2.5.6)$$

car **y** comme **V** sont constants il en résulte: $i = j$

AU passage , constatons qu'un écoulement uniforme n'existe que si la pente est positive

Dans un écoulement uniforme la ligne de charge. la surface libre et le fond sont parallèles

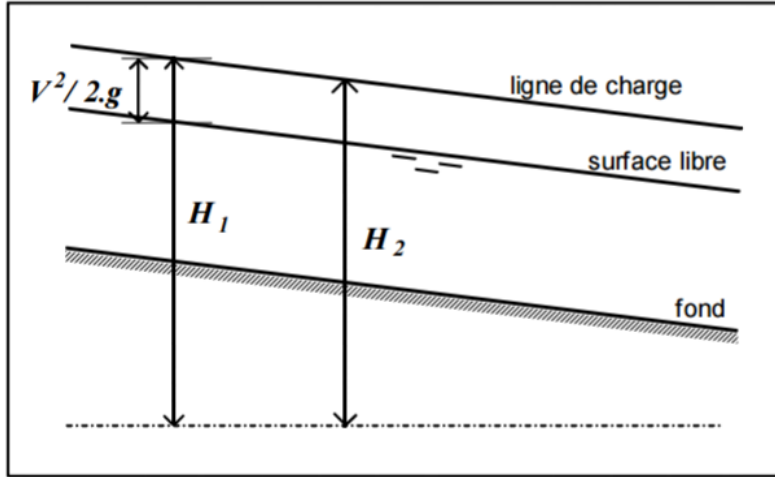


figure 2.2 écoulement uniforme

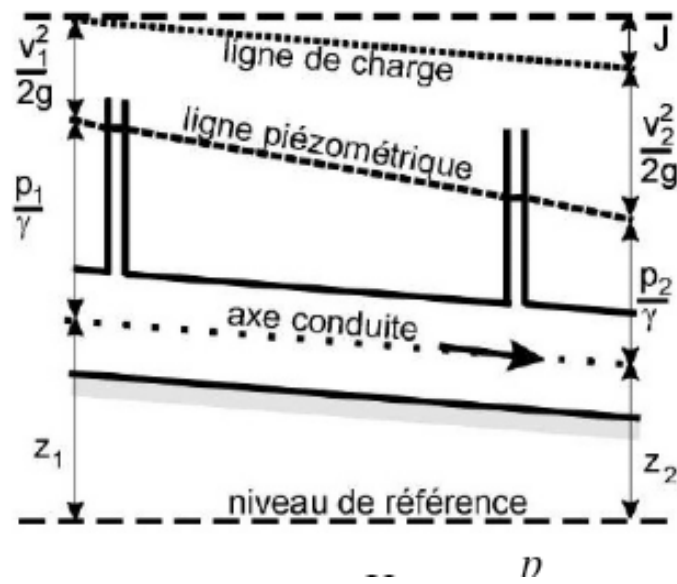


figure2.3

2.6 Ecoulements permanents graduellement variés

2.6.1 Présentation du problème considéré

En pratique dans un uniforme, c'est à dire de section pente et rugosité uniformes, le tirant d'eau n'est constant qu'à une grande distance des extrémités, près des extrémités, l'écoulement est varié, c'est à dire que le tirant d'eau, varié plus généralement, l'écoulement est également non uniforme lorsque le chenal est non uniforme (sa géométrie et /ou sa rugosité sont variables) un écoulement graduellement varié est obtenu lorsque:

- les dimensions, les formes, la rugosité, la pente du chenal varient faiblement sans brusquerie.
- le tirant d'eau varie faiblement.

2.6.2 Equation de la ligne d'eau tirant d'eau normal

Supposons connues la géométrie et la rugosité du chenal ainsi que la valeur du débit permanent nous cherchons la ligne d'eau, c'est-à-dire la relation entre le tirant d'eau et l'abscisse, la perte de charge vaut:

$$j = -\frac{dh}{dx} \quad (2.6.1)$$

on démontre facilement que :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i - j}{1 - \frac{\varphi^{2l}}{g \cdot s^3}} \quad (2.6.2)$$

Dans le second membre, φ et i sont des constantes connues et l et s sont des fonctions connues de y , reste le terme j , on considère que la perte de charge a la même valeur qu'en régime uniforme pour le même tirant d'eau et le même débit, donc:

$$j = \frac{\varphi}{k^2 \cdot s^2 \cdot R^{\frac{4}{3}}} \quad (2.6.3)$$

D'après la formule de Manning Strickles, les vue au, c'est donc aussi une fonction connue de y .

Nous avons bien une équation différentielle de la ligne d'eau puisqu'elle est du premier ordre, le remarque: lorsque $i = j$ on retrouve $\frac{dy}{dx} = 0$ "y = constante", c'est-à-dire le régime

uniforme , par définition le tirant d'eau normal (y_n) est la solution de l'équation différentielle en y : $\frac{dH_s}{dx} = 0$ or :

$$H_s = H - Z \implies \frac{dH_s}{dx} = i - j . \quad (2.6.4)$$

y_n est donc la solution de l'équation en y :

$$\varphi = k.s.R^{\frac{2}{3}}.i^{\frac{1}{2}} . \quad (2.6.5)$$

Nous constatons qu'en régime uniforme ($i = j$) ,le tirant d'eau réel est forcément le tirant d'eau normal ,En régime non uniforme ,si la pente est négative ,il ne peut exister de tirant d'eau normal.

Enfin si la pente est positive ,le tirant d'eau réel n'a aucune raison d'être égal au tirant d'eau normal.

2.6.3 Tirant d'eau critique

Le tirant d'eau est dit critique lorsque l'énergie spécifique est minimale.

or on démontre très facilement que l'énergie spécifique vérifie:

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 - \frac{\varphi^2}{g.s^3}.l . \quad (2.6.6)$$

le tirant d'eau critique vérifie donc $\varphi^2 l / g.s^3 = 1$ cette valeur est désignée par (y_c) .

le lecteur vérifiera facilement que l'énergie spécifique minimale est :

$$H = y_c + \frac{s_c}{2.l} \quad (2.6.7)$$

Dans le cas d'un chenal rectangulaire le tirant d'eau critique peut s'expliciter ainsi:

$$y_c = \sqrt{\frac{\varphi^2}{g.l^2}} = \frac{v^2}{g} . \quad (2.6.8)$$

et l'énergie spécifique minimale vaut $H = \frac{3}{2}y_c$.

2.6.4 Ecoulements transitoires

Les deux équation de base

Le problème est supposé unidimensionnel et l'eau est supposée incompressible "ce qui est parfaitement licite" comme pour le régime permanent, nous supposons connues la géométrie du chenal sa rugosité, et nous fixons un hydrogramme entrant $\varphi(t)$, q (supposé connu) désigne un apport latéral en $m^3/s/m$ (positif si c'est un apport, négatif c'est un départ, nul si le problème est conservatif).

Nous cherchons la ligne d'eau c'est à dire la relation entre le tirant d'eau et l'abscisse mais cette fois ci, nous avons à chaque instant deux inconnues : φ et y

En écrivant la conservation de la masse et celle de l'énergie, on obtient le système de deux équation différentielle à deux inconnues:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = q . \quad (2.6.9)$$

$$\frac{1}{g.S} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{g.S} \cdot \frac{\partial(\varphi^2/S)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} - i = -j = \frac{-\varphi^2}{k^2.S^2.R^{\frac{4}{3}}} . \quad (2.6.10)$$

le terme $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ traduit la raideur de l'hydrogramme, il est souvent négligeable dans les cas courants de propagation de crue, il ne l'est pas lors de crue provoquées par la rupture d'embâcles ou de barrages.

Chapitre 3

Les transformations conformes

3.1 La transformation

l'ensemble des équations:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} . \quad (3.1.1)$$

Definit on générale une transformation ou une représentation qui établit une correspondance entre les points du plan uv et les points du plan xy les équation (3.1.1) sont appelées équation de la transformation si à chaque point du plan des uv correspond un point et un seul du plan des xy on parlora d'une transformation biunivoque, dans un tel cas un ensemble des points du plan xy [tel qu'une courbe ou un ouvert connexe] et réciproquement les ensembles des points qui se correspondent ainsi dans les deux plan sont souvent dits images l'un de l'autre.

3.2 Forme complexe d'une transformation

Il est particulièrement intéressant de considérer le cas où u et v désignent la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction analytique de la variable complexe $Z = x + iy$ i.e $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$ dans un tel cas le jacobien de la transformation est:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2. \quad (3.2.1)$$

on en déduit que la transformation est conforme dans les domaines où $f'(z) \neq 0$. les points pour lesquels $f'(z) = 0$ sont appelés points critiques.

3.3 Représentation conforme

Supposons que le point (x_0, y_0) du plan des xy soit transformé le point du plan uv [figure 3.1 _ figure3.2] cependant que les courbes C_1, C_2 , se coupant en (u_0, v_0) une transformation telle que l'angle entre C'_1 et C'_2 en (u_0, v_0) est dit conforme en (x_0, y_0) une transformation qui conserve les angles en grandeur mais pas nécessairement en sens, est dite isogonal. **voir figure (3.1).(3.2)**

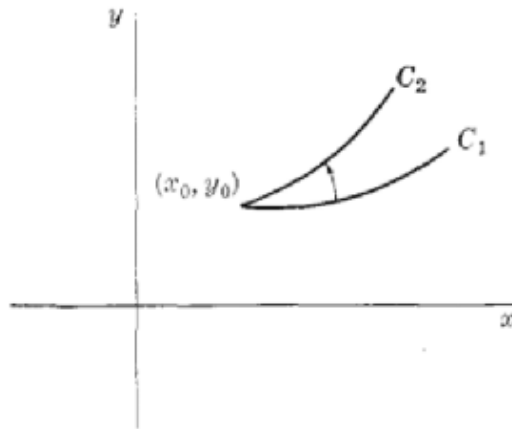
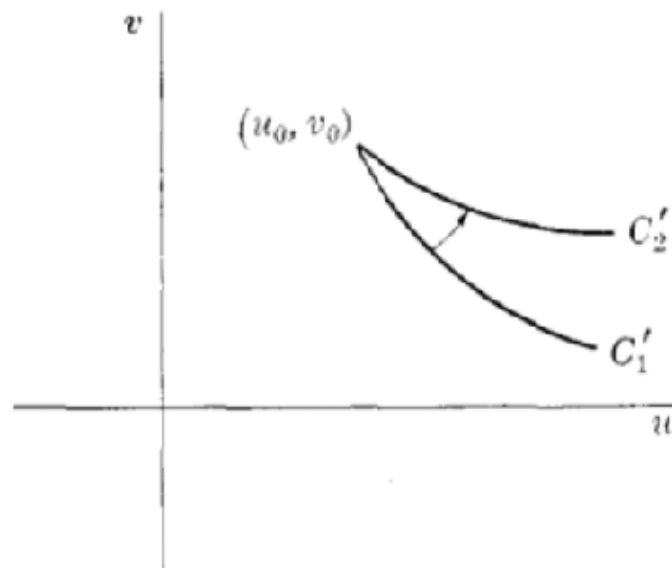


Figure 3.1 Le plan de xy

Figure 3.2 Le plan de w

3.4 Quelques transformations

3.4.1 Quelques transformations generales

Dans les exemples suivants α, β, γ sont des constantes complexes, a, θ_0 étant des constantes réelles:

Translation

$$\omega = z + \beta .$$

Par cette transformation les figures du plan z sont déplacées ou translattées dans la direction du vecteur β

Rotation

$$\omega = e^{i\theta_0} z .$$

Par cette transformation les figures du plan z subissent une rotation d'angle θ_0

Homothétie

$$\omega = \alpha z .$$

Par cette transformation les figures sont dilatées (ou contractées) si $\alpha > 1$ (si $0 < \alpha < 1$)

On considère la contraction comme un cas particulier de dilatation

Inversion

$$\omega = 1/z .$$

Pour z non nul transformées les cercles en cercles (droites, les lignes en droites) cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine

Transformation linéaire

$$\omega = \alpha z + \beta .$$

Où α et β sont des constantes complexes est appelée une transformation linéaire. Etant donné que l'on peut écrire $\omega = \alpha z + \beta$ au moyen des transformations successives $\omega = \zeta + \beta$, $\zeta = e^{i\theta_0}\tau$, $\tau = \alpha z$, $\alpha = ae^{i\theta_0}$ on voit que la transformation linéaire la plus générale s'exprime sous la forme de produit de la transformation telles que translation, rotation, homothétie

Transformation linéaire fractionnelle

la transformation:

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d} .$$

Avec a, b, c, d des complexes. Transformée les cercles en droites et respectivement

Transformation de Joukowski

La transformation de Joukowski est définie par : $\omega = \frac{\pi z}{\alpha}$

$$J(z) = z + \frac{1}{z} ; \forall z \neq 0 .$$

Cette application est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$ car:

$\forall z \neq 0, \quad J'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$ De plus $\forall z \notin \{-1, 0, 1\}, J'(z) \neq 0$, donc cette transformation est une application conforme sur tous les domaines ouverts d'un plan complexe n'incluant ni 0 ni 1 ni -1

$$\omega = \cos \frac{\pi z}{\alpha}$$

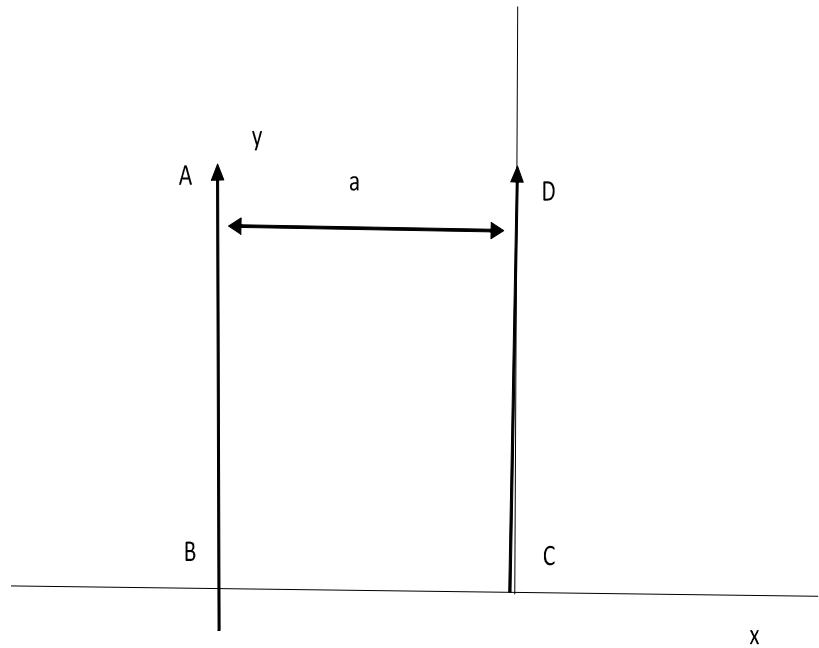


figure3.3 Plan de z

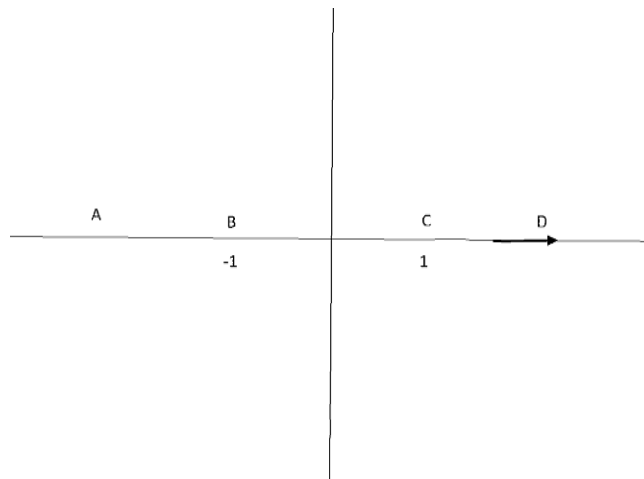


Figure 3.4 Plan w

3.5 La transformation de Schwartz-Christoffel

Considérons un polygone [Figure 3.5] dans le plan des w ayant pour sommets w_1, w_2, \dots, w_n pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ soit w_1, w_2, \dots, w_n les points correspondant respectivement à x_1, x_2, \dots, x_n de l'axe réel du plan [Figure 3.6], est donnée par.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1}, \dots, (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1}. \quad (3.5.1)$$

$$w = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1}, \dots, (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1}. \quad (3.5.2)$$

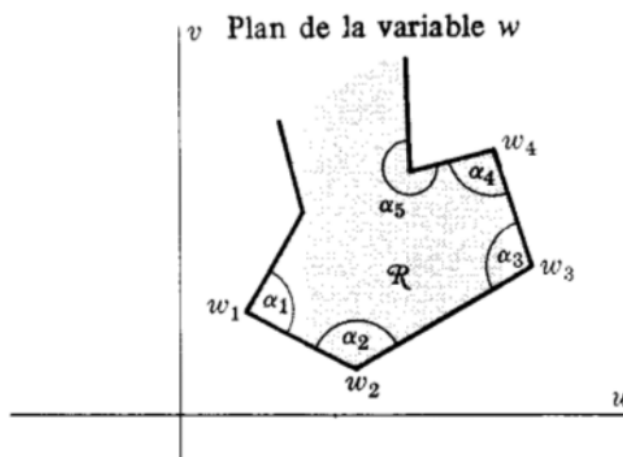
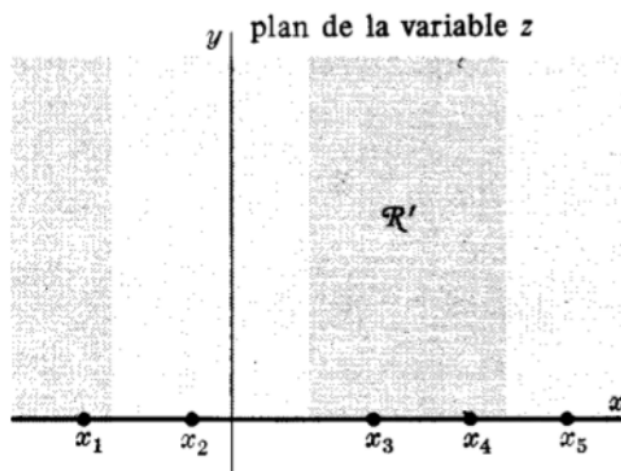


Figure 3.5 Plan de la variable w

Figure 3.6 Plan de la variable z

Une transformation qui représente l'intérieure \mathbf{R} du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des \mathbf{z} , et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donné par:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1} \alpha(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1}, \dots, \alpha(z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1}. \quad (3.5.3)$$

$$w = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1} (z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1}, \dots, (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1} dz + B. \quad (3.5.4)$$

ou A et B sont des constantes complexe

On notera que :

- 1: parmi les points x_1, x_2, \dots, x_n on peut en choisir trois arbitrairement.
- 2: les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et position u du polygone.
- 3: il est commode de choisir un point par exemple x_n l'infini, cas dans lequel de dernier facteur de (3.5.3) et (3.5.4) n'existe pas.
- 4: des polygone infinis non fermés peuvent être considérés comme des limites de polygones fermés.

Exemple 3.5.1 Transformation d'une tranche de fluide

Considérons une tranche de fluide entre deux plans horizontaux. Les points A,B,C sont en $+\infty$ et $-\infty$ définissent un polygone dégénéré. Dans la transformation de **Schwartz-Christoffel**, tous les points se retrouvent sur le même m'axe ($y = 0$) comme le montre Dans le plan image, A est situé $+\infty$; B' en b ; $c > b$ en $-\infty$. les angles dans le plan w entre les noeuds d'un polygone sont : $\alpha_B = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_C = \frac{\pi}{2}$, d'ou l'on tire: $p_B = \frac{-1}{2}$ et $p_C = \frac{-1}{2}$

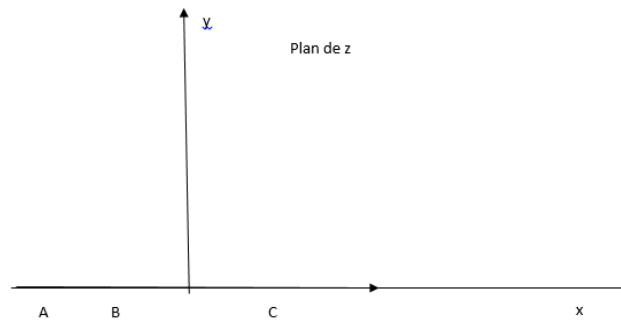
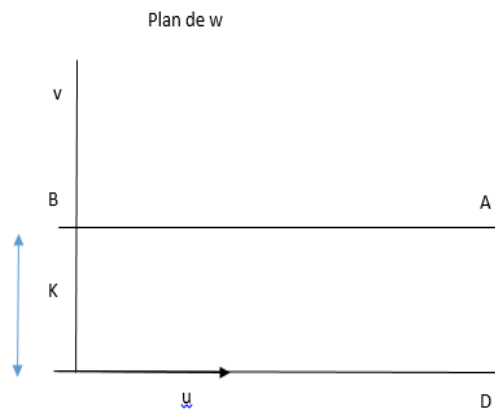


Figure3.7 Passage du plan w au plan z

L'équation de Schwartz-Christoffel donne:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = K(z - b)^{-\frac{1}{2}}(z - c)^{-\frac{1}{2}} = \frac{K}{z} . \quad (3.5.5)$$

d'où l'on tire

$$w(z) = 2K \ln(\sqrt{z-b} + \sqrt{z-c}) + w_0 . \quad (3.5.6)$$

on peut inverser cette équation et obtenir ainsi:

$$z = \frac{1}{2}(b-c) + \frac{1}{2}(b-c) \cosh(K(w-w_0)) . \quad (3.5.7)$$

Les paramètres b et c peuvent être choisis librement , mais par K et w_0 qui doivent être choisis de telle sorte que les points images soient bien les images souhaitées par la transformation $z(w)$.

Chapitre 4

Écoulement linéaire à surface libre généralisés par le déplacement d'un objet

4.1 Introduction

Dans ce chapitre , nous considérons les écoulements à la surface libre généralisés par une perturbation se déplaçant à une vitesse constante U .

nous choisissons un cadre de référence en mouvement avec la perturbation et supposons que l'écoulement est stable dans ce cadre nous limiterons notre attention à des écoulements linéaires à deux dimensions.

4.2 Les équation non linéaires exactes

Nous introduisons les coordonnées cartésiennes x comme axe des abscisses et y comme axe des coordonnées avec l'axe des x soit parallèle au fond , le problème totalement non linéaire peut être formulé en fonction d'une fonction potentielle $\phi(x, y)$:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial^2x} + \frac{\partial^2\phi}{\partial^2y} = 0 \quad - h < y < \eta(x) . \quad (4.2.1)$$

$$\phi_y = \phi_x \eta_x \quad sur \quad y = \eta(x) . \quad (4.2.2)$$

$$\frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + gy - \frac{t}{\rho} \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} + \varepsilon \frac{p(x)}{\rho} = b \quad \text{sur } y = \eta(x) . \quad (4.2.3)$$

$$\phi_y = 0 \quad \text{sur } y = -h . \quad (4.2.4)$$

$\phi_n = 0$ sur les surfaces mouillées des objets (le cas échéant)

Ici, $y = \eta(x)$ est l'équation de la surface libre et ϕ_n dénote la dérivé normale de ϕ . Le fond du canal est à $y = -h$. Les équations (4.2.2), (4.2.4) et (4.3.1) présentent les conditions aux limites cinématiques sur la surface libre, sur le fond et sur la surface de tout objet présent, respectivement. L'équation (4.2.3) est la condition aux limites dynamiques sur la surface libre. La quantité $\varepsilon P(x)$ est la distribution de pression prescrite; le paramètre ε mesure sa taille. Nous fixons la constante de Bernoulli B dans (4.2.3) en choisissant $y = 0$ comme élévation constant de la surface libre correspondant à $P = 0$ et à un uniforme écoulement à vitesse constante U . Cela conduit à:

$$B = \frac{1}{2}U^2$$

4.3 Théorie linéaire

4.3.1 Solution dans l'eau de profondeur finie

Nous supposons que le paramètre ε dans (4.2.3) est petit et cherchons un solution sous la forme d'une petite perturbation autour d'un ligne de courant uniforme avec vitesse constante U et profondeur constante h . Ceci est motivé par le fait que $\varphi(x, y) = Ux$, $\eta(x) = 0$ est une solution exacte de (4.2.1) – (4.2.4) lorsque $\varepsilon = 0$.

Les équations linéaires sont obtenues en développant les solutions en puissances de ε et ne conservant que les termes d'ordre ε . Par conséquent nous écrivons:

$$\phi(x, y) = Ux + \varepsilon\phi_1(x, y) + O(\varepsilon^2) \quad (4.3.1)$$

$$\eta(x) = \varepsilon\eta_1(x) + O(\varepsilon^2) \quad (4.3.2)$$

$$\phi_{1xx} + \phi_{1yy} = 0 \quad -h < y < 0 \quad (4.3.3)$$

$$\phi_{1y} = U\eta_{1x} \quad \text{sur } y = 0 \quad (4.3.4)$$

$$U\phi_{1x} + g\eta_1 - \frac{t}{\rho}\eta_{1xx} + \frac{p}{\rho} = 0 \quad \text{sur } y = 0 \quad (4.3.5)$$

$$\phi_{1y} = 0 \quad \text{sur } y = -h \quad (4.3.6)$$

$$\text{quand } P = 0 \quad ; \quad \text{quand } c = U \quad (4.3.7)$$

$$\phi_1 = \phi_{1p} \quad \eta_1 = \eta_{1p} \quad (4.3.8)$$

$$\phi_1 = \phi_{1p} \quad ; \quad \eta_1 = \eta_{1p} \quad (4.3.9)$$

$$\phi_1 = \phi_{1p} - \frac{UA_1}{\sinh kh} \cosh k(y+h) \sin k(x+\delta) \quad (4.3.10)$$

$$\eta_1 = \eta_{1p} + A_1 \cos k(x+\delta) \quad (4.3.11)$$

$$U\phi_{1x} + g\eta_1 - \frac{T}{\rho}\eta_{1xx} + \frac{p}{\rho} + \mu\phi_1 = 0 \quad \text{sur } y = 0 \quad (4.3.12)$$

·la limite $\mu \rightarrow 0$

$$U\phi_{1xx} + \frac{g}{U}\phi_{1y} - \frac{t}{\rho U}\phi_{1yxx} + \frac{p_x}{\rho} + \mu\phi_{1x} = 0 \quad \text{sur } y = 0 \quad (4.3.13)$$

·nous représentons $\phi_1(x, y)$ par l'intégrale de fourier:

$$\phi_1(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(a, y)e^{iax} da \quad (4.3.14)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} - a^2 F = 0 \quad -h < y < 0 \quad (4.3.15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } y = -h \quad (4.3.16)$$

$$F(a, y) = A(a) \cosh a(y + h) e^{iax} da \quad (4.3.17)$$

$$\phi_1(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(a) \cosh a(y + h) e^{iax} da \quad (4.3.18)$$

ici $A(a)$ est une fonction arbitraire de a , next nous écrivons la distribution de pression comme intégrale de fourier:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(a) e^{iax} da \quad (4.3.19)$$

la transformée de fourier inverse donne:

$$B(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-iax} dx \quad (4.3.20)$$

$$A(a) = \frac{iB(a)}{\rho U D(a) \cosh ah} \quad (4.3.21)$$

$$D(a) = a - \frac{g}{U^2} \tanh ah - \frac{ta^2}{\rho U^2} \tanh ah - i\mu_1 \quad (4.3.22)$$

$$\eta_1(x) = \frac{1}{\rho U^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} B(a) \tanh ah}{D(a)} da \quad (4.3.23)$$

pour simplifier la présentation supposons que $p(x)$ soit une fonction paire:

$$p(-x) = p(x) \quad (4.3.24)$$

$$B(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cos ax dx \quad (4.3.25)$$

donc $B(x)$ est une fonction même réelle de a et l'intégrale en (4.3.23) peut s'écrire comme le rapport d'un numérateur complexe et d'un dénominateur complexe.

$$\frac{R_N + iI_N}{R_D + iI_D} = \frac{R_N R_D + I_N I_D}{R_D^2 + I_D^2} + \frac{iR_D I_N - R_N I_D}{R_D^2 + I_D^2} \quad (4.3.26)$$

ici R_N et R_D sont de véritables fonctions impaires de a .

I_N et I_D sont de véritables fonctions paires de a

la partie réelle de (4.3.26) est une fonction paire de a et la partie imaginaire de (4.3.26) est une fonction impaire de donc (4.3.23) peut être écrit comme:

$$\eta_1(x) = \frac{2}{PU^2} R \int_0^{+\infty} \frac{e^{iax} B(a) \tanh ah}{D(a)} da \quad (4.3.27)$$

Où R désigne la partie réelle.

nous prenons maintenant la limit de (4.3.27) car μ_1 tebd à zéro

si $\check{R}D(a) \neq 0$ pour $0 < a < \infty$

on obtient:

$$\eta_1 = \frac{2}{pU^2} \check{R} \int_0^{+\infty} \frac{e^{iax} B(a) \tanh ah}{a - \left(\frac{g}{U^2}\right) \tan ah - \left(\frac{ta^2}{\rho U^2}\right) \tanh ah} da \quad (4.3.28)$$

·si $\check{R}D(a)$ disparaît pour certaines valeurs de a , il faut prendre certaines précaution pour respecter la limit ,cela se produit quand il ya des valeurs a^* telles que:

$$a^* - \frac{g}{u^2} \tanh a^* h - \frac{ta^{*2}}{\rho u^2} \tanh a^* h = 0 \quad (4.3.29)$$

$$D(a) = \frac{a}{u^2} [u^2 - c^2(a)] - i\mu_1 \quad (4.3.30)$$

$$C^2(a) = \left(\frac{g}{a} + \frac{t}{\rho} a \right) \tan ah \quad (4.3.31)$$

·Si a^* est une racine de $RD(a)$, on cherche une racine de $D(a)$ pour $\mu_1 \rightarrow 0$.en écrivant :

$$a = a^* + \varepsilon(a^*) \quad (4.3.32)$$

$$.D(a^* + \varepsilon(a^*)) \approx -\varepsilon(a^*) \frac{2a^*}{u^2} c(a^*) c'(a^*) - i\mu_1 \quad (4.3.33)$$

Conclusion

Dans ce travail on traite un problème d'un écoulement bidimensionnel générés par le déplacement d'un objet dans un fluide incompressible et non visqueux où on considère que les effets de la gravité et la tension superficielle seront négligés. le problème est caractérisé par la surface libre qui est de forme inconnue et qui doit être déterminé comme une partie de la solution du problème. On a utilisé la technique de perturbation lineaire pour résoudre ce problème.

Bibliographie

- [1] JEAN-MARC VANDON-BROECK, *Free-Surface flows*, university college london.
- [2] RIADH BEN HAMOUDA, *notion de mécanique des fluides*, Cours et exercices corrigés, centre de publication universitaire, tunis 2008.
- [3] ROBERT G.OWENS, Mat 6150.mécanique de fluides, 2014.
- [4] Free surface flows , C5.6 Applied Complex Variables, 2016, 3-1.
- [5] B. ACHOUR, A. BEDJAOUI, M. KHATTAOUI, M. DEBABECHE, *Contribution au calcul écoulements uniformes a surface libres et en charge (Première partie)*, LARHYSS Journal, N°.01, Mai 2002.
- [6] DIAF AMINE, *Contrabution a l'étude des écoulements de surface par methodes numeriques*, Université Abdou Bekr Belkaid Tlemcen Algérie
- [7] BACHELOR, *Mécanique des fluides*, Cours et exercices corrigés,2016
- [8] RABAH NARIMANE, *coefficients de chezy et de manning en écoulement uniforme dans un canal rectangulaire*, Mémoire de master 2013-2014.
- [9] CHRISTOPHE ANCEY, *Écoulements à surface libre*, Ecole polytechnique fédérale de lausanne.
- [10] JEAN-CHRISTOPHE GILLOTEAUX, *mouvement de grande amplitude d'un corps flottant en fluide parfait, application a la recuperation de l'énergie des vagues*, Université de Nantes, Thèse de DOCTORAT 2007.

- [11] MARIE ROUSSEAU, *Modélisation des écoulements à surface libre*, étude du ruissellement des eaux de pluie, Université de Nantes 2008.
- [12] MAME SOUHILA, *Applications de la techniques des transformations conforme à un probleme découlement d'un fluide*, Université de M'sila, Mémoire de master 2016-2017.

Résumé

on traite un problème d'un écoulement bidimensionnel générés par le déplacement d'un objet dans un fluide incompressible et non visqueux où on considère que les effets de la gravité et la tension superficielle seront négligés. le problème est caractérisé par la surface libre qui est de forme inconnue et qui doit être déterminé comme une partie de la solution du problème. On a utilisé la technique de perturbation linéaire pour résoudre ce problème

Mots-clés : Surface Libre,Fluide,écoulement,Ligne de courant,Transformation conforme ,Fonction potentielle,uniforme

Abstract

a problem of a two-dimensional flow generated by the displacement of an object in an incompressible and non-viscous fluid is treated, where it is considered that the effects of gravity and the surface tension will be neglected. the problem is characterized by the free surface which is of unknown form and which must be determined as part of the solution of the problem. The technique of linear perturbation was used to solve this problem

Key words: flow, free surface, Fluid, Streamline, Conformal transformation, uniform

ملخص

يتم معالجة مشكلة التدفق ثنائي الأبعاد الناتج عن إزاحة جسم ما في سائل غير قابل للضغط وغير لزج ، حيث يُعتقد أن آثار الجاذبية والتوتر السطحي سيتم إهمالهما. تتميز المشكلة بالسطح الحر ذو الشكل غير المعروف والذي يجب تحديده كجزء من حل المشكلة ، وقد تم استخدام تقنية الاضطراب الخطي لحل هذه المشكلة.

الكلمات المفتاحية : تدفق , سطح حر, سائل, خطوط السيل , تحويل مطابق , دالة كمون , منتظم