الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة محمد بوضياف بالمسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
MOHAMED BOUDIAF UNIVERSITY OF M'SILA
FACULTY OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF ELECTRICAL ENGINEERING

ر قم:.....511/ ق.ه.ك /2024

المسيلة في : 15 ديسمبر 2024

شهادة إدارية

بخصوص مطبوعة الدروس الخاصة بالأستاذ

مكي حمزة

بناءً على محضر اللجنة العلمية لقسم الهندسة الكهربائية تحت رقم: 365/ق.ه.ك/2024 المنعقد بتاريخ 06 نوفمبر 2024 والمتضمن تعين الخبراء: الأستاذ بوقرة عبد الرحمان أستاذ بجامعة المسيلة الأستاذة لوكال كلثوم أستاذة محاضرة "أ" بجامعة المسيلة، والأستاذ بن دايخة عبد المالك أستاذ محاضر "أ" بجامعة باتنة 02 وذلك لتقييم مطبوعة الدروس الخاصة بالأستاذ مكي حمزة أستاذ محاضر "أ" بقسم الهندسة الكهربائية لجامعة المسيلة تحت عنوان: " **Commandes Non linéaires** "

وبعد إطلاع رئيس اللجنة العلمية ورئيس القسم على التقارير الواردة و التي كانت كلها ايجابية، وعليه فإن اللجنة لا ترى مانعا أن تتخذه سندا في تدريس طلبة السنة الثانية ماستر كهروميكانيك، شعبة كهروميكانيك ،ميدان علوم و تكنولوجيا و أن تعتمد في أي تقييم للمسار العلمي للأستاذ المعني.

رئيس اللجنة العلمية

بوقرة عبد الرحمان

رئيس القسم

دفداف المبروك

ملاحظة: سلمت هذه الشهادة للمعني(ة) لاستعمالها في حدود ما يسمح به القانون.

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed BOUDIAF- M'sila

Faculté de Technologie

Département de Génie Electrique

Polycopie de Cours

Spécialité :

Master 2 Commande Electrique

Intitulé :

Commandes Non Linéaires

Présenté par l'enseignant:

Dr Hemza MEKKI

Université Mohamed BOUDIAF- M'sila 2024

Table des matières

Chapitre I : Généralités sur les systèmes non linéaires

I.1 INTRODUCTION 1
I.2 SYSTEMES NON LINEAIRES 2
I.3 REPRESENTATION DES SYSTEMES LINEAIRES 2
I.4 REPRESENTATION DES SYSTEMES NON LINEAIRES 2
I.4.1 Système autonome 3
I.4.2 Systèmes à structure variables 3
I.4.3 Points d'équilibre 4
I.5 EXEMPLE DES SYSTEMES NON LINEAIRES 4
I.5.1 Pendule simple 4
I.5.2 Pendule inversé 5
I.6 COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES 5
I.7 LINEARISATION AU TOUR D'UN POINT DE FONCTIONNEMENT 6
I.8 DEFERENCE ENTRE SYSTEMES LINEAIRE ET NON LINEAIRE 7
I.9 CONCLUSION 8

Chapitre II : Notions élémentaires de la géométrie différentielle

II.1 DEFINITIONS 9
II.1.1 Les champs de vecteurs 9
II.2.2 La dérivée de Lie 9
II.2.3 Le crochet de Lie (produit de Lie) 9
II.2.4 Exemple 10
II.2 CHANGEMENT DE BASE (DE REPERE) 12
II.2.1 Cas des systèmes linéaires 12
II.2.2 Cas des systèmes non linéaires 12
II.3 NOTIONS 13
II.3.1 Notion de courbe intégrale 13
II.3.2 Notion de distribution 13

II.3.3 Notion d'involutivité 13
II.3.4 Exemples 13
II.3.5. Solutions 14
II.3.6. Notion d'intégrabilité complète 15
II.3.7. Théorème de Frobenius 15

II.4 CONDITIONS DE COMMANDABILITE DES SYSTEMES 15
II.4.1 U-accessible 15
II.4.2 Faible U-accessibilité 15
II.4.3 Commandabilité Faible 16
II.4.4 Critère de commandabilité des systèmes non linéaires 16
II.5 CONCLUSION 17

Chapitre III : Régulation par retour d'état linéarisant. Linéarisation entrée/sortie

III.1 NOTION DE DEGRE RELATIF 18
III.1.1 Exemple oscillateur de Vonderpol 18
III.2.2 Illustration simple pour interpréter la notion de degré relatif 19
III.2.3 Exemple 19
III.2.4 Proposition 20

III.2 LINEARISATION EXACTE PAR BOUCLAGE (SYSTEME SISO) 24
III.2.1 Exemple 25
III.2.2 Lemme 26
III.2.3 Théorème 26
III.2.4 Résumé 26
III.2.5 Exemple 27

III.3 COMMANDE PAR BOUCLAGE NON LINEAIRE (SYSTEME MIMO) 29
III.3.1 Notion de degré relatif vectoriel 29
III.3.2 La forme normale 29
III.3.3 Exemple d'un retour d'état statique 31
III.4 CONCLUSION 34

Chapitre IV : Stabilité, Stabilité selon Lyapunov

IV.1 INTRODUCTION 35
IV.2 NOTIONS DE BASES 35
IV.2.1 Systèmes non linéaires 35

IV.3.2 Equilibre..... 36
IV.3.3 Plan de phase..... 36
IV.3 STABILITE (SELON LYAPUNOV)..... 37
IV.4 STABILITE LOCALE ET STABILITE GLOBALE..... 37
IV.4.1 Stabilité locale..... 38
IV.4.2 Stabilité global..... 38
IV.4.3 Région d'attraction..... 38
IV.5 METHODES DE LYAPUNOV..... 38
IV.5.1 Première méthode de Lyapunov..... 39
IV.5.1 Deuxième méthode de Lyapunov..... 39
IV.6 FORME QUADRATIQUE..... 41
IV.6.1 Deuxième méthode de Lyapunov..... 42
IV.6.2 Fonction quadratique plus intégrale..... 43
IV.7 DEFINITION POSITIVE DES FONCTIONS SCALAIRES..... 43
IV.8 FONCTION DE COMMANDE DE LYAPUNOV (fcl)..... 44
IV.8.1 Définition..... 45
IV.8.2 Application au design..... 45
IV.8.3 Choix de la fonction de Lyapunov..... 47
IV.9 CONCLUSION..... 47

Chapitre V : Commande par Backstepping

V.1 INTRODUCTION..... 48
V.2 DESIGN PAR BACKSTEPPIN..... 48
V.2.1. Algorithme de base..... 49
V.2.2. Exemple..... 53
V.3 COMMANDE PAR BACKSTEPPING BASEE SUR LE PRINCIPE DE LA COMMANDE VECTORIEL..... 54
IV.3.1 Introduction au backstepping..... 55
IV.3.2 Modèle le la MAS..... 55
IV.3.3 Application du backstepping à la commande de la MAS..... 55
V.4 STRUCTURE GENERALE DE LA COMMANDE..... 57
V.5 CONCLUSION..... 58

Chapitre VI : Commande basée sur la passivité

VI.1 INTRODUCTION 59
VI.2. NOTIONS DE PASSIVITE ET DISSIPATIVITE 59
VI.3. DEFINITIONS 60
VI.4. COMMANDE BASEE SUR LA PASSIVITE (PBC) 61
VI.4.1 Fonction de stockage 62
VI.4.2 Exemple 62
VI.4.3 Déférences entre Lyapunov et passivité 63
VI.4.4 Propriétés 63
VI.5 PASSIVITE DES SYSTEMES LINEAIRES 65
VI.6 APPLICATION DE LA COMMANDE PBC 65
VI.6.1 Exemple 1 (système non linéaire) 66
VI.6.2 Exemple 2 (machine à courant continu) 67
VI.7 CONCLUSION 68
BIBLIOGRAPHIE 69

Chapitre I

Généralités sur les systèmes non linéaires

I.1. INTRODUCTION

Un système non linéaire commandé est un ensemble d'équations (différentielles par exemple) non linéaires décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de commande, ou simplement commandes, que l'on peut choisir librement pour réaliser certains objectifs.

On en connaît de nombreux exemples parmi les systèmes mécaniques ou chimiques: satellites, avions, automobiles, machines-outils, régulateurs thermiques, réacteurs chimiques, procédés biotechnologiques ou agro-alimentaires…

Les entrées peuvent être choisies en boucle ouverte, c'est-à-dire ne dépendant que du temps, ou en boucle fermée, c'est-à-dire comme des fonctions des variables mesurées, appelées observations, qui tiennent compte de l'état du système à chaque instant.

Un tel système est non linéaire s'il n'est pas équivalent à un système linéaire dans un sens à préciser. Plusieurs relations d'équivalence peuvent être introduites, donnant des classifications très différentes si le système est commandé ou non. Dans le cas non commandé on classe les comportements par rapport à la stabilité et l'instabilité linéaires et on fait apparaître les dynamiques centres (ni linéairement stable ni linéairement instable) au voisinage d'un point d'équilibre ou d'une orbite périodique. Dans le cas commandé, beaucoup plus compliqué, l'équivalence à un système linéaire décrit une propriété de l'ensemble des trajectoires du système que l'on appellera platitude.

Au-delà de l'analyse des types de comportement des systèmes, se pose le problème de leur utilisation. Un objectif de commande se traduit par la donnée d'une ou plusieurs trajectoires de référence à suivre (boucle ouverte) et, en boucle fermée, par certaines exigences sur la vitesse de poursuite, l'atténuation des perturbations, l'insensibilité aux erreurs et variations paramétriques et la précision du suivi. Bien sur, les réglages de la boucle ouverte et de la boucle fermée interagissent de façon complexe, surtout dans le contexte non linéaire, mais on peut dans certains cas, arriver à rendre ces deux aspects aussi indépendants que possible pour en faciliter la mise au point. Dans de nombreux cas, en outre, le nombre, la technologie et l'emplacement des capteurs devant permettre de fermer la boucle ne sont pas donnés a priori et entrent dans la conception de la boucle fermée.

I.2. SYSTEMES NON LINEAIRES

Un système est non linéaire s'il ne vérifie pas le principe de superposition. Les conditions de proportionnalité et d'additivité ne s'appliquent plus aux systèmes non linéaires. Lors de l'étude des systèmes non linéaires on se heurte à plusieurs difficultés :

-L'analyse par des fonctions de transfert est impossible,

-La notion des pôles disparaît,

-Un système non linéaire possède en général plusieurs points d'équilibre et l'étude de leur stabilité est plus complexe que dans le cas linéaire pour le quel le concept de stabilité est global.

La non linéarité d'un système peut être intrinsèque ou peut être isolée, c'est-à-dire que l'on peut avoir une association d'éléments à caractéristiques non linéaires à un système linéaire.

Comme pour les systèmes linéaires, il est possible de distinguer, aussi les modèles non linéaires par les caractères suivants [1] :

- A temps continu / A temps discret,

- Invariants dans le temps / Variants dans le temps,

- Monovariables / Multivariables,

- Déterministes / Stochastiques.

I.3. REPRESENTATION DES SYSTEMES LINEAIRES

Supposons que l'on dispose d'un modèle linéaire d'un procédé sous la forme d'une représentation d'état, la représentation d'état de ces systèmes, quand ils sont à temps continus, s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases} \tag{I.1}$$

Ou x, u et y représentants respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système, tel que: $x \in \Re^n$, $u \in \Re^m$ et $y \in \Re^p$; A, B, C et D sont des matrices de dimensions $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ et $p \times m$ respectivement

I.4. REPRESENTATION DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Un phénomène est dit non linéaire lorsque ses grandeurs caractéristiques reliées entres elles ne varient pas proportionnellement l'une par rapport a l'autre. Sont comportement peut alors être décrit par une expression, un modèle ou des équations faisant intervenir les variables autrement qu'au premier degré [2].

Aucun système physique n'est complètement linéaire, les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint. Certaine systèmes sont impossible à modélisé, même localement à des systèmes linéaire [2].

La représentation générale d'un système non linéaire est de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\,u(t) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{I.2}$$

Ou x, u et y représentants respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système. $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions non linéaire du vecteur d'état décrivent le système [3].

****** La forme la plus utilisée pour la représentation des systèmes non linéaires est la suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.3}$$

Ou t est le temps, $x(t) \in \Re^n$ et $u(t) \in \Re^m$ représentants respectivement les vecteurs d'état et de commande (d'entrée), tel que: $f : \Re^n \times \Re^m \times \Re_+ \to \Re^n$ est une fonction non linéaire.

I.4.1. Système autonome

Le système non linéaire (I.3) est dit autonome si la fonction f ne dépend pas explicitement du temps t, c'est-à-dire le système peut être écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.4}$$

Par contre, le système (I.3) est dit non autonome. Parfois on utilise le terme de 'invariant dans le temps' ou 'stationnaire' au lieu 'd'autonome' et 'variant dans le temps' à la place de 'non autonome'.

Dans le cas non autonome, si les variations des caractéristiques sont lentes, on pourra approximer le système par une séquence de systèmes autonomes [1].

I.4.2. Systèmes à structure variables

Lorsque la structure du système ou du correcteur utilisé prend d'une façon discontinue deux ou plusieurs expressions, la notion de système à structures variables intervient. Il en découle les définitions suivantes :

Définition 1. Un système à structure variable (VSS) : est un système dont la structure change pendant son fonctionnement, il est caractérisé par le choix d'une structure et d'une logique de commutation. Ce choix permet au système de commuter d'une structure à l'autre à tout instant. De plus un tel système peut avoir de nouvelles propriétés qui n'existent pas dans chaque structure.

Définition 2. Un système est dit à structure variable s'il admet une représentation par des équations différentielles du type :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si la condition 1 est virefie} \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & \text{si la condition } n \text{ est virefie} \end{cases} \tag{I.5}$$

Où $f_i, i = 1, 2, \ldots, n$ sont des fonctions appartenant à un ensemble de sous systèmes. Par conséquence, les systèmes à structures variables sont caractérisés par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation.

I.4.3. Points d'équilibre

Le point $x_e(t) \in \Re^n$ est dit point d'équilibre du système non linéaire non forcé :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.6}$$

Si

$$\dot{x}(t) = f(x_e, t) = 0 \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.7}$$

Si x_e est un point d'équilibre du système (I.6) alors l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \qquad \forall t \geq t_e, \quad x(t_e) = x_e \tag{I.8}$$

admet une solution unique :

$$x(t) = x_e \qquad \forall t \geq t_e \tag{I.9}$$

I.5. EXEMPLE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Dans cette section, nous allons donner quelques modèles des systèmes nonlinéaires. Ces exemples incluent le pendule simple et le pendule inversé.

I.5.1. Pendule simple

Le modèle didactique d'un robot manipulateur a un seul degré de liberté dont le modèle (I.10) est donné par Berghuis [4].

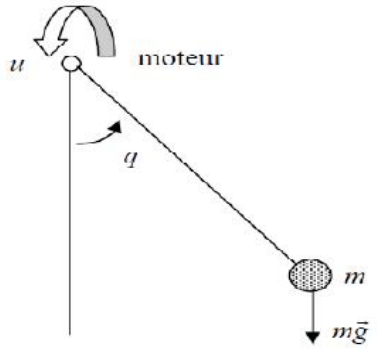


Figure I.1. Pendule simple

Le modèle dynamique peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin x_1 + \dfrac{1}{ml^2}u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{I.10}$$

I.5.2. Pendule inversé

Le système pendule inversé à modélisé est représenté par la figure I.2. En exerçant une force horizontale $u(t)$ sur le chariot, celui-ci se déplace en translation de x mètre est provoque une déviation du pendule de θ radians.

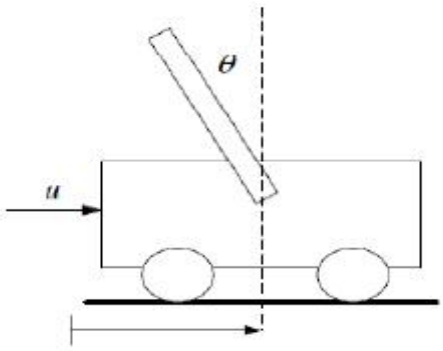


Figure I.2. Pendule inversé

Le modèle dynamique peut s'écrire [5]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{(m_c+m)g\sin x_1 - mlx_2^2\cos x_1 \sin x_1}{l(4/3(m_c+m) - m\cos^2 x_1)} + \dfrac{\cos x_1}{l(4/3(m_c+m) - m\cos^2 x_1)}u(t) + d(t) \end{cases} \tag{I.11}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{4/3mlx_2^2\sin x_1 + mg\cos x_1 \sin x_1}{l(4/3(m_c+m) - m\cos^2 x_1)} + \dfrac{4}{3.(4/3(m_c+m) - m\cos^2 x_1)}u(t) + d(t) \end{cases}$$

Ou x_1 position angulaire, x_2 vitesse angulaire, x_3 position de chariot, x_2 vitesse de chariot, g la gravité, m_c la mass de chariot, m la mass de pendule, l la langueur de pendule centre de mass et $d(t)$ est un bruit.

I.6. COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

La commande est l'ensemble des opérations qui amènent automatiquement un procédé d'un état particulier à un état désiré $y_d(t)$ [5].

Un système commandé est soumis à des perturbations et des variations paramétriques telles que les frottements, vent, bruit de mesure, etc. Voir la figure I.3.

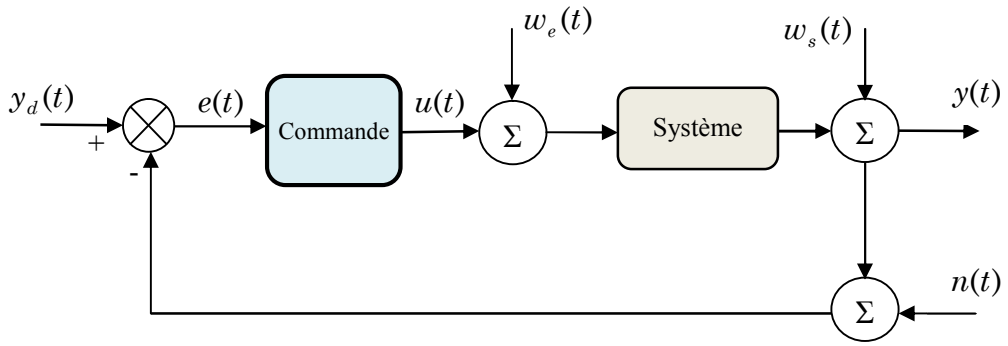


Figure I.3. Schéma de principe d'une commande d'un système non linéaire

Les signaux utilisés dans cette figure sont :

$y_d(t)$: consigne ou signal de référence.
$y(t)$: signal de sortie ou réponse de référence.
$e(t)$: erreur de suivi.
$u(t)$: signal de commande.
$w_e(t)$: perturbations de la commande.
$w_s(t)$: perturbations de la sortie.
$n(t)$: bruit de mesure perturbations de la sortie.

Si la consigne $y_d(t)$ une constante dans le temps, nous parlons de régulation si non la commande est un asservissement ou poursuite des trajectoires. Par ailleurs, la commande d'un système a comme objectif d'atteindre les performances suivantes :

a) *La stabilité*
b) *La robustesse*
c) *La rapidité*
d) *La précision*

I.7. LINEARISATION AU TOUR D'UN POINT DE FONCTIONNEMENT

Les premières tentatives d'approche des systèmes non linéaires sont basées sur la linéarisation au tour d'un point de fonctionnement. En fait, la linéarisation d'un système non linéaire ne donne qu'une description partielle du transfert entrée/ sortie. Pour ce fait nous allons illustrer par un exemple cette mauvaise caractéristique :

Exemple d'un satellite

Soit un satellite rigide non sphérique propulsé par un couple :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2 x_3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_3 + b_2 u \\ \dot{x}_3 = a_3 x_1 x_2 \end{cases} \quad \text{(I.12)}$$

Avec u est bornée $|u| \le 1$, satellite non sphérique $a_3 \neq 0$ et $a_1 b_2^2 \neq a_2 b_1^2$. Pour ce système :

$$\dot{x} = f(x) + g(x,u) \tag{I.13}$$

Avec : $f(x) = \begin{pmatrix} a_1 x_2 x_3 \\ a_2 x_1 x_3 \\ a_3 x_1 x_2 \end{pmatrix}$, $g(x,u) = \begin{pmatrix} b_1 u \\ b_2 u \\ 0 \end{pmatrix}$

On linéarise au tour d'un point de fonctionnement $x_0(0,0,0)$:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{I.14}$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 x_3 & a_1 x_2 \\ a_2 x_3 & 0 & a_2 x_1 \\ a_3 x_2 & a_3 x_1 & 0 \end{pmatrix}_{x=x_0} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{x=x_0} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etude de la commandabilité :

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{I.15}$$

$\det Q_c = 0 \Rightarrow$ le système linéarisé n'est pas commandable alors que le système non linéaire est commadable.

I.8 DEFERENCE ENTRE SYSTEMES LINEAIRE ET NON LINEAIRE

Pour les systèmes linéaires la loi de commande est donnée par retour d'état :

$$u = -K^T x + w \tag{I.16}$$

Qu'on peut la trouvé par :

(a) placement de pole,

(b) optimisation par la résolution de l'équation de Riccati,

(c) les régulateurs RST…

Pour les systèmes non linéaires la synthèse d'une stratégie de commande non linéaire (Backstepping, SMC…) est indispensable.

$$u = u(x) \tag{I.17}$$

Tableau I.1 Déférences entre les systèmes linéaires et non linéaires

Système linéaire	**Système non linéaire**
$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\,u(t) \\ y = h(x) \end{cases}$
Transformée de Laplace	Géométrie différentiel
Espace d'état	Variété d'état ou différentiable
Fonctions de transfert	Série génératrice
Réponse impulsionnelle	Série de Volterra
La commande $u = -k^T x + w$	La commande $u = u(x)$

I.9 CONCLUSION

Ce chapitre permis de présenté une brève introduction, motivation et état de l'art sur les systèmes non linaires pour amener et justifier les choix et l'orientation de ce cours. Il est question donc de rappeler les différentes notions théoriques, définitions et concepts relatifs à ces domaines. Etant donné que l'objectif de ce cours est l'application des techniques de commande aux systèmes non linéaires, des notions élémentaires de la géométrie différentielle doit s'impose. Ce si fera l'objectif de chapitre suivant.

Chapitre II

Notions élémentaires de la géométrie différentielle

II.1. DEFINITIONS

Soit le système non linéaire [2] :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,u \tag{II.1}$$

Avec : $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$

II.1.1. Les champs de vecteurs

f et g associés au système ci-dessus sont définie par :

$$\begin{aligned} F = f &= \sum_{n}^{i=1} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} \\ G = g &= \sum_{n}^{i=1} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + g_n \frac{\partial}{\partial x_n} \end{aligned} \tag{II.2}$$

II.1.2. La dérivée de Lie

Par rapport à un champ de vecteur :

$$\begin{aligned} L_f \lambda(x) &= \sum_{n}^{i=1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i = \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_2} f_2(x) + \cdots + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_n} f_n(x) = \frac{\partial \lambda(x)}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} f(x) \\ L_g (L_f \lambda(x)) &= \frac{\partial (L_f \lambda(x))}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} g(x) \end{aligned} \tag{II.3}$$

Si $\lambda(x)$ est différencie k fois suivant le champ de vecteur f , par récurrence en trouve :

$$L_f^k \lambda(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} \lambda(x))}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} f(x) \quad \text{avec} \quad L_f^0 \lambda(x) = \lambda(x) \tag{II.4}$$

II.1.3. Le crochet de Lie (produit de Lie)

Le crochet de Lie est une combinaison de deux champs de vecteur qui donne un nouveau champ de vecteur, on peut crocheter le crochet de Lie avec un champ

de vecteur autant de fois pour donner naissance à des nouveaux champs de vecteurs, $[f \quad g]$, $[f \quad [f \; g]]$… avec :

$$[f \quad g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \tag{II.5}$$

$$[f \quad g] = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Dans le but d'éviter la notation précédente qui peut conduise à des confusions, la notation suivante est adoptée :

$$ad^k f \, g(x) = [f \quad ad^{k-1} f \, g] \text{ avec } k \geq 1 \text{ et } ad^0 f \, g(x) = g(x) \tag{II.6}$$

$k = 1 \Rightarrow ad^1 f \, g(x) = [f \quad ad^0 f \, g] = [f \quad g]$

$k = 2 \Rightarrow ad^2 f \, g(x) = [f \quad adf \, g] = [f \quad [f \; g]]$

$k = 3 \Rightarrow ad^3 f \, g(x) = [f \quad ad^2 f \, g] = [f \; [f \quad [f \; g]]]$

A) <u>Proposition 1</u>

Soit f_1, f_2, g_1 et g_2 des champs de vecteurs r_1 et r_2 des réelles :

i) Associativité :

$$[r_1 f_1 + r_2 f_2 \quad g_1] = r_1 [f_1 \quad g_1] + r_2 [f_2 \quad g_1] \tag{II.7}$$

ii) Commutativité :

$$[f \quad g] = -[g \quad f] \tag{II.8}$$

iii) Identité de Jacobi, soit *f, g, p* des champs de vecteurs :

$$[f \quad [g \; p]] + [g \quad [p \; f]] + [p \quad [f \; g]] = 0 \tag{II.9}$$

B) <u>Proposition 2</u>

i) Soient $\alpha(x)$ et $\lambda(x)$ des fonctions réelles, f un champ de vecteur :

$$L_{\alpha f} \, \lambda(x) = (L_f \lambda(x)) \, \alpha(x) \tag{II.10}$$

ii) Soient $f(x)$ et $g(x)$ des champs de vecteurs, $\lambda(x)$ une fonction réelle :

$$L_{[f\,g]} \, \lambda(x) = L_f L_g \lambda(x) - L_g L_f \lambda(x) \tag{II.11}$$

iii) Soit *f* un champ de vecteur et $\lambda(x)$ une fonction réelle :

$$L_f \, d\lambda(x) = d L_f \lambda(x) \tag{II.12}$$

II.1.4. Exemple

Soit un satellite rigide non sphérique propulsé par un couple (voir chapitre I):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2 x_3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_3 + b_2 u \\ \dot{x}_3 = a_3 x_1 x_2 \end{cases} \tag{II.13}$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \text{ avec } f(x) = \begin{pmatrix} a_1 x_2 x_3 \\ a_2 x_1 x_3 \\ a_3 x_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{II.14}$$

1- Ecrire le champ de vecteur f et g

2- Soit $\lambda(x) = (x_1 + x_2)^2$, calculer $L_f\lambda(x)$, $L_g L_f\lambda(x)$, $L_f^2\lambda(x)$.

3- Calculer le crochet de Lie$[f \quad g]$, $[f \quad [f \; g]]$ et leur champ de vecteur.

Solution :

1- Champ de vecteur de f et g :

$$F = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$F = a_1 x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$G = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + g_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$G = b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

2- Calcule de $L_f\lambda(x)$, $L_g L_f\lambda(x)$, $L_f^2\lambda(x)$

a) $L_f\lambda(x) = \dfrac{\partial\lambda(x)}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\lambda(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\lambda(x)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\lambda(x)}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}$

$$L_f\lambda(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + x_2) & 2(x_1 + x_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 x_2 x_3 \\ a_2 x_1 x_3 \\ a_3 x_1 x_2 \end{pmatrix} = 2(x_1 + x_2)(a_1 x_2 x_3 + a_2 x_1 x_3)$$

b) $L_g(L_f\lambda(x)) = \dfrac{\partial(L_f\lambda(x))}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} g(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L_f\lambda(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial L_f\lambda(x)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial L_f\lambda(x)}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix}$

c) $L_f^2\lambda(x) = L_f(L_f\lambda(x)) = \dfrac{\partial(L_f\lambda(x))}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} f(x)$

3- Calcule de crochet de Lie$[f \quad g]$

$$[f \quad g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

$$[f \quad g]=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_1b_2x_3 \\ -a_2b_1x_3 \\ -a_3b_1x_2-a_3b_2x_1 \end{pmatrix}$$

Le champ de vecteur $[f \quad g]$

$$F'=-a_1b_2x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-a_2b_1x_3\frac{\partial}{\partial x_2}-(a_3b_1x_2+a_3b_2x_1)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

II.2. CHANGEMENT DE BASE (DE REPERE)

Le changement de base pour l'analyse et la synthèse de commande non linéaire est très important pour résoudre certain problème de réglage tel que la stabilité et le découplage [2], [6].

II.2.1. Cas des systèmes linéaires

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}=A\cdot x+B\cdot u \\ y=C\cdot x \end{cases} \tag{II.15}$$

Et soit la transformation $Z=T\cdot x \Rightarrow x=T^{-1}Z$

$$\dot{Z}=T\cdot\dot{x}=T(A\cdot x+B\cdot u)=TA\cdot x+TB\cdot u=\underbrace{TAT^{-1}}_{\overline{T}}Z+\underbrace{TB}_{\overline{B}}\cdot u$$

$$y=C\cdot x=\underbrace{CT^{-1}}_{\overline{C}}Z$$

Dans ce cas en obtiens le nouveau système:

$$\begin{cases} \dot{Z}=\overline{T}\cdot Z+\overline{B}\cdot u \\ y=\overline{C}\cdot Z \end{cases} \tag{II.16}$$

II.2.2. Cas des systèmes non linéaires

Soit le système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x)+g(x)\cdot u \\ y=h(x) \end{cases} \tag{II.15}$$

Le changement de coordonnées se fait à travers :

$$z=\varphi(x) \text{ tel que } \begin{cases} z_1=\varphi_1(x_1,x_2,...x_n) \\ \vdots \\ z_n=\varphi_n(x_1,x_2,...x_n) \end{cases} \tag{II.16}$$

Ou $\varphi(x)$ est inversible tel que $\exists\varphi^{-1}(z)/x=\varphi^{-1}(\varphi(x))$

Une transformation de ce type est appelé *Difféomorphisme globale.*

$$z = \varphi(x) \Rightarrow \dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(f(x) + g(x)\cdot u)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x)\Big|_{x=\varphi^{-1}(z)} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} g(x)\Big|_{x=\varphi^{-1}(z)} .u \\ &= \bar{f}(z) + \bar{g}(z).u \end{aligned} \tag{II.17}$$

$$y = h(x)\big|_{x=\varphi^{-1}(z)} = \bar{h}(z) \tag{II.18}$$

II.3. NOTIONS

II.3.1. Notion de courbe intégrale :

Soit : $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ...x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, ...x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, ...x_n) \end{cases}$

$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), ...x_n(t))$ est la courbe intégrale du champ de vecteur ϑ avec:

$$\vartheta = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{II.19}$$

Exemple :

Soit : $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{a_1 t} \\ x_2(t) = k_2 e^{a_2 t} \end{cases}$

$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ est la courbe intégrale d'un champ de vecteur ϑ avec: $\vartheta = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \Rightarrow \vartheta = a_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

II.3.2. Notion de distribution :

Une distribution Δ est une espace vectorielle ou sous espace engendré par une base formé par les champs de vecteurs [7]:

$$\Delta = span\{f_1, f_2, ..., f_d\} \tag{II.20}$$

$\Delta(x)$ est la distribution associée au $x \in \Re^n$

$$\Delta(x) = span\{f_1(x), f_2(x), ..., f_d(x)\} \tag{II.21}$$

II.3.3. Notion d'involutivité:

Une distribution Δ est dite involutive si est seulement si elle est stable par le crochet de Lie c-à-d si est seulement si pour toutes champs de vecteurs X et Y appartenant à Δ, le crochet de Lie $[X\ Y]$ est encore un élément de Δ.

II.3.4. Exemples:

<u>*Exercice 1*</u> : soit 3 champs de vecteurs :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etudier l'involutivité de Δ.

Exercice 2 : soit dans $\Re^3$ la distribution suivante, étudier l'involutivité de Δ.

$$\Delta = span\{f_1, f_2\} \text{ avec } f_1 = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : étudier l'involutivité de Δ dans ce cas :

$$\Delta = span\{f_1, f_2\} \text{ avec } f_1 = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

II.3.5. Solutions:

Exercice 1

$$[f_1 \quad f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = f_3$$

$$[f_1 \quad f_3] = \frac{\partial f_3}{\partial x} f_1(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_3(x) = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = f_2$$

$$[f_2 \quad f_3] = \frac{\partial f_3}{\partial x} f_2(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x} f_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} = f_1$$

Donc $\forall X, Y \to [X\ Y] \in \Delta = span\{f_1, \quad f_2, \quad f_3\}$ donc Δ est involutive.

Exercice 2

$$[f_1 \quad f_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On à: $\det\begin{pmatrix} 2x_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$ donc les vecteurs sont linéairement indépendant.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \Delta$, c-à-d Δ n'est pas involutive.

Exercice 3

$$[f_1 \quad f_2] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2f_1 \in \Delta$$

$\Delta = span\{f_1 \quad f_2\}$ donc Δ est involutive.

Aussi on peut calculer le déterminant de la matrice :

$$\det \begin{pmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3 \\ -1 & -2x_2 & 2 \\ 0 & x_3 & 0 \end{pmatrix} = 0$$ pour dire que Δ est involutive.

II.3.6. Notion d'intégrabilité complète:

$\Delta = span\{f_1, \ \ldots, \ f_d\}$ définie sur une variété V avec $d \le n$ est dit complètement intégrable si pour tout x de V, il existe une sous variété M_x de V de dimension d, telle que à chaque point y de M_x l'espace tangent à M_x en y.
T_y, M_x est engendré par $\{f_1, \ \ldots, \ f_d\}$ (voir Isidori pp.25).

II.3.7. Théorème de Frobenius:

Une distribution non singulière Δ est complètement intégrable si est seulement si elle est involutive.

II.4. CONDITIONS DE COMMANDABILITE DES SYSTEMES

L'outil géométrique différentiel à permis l'établissement d'une condition nécessaire et suffisante d'une commandabilité faible [6].
Soit $\dot{x} = f(x,u)$ un système NL, l'analytique général est une sous ensemble de M (variété différentiel).

II.4.1. U-accessible :

Un point x_1 est U-accessible à partir de x_0 s'il existe une commande admissible $u[t_0,t_1] \to \Re^d$ tel que $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ et $x(t)$ reste dans $u \ \forall t \in [t_0,t_1]$. Noté x_0, au x_1

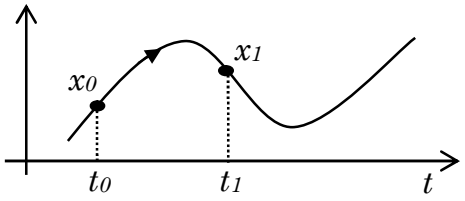


Figure II.1. U-accessibilité

II.4.2. Faible U-accessibilité :

Un point x' est faiblement U-accessible à partir de x'' s'il existe une suite $x_0, x_1, \cdots, x_k$ avec :

* $x_0 = x'$ et $x_k = x''$

** $\forall i = 1,2,\cdots,k$ on à soit x_i au x_{i-1} soit x_{i-1} au x_i

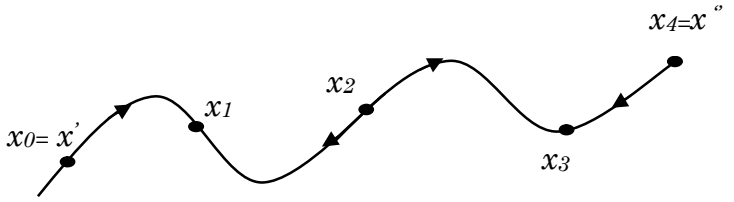


Figure II.2. Faible U-accessibilité

Les points x' et x'' peuvent être commenté par une suite de trajectoire continue mais qui non pas la même orientation.

II.4.3. Commandabilité Faible :

Un système est dit faiblement commandable si est seulement si pour tout points x_M, l'ensemble des points faiblement U-accessible à partir de x est égale à la variante de toute entière *M*.

Théorème :

Un système analytique général est faiblement localement commandable si est seulement si pour touts points $x_0(M)$ à l'intérieur de l'ensemble des points U-accessible pour tout voisinage U est non vide.

II.4.4. Critère de commandabilité des systèmes non linéaires :

Soit le système NL analytique général :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{d} u^i f_i(x) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{II.22}$$

Théorème :

Un système est localement commandable en x_0 si est seulement si le rang de Lie $J(f_0, f_1, ..., f_d)(x_0)$, engendré par les champs de vecteurs $f_1, f_2, ..., f_d$ est égale a n

L'algèbre de Lie engendré par les champs $(f_0, f_1, ..., f_d)$

$$J(f_0, f_1, ..., f_d) = \{f_1, \ldots, f_d, [f_0\ f_1], [f_0\ f_d], [f_i\ [f_j\ f_k]]\} \tag{II.23}$$

Exemple

Soit le système et le point de fonctionnement $x_0(0,0,0)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2 x_3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_3 + b_2 u \\ \dot{x}_3 = a_3 x_1 x_2 \end{cases} \tag{II.24}$$

Avec : $f_0(x)=\begin{pmatrix} a_1x_2x_3 \\ a_2x_1x_3 \\ a_3x_1x_2 \end{pmatrix}$, $f_1(x)=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les Champ de vecteur de f_0 et f_1 *:*

$$F_0 = a_1x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2x_1x_3\frac{\partial}{\partial x_2}+a_3x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$F_1 = b_1\frac{\partial}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

Commandabilité locale :

$$[f_0 \quad f_1]=\frac{\partial f_1}{\partial x}f_0(x)-\frac{\partial f_0}{\partial x}f_1(x)=\begin{pmatrix} -a_1b_2x_3 \\ -a_2b_1x_3 \\ -a_3(b_1x_2+b_2x_1) \end{pmatrix}=f_2$$

$$[f_1 \quad f_2]=\frac{\partial f_2}{\partial x}f_1(x)-\frac{\partial f_1}{\partial x}f_2(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2a_3b_1b_2 \end{pmatrix}=f_3$$

$$[f_2 \quad f_3]=\frac{\partial f_3}{\partial x}f_2(x)-\frac{\partial f_2}{\partial x}f_3(x)=\begin{pmatrix} 2a_1a_3b_1b_2^2 \\ 2a_2a_3b_1^2b_2 \\ 0 \end{pmatrix}=f_4$$

$J=(f_1,f_2,f_3)=(f_1,f_2,f_4)=(f_1,f_3,f_4)$ aux choix,

$$J=(f_1,f_3,f_4)=\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 2a_1a_3b_1b_2^2 \\ b_2 & 0 & 2a_2a_3b_1^2b_2 \\ 0 & -2a_3b_1b_2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J = 4a_2a_3^2b_1^4b_2^2-4a_1a_3^2b_1^2b_2^4$$

$\det J \neq 0 \Rightarrow rang\ J=3$ Car $a_3 \neq 0$ et $a_1b_2^2 \neq a_2b_1^2$.

Dans ce cas le système (II.24) est commandable.

II.5. CONCLUSION

Ce chapitre présent, dans un premier temps, une brève introduction sur les notions élémentaires de la géométrie différentielle pour les systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte. Ces notions de bases sont nécessaires à la compréhension des subtilités de la théorie de la géométrie différentielle et, dans un deuxième temps, il introduit les conditions de commandabilité des systèmes non linéaires avec quelque exemple simple pour la bonne compréhension de critère de commandabilité.

Chapitre III

Régulation par retour d'état linéarisant. Linéarisation entrée/sortie

III.1. NOTION DE DEGRE RELATIF

Soit un système non linéaire analytique (SISO) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\,u \\ y = h(x) \end{cases} \tag{III.1}$$

Le nombre r est dit degré relatif au point x_0 si :

- $L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \forall x \in$ voisinage de x_0 *et* $k < r-1$
- $L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$

III.1.1. Exemple oscillateur de Vonderpol :

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ 2\omega\xi(1-\mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 \end{pmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{g(x)} u \tag{III.2}$$

Calculer le degré relatif dans les deux cas : $y = h(x) = x_1$ et $y = h(x) = \sin x_2$

1er Cas : on commence avec $k = 0$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Pour $k = 1$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ * \end{bmatrix} = x_2$$

$$L_g L_f h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$, On arrête et on prend $r - 1 = 1 \Rightarrow r = 2 \; \forall x$

2eme Cas : on commence avec $k = 0$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} g = \begin{bmatrix} 0 & \cos x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \cos x_2 \neq 0$$

On arrête et on prend $r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

III.1.2. Illustration simple pour interpréter la notion de degré relatif

Soit $x^0 = x(t^0)$ l'état du système à l'instant t^0, $y(t)$ la sortie du système et supposons qu'on s'intéresse aux dérivées respectives par rapport au temps $y^k(t)$ pour $k = 1,2,\ldots$ à l'instant $t = t^0$ on obtient : $y(t^0) = h(x(t^0)) = h(x^0)$

$$y'(t) = \frac{dh}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dh}{dx}(f(x) + g(x)u) = \underbrace{\frac{dh}{dx}f(x)}_{L_f h(x)} + \underbrace{\frac{dh}{dx}g(x)u}_{L_g h(x)}$$

$$y'(t) = L_f h(x) + L_g h(x)\, u \tag{III.3}$$

Hypothèse $r > 1$:

Si le degré relatif r est supérieur à $1\ \forall t$, tel que $x(t)$ voisin de x^0 pour t voisin de t^0 c-à-d on à $L_g h(x) = 0 \Rightarrow y'(t) = L_f h(x)$

$$y^{(2)}(t) = \frac{d(L_f h(x))}{dx^T}\frac{dx}{dt} = \frac{d(L_f h(x))}{dx^T}(f(x) + g(x)u)$$

$$= \underbrace{\frac{d(L_f h(x))}{dx^T}f(x)}_{L_f^2 h(x)} + \underbrace{\frac{d(L_f h(x))}{dx^T}g(x)u}_{L_g L_f h(x)}$$

$$y''(t) = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)\, u \tag{III.4}$$

Hypothèse $r > 2 \Rightarrow L_g L_f h(x) = 0$

$\Rightarrow y''(t) = L_f^2 h(x)$

$\vdots$

De la même façon on continue à dérivé successivement, on obtient l'étape k :

$$y^{(k)}(t) = L_f^{(k)} h(x) \tag{III.5}$$

Pour tout $k < r$ et voisinage de t^0

$$y^{(r)}(t^0) = L_f^r h(x^0) + L_g L_f^{r-1} h(x^0)\, u(t^0) \tag{III.6}$$

La commande figure explicitement avec $L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$.

Le degré relatif est exactement égale au nombre de fois qu'on dérive la sortie $y(t)$ par rapport au temps à l'instant t^0, jusqu'au l'apparition de la commande.

III.1.3. Exemple

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\, u = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2\omega\xi(1 - \mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

1) $y = h(x) = x_1$ on dérive la sortie :

$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$

$\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = 2\omega\xi(1 - \mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 + u$

La commande apparait explicitement $\Rightarrow$ le degré relatif $r = 2$

2) $y = h(x) = \sin x_2$ on dérive la sortie :

$$\dot{y} = \dot{x}_2 \cos x_2 = \cos x_2 (2\omega\xi(1 - \mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 + u)$$

La commande apparait $\Rightarrow$ le degré relatif $r = 1$

Lemme :

Les vecteurs $dh(x^0), dL_f h(x^0), \ldots, dL_f^{r-1} h(x^0)$ sont linéairement indépendant (démonstration voir ISIDORI [2], [6]).

III.1.4. Proposition

Si un système possède un degré relatif r au point x^0 donc $r \le n$ et soit :

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= h(x) \\ \Phi_2(x) &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \Phi_r(x) &= L_f^{r-1} h(x) \end{aligned} \qquad \text{(III.7)}$$

Si $r < n$, il est toujours possible de trouver $(n - r)$ fonctions :

$$\begin{matrix} \Phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{matrix} \quad / \Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix} \qquad \text{(III.8)}$$

Présente une *matrice Jacobiene* non singulière au point x^0 avec $\det J \neq 0$. Il est aussi possible de choisir $\Phi_{r+1}(x)$ jusqu'à $\Phi_n(x)$ de manière à avoir $L_g \Phi_i(x) = 0$ $\forall r + 1 \le i < n$ et x voisin de x^0 [8].

a) Exemple:

Soit le système non linéaire:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{f_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{x_2} \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} u \qquad \text{(III.9)}$$

1er cas : $\alpha = 1$, 2ème cas $\alpha = 0$ et $y = h(x) = x_3$

- Ecrire les champs de vecteurs correspondant.
- Calculer le champ de vecteur $[f_0 \quad f_1]$ crochet de Lie.
- Calculer le degré relatif
- Déterminer le difféomorphisme
- Déterminer le système en Z (forme canonique)

b) Solution:

- Les champs de vecteurs :

$$F_1 = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$F_2 = e^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_2}$$

- Le crochet de Lie $[f_0 \quad f_1]$

$$[f_0 \quad f_1] = \frac{\partial f_1}{\partial x^T} f_0(x) - \frac{\partial f_0}{\partial x^T} f_1(x)$$

$$[f_0 \quad f_1] = \begin{pmatrix} 0 & e^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 e^{x_2} + e^{x_2} \\ -x_2 e^{x_2} - \alpha x_1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

- Le degré relatif

  Pour $\alpha = 1$: $y = x_3 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_3 = x_2 \Rightarrow \ddot{y} = \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u$ dans ce cas $r = 2$

  Pour $\alpha = 0$: $\ddot{y} = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 = (-x_1 + e^{x_2} u) x_2 + x_1 x_2^2 \Rightarrow r = 3$

- le difféomorphisme

Pour $\alpha = 1$ $(r = 2)$

$$z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_3$$

$$z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_2$$

On a $r < n \Rightarrow L_g \Phi_3(x) = 0$

$$L_g \Phi_3(x) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x^T} g = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

On choisit $z_3 = \Phi_3(x) = -e^{x_2} + x_1 + 1$ avec $\Phi(0) = 0$

$$\Phi(x) = \begin{cases} z_1 = x_3 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = -e^{x_2} + x_1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \Phi^{-1}(x) = \begin{cases} x_1 = e^{z_2} + z_3 - 1 \\ x_2 = z_2 \\ x_3 = z_1 \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0$ $(r = 3)$

$$z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_3$$

$$z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_2$$

$$z_3 = \Phi_3(x) = L_f^2 h(x) = x_1 x_2$$

$$\Phi(x)=\begin{cases} z_1 = x_3 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = x_1 x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \Phi^{-1}(x)=\begin{cases} x_1 = z_3 / z_2 \\ x_2 = z_2 \\ x_3 = z_1 \end{cases}$$

- Le système en Z :

Pour $\alpha = 1$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{x}_3 = z_2 \\ \dot{z}_2 = (e^{z_2} + z_3 - 1)z_2 + u \\ \dot{z}_3 = -(1 + z_2 e^{z_2})(-1 + z_3 e^{z_2}) \rightarrow \textit{dynamique des zéros} \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = -z_3 + z_3^2 / z_2 + z_2 e^{z_2} u \end{cases}$$

c) <u>Forme canonique</u>

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_r = b(z) + a(z)u \\ \dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) \\ \vdots \qquad\qquad \rightarrow \textit{dynamique des zéros} \\ \dot{z}_n = q_n(z) \end{cases} \tag{III.10}$$

d) <u>Exemple:</u>

Soit le système non linéaire:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2(1+x_3) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \qquad y = h(x) = x_4 \tag{III.11}$$

- Le degré relatif

  $y = h(x) = x_4 \ldots \ddot{y} = 2x_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \Rightarrow r = 2 \quad \forall x_3 \neq -1$

- le difféomorphisme

  $z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_4$

  $z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_1^2 + x_2$

Il faut trouver $\Phi_3(x)$ et $\Phi_4(x)$ pour compléter le difféomorphisme ($n = 4$)

$$L_g\Phi_3(x) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x^T} g = 0 \;\Rightarrow \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2}(2+2x_3) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} = 0$$

On choisit $z_3 = \Phi_3(x) = -2x_3 - x_3^2 + x_2$ avec $\Phi(0) = 0$

$$L_g\Phi_4(x) = \frac{\partial \Phi_4}{\partial x^T} g = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2}(2+2x_3) + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} = 0$$

On choisit $z_4 = \Phi_4(x) = x_1$

- Le système en Z :

  1ere méthode : (après développement de calcule)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -4z_4^4 + 2z_4^2 z_2 + z_4 + 2\sqrt{1 - z_3 + z_2 - z_4^2} - u \\ \dot{z}_3 = z_4 + 2\left(-1 + \sqrt{1 + z_2 - z_4 - z_3}\right) + 2\left(-1 + \sqrt{1 + z_2 - z_4 - z_3}\right)^2 \\ \dot{z}_4 = z_4 z_2 - 2z_4^3 \end{cases} \quad \text{(III.12)}$$

  2eme méthode : (la méthode de Jacobienne)

On a $z_1 = x_4$ et $z_2 = x_1^2 + x_2$

Dans ce cas on propose $z_3 = x_3$ et $z_4 = x_1$

$$J = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_4} \end{pmatrix} \quad \text{(III.13)}$$

$$\Rightarrow J = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(J) = -1 \neq 0$ donc la proposition de z_3 et z_4 est correcte.

$$\Phi(x) = \begin{cases} z_1 = x_4 \\ z_2 = x_1^2 + x_2 \\ z_3 = x_3 \\ z_4 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \Phi^{-1}(x) = \begin{cases} x_1 = z_4 \\ x_2 = z_2 - z_4^2 \\ x_3 = z_3 \\ x_4 = z_1 \end{cases}$$

Donc le système en Z est :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = 2z_4(z_4(z_2 - z_4^2) - z_4^3) + z_4 + 2(1 + z_3)u \\ \dot{z}_3 = -z_3 + u \\ \dot{z}_4 = z_4 z_2 - 2z_4^3 \end{cases} \quad \text{(III.14)}$$

III.2. LINEARISATION EXACTE PAR BOUCLAGE (SYSTEME SISO)

Soit le système SISO la structure du régulateur qui convient $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ avec v références externes :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y = h(x) \end{cases} \quad \text{(III.15)}$$

$\alpha(x)$ et $\beta(x)$ caractérisent la commande, sont définies dans $\Re^n$ avec $\beta(x) \neq 0$

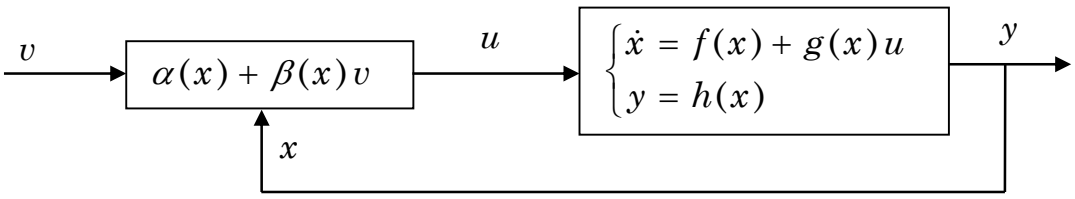


Figure III.1. Boucle de linéarisation d'un système

Pour trouver la commande il faut trouver d'abord la forme normale. Soit un système non linéaire de degré relatif $r = n$ en un point $x = x_0$ le changement de base est donné par la construction de vecteur :

$$z = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \quad \text{(III.16)}$$

D'après (III.10) nous avons $\dot{z}_n = b(z) + a(z)u = v$ puisque $\dot{z}_r = \dot{z}_n$, dans ce cas :

$$u = \frac{v - b(z)}{a(z)} = \frac{v - b(\Phi(x))}{a(\Phi(x))} \quad \text{(III.17)}$$

Le système en BF (la linéarisation exacte $r = n$)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = v \end{cases} \Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad \text{(III.18)}$$

C'est une forme linéaire et commandable, nous avons $b(z) = L_f^n h(x)$ et $a(z) = L_g L_f^{n-1} h(x)$ donc :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} (-L_f^n h(x) + v) \quad \text{(III.19)}$$

$v = Kz = k_0 z_1 + k_1 z_2 + \cdots + k_{n-1} z_n$

Le gain K peut trouver grâce au placement de pôle ou par optimisation (Riccati)

A partir de (III.16) v prend la forme :

$$v = k_0 h(x) + k_1 L_f h(x) + \cdots + k_{n-1} L_f^{n-1} h(x) \quad \Rightarrow v = \sum_{i=0}^{n-1} k_i L_f^i h(x) \qquad \text{(III.20)}$$

Donc la commande (III.19) devienne :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} (-L_f^n h(x) + \sum_{i=0}^{n-1} k_i L_f^i h(x)) \qquad \text{(III.21)}$$

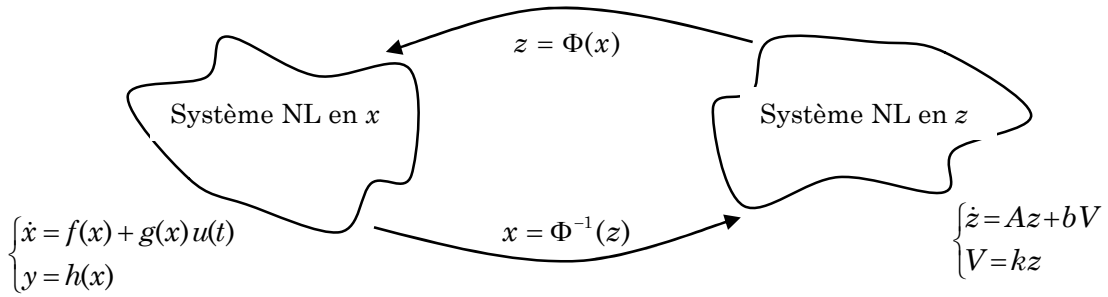


Figure III.2. Résumé de la commande avec linéarisation exacte

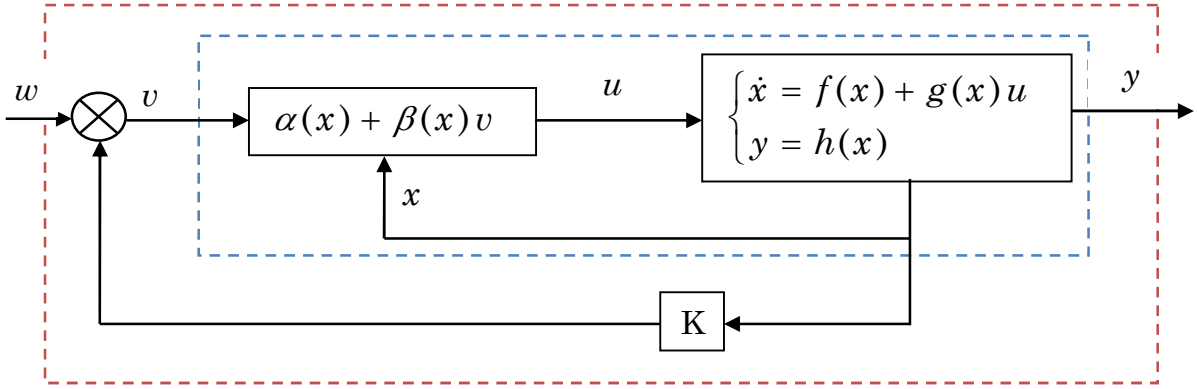


Figure III.3. Boucle de commande d'un système avec retour d'état

III.2.1. Exemple

Soit le système non linéaire:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} u \quad ; \; y = h(x) = x_3 \qquad \text{(III.22)}$$

1- Le degré relatif :

$$\dot{y} = \dot{x}_3 = x_1 - x_2$$

$$\ddot{y} = -x_1 - x_2^2$$

$$\dddot{y} = -2x_2(x_1 + x_2^2) - 2e^{x_2} u \quad \Rightarrow r = 3$$

2- le difféomorphisme

$$z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_3$$

$$z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_1 - x_2$$
$$z_3 = \Phi_3(x) = L_f^2 h(x) = -x_1 - x_2^2$$

3- le système en z :

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_3 = x_1 - x_2 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = -x_1 - x_2^2 = z_3$$
$$\dot{z}_3 = -2x_2(x_1 + x_2^2) - (1 + 2x_2)e^{x_2}u = v$$

4- La commande :

$$u = \frac{-2x_2(x_1 + x_2^2) - v}{(1 + 2x_2)e^{x_2}}$$

Avec : $v = k_0 h(x) + k_1 L_f h(x) + \cdots + k_{n-1} L_f^{n-1} h(x)$

III.2.2. Lemme

Le problème de linéarisation exact dans l'espace d'état est solvable si-s-si existe un voisinage u de $\dot{x}$ et une fonction réelle $\lambda(x)$ définie dans u

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = \lambda(x) \end{cases} \tag{III.23}$$

a un degré relatif $r = n$ au point $\dot{x}$ (voir [6]).

III.2.3. Théorème

Soit le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ la solution au problème de linéarisation exact dans l'espace d'état au voisinage d'un point $\dot{x}$ existe si-s-si :

- $rang\left[g(\dot{x}) \quad ad_{fg}(\dot{x}) \quad \cdots \quad ad_{fg}^{n-1}(\dot{x})\right] = n$ avec $ad_{fg}(x) = \left[f \quad g\right]$
- La distribution $\Delta(x) = span\left\{g(x), ad_{fg}(x), ..., ad_{fg}^{n-2}(x)\right\}$ est involutive au voisinage de $\dot{x}$

III.2.4. Résumé

La condition nécessaire et suffisante pour que le système soit localement linéarisable par retour d'état :

- On calcule le rang de la matrice $\left[g \quad ad_{fg} \quad \cdots \quad ad_{fg}^{n-1}\right]$, si le *rang=n* alors le vecteur est involutif.
- $f(0) = 0$
- Le changement de variable non linéaire est obtenu en résolvant le système au dérivé partiel dont la solution n'est pas unique :

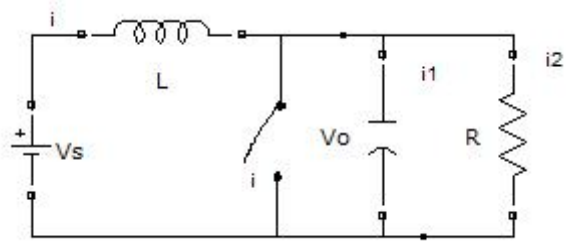
$$\begin{aligned} &L_g T_1 = 0 \\ &Lad_{fg} T_1 = 0 \\ &\vdots \\ &Lad_{ad}^{n-2} T_1 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(III.24)}$$

Une fois T_1 obtenu les autres $T_2, \cdots, T_n$ sont obtenus a partir de :

$$T_{i+1}(x) = L_f T_i(x) \qquad \text{(III.25)}$$

III.2.5. Exemple

Synthèse de la commande linéarisante pour un convertisseur élévateur (Continue- Contenue). On choisit $x^T = [i \quad V_0] = [x_1 \quad x_2]$; $u = \{0, 1\}$



$$Vs = L\frac{di(t)}{dt} + V_0 - V_0\, u \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}(Vs - V_0) + \frac{V_0}{L}u \qquad \text{(III.26)}$$

$$i = i_1 + i_2 + i.u \;;\; i_2 = \frac{V_0}{R};\; V_0 = \frac{1}{C}\int i_1(t)dt \Rightarrow \frac{dV_0}{dt} = \frac{1}{C}(i - \frac{V_0}{R} - i.u) \qquad \text{(III.27)}$$

A partir de (III.26) et (III.27) on trouve :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L}(Vs - x_2) \\ \frac{1}{C}(x_1 - \frac{x_2}{R}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x_2}{L} \\ \frac{-x_1}{C} \end{pmatrix} u \qquad \text{(III.28)}$$

A l'équilibre (régime statique) nous avons $\frac{dx}{dt} = 0;\; u = D(x) = \text{Constant}$:

$$\frac{1}{L}(Vs - x_2) = -\frac{x_2}{L}u \Rightarrow x_2^* = \frac{Vs}{1 - D(x)}$$

$$\frac{1}{C}(x_1 - \frac{x_2}{R}) = \frac{x_1}{C}u \Rightarrow x_1^* = \frac{Vs}{R(1 - D(x))^2}$$

Elimination de $D(x)$ on a la caractéristique $x_1^* = f(x_2^*)$ c.-à-d. : $x_1^* = \frac{(x_2^*)^2}{RVs}$

Dans ce cas $f(0) \neq 0$, il faut appliquer un changement de variable non linéaire pour avoir $(f(0) = 0)$

$$\begin{cases} z_2 = x_2 - Vs \Rightarrow x_2 = z_2 + Vs \\ z_1 = x_1 - \dfrac{Vs}{R} \Rightarrow x_1 = z_1 + \dfrac{Vs}{R} \end{cases} \tag{III.29}$$

Si on remplace (III.29) dans (III.28) on trouve :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dz_1}{dt} \\ \dfrac{dz_2}{dt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{z_2}{L} \\ \dfrac{z_1}{C} - \dfrac{z_2}{RC} \end{pmatrix}}_{f} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{z_2}{L} + \dfrac{Vs}{L} \\ -\dfrac{z_2}{C} - \dfrac{Vs}{RC} \end{pmatrix}}_{g} u \quad \Rightarrow f(0) = 0 \tag{III.30}$$

Vérification des conditions du théorème de linéarisation exact

$$\begin{bmatrix} g & ad_{fg} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L}(z_2 + Vs) & \dfrac{-1}{LRC}(z_2 + Vs) \\ \dfrac{-1}{C}(z_1 + \dfrac{Vs}{R}) & \dfrac{-1}{C}(\dfrac{Vs}{R^2C} + \dfrac{Vs}{L} + \dfrac{z_1}{RC}) \end{pmatrix} \tag{III.31}$$

Le rang de la matrice $\begin{bmatrix} g & ad_{fg} \end{bmatrix} = 2$, si $z_2 \neq -Vs$ alors le vecteur $g(z)$ est involutif.
$\Rightarrow$ Le système est localement linéarisable (sauf la droite $z_2 = -Vs$) par une transformation difféomorphique.

- Résolution des équations aux dérivés partielles :

$$L_g T_1 = \frac{\partial T_1}{\partial z_1} g_1(z) + \frac{\partial T_1}{\partial z_2} g_2(z) = 0 \text{ avec } T_1(0) = 0$$

$$T_1(z) = (z_1 + \frac{Vs}{R})^2 + \frac{C}{L}(z_1 + Vs)^2 - \frac{Vs^2}{R^2} - \frac{CVs^2}{L} \tag{III.32}$$

$$T_2 = L_f T_1(z) = \frac{\partial T_1}{\partial z_1} f_1(z) + \frac{\partial T_1}{\partial z_2} f_2(z)$$

$$T_2(z) = \frac{2Vs}{L}(z_1 + \frac{Vs}{R}) - \frac{2}{RL}(z_2 + Vs)^2 \tag{III.33}$$

La forme canonique :

$$\frac{dT_1(z)}{dt} = T_2(z)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_2(z)}{dt} &= \left(\frac{-2Vsz_2}{L^2} - \frac{4}{RLC}(z_2 + Vs)(z_1 - \frac{z_2}{R}) \right) + \\ &\left(\frac{2Vs}{L^2}(z_2 + Vs) + \frac{4}{RLC}(z_2 + Vs)(z_1 + \frac{Vs}{R}) \right) u = V \end{aligned} \tag{III.34}$$

$$u(z) = (V + \frac{2Vs}{L^2}(z_2 + Vs) + \frac{4}{RLC}(z_2 + Vs)(z_1 + \frac{Vs}{R})) / (\frac{2Vsz_2}{L^2} + \frac{4}{RLC}(z_2 + Vs)(z_1 - \frac{z_2}{R}))$$

V est calculé par un placement de pôles : $V = k_0 z_1 + k_1 z_2$

III.3. COMMANDE PAR BOUCLAGE NON LINEAIRE (SYSTEME MIMO)

Soit le système MIMO suivant :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)\,u_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) \end{cases} \tag{III.35}$$

Ou $f(x), g(x), \ldots, g_m(x)$ sont des champs de vecteurs et $h_1(x), \ldots, h_m(x)$ sont analytiques définie au voisinage de x_0

III.3.1 Notion de degré relatif vectoriel

Le système est dit de degré relatif vectoriel $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ au point x_0 si :

- $L_{gj} L_f^k h_i(x) = 0 \quad 1 \le i, j \le m \; et \; \forall k \le r_i$ pour tout x au voisinage de x_0
- La matrice carrée définie par (III.36) est non singulière au voisinage de x_0, le degré relatif r_i de la $i^{éme}$ sortie h_i est le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie y_i pour faire apparaitre au moins une entré.

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g1} L_f^{r_1 - 1} h_1(x) & \cdots & L_{gm} L_f^{r_1 - 1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g1} L_f^{r_m - 1} h_m(x) & \cdots & L_{gm} L_f^{r_m - 1} h_m(x) \end{bmatrix} \tag{III.36}$$

III.3.2 La forme normale

Difféomorphisme $\Phi^1(x), \Phi^2(x), \ldots, \Phi^m(x)$ tel que $\Phi^i(x) = \left[\Phi_1^i(x) \ldots \Phi_{r_i}^i(x)\right]$

Si $r < n$ les nouvelles coordonnées : $\begin{cases} z_1^i = \Phi_1^i = h_i(x) \\ z_2^i = \Phi_2^i = L_f h_i(x) \\ \vdots \\ z_{r_i}^i = \Phi_{r_i}^i = L_f^{r_i - 1} h_i(x) \end{cases}$

Les $(n - r)$ fonctions manquantes $\Phi_{r+1}(x), \ldots, \Phi_n(x)$ sont choisit de manière à avoir $L_{gj} \Phi_i(x) = 0$ pour $r + 1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$

$$\begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{r_i - 1}^i = z_{r_i}^i \\ \dot{z}_{r_i}^i = \left[L_f^{r_i} h_i(x) + \sum_{j=1}^{m} L_{gj} L_f^{r_i - 1} h_i(x)\,u_j \right] = \Phi^{-1}(x) \end{cases} \tag{III.37}$$

$$\xi^i(x) = \left[\xi_1^i, \xi_2^i \ldots \xi_{r_i}^i(x)\right]^T = \left[\Phi_1^i \ldots \Phi_{r_i}^i\right]^T \; ; \; \eta = \left[\eta_1, \ldots \eta_r\right]^T = \left[\Phi_{r+1}(x) \ldots \Phi_n^n(x)\right]^T$$

Dans ce cas le système devient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i = b_i(\xi,\eta) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\xi,\eta)\, u_j \end{cases} \quad \text{(III.38)}$$

$$\dot{\eta} = q(\xi,\eta) + \sum_{i=1}^{m} p_i(\xi,\eta)\, u_i = q(\xi,\eta) + P(\xi,\eta)U$$

$$\begin{cases} q_1(\xi,\eta) = L_f \Phi_{r+1} \\ \vdots \\ q_{n-r}(\xi,\eta) = L_f \Phi_n \end{cases} \quad \text{(III.39)}$$

Linéarisation exact par retour d'état statique :

$$\begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \dot{z}_2^i = z_3^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{r_i-1}^i = \dot{z}_{r_i} \end{cases} \quad \text{(III.40)}$$

Avec : $\dot{z}_{r_i} = b_i(z) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(z)\, u_j = V \quad i = 1,\ldots,m$

$$V = b + A.U \Rightarrow U = A^{-1}(V - b) \quad \text{(III.41)}$$

Avec : $b = \left[L_f^{r_1} h_1(x) \cdots L_f^{r_m} h_m(x)\right]^T$

Dans ce cas en aura le système :

$$\begin{cases} \dot{Z} = A.Z + B.V \\ Y = C.Z \end{cases} \quad \text{(III.42)}$$

Avec : $A = diag(a_i), B = diag(b_i), C = diag(c_i)$

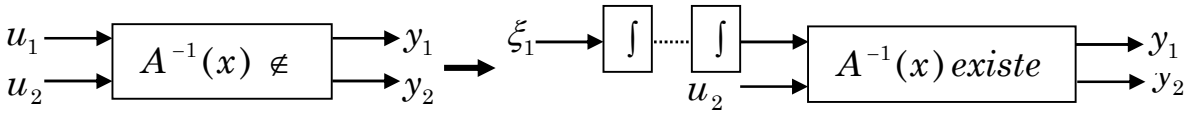
$$a_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; c_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1*r_i}$$

C'est la forme canonique de *Brunowsky*

Remarques

- Dans le cas ou la matrice A n'est pas inversible il faut faire un retour d'état dynamique c-à-d:

Retour d'état statique Retour d'état dynamique



A n'est pas inversible On augmente le degré du système

- Le degré relatif d'un système MIMO est $r = \sum r_i$ avec r_i le degré relatif de la sortie (on dérive jusqu'au l'obtention d'au moins une commande).
- Si $\sum r_i = n$ le système peut être exacte linéarisable.

III.3.3 Exemple d'un retour d'état statique

Soit le système MIMO (Figure III.4). On choisit : $x^T = \left[\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2\right]$; ; $g = 9{,}81\ m/s^2$

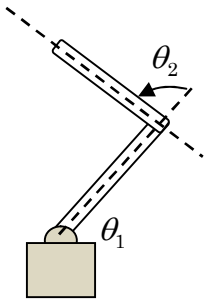


Figure III.4. Bras manipulateur à deux degré de libertés

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{1+\sin^2 x_3}\left(x_4^2 \sin x_3 + 2x_2x_4 \sin x_3 - g(x_1 + x_3) - 2g\cos x_1\right) + \frac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3} \times$$

$$\left(x_2^2 \sin x_3 + g\cos(x_1 + x_3)\right) + \frac{1}{1+\sin^2 x_3}u_1 - \frac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3}u_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (**)u_2$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3}\left(x_4^2 \sin x_3 + 2x_2x_4 \sin x_3 - g\cos(x_1 + x_3) - 2g\cos x_1\right) + \frac{3+2\cos x_3}{1+\sin^2 x_3} \times$$

$$\left(-x_2^2 \sin x_3 + g\cos(x_1 + x_3)\right) - \frac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3}u_1 + \frac{3+2\cos x_3}{1+\sin^2 x_3}u_2 = f_4(x) + (\text{''})u_1 + (\text{'''})u_2$$

Calculer la commande U :

1ère cas $y = h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$; **2ème cas** $y = h(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Solution (1ère cas)

$y_1 = h_1(x) = x_1 = \theta_1 \Rightarrow r_1 = 2$

$y_2 = h_2(x) = x_3 = \theta_2 \Rightarrow r_2 = 2$

$r = r_1 + r_2 = 4 = n \rightarrow$ Le système est exactement linéarisable.

Le difféomorphisme

$$\begin{cases} z_1^1 = \Phi_1^1(x) = h_1(x) = x_1 = Z_1 \\ z_2^1 = \Phi_2^1(x) = L_f h_1(x) = x_2 = Z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^2 = \Phi_1^2(x) = h_2(x) = x_3 = Z_3 \\ z_2^2 = \Phi_2^2(x) = L_f h_2(x) = x_4 = Z_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = Z_2 \\ \dot{Z}_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (**)u_2 = \vartheta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_3 = Z_4 \\ \dot{Z}_4 = f_4(x) + (\text{''})u_1 + (\text{'''})u_2 = \vartheta_2 \end{cases}$$

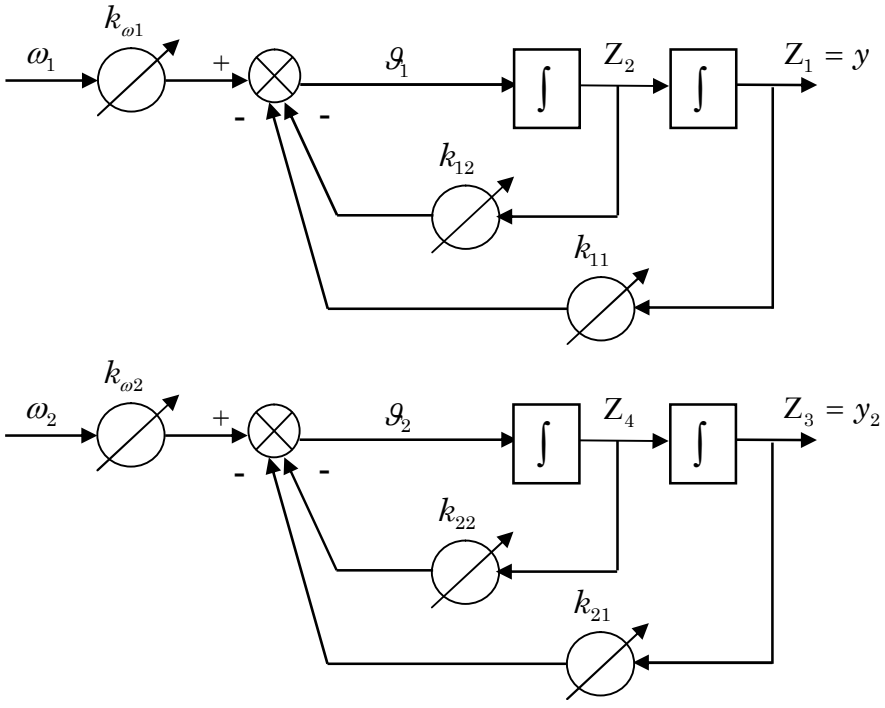


Figure III.5. Systèmes en *Z*

La forme canonique de *Brunowsky*

$$b(x) = \begin{bmatrix} L_f^2 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix}$$

$$A(x)=\begin{bmatrix} L_{g1}L_f h_1(x) & L_{g2}L_f h_1(x) \\ L_{g1}L_f h_2(x) & L_{g2}L_f h_2(x) \end{bmatrix} \quad g_1(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+\sin^2 x_3} \\ 0 \\ -\dfrac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3} \end{bmatrix} \quad g_2(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3} \\ 0 \\ \dfrac{3+2\cos x_3}{1+\sin^2 x_3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(x)=\frac{1}{1+\sin^2 x_3}\begin{bmatrix} 1 & -(1+\cos x_3) \\ -(1+\cos x_3) & 3+2\cos x_3 \end{bmatrix}$$

D'après (III.41) la loi de commande est donné par : $U = A^{-1}(V-b)$

$$\begin{aligned} u_1 &= -\left(x_4^2 \sin x_3 + 2x_2 x_4 \sin x_3 - g\cos(x_1+x_3) - 2g\cos x_3\right) \\ &\quad + (1+\cos x_3)\,\vartheta_2 + (3+2\cos x_3)\vartheta_1 \\ u_2 &= \left(x_2^2 \sin x_3 + g\cos(x_1+x_3)\right) + (1+\cos x_3)\,\vartheta_1 + \vartheta_2 \end{aligned}$$

Placement de pôles (voir figure III.5)

$$\begin{cases} \vartheta_1 = -k_{11}Z_1 - k_{12}Z_2 + k_{\omega 1}\omega_1 \\ \vartheta_2 = -k_{21}Z_3 - k_{22}Z_4 + k_{\omega 2}\omega_2 \end{cases}$$

1er sous système

$$\dot{Z}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{11} & -k_{12} \end{bmatrix} Z^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{\omega 1} \end{bmatrix} \omega_1 \;\Rightarrow\; \frac{y_1(s)}{\omega_1(s)} = \frac{k_{\omega 1}}{s^2 + sk_{12} + k_{11}}$$

$$\Rightarrow \; y_1(\infty) = \lim_{s\to\infty} s y_1(s) = \frac{k_{\omega 1}}{k_{11}}\omega_1$$

$y_1(\infty) = \omega_1 \rightarrow$ l'erreur nulle en régime permanant $\Rightarrow k_{\omega 1} = k_{11}$

2ème sous système

$$\dot{Z}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{21} & -k_{22} \end{bmatrix} Z^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{\omega 2} \end{bmatrix} \omega_2$$

La même résonnement nous donnes : $k_{\omega 2} = k_{21}$

Placement de pôles

$(s+p_1)(s+p_2) = s^2 + (p_1+p_2)s + p_1 p_2$

- 1er sous système $p_1 = p_2 \Rightarrow k_{11} = p_1^2;\; k_{12} = 2p_1$
- 2ème sous système $p_1 = p_2 \Rightarrow k_{21} = p_1^2;\; k_{22} = 2p_1$

2ème cas :

$y_1 = h_1(x) = x_2 \Rightarrow r_1 = 1$ puisque $\dot{y}_1 = \dot{x}_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (**)u_2$

$y_2 = h_2(x) = x_3 = \theta_2 \Rightarrow r_2 = 2$

$r = r_1 + r_2 = 3 < n \rightarrow$ Le système est partiellement linéarisable.

Le difféomorphisme

$$\begin{cases} z_1^1 = h_1(x) = x_2 = Z_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^2 = h_2(x) = x_3 = Z_2 \\ z_2^2 = L_f h_2(x) = x_4 = Z_3 \end{cases}$$

Compléter le difféomorphisme

$$L_g \Phi_4(x) = L_g z_4 = 0 \text{ on choisit } Z_4 = \sin x_1 \det\left[\frac{\Phi(x)}{dx}\right] \neq 0$$

Donc la forme canonique de *Brunowsky* est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \dot{x}_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (**)u_2 = \vartheta_1 \\ \dot{Z}_2 = \dot{x}_3 = x_4 = Z_3 \\ \dot{Z}_3 = \dot{x}_4 = f_4(x) + (\text{''})u_1 + (\text{'''})u_2 = \vartheta_2 \\ \dot{Z}_4 = \dot{x}_1 \cos x_1 = Z_1 \cos\{arc\sin(Z_4)\} \quad \text{avec } \dot{x}_1 = x_2 = Z_1 \end{cases}$$

La loi de commande est donné par :

$$\begin{aligned} u_1 = &-\left(x_4^2 \sin x_3 + 2x_2 x_4 \sin x_3 - g\cos(x_1 + x_3) - 2g\cos x_3\right) \\ &+ (1 + \cos x_3)\,\vartheta_2 + (3 + 2\cos x_3)\vartheta_1 \end{aligned}$$

$$u_2 = \left(x_2^2 \sin x_3 + g\cos(x_1 + x_3)\right) + (1 + \cos x_3)\,\vartheta_1 + \vartheta_2$$

III.4. CONCLUSION

Ce chapitre permet de résoudre le problème de régulation par retour d'état linéarisant. Ainsi la linéarisation (entrée/sortie) exacte dans l'espace d'état au voisinage d'un point de fonctionnement des systèmes non linéaires de type SISO et MIMO. Il est question de rappelé les déférentes notions de base afin de faire face à ce problème.

Dans le but de synthétise une commande non linéaire il faut passer par l'étape d'étude de stabilité ou le chapitre suivant introduit des notions de base de stabilité selon la théorie de Lyapunov.

Chapitre IV

Stabilité, Stabilité selon Lyapunov

IV.1. INTRODUCTION

La plupart des systèmes physiques (procédés) qui nous entourent sont non linéaires. Bien souvent, ces non linéarités sont faibles ou ne sont pas visibles sur la plage d'opérations de ces procédés. Le souci constant d'améliorer les performances des systèmes commandés conduit à des modélisations de plus en plus précises qui permettent de répondre sur une plus large plage d'opérations. C'est à ce moment que les non linéarités se font sentir et rendent les outils d'analyse et/ou de synthèse des lois de commande, utilisés dans le domaine linéaire, caduques et absolument incapables de rendre compte de certains phénomènes. C'est pourquoi, depuis quelques années, beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. La majorité de ces approches consiste à trouver une fonction de Lyapunov qui permet de déduire une loi de commande pour le système tout en assurant la stabilité globale de la commande.

Ce chapitre présent, dans un premier temps, une brève introduction sur les notions théoriques de stabilité des systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte et, dans un deuxième temps, il introduit des notions de base de stabilité selon la théorie de Lyapunov [9].

IV.2. NOTIONS DE BASES

La notion de stabilité caractérise le domaine dans le quel se trouve les signaux du système. Elle est la chose la plus importante à déterminer elle peut être par plusieurs critère : Routh, Nyquiste…

La méthode de Lyapunov est une méthode plus générale (appliquée aux systèmes linéaires et non linéaires). Cette section présente quelques notions de bases nécessaires à la compréhension des subtilités de la théorie de Lyapunov.

IV.2.1 Systèmes non linéaires

De façon générale, les systèmes physiques représentés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants sont appelés systèmes linéaires. L'hypothèse de linéarité équivaut au principe de superposition. Les systèmes non linéaires, par opposition aux systèmes linéaires, sont des systèmes physiques qui ne sont pas régis par des équations linéaires. Autrement dit, le principe de superposition ne peut pas leur être appliqué.

Les systèmes non linéaires peuvent être le lieu de plusieurs phénomènes. Par exemple, ils peuvent converger, en régime permanent, à différents points d'équilibres, contrairement aux systèmes linéaires, qui n'en possèdent qu'un seul. Cependant, bien d'autres phénomènes caractérisent les systèmes non linéaires [7]. Quelques différences vont être introduites dans les sous sections suivantes.

IV.2.2 Equilibre

Physiquement, un système est en équilibre lorsqu'il conserve son état en absence de forces externes. Mathématiquement, cela équivaut à dire que la dérivée $\dot{x}$ de son vecteur d'état est nulle. Pour un système :

$$\dot{x} = \varphi(x) \tag{IV.1}$$

L'état (ou les états) d'équilibre x_e, est la solution (sont les solutions) de l'équation algébrique $\varphi(x) = 0$

Pour les systèmes linéaires, dors $\varphi(x) = A \cdot x$, ce qui implique que $x = 0$ est un point d'équilibre pour tous les systèmes linéaires. Deux cas différents peuvent survenir, soit A est régulière, alors que l'origine est le seul point d'équilibre. Si A est singulière, ce qui défini un sous-espace où $x \cdot A = 0$ alors il existe une région d'équilibre. Pour les systèmes non linéaires, la solution n'est pas aussi évidente et l'équilibre ne se trouve pas toujours à l'origine. Les régions d'équilibres peuvent être constituées de domaines continus ou de points isolés et/ou la combinaison des deux.

IV.2.3 Plan de phase

Pour bien comprendre le comportement d'un système non linéaire, on a recouru à une représentation des ses trajectoires dans l'espace de phase comme montre la figure (III.1). Ces trajectoires sont un ensemble de courbes qui représentent l'évolution de l'état du système dans le temps. Cette représentation doit toutefois passer par la résolution de l'équation différentielle (III.1), ce qui n'est pas toujours facile. Cependant, les techniques basées sur la deuxième méthode de Lyapunov contournent ce problème. Cette méthode sera montrée dans ce chapitre.

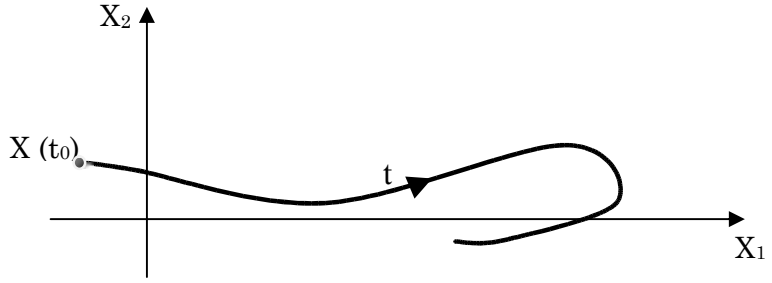


Figure IV.1 Trajectoire d'un système dans le plan de phase.

IV.3. STABILITE (SELON LYAPUNOV)

De façon générale, on dit qu'un système est stable s'il, déplace de sa position d'équilibre, il tend à y revenir ; instable, s'il tend à s'en écarter davantage. Lyapunov fournit une explication un peu plus mathématique de la stabilité [44].

Prenons comme exemple un système dont l'état est défini par le vecteur x qui possède la position d'équilibre x_e. Écarté de sa position d'équilibre et abandonné à lui-même au temps $t = t_0$ avec les conditions initiales $x(t_0)$, le système aura comme état $x(t)$. La position d'équilibre du système est stable voir Figure (IV.2) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\| x(t_0) - x_e \|^2 < \delta \tag{IV.2}$$

et qu'après un certain temps t, et pour toutes les valeurs $t > t_0$, la relation suivante est vérifiée :

$$\| x(t) - x_e \|^2 < \varepsilon \tag{IV.3}$$

Dans le cas contraire l'équilibre est instable. Il n'est pas nécessaire que l'état $x(t)$ tende vers x_e, lorsque t augmente indéfiniment, pour que le système soit stable. Si l'état tend effectivement vers x_e, le système est *asymptotiquement stable*. Dans le cas où les états n'atteignent pas x_e, mais qu'ils restent à l'intérieur d'un certain ε, alors le système à une *stabilité simple* (Figure(IV.2)).

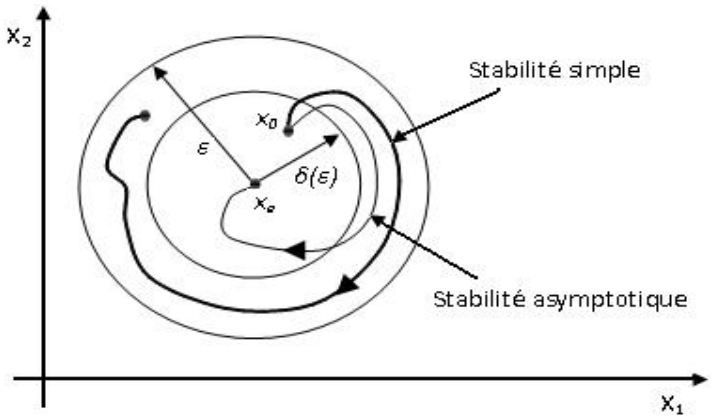


Figure IV.2 Types de stabilité selon Lyapunov dans le domaine roulière.

IV.4. STABILITE LOCALE ET STABILITE GLOBALE

On peut prédire le comportement d'un système linéaire à partir de l'analyse de sa position d'équilibre. Un système dont le point d'équilibre est stable (instable) est stable (instable). Il n'en est plus de même pour un système non linéaire.

Étant donné que celui-ci peut avoir plusieurs positions d'équilibre, la stabilité de l'une de ces positions d'équilibre ne suffit pas à elle seule à prédire la stabilité du système. Afin de quantifier l'influence de la stabilité d'un point d'équilibre sur la stabilité du système, de nouvelles définitions de la stabilité sont introduites ; on parle de stabilité locale, stabilité globale et région d'attraction.

IV.4.1 Stabilité locale

La stabilité locale concerne simplement la position d'équilibre considérée, sans rien préjuger sur le domaine de validité de cette stabilité. C'est une condition nécessaire, mais non suffisante à la stabilité du système dans un certain domaine *D*, contenant cette position d'équilibre.

IV.4.2 Stabilité globale

On parle de stabilité globale lorsque le système est stable pour toutes les valeurs que peuvent prendre les variables du système. La stabilité globale possède un intérêt pratique beaucoup plus considérable que la stabilité locale. Elle ne dépend pas seulement du système, mais aussi des valeurs que peuvent prendre les variables dans le problème considéré. Ainsi, le même système est stable ou instable globalement: suivant le domaine de variables auquel on s'intéresse.

IV.4.3 Région d'attraction

La région autour de la position d'équilibre, à l'intérieur de laquelle toutes les trajectoires approchent le point d'équilibre est appelée région ou domaine d'attraction. Sa taille est souvent un facteur très important dans l'évaluation des performances des systèmes non linéaires.

IV.5 METHODES DE LYAPUNOV

Les faibles non-linéarités dans un système à commander sont, la plupart du temps, traitées comme des perturbations affectant un modèle linéaire du système. Toutes les théories, qui ont été développées depuis plusieurs années et qui sont bien connues des systèmes linéaires sont utilisées. Malheureusement, ces non-linéarités ne peuvent pas toujours être mises de côté et il faut alors utiliser d'autres méthodes [2].

Il y a deux approches possibles pour la commande d'un système non linéaire. La première vise à linéariser le système à commander, afin de profiter des techniques des modèles linéaires. Cette linéarisation est réalisée, moyennant des approximations ou des transformations géométriques dans l'espace de phase. Le système linéarisé est ensuite traité avec la théorie des systèmes linéaires.

La deuxième approche consiste à trouver une Fonction de Commande de Lyapunov (fcl) garantissant certaines performances pour le système en boucle

fermée. De telles fonctions peuvent être très difficiles à trouver pour un système non linéaire d'ordre élevé. C'est là qu'entre en jeu la technique du backstepping qui permet de réduire cette complexité.

Toutefois, avant d'introduire le backstepping, les deux méthodes d'analyse des systèmes non linéaires, fournies par Lyapunov, vont être brièvement décrites. Une attention particulière sera portée sur la deuxième méthode de Lyapunov qui fourni un outil très puissant pour tester et trouver des conditions suffisantes à la stabilité des systèmes dynamiques, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles les décrivant [11].

IV.5.1 Première méthode de Lyapunov

Le théorème de *stabilité locale* de Lyapunov, connu sous le nom de première méthode, permet de se prononcer sur la linéarisation d'une dynamique autour d'un point d'équilibre. Cette méthode apporte une validité théorique à la technique de linéarisation. Elle mentionne que si le système linéarisé est asymptotiquement stable, alors i1 y a stabilité asymptotique. Dans le cas où le système linéarisé est instable, il y a instabilité. Par contre si celui-ci est stable sans pour autant l'être asymptotiquement, alors il est impossible de se prononcer sur la stabilité.

Ce théorème est d'une importance limitée, car il ne permet d'étudier que la stabilité d'un point singulier (stabilité locale) et ne donne aucune information sur le domaine de stabilité (stabilité globale). De plus, dû aux approximations du premier degré (linéarisation), il n'est pas possible de tenir compte de tous les types de phénomènes non-linéaires (organe avec zone morte, ...) [12].

IV.5.2 Deuxième méthode de Lyapunov

Cette méthode est basée sur le concept d'énergie dans un système. Pour un système physique, l'énergie est une fonction définie positive de son état. Dans un système conservatif, l'énergie reste constante; pour un système dissipatif, elle décroît. Pour ces deux cas, le système est stable. Si l'énergie croît, le système est instable [2].

L'idée de cette méthode est d'analyser la stabilité du système, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles non linéaires le régissant. Il suffit simplement d'étudier les variations (signe de la dérivée) de l'énergie (ou une fonction qui lui est équivalente) le long de la trajectoire du système (figures 3.3). Les théorèmes suivants, qui permettent de se prononcer sur la stabilité (ou instabilité) d'un système, sont fournis par Lyapunov (1966) [12].

Théorème (Stabilité simple)

- S'il est possible de trouver une fonction V de signe défini dans un domaine D et dont la dérivée totale $\dot{V}$ soit semi-définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre est (simplement) stable dans ce domaine (c'est-à-dire stable non asymptotiquement, voir figure (IV.2)).

- Stabilité selon la figure (IV.3)

$$\forall x_1 \in I_1 \Rightarrow \exists\ I_2(I_1) : x(t) \leq I_2 \qquad \text{(IV.4)}$$

- Un système est L stable (stable au sens de Lyapunov) si-s-si tout les signaux appliquées sur le système ne sort pas du domaine roulière du système figure (III.2). D'un point de vue mathématique Lyapunov à montionner la notion de stabilité :

$$\text{Considéron s}\ \ R > 0 \quad \exists\, r > 0 \ \text{telque si} \quad \|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < r\ \forall t > 0 \qquad \text{(IV.5)}$$

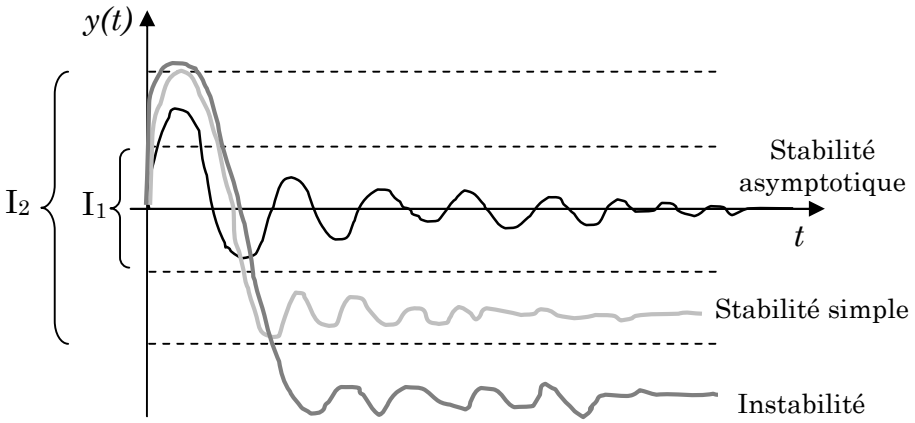


Figure IV.3 Types de stabilité selon Lyapunov.

Théorème (Stabilité asymptotique)

- S'il est possible de trouver une fonction $V(x)$ de signe défini (avec $V(0) = 0$), dans un domaine D comprenant la position d'équilibre et dont la dérivée totale par rapport au temps $\dot{V}$ soit définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre sera asymptotiquement stable dans ce domaine.
- Dans le domaine roulière un système est asymptotiquement stable si-s-si :

  Il est L stable et plus de ça $\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0$

Théorème (Instabilité)

S'il est possible de trouver une fonction Vdont la dérivée est de signe défini dans un domaine D comprenant l'origine et que V soit définie de même signe que$\dot{V}$, ou indéfinie en signe, l'équilibre est instable.

Contrairement à la première méthode, la deuxième méthode donne plus d'information au niveau de la stabilité. Elle a l'avantage de ne pas se limiter à la prédiction des points d'équilibre, mais bien d'une région d'attraction au tour de ces points d'équilibre [2].

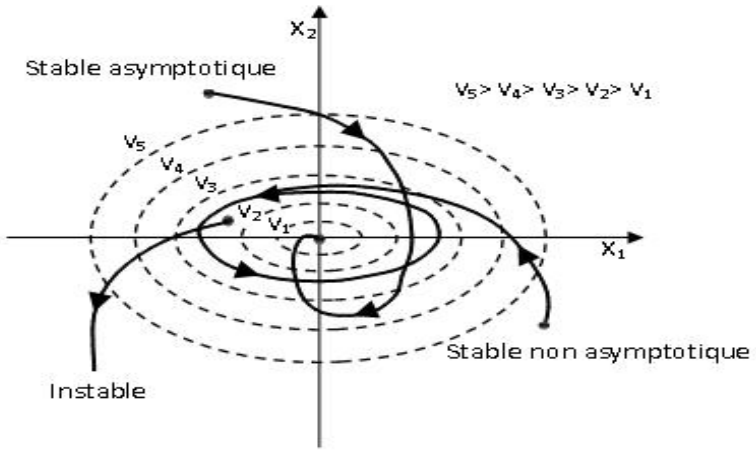


Figure IV.4 Contours a énergie constante dans le plan de phase.

Ces théorèmes présentent une condition suffisante à la stabilité. Pour l'étude de la stabilité d'un système caractérisé par un vecteur d'état x, la méthode directe de Lyapunov consiste, alors à chercher une fonction $V(x)$ (représentative de l'énergie) de signe défini qui se prête à l'application de l'un des théorèmes cités précédemment (Figure IV.4). Il n'y a aucune méthode qui permet de trouver directement une fonction de Lyapunov pour un système donné. Néanmoins, il existe des approches qui conduisent, en général, à des résultats acceptables [11]. Voici quelques exemples de fonction de Lyapunov :

IV.6. FORME QUADRATIQUE

La définition positive de la forme quadratique $V(x)$ peut être déterminée par le critère de *Sylvester* qui annonce que $V(x)$ est définie positive si P est définie positive.

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x \tag{IV.6}$$

Avec : $x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$; $x^T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Où P est une matrice réelle symétrique.

Exemple 1

$V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$

Pour déterminer le type de définition de V il faut la mètre sous la forme $V(x) = x^T \cdot P \cdot x$

$$V(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

P est définie positive $\Rightarrow V(x)$ est DP

IV.6.1. Deuxième méthode de Lyapunov

Soit le système linéaire $\dot{x} = Ax$ et soit la fonction d'énergie $V(x) = x^T \cdot P \cdot x$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T \cdot P \cdot x + x^T \cdot P \cdot \dot{x} \\ &= (Ax)^T \cdot P \cdot x + x^T \cdot P \cdot Ax \\ &= x^T A^T \cdot P \cdot x + x^T \cdot P \cdot Ax \Rightarrow \dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA)x \end{aligned} \tag{IV.7}$$

Le système est stable si $\dot{V}(x) < 0$ c.-à-d. $(A^T P + PA)$ est définie négative
Si on pose $A^T P + PA = -Q$ avec Q représente une matrice définie positive, dans ce cas :

$$\dot{V}(x) = -x^T \cdot Q \cdot x \tag{IV.8}$$

Pour la détermination de stabilité en fixe Q (définie positive) et en calcule la matrice symétrique P. Si P est DP $\Rightarrow$ le système est stable.

Exemple 2

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Etudier la stabilité par la méthode de Lyapunov.

Système stable $\Rightarrow \dot{V}(x) < 0 \Rightarrow (A^T P + PA) = -Q$. Dans ce cas si Q est DP il faut trouver P DP

Choix Q DP $\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $|1| > 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après développement en trouve :

$$P=\begin{pmatrix}3/2 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |3/2|>0\,,\ \begin{vmatrix}3/2 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{vmatrix}>0$$

P est DP $\Rightarrow$ le système stable.

IV.6.2. Fonction quadratique plus intégrale

$$V(x)=x^T\cdot P\cdot x+\int_0^i \varphi(u)\,du \tag{IV.9}$$

Avec φ assujettie à certaines contraintes.

Cependant, des inconvénients et des limites existent toujours : L'élaboration d'une fonction de Lyapunov impose un modèle mathématique simplifié et peu réaliste. Les résultats des méthodes directes sont conservatifs : on ne peut rien affirmer quant à la stabilité en dehors du domaine estimé [10, 13].

IV.7. DEFINITION POSITIVE DES FONCTIONS SCALAIRES

On peut dire que la fonction scalaire $V(x)$:

- Définit positive si $V(0)=0$ et $V(x)>0, x\neq 0$
- Semi définit positive si $V(0)=0$ et $V(x)\geq 0, x\neq 0$
- Définit négative si $-V(x)$ définit positive.
- Semi définit négative si $-V(x)$ Semi définit positive.
- Sans borne radiale si $V(x)\to\infty$ quand $\|x\|\to\infty$

Maintenon on peut évoluer le nouveau théorème de stabilité [52].

Théorème (Lasalle-Yoshizawa)

On Considère le système

$$\dot{x}=f(x(t)) \tag{IV.10}$$

Soit $x_e=0$ point d'équilibre du système (IV.10), et soit $V(x)$ une fonction scalaire différentielle contenu sachons que :

* $V(x)$ Définit positive.
* $V(x)$ Sans borne radiale.
* $\dot{V}(x)=V_x(x)f(x)\leq -W(x)$ Avec $W(x)$ Semi définit positive

Toute solution de (IV.10) satisfait :

$$\lim_{t\to\infty} W(x(t)) = 0 \qquad \text{(IV.11)}$$

Si $W(x)$ Définit positive (DP) alors le point d'équilibre $x_e = 0$ possède une stabilité asymptotique globale.

Exemple 3

* $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ $\quad \begin{cases} V > 0 \\ V(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow DP$

* $V(x) = (x_1 + x_2)^2$ $\quad \begin{cases} V \geq 0 \\ V(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow SDP$

* $V(x) = -x_3^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$ $\begin{cases} V < 0 \\ V(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow DN$

* $V(x) = x_1 x_2 + x_2^2$ $\quad V$ Indefinie

Exemple 4

On considère le système :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3$$

Si on choisir $V(x) = \alpha \cdot x_1^4 + x_2^2$ on obtient :

$$\dot{V}(x) = (4\alpha - 2) \cdot x_1^3 x_2 - 2x_2^2$$

Le choix de $\alpha = 1/2$ nous donne la nouvelle expression de $\dot{V}$ avec $\dot{V}(x) = -2x_2^2 \leq 0$ évidemment on ne peut pas utilise le théorème **(**IV.6) comme il est par ce que $\dot{V}$ est Semi définit négative.

IV.8. FONCTION DE COMMANDE DE LYAPUNOV (fcl)

Maintenant on ajoute la commande u et on considère le nouveau système :

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad \text{(IV.12)}$$

Notre objectif est de trouver une loi de commande $u = \alpha(x)$ telle que l'équilibre ($x_e = 0$) de l'état désire du système en boucle fermée.

$$\dot{x} = f(x, \alpha(x)) \qquad \text{(IV.13)}$$

Soit asymptotiquement stable. Pour cela un bon choix des fonctions $V(x)$ et $W(x)$ est nécessaire. Avec $W(x)$ une fonction définit positive.

Nous avons besoin de trouver la commande $\alpha(x)$ pour garantir que pour tous $x \in \Re^n$

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dx} f(x, \alpha(x)) \leq -W(x) \tag{IV.14}$$

On doit choisir le paire $V(x)$ et $W(x)$ soigneusement pour garantir la stabilisation du système (IV.12) et vérifier la condition (IV.14).

IV.8.1 Définition

Une fonction $V : \Re^n \to \Re_+$ définie positive et sans borne radiale est appelée une fonction de commande de Lyapunov (fcl) pour le système (IV.12) si pour tous $x \neq 0$

$$\dot{V}(x) = V_x(x) f(x,u) < 0 \text{ Pour certaines commandes } u \tag{IV.15}$$

La signification de cette définition est en effet l'existence de loi de commande globalement stabilisante est équivalent à l'existence de fcl. Si on à une fcl d'un système on peut certainement trouver une loi de commande globalement stabilisante. L'inverse et aussi vrai [14].

IV.8.2 Application au design

Soit à stabiliser l'origine ($x_1 = 0$) du système scalaire :

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_1)^T \vartheta + \psi_1(x_1) u \tag{IV.16}$$

Ou φ_1 et ψ_1 sont des fonctions non linéaires, ϑ est un vecteur de paramètres connus. Pour ce faire, une fcl $V(x_1)$ doit être choisie et une commande u qui annule sa dérivée le long de la trajectoire, doit être calculée. Pour un système scalaire,

$$V(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2 \tag{IV.16}$$

représente souvent un bon choix [7, 15]. Sa dérivée le long de la solution de (IV.16) donne :

$$\dot{V}(x_1) = x_1 . \dot{x}_1 = x_1 . \left(\varphi_1(x_1)^T \vartheta + \psi_1(x_1) u \right) \tag{IV.17}$$

Un choix judicieux de u rend $\dot{V}(x_1)$ négative et assure la stabilité asymptotique de l'origine du système. Un exemple de commande est donné par le choix de u tel que :

$$\varphi_1(x_1)^T \vartheta + \psi_1(x_1) u = -k_1 x_1 \quad , \quad k_1 > 0 \tag{IV.18}$$

Ce qui donne :

$$u = \frac{1}{\psi_1(x_1)}(\varphi_1(x_1)^T \vartheta - k_1 x_1) \tag{IV.19}$$

La dérivée s'écrit alors:

$$\dot{V}(x_1) = -k_1 x_1^2 \leq 0 \tag{IV.20}$$

D'où la stabilité asymptotique de l'origine. Le fait que, dans (IV.20), V soit semi-définie négative n'implique pas forcément une stabilité simple. L'ensemble des points où la dérivée s'annule ne constitue pas une trajectoire possible du système, puisqu'elle ne s'annule qu'à l'origine. On peut donc, selon le théorème de Barbašin et Krasovskij [16], affirmer la stabilité asymptotique.

Remarque (Choix de la commande)

Le choix de *u* n'est pas unique. Un bon choix permet de rendre négative la dérivée, sans supprimer les non-linéarités utiles dans le système, ni augmenter inutilement l'effort fourni par l'actionneur.

Exemple

Soit à stabiliser l'origine ($x_1 = 0$) du système scalaire :

$$\dot{x}_1 = 5x_1^2 - x_1^3 + u$$

Il s'agit de formuler une fcl $V(x) > 0$ pour le variable d'état du système, et de choisir la loi de commande *u* qui fera décroître cette fonction. En définissant la fonction de Lyapunov par :

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$$

Pour que la fonction de lyapunov décroisse, il suffit d'assurer que sa dérivée est négative. Ceci est vérifie si :

$$\dot{V}(x_1) = x_1.\dot{x}_1 = x_1.(5x_1^2 - x_1^3 + u) \leq 0$$

Un choix judicieux de *u* rend $\dot{V}(x_1)$ négative et assure la stabilité asymptotique de l'origine du système.

$$5x_1^2 - x_1^3 + u = -k_1 x_1 \quad , \quad k_1 > 0$$

Par exemple on choisir *u* comme :

$$u = -k_1 x_1 - 5x_1^2 + x_1^3$$

La dériver prend la forme suivante :

$$\dot{V}(x_1) = -k_1 x_1^2 \leq 0$$

D'où la stabilité asymptotique de l'origine est assurée.

IV.8.3 Choix de la fonction de Lyapunov

Même pour des systèmes simples et en l'absence d'incertitudes, le choix de la fonction de Lyapunov, et de la loi de commande (qui en dépend directement), n'est pas toujours facile. Aucune règle générale n'existe quant au choix d'une telle fonction. Et quand on sait l'influence de ce choix sur le comportement général du système, on comprend l'intérêt qu'a suscité ce problème ces dernières années. Un bon choix de la fonction de Lyapunov permet d'assurer une stabilité dans une large plage de fonctionnement, voire même globale. Différentes approches ont été présentées dans [16], concernant la construction des fonctions de Lyapunov dans le cadre de l'analyse des systèmes simples.

IV.9. CONCLUSION

Ce chapitre présent, dans un premier temps, une brève introduction sur les notions théoriques de stabilité des systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte et, dans un deuxième temps, il introduit des notions de base de stabilité selon la théorie de Lyapunov.

Dans ce chapitre on à définit le concept fcl qui est un outil principal pour la conception des commandes non linéaires. Beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. Le backstepping qui fait l'objet de chapitre suivant fait partie de ces nouvelles méthodes de commande. Cette approche consiste à trouver une fonction de Lyapunov qui permet de déduire une loi de commande pour le système tout en assurant la stabilité globale de commande.

Chapitre V

Commande par Backstepping

V.1. INTRODUCTION

La plupart des systèmes physiques (procédés) qui nous entourent sont non linéaires. Bien souvent, ces non linéarités sont faibles ou ne sont pas visibles sur la plage d'opérations de ces procédés. Le souci constant d'améliorer les performances des systèmes commandés conduit à des modélisations de plus en plus précises qui permettent de répondre sur une plus large plage d'opérations. C'est à ce moment que les non linéarités se font sentir et rendent les outils d'analyse et/ou de synthèse des lois de commande, utilisés dans le domaine linéaire, caduques et absolument incapables de rendre compte de certains phénomènes. C'est pourquoi, depuis quelques années, beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. Le backstepping [9, 17] fait partie de ces nouvelles méthodes de commande. Cette approche consiste à trouver une fonction de Lyapunov qui permet de déduire une loi de commande pour le système tout en assurant la stabilité globale de la commande.

Ce chapitre présent, dans un premier temps, une brève introduction sur les notions théoriques de stabilité des systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte ces notions de bases sont nécessaires à la compréhension des subtilités de la théorie du backstepping et, dans un deuxième temps, il introduit la synthèse d'une commande par backstepping dédie au machine asynchrone (MAS) basée sur le principe de l'orientation du flux rotoriques.

V.2. DESIGN PAR BACKSTEPPING

Le design d'un contrôleur pour un système non linéaire de la forme :

$$\dot{x} = \varphi(x, \theta, u, t) \tag{V.1}$$

Où le vecteur d'état x est de dimension élevée, peut souvent s'avérer une tâche difficile, voire impossible. La technique du backstepping offre une méthode systématique pour répondre à ce type de problème. Elle combine la notion de fonction de contrôle de Lyapunov (fcl) avec une procédure récursive de design. Cela permet de surmonter l'obstacle de la dimension et d'exploiter la souplesse de conception dans le cas scalaire pour résoudre les problèmes de commande pour des systèmes d'ordre plus élevé. Ne faisant pas nécessairement appel à la

linéarisation, le backstepping permet, quand il y en a, de conserver les non-linéarités utiles qui, souvent, aident à conserver des valeurs finies du vecteur d'état. Cette technique suppose que l'on est en mesure de trouver au moins pour un système scalaire, une loi de commande u et une fonction de contrôle de Lyapunov $V(x)$ qui stabilise son origine. [18]-[20].

La méthode consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. A chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. À la dernière étape, la loi de commande est trouvée. Celle-ci permet de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation.

Contrairement à la plupart des autres méthodes, le backstepping n'a aucune contrainte au niveau du type de non linéarité. Cependant, le système doit se présenter sous la forme dite paramétrique pure. Les équations d'un tel système sont données par

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1)^T \vartheta + \psi_1(x_1)\, x_2 \\
\dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1, x_2)^T \vartheta + \psi_2(x_1, x_2)\, x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1})^T \vartheta + \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, x_n \\
\dot{x}_n &= \varphi_n(x_1, x_2 \ldots, x_n)^T \vartheta + \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{V.2}$$

Ou ϑ est un vecteur de paramètres constants, φ_i et ψ_i sont des fonctions non linéaires connues. $\varphi_i(0) = 0$ et $\psi_n(x) \neq 0 \ \forall x \in \Re^n$

Dans le cas où le système à commander fait partie de la classe plus restrictive des systèmes dits à forme paramétrique stricte ($\psi_i = 1$), les propriétés de poursuite et de régulation obtenues sont globales [15]. Pour les systèmes à forme paramétrique pure, l'étendue de la validité de ces propriétés dépend du domaine de définition des transformations géométriques (difféomorphismes) qui permettent de ramener le système sous la forme stricte. Dans le cas où ce domaine est $\Re^n$, les propriétés sont également globales.

Remarque (Simplification)

Pour toutes les méthodes qui seront présentées, la procédure de design restera la même, pour les systèmes d'ordre n ≥ 3. Afin de simplifier les expressions, les systèmes utilisés seront d'ordre 3. Les résultats généraux (ordre n) seront toutefois donnés. Il faut noter que le nombre des étapes, nécessaires à la construction de la commande, de la fcl et éventuellement de la loi d'adaptation, est égal à l'ordre du système [7, 15,21].

V.2.1 Algorithme de base

Afin d'illustrer le principe de la méthode du backstepping, on considère le cas des systèmes non linéaires de la forme [22]:

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_1)^T \vartheta + \psi_1(x_1)\, x_2 \tag{V.3}$$

$$\dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2)^T \vartheta + \psi_2(x_1, x_2)\, x_3 \tag{V.4}$$

$$\dot{x}_3 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3)^T \vartheta + \psi_3(x_1, x_2, x_3)\, u \tag{V.5}$$

Le vecteur des paramètres ϑ est supposé connu. On désire faire suivre à la sortie $y = x_1$ le signal de référence y_r où $\dot{y}_r, \ddot{y}_r$ et $\dddot{y}_r$ sont supposées connues et uniformément bornées. Le système étant du troisième ordre, le design s'effectue en trois étapes.

Étape 1

On considère d'abord l'équation (V.3), où la variable d'état x_2 est traitée comme une commande (*fictive* !) et l'on définit la première valeur désirée $x_1^d = \alpha_0 = y_r$

La première variable d'erreur se définit par :

$$e_1 = x_1 - x_1^d = x_1 - \alpha_0 \tag{V.6}$$

Avec ces variables, le système (V.3) s'écrit :

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{\alpha}_0 = \varphi_1(x_1)^T \vartheta + \psi_1(x_1)\, x_2 - \dot{\alpha}_0 \tag{V.7}$$

Pour un tel système, il a été montré dans chapitre précédent (IV.16) que la fonction quadratique

$$V_1(e_1) = \frac{1}{2} e_1^2 \tag{V.8}$$

Constitue un bon choix de fcl. Sa dérivée, le long de la solution de (V.8), est donnée par :

$$\dot{V}_1(e_1) = e_1 . \dot{e}_1 = e_1 . \left(\varphi_1(x_1)^T \vartheta + \psi_1(x_1)\, x_2 - \dot{\alpha}_0 \right) \tag{V.9}$$

Un choix judicieux de $x_2 u$ rend $\dot{V}_1(e_1)$ négative et assure la stabilité asymptotique de l'origine du sous-système. Prenons comme valeur de x_2 la fonction α_1 telle que:

$$\varphi_1(x_1)^T \vartheta + \psi_1(x_1)\, \alpha_1 - \dot{\alpha}_0 = -k_1 e_1 \quad , \quad k_1 > 0 \tag{V.10}$$

Ce qui donne :

$$x_2^d = \alpha_1 = \frac{1}{\psi_1(x_1)}(\varphi_1(x_1)^T \vartheta + \dot{\alpha}_0 - k_1 e_1) \tag{V.11}$$

La dérivée s'écrit alors:

$$\dot{V}_1(e_1) = -k_1 e_1^2 \leq 0 \tag{V.12}$$

d'où la stabilité asymptotique de l'origine de (V.6).

Étape 2

On considère les sous-systèmes (V.6)-(V.7) et l'on définit la nouvelle variable d'erreur

$$e_2 = x_2 - x_2^d = x_2 - \alpha_1 \tag{V.13}$$

qui représente l'écart entre la variable d'état x_2 et sa valeur désirée α_1. À cause du fait que x_2 ne peut être forcée à prendre instantanément une valeur désirée, en l'occurrence α_1, l'erreur e_2 n'est pas, instantanément, nulle. Le design dans cette étape consiste, alors, à forcer e_2 à s'annuler avec une certaine dynamique, choisie au préalable.

Les équations du système à commander, dans l'espace (e_1, e_2), s'écrivent :

$$\dot{e}_1 = \varphi_1{}^T \vartheta + \psi_1.(e_2 + \alpha_1) - \dot{\alpha}_0 \tag{V.14}$$

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = \varphi_2{}^T \vartheta + \psi_2 x_3 - \dot{\alpha}_1 \tag{V.15}$$

pour lequel on choisit comme fonction de Lyapunov

$$V_2(e_1, e_2) = V_1 + \frac{1}{2} e_2^2 \tag{V.16}$$

Cette dernière a pour dérivée, le long de la solution de (V.14)-(V.15)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(e_1, e_2) &= e_1(\varphi_1{}^T \vartheta + \psi_1.(e_2 - \alpha_1) - \dot{\alpha}_0) + e_2(\varphi_2{}^T \vartheta + \psi_2 x_3 - \dot{\alpha}_1) \\ &= e_1(\varphi_1{}^T \vartheta + \psi_1 \alpha_1 - \dot{\alpha}_0) + e_2(\varphi_2{}^T \vartheta + \psi_2 x_3 - \dot{\alpha}_1 + \psi_1 e_1) \\ &= -k_1 e_1^2 + e_2(\varphi_2{}^T \vartheta + \psi_2 x_3 - \dot{\alpha}_1 + \psi_1 e_1) \end{aligned} \tag{V.17}$$

Le choix de la valeur désirée de x_3 devient évident. Ce dernier est donné par :

$$x_3^d = \alpha_2 = \frac{1}{\psi_2}(-k_2 e_2 - \varphi_2{}^T \vartheta + \dot{\alpha}_1 - \psi_1 e_1) \tag{V.18}$$

où $k_2 > 0$, $\dot{\alpha}_1$ calculée analytiquement.

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r}\dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_r}\ddot{y}_r \tag{V.19}$$

Un tel choix permet de réduire la dérivée :

$$\dot{V}_2 \le -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 \le 0 \tag{V.20}$$

ce qui assure la stabilité asymptotique de l'origine de (V.14) et (V.15).

Étape 3

Le système (V.3)-(V.5) est maintenant considéré dans sa globalité. La variable d'erreur

$$e_3 = x_3 - x_3^d = x_3 - \alpha_2 \tag{V.21}$$

est définie, ce qui permet d'écrire les équations du système, dans l'espace des erreurs (e_1, e_2, e_3)

$$\dot{e}_1 = \varphi_1^{\,T} \vartheta + \psi_1 .(e_2 + \alpha_1) - \dot{\alpha}_0 \tag{V.22}$$

$$\dot{e}_2 = \varphi_2^{\,T} \vartheta + \psi_2 .(e_3 + \alpha_2) - \dot{\alpha}_1 \tag{V.23}$$

$$\dot{e}_3 = \varphi_3^{\,T} \vartheta + \psi_3 u - \dot{\alpha}_2 \tag{V.24}$$

Avec comme fonction de lyapunov :

$$V_3(e_1, e_2, e_3) = V_2 + \frac{1}{2} e_3^2 \tag{V.25}$$

la dérivée, le long de la solution de (3.22)-(3.24), devient :

$$\dot{V}_3(e_1, e_2, e_3) = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 + e_3(\varphi_3^{\,T} \vartheta + \psi_3 u - \dot{\alpha}_2 + \psi_2 e_2) \tag{V.26}$$

À présent, on est en présence de la vraie commande (qui, contrairement à x_2 et x_3, peut être instantanément forcée à prendre n'importe quelle valeur désirée-physiquement réalisable-). Un bon choix de celle-ci est donné par :

$$u = \frac{1}{\psi_3}(-k_3 e_3 - \varphi_3^{\,T} \vartheta + \dot{\alpha}_2 - \psi_2 e_2) \tag{V.27}$$

Où $k_3 > 0$, $\dot{\alpha}_2$ calculée analytiquement. Avec ce choix, on à :

$$\dot{V}_3 \le -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 \le 0 \tag{V.28}$$

D'où la stabilité asymptotique de l'origine de (V.22)-(V.24). Ceci se traduit par la stabilité, en boucle fermée, du système originel (V.14)-(V.15) et le réglage à zéro de l'erreur de poursuite $y - y_r$. Les deux principaux objectifs du design sont alors atteints.

Remarque

Les paramètres de design k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, sont directement liés à la position de pôles de la boucle fermée. Leur choix permet de faire un placement des pôles, fixant ainsi la dynamique en régulation de cette boucle.

V.2.2. Exemple

Soit à stabiliser l'origine le système :

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \tag{V.29}$$
$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{V.30}$$
$$\dot{x}_3 = u \tag{V.31}$$

Étape 1

Le sous-système (3.29) est considéré en premier lieu. Étant donné que $\alpha_0 = 0$, on prend comme fonction de commande de Lyapunov

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \tag{V.32}$$

Sa dérivée, le long de la solution de (V.32), est donnée par :

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1.\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 - x_1^3 + x_2) \tag{V.33}$$

Avec le choix (qui préserve les non-linéarités utiles, ie $-x_1^3$.)

$$x_2^d = \alpha_1 = -x_1^2 - x_1 \tag{V.34}$$

la dérivée s'écrit :

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1(x_1^2 - x_1^3 - x_1^2 - x_1) = -x_1^4 - x_1^2 \le -x_1^2 \tag{V.35}$$

Ce qui implique que l'origine de (V.29) est globalement asymptotiquement stable.

Étape 2

Cette fois, on considère (V.29)-(V.30) et l'on définit la nouvelle variable :

$$e_2 = x_2 - \alpha_1 = x_2 + x_1^2 + x_1 \tag{V.36}$$

Le sous-système (3.29)-(3.30) s'écrit alors :

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3 + \alpha_1 + e_2 \tag{V.37}$$
$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = x_3 - \dot{\alpha}_1 \tag{V.38}$$

Si l'on prend pour fcl

$$V_2(x_1, e_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \tag{V.39}$$

sa dérivée le long de la solution de (V.37)-(V.38) est donnée par :

$$V_2(x_1, e_2) = x_1\dot{x}_1 + e_2\dot{e}_2 = -x_1^4 - x_1^2 + e_2(x_3 - \dot{\alpha}_1 + x_1) \tag{V.40}$$

Il suffit, à présent, de choisir la valeur désirée α_2 de x_3 pour rendre négative cette dérivée. Un tel choix est donné par :

$$x_3^d = \alpha_2 = \dot{\alpha}_1 - x_1 - k_2 e_2 \tag{V.41}$$

Où : $\dot{\alpha}_1 = -(2x_1 + 1)\dot{x}_1 = -(2x_1 + 1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2)$

Étape 3

Tout le système (V.29)-(V.31) est maintenant considéré. On définit la nouvelle variable d'erreur

$$e_3 = x_3 - x_3^d = x_3 - \alpha_2 \tag{V.42}$$

Ce qui permet d'écrire le système (V.29)-(V.31) sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_1^3 + \alpha_1 + e_2 \\ \dot{e}_2 &= x_3 - \dot{\alpha}_1 + \alpha_2 \\ \dot{e}_3 &= u - \dot{\alpha}_2 \end{aligned} \tag{V.43}$$

Le choix de la fcl :

$$V_2(x_1, e_2, e_3) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2}e_3^2 \tag{V.44}$$

et le calcul de sa dérivée le long de la trajectoire de (V.43), de la même manière qu'à l'étape 2, permet d'obtenir la commande qui assure la stabilité asymptotique de l'origine du système. Après calcul et simplification (avec $k_1 = k_2 = k_3 = 1$), cette commande est donnée par :

$$u = \dot{\alpha}_2 - e_2 - e_3 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}\dot{x}_2 - e_2 - e_3 \tag{V.45}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}x_3 - (x_2 - \alpha_1) - (x_3 - \alpha_2) \tag{V.46}$$

V.3 COMMANDE PAR BACKSTEPPING BASEE SUR LE PRINCIPE DE LA COMMANDE VECTORIEL

L'approche du backstepping, que nous allons appliquer pour la commande de la machine asynchrone, est basée sur le principe de l'orientation du flux rotorique [23]. Dans ce qui va suivre, nous allons tout d'abord présenté dans un premier temps un bref historique du backstepping. Dans un deuxième temps donner le principe de la commande vectorielle, Finalement, l'application du backstepping à la commande de la machine.

V.3.1 Introduction au backstepping

Le backstepping a été développé par Kanellakopoulos [25] et inspiré par les travaux de Feurer & Morse [26] d'une part et Kokotovic & Sussmann [20] d'autre part. Elle offre une méthode systématique pour effectuer le design d'un contrôleur pour Les systèmes non linéaires. L'idée consiste à calculer une loi de commande afin de garantir que la dérivée d'une certaine fonction (de Lyapunov) soit définie positive et que se dérivée soit toujours négative. La méthode consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. A chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. À la dernière étape, la loi de commande est trouvée. Celle-ci permet de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation.

V.3.2 Modèle le la MAS

Le modèle de la machine asynchrone dans le repère (*d-q*) est donné par [24]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + \dot{\theta}_s x_2 + a_2 x_3 + b u_1 \\ \dot{x}_2 = -\dot{\theta}_s x_1 + a_1 x_2 + a_4 x_3 x_4 + b u_2 \\ \dot{x}_3 = a_8 x_3 + a_{10} x_1 \\ \dot{x}_4 = a_{14} x_2 x_3 + a_{15} x_4 + d C_r \end{cases} \tag{V.47}$$

Avec :

$$x = [x_1 \;\; x_2 \; x_3 \;\; x_4]^T = [i_{sd} \;\; i_{sq} \; \Phi_d \;\; \omega_r]^T \;;\; \Phi_d = \Phi_{rd} \;;\; \dot{\theta}_s = \frac{d\theta_s}{dt} = \omega_r + a_7 . \frac{x_2}{x_3}$$

V.3.3 Application du backstepping à la commande de la MAS

La technique de commande par backstepping est une méthode de synthèse en non linéaire quand il est difficile d'appliquer la méthode directe de lyapunov. L'application du backstepping à la commande de la machine est divisée en deux étapes [11, 23, 24].

Etape 1

Cette première étape consiste à identifier les erreurs ε_1 et ε_2 qui représentent respectivement l'erreur entre la vitesse électrique réelle ω_r et la vitesse électrique de référence ω_r^d ainsi que le module du flux rotorique Φ_d et celui de référence Φ_d^d.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= x_4^d - x_4 \\ \varepsilon_2 &= x_3^d - x_3 \end{aligned} \tag{V.48}$$

La dérivée de l'erreur est donnée par:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \dot{x}_4^d - \dot{x}_4 = \dot{x}_4^d - a_{14}.x_2x_3 - a_{15}x_4 - dC_r \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \dot{x}_3^d - \dot{x}_3 = \dot{x}_3^d - a_8x_3 - a_{10}x_1\end{aligned} \tag{V.49}$$

La première fonction de Lyapunov est définie par:

$$V_1 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\right) \tag{V.50}$$

On choisie les fonctions stabilisantes comme suit:

$$\begin{aligned}(x_2)_{ref} &= \frac{1}{a_{14}x_3}(k_1\varepsilon_1 + \dot{x}_4^d) - a_{15}x_4 - dC_r \\ (x_1)_{ref} &= \frac{1}{a_{10}}(k_2\varepsilon_2 + \dot{x}_3^d - a_8x_3)\end{aligned} \tag{V.51}$$

Ou : $x_3 = \sqrt{\Phi_{r\alpha}^2 + \Phi_{r\beta}^2} > 0$

Alors la dynamique des erreurs est donnée par:

$$\dot{\varepsilon}_1 = -k_1\varepsilon_1 \;;\; \dot{\varepsilon}_2 = -k_2\varepsilon_2 \tag{V.52}$$

La dérivée de la fonction de lyapunov par rapport au temps est:

$$\dot{V}_1 = -k_1z_1^2 - k_2z_2^2 \le 0 \tag{V.52}$$

Avec : $k_1 > 0$, $k_2 > 0$

Etape 2

Dans cette étape, on définie deux nouvelles erreurs des composantes du courant statorique données par :

$$\varepsilon_3 = (x_2)_{ref} - x_2 = \frac{1}{a_{14}x_3}.\left(k_1\varepsilon_1 + \dot{x}_4^d\right) - a_{15}x_4 - dC_r - x_2 \tag{V.53}$$

$$\varepsilon_4 = (x_1)_{ref} - x_1 = \frac{1}{a_{10}}\left(k_2\varepsilon_2 + \dot{x}_3^d - a_8x_3\right) - x_1 \tag{V.54}$$

Alors l'équation (V.49) sera de la forme:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= -k_1\varepsilon_1 + a_{14}.\varepsilon_3 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -k_2\varepsilon_2 + a_{10}.\varepsilon_4\end{aligned} \tag{V.55}$$

La dérivée de (V.53) et (V.54) nous donne:

$$\dot{\varepsilon}_3 = (\dot{x}_2)_{ref} - \dot{x}_2 = (\dot{x}_2)_{ref} - f_2(x) - bu_2 \tag{V.56}$$

$$\dot{\varepsilon}_4 = (\dot{x}_1)_{ref} - \dot{x}_1 = (\dot{x}_1)_{ref} - f_1(x) - bu_1 \tag{V.57}$$

Où : $f_1(x) = a_1 x_1 + \dot{\theta}_s x_2 + a_2 x_3$ et $f_2(x) = -\dot{\theta}_s x_1 + a_1 x_2 + a_5 x_3 x_4$

Pour définir les lois de commande, on adopte une nouvelle fonction de lyapunov décrite par l'expression suivante:

$$V_2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2\right) \tag{V.58}$$

Ainsi la dérivée de la fonction de lyapunov finale est :

$$\dot{V}_2 = \varepsilon_1\dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_2\dot{\varepsilon}_2 + \varepsilon_3\dot{\varepsilon}_3 + \varepsilon_4\dot{\varepsilon}_4 \tag{V.59}$$

Sa dérivée est donnée par:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 = &-k_1\varepsilon_1^2 - k_2\varepsilon_2^2 - k_3\varepsilon_3^2 - k_4\varepsilon_4^2 + \varepsilon_3\left(k_3\varepsilon_3 + (\dot{x}_2)_{ref} - f_2(x) - bu_2\right) \\ &+ \varepsilon_4\left(k_4\varepsilon_4 + (\dot{x}_1)_{ref} - f_1(x) - bu_1\right)\end{aligned} \tag{V.60}$$

Où : $k_3 > 0$, $k_4 > 0$

On choisie la commande comme suit :

$$\begin{aligned}u_1 = V_{sd} &= \frac{1}{b}\left((\dot{x}_1)_{ref} + k_4\varepsilon_4 - f_1(x)\right) \\ u_2 = V_{sq} &= \frac{1}{b}\left((\dot{x}_2)_{ref} + k_3\varepsilon_3 - f_2(x)\right)\end{aligned} \tag{V.61}$$

La dérivée de l'erreur ε_3 et ε_4 sera comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_3 &= -k_3\varepsilon_3 - a_{14}x_3\varepsilon_1 \\ \dot{\varepsilon}_4 &= -a_{10}\varepsilon_2 - k_4\varepsilon_4\end{aligned} \tag{V.61}$$

Donc à partir de l'équation (V.55) et (V.61) on peut écrire :

$$\dot{\varsigma} = A.\varsigma \tag{V.62}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & a_{10} \\ -a_{14}x_3 & 0 & -k_3 & 0 \\ 0 & -a_{10} & 0 & -k_4 \end{bmatrix} \text{ et } \varsigma = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

V.4 STRUCTURE GENERALE DE LA COMMANDE

La figure (III.4) représente le principe de la commande par backstepping de la machine asynchrone. La première étape de la commande par backstepping consiste à générer les courants de référence $(i_{sd})_{ref}$ et $(i_{sq})_{ref}$, représentant la

commande fictive. L'erreur entre ces références et les grandeurs réelles des courants résulte de nouvelles erreurs ε_3 et ε_4. Enfin on adapte la loi de commande V_{sd} et V_{sq} à partir de l'équation (V.61) pour assurer la stabilité de la machine.

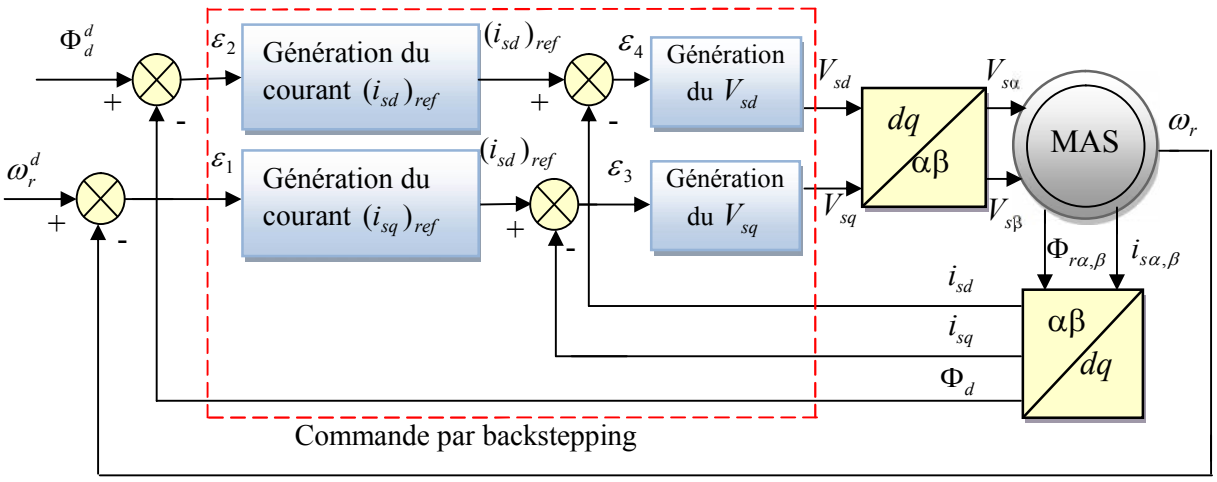


Figure V.1 Principe de la commande par backstepping de la machine asynchrone.

Remarque

Il suffit de manipuler les quatre gains de réglages k_i $(i=1,2,\ldots)$ pour aboutir aux meilleurs résultats. Néanmoins cette commande présente une insuffisance quant au rejet de l'effet des défauts malgré l'augmentation de la robustesse (cette dernière a permet de diminue l'erreur sur la vitesse et le flux mais n'annule pas l'effet de défauts sur les courants dans le cas de la MAS).

V.5 CONCLUSION

Ce chapitre donne quelques notions théoriques de stabilité des systèmes non linéaires ces notions de bases sont nécessaires à la compréhension des subtilités de la commande par backstepping basé sur la théorie de Lyapunov et, dans un deuxième temps, il introduit la synthèse d'une commande par backstepping pour un système académique (avec un exemple de base) pour la bonne compréhension de cette commande. En fin, l'application de cette stratégie de commande aux machines asynchrones (MAS) basée sur le principe de l'orientation du flux rotoriques fait l'objet de la dernière partie.

Chapitre VI

Commande basée sur la passivité

VI.1. INTRODUCTION

La commande basée sur la passivité (Passivity Based Control (PBC)) est une technique bien établie qui s'est montrée très puissante pour concevoir des commandes robustes pour les systèmes physiques. Héritées de phénomènes physiques bien connus, les notions de passivité sont adaptées à plusieurs domaines scientifiques et se montrent efficaces pour la régulation de systèmes électriques, mécaniques et électromécaniques présents en plusieurs domaines de l'ingénierie, tels que la robotique, l'électronique de puissance, etc.

La commande basée sur la passivité (inspirée des travaux de Takegaki et Arimoto [27] dans la commande des robots manipulateurs) permet d'obtenir des contrôleurs robustes qui ont une interprétation physique claire en termes d'interconnexions du système avec son environnement. En particulier, l'énergie totale du système en boucle fermée est la différence entre l'énergie du système et l'énergie fournie par le contrôleur. De plus, vu que la structure d'Euler-Lagrange est préservée en boucle fermée, la commande via la passivité dispose d'une stabilité robuste vis-à-vis des effets dissipatifs non modélisés et exhibe des performances robustes dues à son optimalité inverse [28].

VI.2. NOTIONS DE PASSIVITE ET DISSIPATIVITE

La commande basée sur la passivité à été introduit pour la première fois en 1989 pour définir une méthodologie de conception de commandes qui assurent la stabilité des systèmes en rendant passifs des sous systèmes convenablement définies [29]. L'idée de base de la passivité consiste à façonner l'énergie totale du système puis à ajouter un terme d'amortissement. Les équations d'Euler-Lagrange (EL) permettent d'obtenir aisément cette formulation. En plus, si cette commande est capable d'injecter un terme dissipatif additif au système, alors la convergence à l'état désiré peut être améliorée par rapport à celle atteinte avec dissipation fournie par le système.

Un système continu avec une entrée $u(t)$ et une sortie $y(t)$ est dit dissipatif s'il existe une fonction $V(t) > 0$ vérifiant l'équation suivante [30]:

$$\dot{V} = y^T(t)u(t) - h(t) \quad \text{avec} \quad \int_0^{t_f} h(t)\,dt > 0 \tag{VI.1}$$

Où $h(t) > 0$ et $y^T(t)u(t)$ représente une puissance. Le système est dit passif si l'énergie qu'il rentre est plus importante que celle qu'il sorte à l'extérieur. On comprend ainsi qu'un système passif est nécessairement stable [31]. D'une manière générale, un système qui dissipe son énergie va perdre au fur et à mesure toute son énergie initiale et se rapproche d'une configuration qui correspond à l'énergie nulle.

Soit un système non linéaire de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) + g(x,t)\,u \\ y = h(x,t) \end{cases} \tag{VI.2}$$

avec, $x \in \Re^n$, $y \in \Re^m$, $u \in \Re^m$, f, g, h sont continues en t et lentement variables en x. Le système (IV.2) est dit passif s'il existe une fonction scalaire continue et positive V: $\Re^n \times \Re_+ \to \Re_+$ qui satisfait $V(0,t) = 0,\ \forall t \geq 0$, de telle manière que :

$$\int_{t_0}^{t} y^T(\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma \geq V(x(t),t) - V(x(t_0),t_0) \text{ avec } t \geq t_0 \geq 0 \tag{VI.3}$$

A partir de (VI.3) on obtient des résultats fondamentaux sur la stabilité du système. Si l'on fixe $u = 0$ on observe une décroissance de $V(x)$ à partir de n'importe quelle trajectoire de (IV.2), ce qui montre que les systèmes passifs avec une fonction de stockage définie positive sont stables au sens de Lyapunov. La même propriété est observée si l'on annule la sortie ($y = 0$), ce qui implique une dynamique des zéros stable [32].

VI.3. DEFINITIONS

La propriété d'atténuation des perturbations est liée au concept de passivité.

Définition 1. (Van der Shaft)

Un système non linéaire de la forme [28]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,w) \\ z &= h(x,w) \end{aligned} \tag{VI.4}$$

Avec $f(x,w)$ est localement dissipatif autour de $(x,w) = (0,0)$ s'il existe une fonction de stockage $S(x)$ positive telle que $S(0) = 0$ et une fonction $s(w,z)$ localement intégrable pour tout w, telles que :

$$S(x) - S(x_0) \leq \int_0^t s(w(\tau),z(\tau))\,d\tau \tag{VI.5}$$

sur tout l'intervalle [0, t].

Si $S(x)$ est différentiable, l'équation (VI.5) peut être mise sous la forme :

$$\dot{S}(x) \leq s(w,z) \tag{VI.6}$$

$$\frac{dS}{dx} f(x,w) \le s(w,h(x,w)) \qquad \text{(VI.7)}$$

Une particularité de s permet de définir la passivité du système (VI.4).

Définition 2. (Van der Shaft)

Le système (VI.4) est dit passif s'il est dissipatif et si la fonction s s'exprime par $s(w,z) = w^T z$ [28].

Définition 3.

Un système est dit passif si l'énergie stockée dans le système ne peut pas dépasser l'énergie qui lui est apportée, la différence étant dissipée.

VI.4. COMMANDE BASEE SUR LA PASSIVITE (PBC)

La commande basée sur la passivité est une technique bien établie qui s'est montrée très puissante pour concevoir des commandes robustes pour les systèmes physiques, ont une interprétation physique claire en termes d'interconnexion du système avec son environnement. Elles sont robustes vis-à-vis des effets dissipatifs même non modélisés [33]. La PBC utilise soit :

- La technique de mise en forme de l'énergie (energy shaping) ou on modifié l'énergie totale de système de façon à ce que la nouvelle fonction d'énergie ait un minimum avec le comportement désiré.

- La technique d'ajout d'amortissement au système ou on modifie la fonction de dissipation d'énergie afin d'imposer la stabilité asymptotique du système commandé. Une caractéristique de cette technique est que les dynamiques du système en boucle fermée définissent un système passif.

VI.4.1 Fonction de stockage

Supposons qu'il existe une fonction continue $H(t) > 0$, on appelle fonction de stockage du système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$, la fonction donnée par le théorème suivant [29]:

$$H(t) - H(0) \le \int_0^T y^T(t)u(t)\,d(t) \qquad \text{(VI.8)}$$

Pour toutes fonctions u, tout $T > 0$ et tout $H(0)$. Alors le système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est passif.

Supposons en plus, qu'il existe deux constantes $\delta \ge 0$ et $\varepsilon \ge 0$ telles que :

$$H(t) - H(0) \le \int_0^T y^T(t)u(t)\,d(t) - \delta\int_0^T u^T(t)u(t)\,d(t) - \varepsilon\int_0^T y^T(t)y(t)\,d(t) \qquad \text{(VI.9)}$$

Pour toutes fonctions u, tout $T > 0$ et tout $H(0)$. Alors le système est strictement passif en entrée si $\delta > 0$, strictement passif en sortie si $\varepsilon > 0$ et strictement passif si $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$.

Si on considère que $H(T)$ correspond à l'énergie du système, que $\int_0^T y^T(t)u(t)\,d(t)$ correspond à l'énergie injectée dans le système par la commande sur [0,T]alors :

$$H(T) - H(0) \le \int_0^T y^T(t)u(t)\,d(t) \qquad \text{(VI.10)}$$

VI.4.2 Exemple

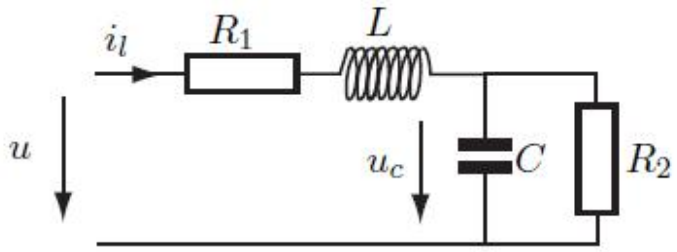


Figure VI.2. Un circuit électrique R-L-C est un système dynamique passif.

$$u = R_1 i_l + L\frac{di_l}{dt} + u_c$$

$$i = C\frac{du_c}{dt} + u_c\frac{1}{R_2}$$

En posant $x_1 = i_l$ et $x_2 = u_c$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}u - \frac{R_1}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_2 C}x_2$$

Fonction de stockage

$$V = \frac{1}{2}Lx_1^2 + \frac{1}{2}Cx_2^2$$

$$\dot{V} = Lx_1\dot{x}_1 + Cx_2\dot{x}_2$$

$$\dot{V} = ux_1 - R_1x_1^2 - x_1x_2 + x_2x_1 - \frac{1}{R_2}x_2^2$$

$$= ux_1 - R_1x_1^2 - \frac{1}{R_2}x_2^2$$

$$= uy - g(x)$$

Avec : $g(x) = R_1x_1^2 + \frac{1}{R_2}x_2^2 \ge 0$

VI.4.3 Déférences entre Lyapunov et passivité :

a) Lyapunov :

Système sans entrée $\dot{x} = f(x)$ $\quad \dfrac{d}{dt}V \le 0$

b) Passivité :

Système entrée-sortie $\begin{cases} \dot{x} = f(x,\, u) \\ y = h(x) \end{cases}$ $\quad \dfrac{d}{dt}V \le$ Puissance fournie

VI.4.4 Propriétés

L'immense avantage des systèmes passifs est leur plasticité lors de connexion en tout genre. En effet, ces systèmes se comportent très bien lors de connexion en série, car les systèmes agissent en quelque sorte indépendamment de leur connexion. Mais ils se comportent également très bien lors de connexion à la fois en parallèle et en rétroaction. Ce dernier cas est important lors d'association des sous-systèmes passifs en retour de sortie [29].

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\, u) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{VI.11}$$

S'il existe $\gamma > -\infty, H > \gamma$ et $\dot{H} = u^T y - g$, avec $g \ge 0$, alors le système est passif [29].

a) Connexion parallèle

Lors d'une connexion parallèle chacun des deux systèmes comporte une fonction de stockage interne H_1 et H_2 respectivement:

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= u_1^T y_1 - g_1 \\ \dot{H}_2 &= u_2^T y_2 - g_2 \end{aligned} \tag{VI.12}$$

$$\dot{H} = \dot{H}_1 + \dot{H}_2 = u^T (y_1 + y_2) - g_1 - g_2$$

$$\dot{H} = u^T y - g \tag{VI.13}$$

Où l'on a fait l'usage de la particularité de la connexion parallèle. Le calcul montre donc que, si l'on considère $H = H_1 + H_2$ comme fonction de stockage associé à l'assemblage constitué par la connexion en parallèle des deux systèmes individuels, alors cet assemblage répond à la même définition 1, en utilisant cette fois-ci $H = H_1 + H_2$ et $g = g_1 + g_2$

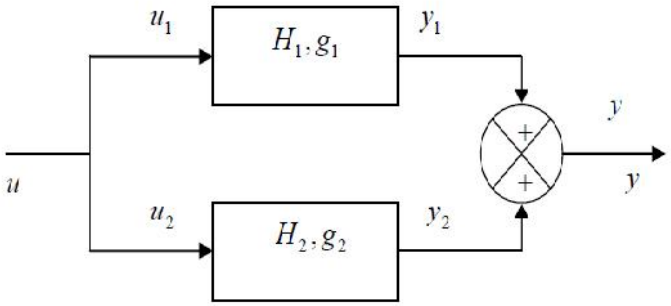


Figure VI.1. Connexion parallèle

b) Connexion par rétroaction

La connexion par rétroaction est plus pernicieuse étant donné que les deux systèmes interagissent d'amont en aval et ceci à l'infini. Soit donc la connexion par rétroaction négative [29].

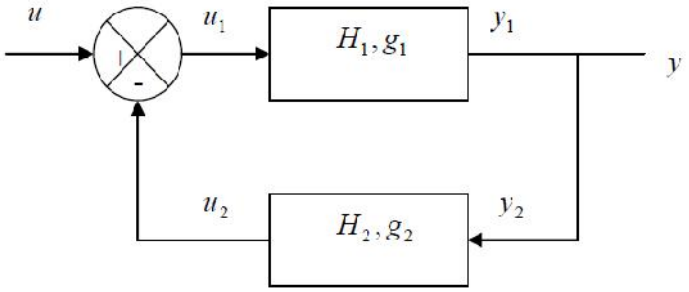


Figure VI.2. Connexion par rétroaction

Pour la quelle chacun des sous-systèmes constitutifs obéit à la (IV.11). En tenant compte de la particularité de la connexion,

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= u_1^T y_1 - g_1 \\ \dot{H}_2 &= u_2^T y_2 - g_2 \end{aligned} \tag{VI.14}$$

$$\begin{aligned} \dot{H} = \dot{H}_1 + \dot{H}_2 = u^T(y_1 + y_2) - g_1 - g_2 &= (u^T - y_2^T)y_1 + u_2^T y_2 - g_1 - g_2 \\ &= (u^T - y_2^T)y_1 + y_1^T y_2 - g_1 - g_2 \\ &= u^T y_1 - g_1 - g_2 \end{aligned}$$

$$\dot{H} = u^T y - g \tag{VI.15}$$

et la même constatation que dans le cas de la connexion parallèle est déduite : Le système est passif avec comme fonction de stockage $H = H_1 + H_2$ et terme de dissipation $g = g_1 + g_2$

VI.5 PASSIVITE DES SYSTEMES LINEAIRES

Soit le système linéaire donner par [34]:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{VI.16}$$

Théorème

Le système $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ est passif $\Leftrightarrow \Re e\left[G(j\omega)\right] \geq 0$

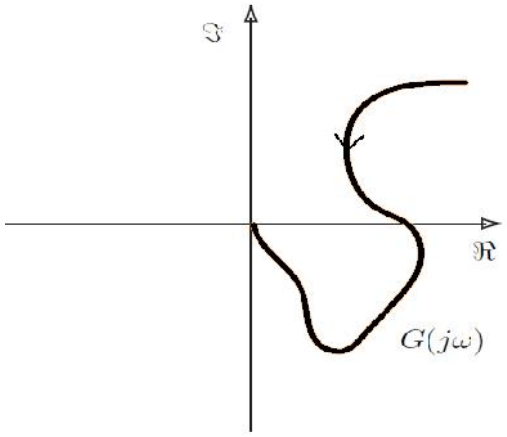


Figure VI.3. Réponse d'un système linéaire dans le plan de phase

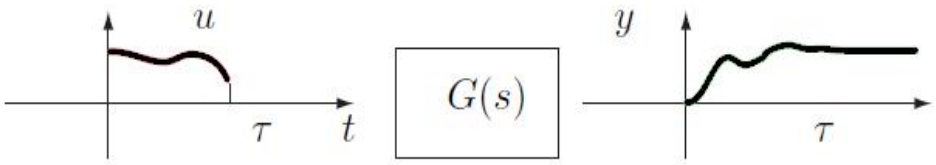


Figure VI.4. Illustration pour la démonstration de la passivité

VI.6 APPLICATION DE LA COMMANDE PBC

Un système dynamique sous modèle PCH (Port Controlled Hamiltonian) à une représentation mathématique de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[J(x) - R(x)\right]\nabla H + g(x).u \\ y = g(x)^T \nabla H \end{cases} \tag{VI.17}$$

La commande basée sur la passivité à assignement d'amortissement et d'interconnexion (IDA-PBC) de système en boucle fermée est écrite par (VI.18).

$$u = \left[g(x)^T.g(x)\right]^{-1}.g(x)^T.\left\{J_d(x) - R_d(x)\right]\nabla H_d - f(x)\right\} \tag{VI.18}$$

VI.6.1 Exemple 1 (système non linéaire)

On considère le système non linéaire suivant [35]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \varsigma\, x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 + u \end{cases} \tag{VI.19}$$

Avec : $\varsigma > 0$

Nous écrivons le système (VI.19) sous la forme de PCH :

$$\dot{x} = (J - R)\partial H + g.u \tag{VI.20}$$

Avec : $J = \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 \end{bmatrix}$; $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$H(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\varsigma\, x_2^2 \tag{VI.21}$$

L'objectif de commande est de réguler, par exemple x_2 à une valeur désirée x_2^d.

L'équilibre correspondant à l'équation (VI-19) est donnée par :

$$x_1^* = \varsigma (x_2^d)^2 \ , \quad u^* = \varsigma (x_2^d)^3$$

En utilisant la technique IDA algébrique, nous écrivons l'équation (VI.20) comme suit :

$$\dot{x} = (J_d - R_d)\partial H_d \tag{VI.22}$$

Avec : $J_d = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(x) \\ -\alpha(x) & 0 \end{bmatrix}$; $R_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$

$$H_d(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_1^*)^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - x_2^d)^2 \tag{VI.23}$$

$\alpha(x_1, x_2)$ est une fonction qui sera déterminée par l'équation matricielle (VI.24). $\gamma > 0, r > 0$ sont des paramètres ajustables.

$$(J - R)\partial H + g.u = (J_d - R_d)\partial H_d \tag{VI.24}$$

A partir de la première ligne de l'équation matricielle (IV.24) on obtient :

$$-x_1 + \varsigma\, x_2^2 = -(x_1 - x_1^*) + \frac{\alpha}{\gamma}(x_2 - x_2^d) \tag{VI.25}$$

nous pouvons déduire :

$$\alpha(x_1, x_2) = \frac{\gamma}{x_2 - x_2^d}(\varsigma\, x_2^2 - x_1^*) = \gamma\varsigma (x_2 - x_2^d) \tag{VI.26}$$

en substituant ceci dans la deuxième ligne de l'équation matricielle (IV.24) :

$$-x_1x_2 + u = -\alpha(x_1 - x_1^*) - \frac{r}{\gamma}(x_2 - x_2^d) \tag{VI.27}$$

Alors la commande u est écrit par :

$$u = x_1x_2 - \gamma\varsigma(x_1 - x_1^*)(x_2 + x_2^d) - \frac{r}{\gamma}(x_2 - x_2^d) \tag{VI.28}$$

Cette commande représente un système hamiltonien en boucle fermé avec (J_d, R_d, H_d), et qui à (x_1^*, x_2^d) point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

VI.6.2 Exemple 2 (machine à courant continu)

On considère un moteur à courant continu à aimant permanent (le couple est constant $C_{em} = L_f i_f$) [35].
Le système PCH est décrit par:

$$\dot{x} = (J - R)\partial H + g + g_u.u \tag{VI.29}$$

$x = [\Phi, \Omega]$, Φ est le flux inducteur et Ω est la vitesse angulaire.

Les matrices d'interconnexion, de dissipation et de port sont :

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & -C_{em} \\ C_{em} & 0 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & C_f \end{bmatrix}; g = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_r \end{bmatrix}; g_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On considère que le couple mécanique est une perturbation externe. r et C_f représentent respectivement les pertes électrique et mécanique, la fonction hamiltonien est donnée par :

$$H(x) = \frac{1}{2L}\Phi^2 + \frac{1}{2J}\Omega^2 \tag{VI.30}$$

Avec : L et J représentent l'inductance et l'nertie de moteur.

L'objectif de commande est de régulé, par exemple, la vitesse ω à une valeur désirée ω^*. Les points d'équilibres pour le courant et la tension sont :

$$i^* = \frac{1}{K}(C_f\omega^* + C_r) \tag{VI.31}$$

$$u^* = r.i^*C_{em}\omega^* \tag{VI.31}$$

en appliquant IDA-PBC sur le moteur avec la fonction d'énergie hamiltoniene désirée H_d d'écrit par :

$$H_d(x) = H(x) = \frac{1}{2L}(\Phi - \Phi^*)^2 + \frac{1}{2J}(\Omega - \Omega^*)^2 \quad \text{(VI.32)}$$

Avec : $\Phi = L.i$; $\Omega = J\omega$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i - i^* \\ \omega - \omega^* \end{bmatrix} \quad \text{(VI.33)}$$

Pour résoudre l'équation matricielle (VI.32) .on considère généralement que les matrices J et R, Tel que :

$$J^* - R^* = \begin{bmatrix} -r^* & -J^* \\ J^* & b^* \end{bmatrix} \quad \text{(VI.34)}$$

La première ligne de l'équation matricielle (VI.34) donne la commande désirée et la seconde ligne impose :

$$J^*(i - i^*) - b^*(\omega - \omega^*) = C_{em}i - C_f\omega - C_r \quad \text{(VI.35)}$$

On utilise l'expression du point d'équilibre $J^* = C_{em}$, Puisque r^* est un paramètre libre, on remplace dans la premier ligne de l'équation matricielle (VI.31) on trouve la commande u.

$$u = r^*(i - i^*)r.i - C_{em}\omega^* \quad \text{(VI.36)}$$

VI.7 CONCLUSION

Ce chapitre donne une brève introduction, notions de base, ainsi quelques définitions sur la commande basée sur la passivité. Cette stratégie permet d'obtenir des contrôleurs robustes qui ont une interprétation physique claire en termes d'interconnexions du système avec son environnement. Ce chapitre ce clôture par des exemples qui concernent la conception d'une stratégie de commande basée sur la passivité dédiée au système non linéaire et à la machine à courant continu.

Bibliographie

[1] T. Amieur, "Commande des systèmes non linéaires par mode glissant flou", Magister en Automatique, Universite Mohamed Kheider de Biskra, 2009.

[2] J. J .E. Slotine, W. Li, "Applied nonlinear control", Prentice-Hall, USA, 1991.

[3] Frank L. Lewis, Chaouki T. Abdallah, D. M. Dawson, "Control of robot manipulators", Macmillan Publishing Company, Inc, USA, 1993.

[4] H. Berghuis, "Model-based Robot Control: from Theory to Practice", University of Twente, Enschede, Netherlands, 1993.

[5] F.Z. Daikh, "Contribution des approches non linéaires de l'intelligence artificielle pour la stabilisation robuste des systèmes non linéaires", Thèse de Doctorat, université d'Oran 1, 2015.

[6] A. Isidori, "Nonlinear control systems II", Springer-Verlag, London, 1999.

[7] H. K. Khalil, "Nonlinear Systems", Prentice-Hall, 2002.

[8] H. Nijmeijer, "Nonlinear dynamical control systems", Springer, New York, 1990.

[9] Z. Gao, P. Antsaklis, "Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control". *International Journal of Control 53(3), 717–729.* 1991.

[10] J. Jouffroy, "Stabilité et systèmes non linéaires Réflexions sur l'analyse de contraction". Thèse de Doctorat, Université de Savoie, Octobre 2002.

[11] L.N. Paquin, 'Application du backstepping à une colonne de flottation'. Mémoire M.Sc, Faculté des études supérieures de l'université Laval, Canada, Juillet 2000.

[12] A. Benaskeur, 'Systèmes non linéaires, Technical Report', No. 97-1 1, GR4II31, Université Laval. 1997.

[13] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic, 'Nonlinear and Adaptive Control Design', Wiley Inter-science Publication. 1995.

[14] E.D. Sontag, 'A universal construction of artestin's theorem on nonlinear stabilization'. System and Control Letters, 13:117–123. 1989.

[15] J. Levin, 'Analysis and control of nonlinear systems', 1999.

[16] A. Benaskeur, 'Aspects de l'application du backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systèmes non linéaires'. Thèse PhD - Université Laval, 2000.

[17] H. Tan, J. Chang, 'Adaptative backstepping control of induction motor with uncertainties', Proceedings of the American control conference, San diego, California, June 1999.

[18] I. Kanellakopoulos, P. V.Kokotovic, A. S. Morse, 'Systematic design of adaptive cont rollers for feedback linearizable systems' , IEEE Transactions On Automatic Control, 36(11) , 1241-1253. 1991.

[19] J. Tsinias, 'Sufficient lyapunov-like conditions for stabilization', Math. Contr. Signal. Syst. vo1.2, pp. 343-351, l989.

[20] P. V. Kokotovic, H. J. Sussmann,, 'A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems'. Systems & Control Letters, 13, 125-133. 1989.

[21] K. J. Astrom, B. Wittenmark, 'Adaptive Control', Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[22] M. Chakir, 'Commande robuste tolérante aux défauts appliquation à la MSAP'. Mémoire de magister, Spécialité Automatique, ENP, Alger, Juin 2006.

[23] S.Chaouch, A.Herizi, , H. Serrai, M.S.Naït-Saïd, 'Lyapunov and Backstepping Control Design of Induction Motor System'. 4th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD'07), March 19-22, Hammamet, Tunisia, 2007.

[24] H. Mekki, O. Benzineb, D. Boukhetala, M. Tadjine, M.Benbouzid, 'Sliding mode based fault detection, reconstruction and fault tolerant control scheme for motor systems'. ISA Transactions. Vol. 52(1), pp. 340–351, 2015.

[25] I. Kanellakopoulos, P.V.Kokotovic, A.S.Morse, 'Systernatic design of daptive controllers for feedback linearizable systems'. IEEE Transaction On Automatic Control Vol. 36(11), 1241-1253. 1991.

[26] A. Feurer, A.S. Morse, 'Adaptive control of single-input, single-ouput linear systems'. IEEE transactions On Automatic Control Vol. 23(4), 557-569. 1978.

[27] A. Lotfazar, M. Eghtesad, 'Application of Passivity Based and Integrator Backstepping Control Methods on a 5 DOF Robot Manipulator', Proc of the International Conference on Control and Cybernetics, New York, 2007.

[28] Van der Shaft, A. J, 'L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control', Springer-Verlag London Limited, (2000).

[29] Lin-Goei Shiau, Jong-Lick Lin, ying-juh , 'Passivity-based control for induction motor drives with voltage-fed and current-fed inverters', Articl, Departement of Engineering Science, National Cheng Kung University, Tainan 710, Taiwan , October 1999.

[30] AY. Achour, B. Mendil, 'Commande basée sur la passivité associée aux modes de glissements d'un moteur synchrone à aimants permanents', JESA, 41, 3-4, pp. 311–332, 2007.

[31] R. Ortega, A.J. van der Schaft, F. Castânos, A. Astolfi, 'Control by interconnection and standard passivity-based control of port-Hamiltonian systems', IEEE Trans. Autom. Control, 53, pp. 2527–2542, 2008.

[32] B. Belabbes, A. Larbaoui, 'Commande passive associee a la commande par backstepping d'un moteur synchrone', Rev. Roum. Sci. Techn. – Électrotechn. et Énerg., 60, 3, p. 333–342, 2015.

[33] Maschke, B.M, Ortega, Van der schaft, 'Energy-based lyaponov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation', IEEE transactions on automatic, 2005.

[34] Philippe Müllhaupt, 'Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires', Presses polytechniques et universitaires romandes 2009.

[35] TOUALBIA ASMA, 'La commande d'aerogénératrice via la passivité', Magister, Université Hassiba Ben Bouali – Chlef, 2011.