REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques et numérique

Thème

les opérateurs de hilbert shmidt

Présentée par :

M^{elle} CHEBLI Zineb

Soutenu publiquement le : xx/06/2021.

Devant le jury composé de :

GAGUI Bachir	M.C.A,	Université de M'sila	**Président**.
NADIR Mostefa	Prof,	Université de M'sila	**Encadreur**.
DJAIDJA Noui	M.C.B,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2020/2021

Table des matières

Remerciements

Je tiens à remercier tout premièrement **ALLAH** le tout puissant pour la volonté, la

santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Ainsi, je tiens également à exprimer ma vifs remerciements à notre encadreur **NADIR Mostefa**, ancien professeur de mathématiques pour suivi continuel tout le long de la

réalisation de ce mémoire,ses conseils,ses encouragement.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury : M^r **GAGUI Bachir** et M^r **DJAIDJA Noui**, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Egalement, un remerciement à tous mes collègues de promotion 2021 pour les bons

moments qui nous avons passé ensemble.

Introduction

L'analyse fonctionnelle est une branche en mathématiques qui étudie les espaces des fonctions et les opérateurs définis sur ces espaces, elle apparaît au début de vingtaine siècle, et malgré sa naissance récente, elle est devenue omniprésente dans toute les branche mathématiques (voir [1, 2, 11] et [13, 18, 22]).
L'étude de la théorie des opérateurs occupent la grande intérêt dans la branche d'analyse fonctionnelle car elle généralise la notion des fonctions et aussi généralise plusieurs concepts d'algèbre linéaire aux espaces de dimensions infinies (voir [19], [21] et [32]).
Les opérateurs se décompose en quatre type linéaires et non linéaires, bornés et non bornés. Elle joue un rôle essentiel dans la résolution des équations aux dérivés partielles et intégro-différentielles [5],[10], ainsi son intérêt apparaît clairement dans le domaine de traitement de signal et d'images. La théorie des opérateurs linéaires d'un espace de Hilbert vers autre constitue un lieu de rencontre privilégié pour diverses disciplines des mathématiques [12],[22] et [24].
Les opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel de Hilbert vers autre forment une classe assez particulière des opérateurs linéaires d'un espace vectoriel normé vers autre (voir [8],[6],[20] et [16]).

Dans ce mémoire, nous allons traiter quelques notions et applications et propriétés structurelles des **opérateurs Hilbert-Schmidt**

Ce mémoire est composé en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre,nous rappelons quelques définition les notions de l'analyse fonctionnelle, les espaces métrique,l'espace de Hilbert...espace de Banach,et nous présentons les notations sur les opérateurs bornés,opérateur linéaire nous avons étudie quelques l'inverse, l'adjoint d'opérateur et spectre d'un opérateur.

Dans le deuxième chapitre

On donne la définition et les propriétés élémentaires des opérateurs compacts. Ensuite on étudie les propriétés spectrales des opérateurs compacts. Le cadre est celui des espaces de Banach.

Dans le troisième chapitre

On présente la définition et des propriétés très importants pour quelques classes d'opérateurs compacts : opérateurs de **Hilbert-Schmidt** le dans le cadre d'un espace de Hilbert.

Dans le dernier chapitre

Nous allons proposer deux exemple d'application des opérateurs **Hilbert-Schmidt.**

Notation

$L(E,F)$	L'ensemble des applications linéaire de E dans F.
H	Espace de Hilbert complexe linéaires définies sur H.
$B(H)$	L'espace d'opérateurs linéaire bornés définies sur H.
$\mathcal{L}(E,F)$	L'ensemble des opérateur linéaires continus de E dans F.
$C([a,b])$	L'espace des fonction continus sur $[a,b]$.
$C^1([a,b])$	L'espace des fonctions continûment dérivables n-fois, sur$[a,b]$.
$L^2([a,b])$	L'espace des fonctions de carrées intégrables sur $[a,b]$ i.e $\int_a^b \lvert f(x)\rvert^2 dx \prec \infty$
$l^2(\mathbb{R})$	L'espaces des suites réelles $(x_n)_n$,vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert x_n\rvert \prec \infty$.
T^{-1}	L'inverse de l'opérateur T
T^*	L'adjoint de l'opérateurs T
$Im(T)$	L'image de l'opérateur T
$\ker(T)$	Le noyau de l'opérateur T
$D(T)$	Le domaine de l'opérateur T
$k(E), k(E,F)$	Les espace des opérateurs compacts de E, ou de$E$ dans$F$.
$\overline{T}$	La fermeture de l'opérateur T.
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats fondamentales utilisés tout au long de ce travail.

1.1 Espaces fonctionnels

– **définition 1.1** *[11] **(Espace vectoriel normé)** Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $||\cdot||$ définie sur E à valeurs dans dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant pour tout x,y dans E et α dans $\mathbb{k}$*

i) $||x|| = 0$ si seulement si $x = 0$.

ii) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$ **(homogénéité).**

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ **(inégalité triangulaire).**

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

définition 1.2 *[10] **(Espace métrique complet)** On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

définition 1.3 *[1, 10, 13] **(Espace de Banach)** Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

définition 1.4 *[12, 13] **(Produit scalaire)** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, un produit scalaire sur $\mathbb{R}$ est application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $\langle \cdot,\cdot \rangle$ possédant les propriétés suivantes pour tout x,y,z dans E et α,β dans $\mathbb{R}$ on a :*

1. $\langle x,x \rangle = 0$ implique $x = 0$.
2. $\langle x,x \rangle \geq 0$
3. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$.
4. $\langle \alpha x + \beta y,z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \beta \langle y,z \rangle$.

définition 1.5 *[11] **(Espace de Hilbert)** On appelle espace de Hilbert ou espace hilbertien tout espace préhilbertien complet.*

définition 1.6 *[2, 11] **(Espace $L^1(\Omega)$)** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $L^1(\Omega)$ des fonctions intégrable sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$, on pose*

$$||f||_1 = \int_\Omega |f\ (x)|.$$

définition 1.7 *[11, 13, 22] **(Espace $L^P(\Omega)$)** Soit $1 \leq P \leq +\infty$. On pose*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega)\}$$

muni de la norme

$$||f||_{L^P} = ||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{P}}.$$

Si $p = +\infty$, on a $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$, vérifiant

$$\exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c, \text{ p.p.sur } \Omega$$

La norme est notée par

$$||f||_{L^\infty} = ||f||_\infty = \inf\{c > 0, |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

1.2 Notions sur les opérateurs

1.2.1 Les opérateurs linéaires bornés

définition 1.8 *[11] **(Opérateur linéaire)** Soient E et F deux espace vectoriels, on appelle opérateur linéaire de $D(T) \subset E$ dans F toute application*

$$T : D(T) \subset E \to F, (D(T) \text{ est le domaine de } T),$$

qui vérifie les conditions suivantes :

1. *Condition additive*
$$\forall x,y \in D(T) \text{ on a } T(x + y) = T(x) + T(y).$$
2. *Condition homogène*
$$\forall x \in D(T), \lambda \in \Bbbk = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \text{ on a } T(\lambda x) = \lambda T(x).$$

définition 1.9 *[10, 11, 19] **(Noyau et image d'opérateur)***

- *L'ensemble*
$$\ker T = \{x \in D(T), Tx = 0\}$$
est appelé noyau de l'opérateur T , et aussi noté parfois $N(T)$.
- *L'image de l'opérateur A défini par*
$$ImT = \{Tx, x \in D(T)\},$$
et aussi noté parfois $R(A)$.

définition 1.10 *[10, 11, 13] **(Produit d'opérateurs)** Soient A et T deux opérateurs linéaires, $A \in \mathcal{L}(E,E_1)$ et $T \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$. On définit l'opérateur TA Comme l'opérateur linéaire de E dans E_2 par*

$$(TA)(x) = T(Ax), \forall x \in D(TA),$$

tel que

$$D(TA) = \{x \in D(T),\ Ax \in D(T).$$

définition 1.11 *[11] **(Opérateur continu)** Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire T de E dans F est dit continu au $x_0 \in E$, si pour tout voisinage V du point $y_0 = Tx_0$ il existe un voisinage U du point x_0 tel que $Tx \in V$, dés que $x \in U \cap E$. L'opérateur T est dit continu, s'il est continu en tout point $x \in E$.*

définition 1.12 *[22, 24] **(Opérateur borné)***

Soient E, F deux espaces normés, un opérateur linéaire T de E dans F est dit borné, s'il est défini partout dans E (i.e. $D(T) = E$) et transforme tout ensemble borné dans E en un ensemble borné dans F.

définition 1.13 *[2, 5, 10] Un opérateur linéaire T défini sur E dans F et dit borné s'il existe une constante positive $c > 0$, tell que*

$$||Tx||_F \leq c||x||_E. \tag{1.1}$$

Proposition 1.1 *tout opérateur linéaire continu est borné.*

définition 1.14 *[10, 18] **(Norme d'un opérateur)** Le plus petit des nombres Cvérifient l'inégalité S'appelle norme de l'opérateur T et se note $||T||$ i.e*

$$||T|| = inf\{c > 0, \forall x \in E,\ ||Tx|| \leq c||x||\}$$

Proposition 1.2 *[11] Pour tout opérateur borné $T \in L(E,F)$ on a*

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||_F}{||x||_E} = \sup_{||x||=1} ||Tx||_F = \sup_{\substack{||x|| \leq 1 \\ x \neq 0}} ||Tx||_F$$

Voir [26].

1.2.2 Inverse d'un opérateur

définition 1.15 *[21] **(Inversibilité)** Soient E et F deux espaces normés, $T \in \mathcal{L}(E,F)$. L'opérateur T est dit inversible,si définition **??** pour tout $y \in F$ l'équation*

$$Tx = y.$$

a une solution et une seule.

définition 1.16 *[11, 21, 24] On dit que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est inversible s'il est bijectif et si son inverse est continu.*

définition 1.17 ***(Opérateur inverse)***

définition 1.18 *[2] On dit que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est inversible s'il existe $A \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que$TA = I_E$ et $AT = I_F$. l'opérateur A (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle l'inverse de T et note parT^{-1}.*

1.2.3 Adjoint d'un opérateur

Soient H et $H^{'}$des espaces de Hilbert. On va généraliser la notion d'adjoint d'une application linéaire de $\mathbb{C}^d$ dans lui même, qu'on étudie généralement en L^2

définition 1.19 *[5] Soit $T \in \mathcal{L}(H,H^{'})$. Alors il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H^{'},H)$ tel que*

$$\forall x \in H,\ \forall y \in H^{'}, \langle Tx, y \rangle_{H'} = \langle x, T^*y \rangle_H.$$

L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T.

définition 1.20 *[5] Si $T \in \mathcal{L}(H,H)$ est tel que $T = T^*$, On dit que l'opérateur Test autoadjoint (ou hermitien).*

Proposition 1.3 ***(Propriétés de l'adjoint) :***

1. *$\forall T \in \mathcal{L}(H,H^{'})$, on a*
$$(T^*)^* = T \text{ et } ||T^*|| = ||T||.$$
2. *Si $T \in \mathcal{L}(H,H^{'})$ et $A \in \mathcal{L}(H^{'},H)$,alors*
$$(A \circ T)^* = T^* \circ A^*$$
3. *$\forall T_1,T_2 \in \mathcal{L}(H,H^{'})$ et tout λ, $\mu \in \mathbb{C}$, on a*
$$(\lambda T_1 + \mu T_2)^* = \overline{\lambda} T_1^* + \overline{\mu} T_2^*.$$

1.2.4 Vecteurs propres et valeurs propres d'un opérateur autoadjoint

Les opérateurs autoadjoints ont des propriétés particulièrement importantes que nous allons maintenant examiner.

Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H,H)$ un opérateur.

Théorème 1.21 *[18] **(Norme d'un opérateur autoadjoint)** Si T est autoadjoint (i.e.$T = T^*$), alors*

$$||T|| = \sup_{||x||=1} |\langle Tx,x\rangle|.$$

définition 1.22 *[11] On dit qu'un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de T s'il existe un vecteur $x \in H$, $x \neq 0$, tel que $Tx = \lambda x$. Un tel vecteur x est alors appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

Remarque 1.1 *Soit λ une valeur propre de T. Alors l'ensemble V_λ de tous les vecteurs (incluant le vecteur0)(qui n'est pas un vecteur propre par définition) $x \in H$ tels que $Tx = \lambda x$ est un sous-espace fermé de H. On l'appelle le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.*

Théorème 1.23 *[11] Si T est autoadjoint, les valeurs propres de T sont réelles et les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux (Autrement dit les sous-espaces propres $V_{\lambda 1}$ et $V_{\lambda 2}$ correspondant à des valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Dans le cas de la dimension finie, on déduit le résultat bien connu suivant*

corollaire 1.1 *Si $dimH < +\infty$ et si $T \in \mathcal{L}(H,H)$ est autoadjoint, alors T est diagonalisable Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant que nous signalons car il est très utile en général .*

Lemme 1.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H,H)$ un opérateur et soit V un sous-espace vectoriel fermé de H invariant par T (i.e.$\forall x \in V, Tx \in V$). Alors le sous-espace $V^\perp$ est invariant par l'adjoint T^*.*

1.2.5 Matrice d'un opérateur dans une base hilbertienne

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H. Soit T un opérateur de H dans lui même. Pour tout $j \geq 1$, on peut écrire

$$Te_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle Te_j,e_i\rangle e_i.$$

Nous allons voir que les coefficients $a_{i,j} := \langle Te_j, e_i\rangle$ $((i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)$ déterminent entièrement l'opérateur T :

Pour tout $x \in H$, posons $x_j = \langle x,e_j\rangle$,on a alors $x = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j e_j$ et

$$Tx = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j Te_j$$

car l'opérateur T est continu. D'autre part, la décomposition de Tx sur la base hilbertienne (e_n) donne

$$Tx = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle Tx,e_i\rangle e_i,$$

grâce à la continuité du produit scalaire, on a

$$\langle Tx,e_i\rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \langle Te_j,e_i\rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j a_{i,j} \tag{1.2}$$

on a donc

$$Tx = \sum_{i=1}^{+\infty}(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{i,j} x_j) e_i.$$

La formule 1.2 montre alors que le i-ième coefficient (de Fourier) deTx sur la base hilbertienne (e_n), s'obtient comme en dimension finie en faisant le ≪produit≫ de la i-ième ligne de la matrice $(a_{i,j})$ par la colonne des coefficients de Fourier de x.

définition 1.24 *[11] La matrice $A = \ (a_{i,j})_{(i,j \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)}$ à une infinité de lignes et de colonnes, est appelée matrice de l'opérateur$T$ dans la base hilbertienne (e_n).On notera que puisque $a_{i,j} :=< Te_j, \ e_i >$, la j-ième colonne de la matrice A est constituée des coefficients du vecteur Te_j comme en dimension finie.*

Remarque 1.2 *Nous ne développerons pas le calcul matriciel en dimension infinie car il présente certaines difficultés techniques liées essentiellement à des problèmes de convergence de séries.*

Chapitre 2

Opérateurs compacts

Parmi tous les opérateurs continus dans un espace de Hilbert,on peut distinguer une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compacts, appelés encore opérateurs complètement continus

2.1 Définitions fondamentales des opérateurs compacts

2.1.1 Ensembles compacts

définition 2.1 *[8] Soit E un espace topologique séparé. Un sous-ensemble F est dit compact si de tout recouvrement ouvert de F on peut extraire un sous recouvrement fini. Cela veut dire que, toute famille $\{V_J,j \in J\}$ d'ensembles ouverts dont la réunion contient F admet une sous-famille finie :*

$$\left\{V_{j(k),}j(k) \in J,k = 1,2...,n\right\} \text{ dont la réunion contient } F.$$

La définition suivante est plus commode lorsque E est un espace métrique, cas dans lequel nous nous plaçons dans la suite.

définition 2.2 *[11] Soit E un espace métrique. Un sous-ensemble F de E est compact si toute suite d'éléments de F, contient une sous-suite convergente vers un élément de F.*

2.1.2 Ensembles relativement compact

définition 2.3 *[13]* ***(ensembles relativement compact)*** *Un sous-ensemble F de E est* ***relativement compact*** *si son adhérence $\overline{F}$ est compacte. Le sous-ensemble F est dit précompact si son complété est compact.*

Evidemment, lorsque E est lui-même complet, les deux notions sont équivalentes

définition 2.4 *[10] Soit E un espace de Hilbert et T un endomorphisme de E. On dit que T est compact s'il transforme tout sous-ensemble borné de E en un ensemble relativement compact. En d'autres termes, T est un opérateur compact si, pour toute suite bornée (x_n) dans E, la suite (Tx_n) contient une sous-suite convergente.*

2.1.3 Opérateurs linéaires compacts

définition 2.5 *[2] Soit T un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que T est un* ***opérateur compact*** *s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $T(G)$ dans F Autrement dit, la fermeture $\overline{T(G)}$ est compacte.*

. *L'ensemble* ***des opérateurs compacts*** *de E dans Fest noté $\mathcal{K}(E,F)$. Si $E = F$ alors, on note $\mathcal{K}(E)$.*

2.1.4 Critère de compacité

Théorème 2.6 *[19] Un opérateur linéaire $T : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée x_n de E, la suite Tx_n contient une sous suite convergente de F.*

Il suffit d'appliquer les définitions d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact.

Théorème 2.7 *[1, 12] Tout opérateur compact est borné, c'est-à-dire que l'on a l'inclusion $\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{L}(E)$.*

Soit T un opérateur compact dans E. L'image de la boule unité de E est un ensemble relativement compact, donc borné. Il existe, alors, une constante $M > 0$,tel que

$$||Ty|| \leq M, \forall y \in E,\ ||y|| \leq 1$$

On en déduit que

$$||Tx|| \leq M||x||, \forall x \in E$$

L'opérateur T est donc continu et sa norme est majorée par M.

Remarque 2.1 *La réciproque de ce théorème n'est pas vraie en général. Les opérateurs compacts sont très particuliers , par exemple si E est de dimension infinie, l'identité n'est pas un opérateur compact , puisque cela entraînerait l'existence d'un voisinage de l'origine relativement compact dans E et par suite E serait de dimension finie.*

En revanche, si E est de dimension finie, tout opérateur linéaire dans E est compact, puisque si F est un sous-ensemble borné de E, son image $T(F)$ est bornée et donc son adhérence $\overline{T(F)}$ est compacte.

Proposition 2.1 *Si T est un opérateur linéaire de E dans F, alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$T \in \mathcal{K}(K,F)$*
2. *Pour toute suite bornée (x_n) de E , la suite $T(x_n)_n$ admet une sous suite convergente dans F.*

On suppose que T soit compact et on considère une suite bornée quelconque $(x_n)_n$. Si on pose $\alpha = \sup_n ||x_n||$,alors la suite $T(x_n)_n$ est contenue dans l'ensemble $T(B_E(0, \alpha))$.Or $T(B_E(0, \alpha))$ est relativement compact, on peut alors extraire de $T(x_n)_n$ une sous suite convergente. Soient maintenant M une partie bornée de E et $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $\overline{T(M)}$.existe alors une suite $(z_n)\ _n$ d'éléments de $T(M)$ telle que

$$||z_n - y_n|| \leq \frac{1}{n},$$

Par hypothèse, la suite $(z_n)\ _n$ admet une sous suite convergente, la suite $(y_n)_n$ Il s'en suit que $T(M)$ est relativement compact. D'ou, T est compact.

Théorème 2.8 *[11, 10] Une combinaison linéaire $T = \alpha T_1 + \beta T_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Soit $\{\varphi_n\}$une suite borné de E soit $\{T\varphi_n\}$ une suite de F, alors

$$T\varphi_n(x) = \alpha T_1\varphi_n(x) + \beta T_2\varphi_n(x), \text{avec } \varphi_n \in E, n \in \mathbb{N}$$

T_1et T_2 étant compacts, on peut extraire de$\{T_1\varphi_n\}$ et de $\{T_2\varphi_n\}$ deux sous suites convergentes qui donne par leur somme une sous suite convergente de $T\varphi_n(x)$,donc T est compact.

Théorème 2.9 *[11] Le produit AT de deux opérateurs bornés A et T est compact si l'un des opérateurs A ou Test compact.*

Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de E, alors si T est un opérateur borné la suite $T\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur T il existe une sous suite de $A(T\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AT est compact. D'autres part si T est compact, on peut extraire de la suite$T\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $T\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(T\varphi_{n(k)}(x))$converge, ce qui implique que AT est compact.

Théorème 2.10 *[2] Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soient $\{T_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F, convergente en norme vers l'opérateur linéaire T de E dans F.*

$$\lim_{n\to+\infty} ||T_n - T|| = 0.$$

Alors T et compact.

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E, l'opérateur T_1 étant compact, on peut extraire de la suite $\{T_1\varphi_n\}$ une sous suite convergente : soit$\{\varphi_n^1\}$ une sous suite de$\{\ \varphi_n\}$ telle que, extraire de la suite$\{T_1\varphi_n^1\}$ soit convergente. De la même façon, on peut extraire de la suite $\{T_2\varphi_n^1\}$ une sous suite convergente, car T_2 est compact :soit $\{\varphi_n^2\}$ une sous suite de $\{\varphi_n^1\}$ telle que,la suite la suite $\{T_2\varphi_n^2\}$ soit convergente. Remarquons que, la suite $\{T_1\varphi_n^2\}$ est une sous suite de la suite convergente $\{T_1\varphi_n^1\}$ qui à son tour convergente. En raisonnant de la même façon, pour les opérateurs $T...T...T_P...$,on détermine les suite $\{\varphi_n^1\}$,...$\{\varphi_n^2\}$,.....$\{\varphi_n^p\}$,...Il est à remarquer que la suite $\{\varphi_n^p\}$ est une sous suite de toutes les suites qui lui précèdent et que les suites $\{T_k\varphi_n^p\}$ sont convergentes pour $(k = 1,2,...p)$ Comme l'espace Y est complet, pour la compacité de l'opérateur T il suffit de montrer que la suite $\{T\varphi_n^p\}$ est une suite Cauchy, alors

$$||T\varphi_n^p - T\varphi_n^q|| \ \leq ||T\varphi_n^p - T_n\varphi_n^p|| + \ ||T_n\varphi_n^p - T_n\varphi_n^q|| + ||T_n\varphi_n^q - T\varphi_n^q||$$

Soit $||\varphi_n|| \leq M$,choisissons n de sorte que l'on a $||A - A_n|| < \frac{\varepsilon}{3M}$, ensuite choisissons N tel que, pour tous les $P > N$ et $q > N$,on a la relation $||T_n\varphi_n^p - T_n\varphi_n^q|| < \frac{\varepsilon}{3}$ car la suite $\{T_n\varphi_n^p\}$ est convergente. Dans ces conditions, on aura pour tout p et q suffisamment grands.

$$||T\varphi_n^p - T\varphi_n^q|| < \varepsilon.$$

Théorème 2.11 *[10] Soit T un opérateur borné de E dans F , à image $T(E)$ dimension finie Alors T est compact.*

En effet, car l'opérateur T transforme tout ensemble borné G de E à un ensemble borné $T(G)$ dans un espace de dimension finie $T(E)$ ce qui implique que $T(G)$ est précompact.

Théorème 2.12 *[18] L'opérateur identique I de E dans E est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

Soit $\varphi_1$un élément de E, tel que $||\varphi_1|| = 1$, alors G_1 =span$\{\varphi_1\}$ est un sous espace fermé de E car G_1est de dimension finie. D'après le lemme il existe un élément $\varphi_2 \in E$,$||\varphi_2|| = 1$ et $||\varphi_1 - \varphi_2|| > \frac{1}{2}$ Prenons une deuxième fois le sous espace fermé G_2 =span$\{\varphi_{1,}\varphi_2\}$, il existe alors un élément $\varphi_3 \in E$ avec $||\varphi_3|| = 1$, $||\varphi_1 - \varphi_3|| > \frac{1}{2}$ et $||\varphi_2 - \varphi_3|| > \frac{1}{2}$.On répète la même procédure jusqu'à l'obtention d'un suite$\{\varphi_n\}$ vérifiant $||\varphi_n|| = 1$, et $||\varphi_n - \varphi_m|| > \frac{1}{2}$, pour tout $m \neq n$, Il est à remarquer que cette suite $\{\varphi_n\}$ est bornée mais elle ne contient aucune sous suite convergente. C.Q.F.D.

corollaire 2.1 *La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact. En effet, il suffit d'appliquer le théorème 2.12 car la boule unité $B(0,1)$ est sa propre image dans l'espace X de dimension infinie par l'opérateur identique*

Théorème 2.13 *[2]* ***(Théorème d'Ascoli)*** *Soient (I,d) un espace métrique compact et $(X,d\prime)$ un espace métrique complet. Alors, une partie H de $C(I,X)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *H est équicontinue, i.e.:*

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall f \in H, \forall y \in I, (d(x,y) < \delta) \Rightarrow (d^{'}(f(x),f(y)) < \varepsilon)).$$

2. *Pour tout $x \in I$, l'ensemble $H(x) = \{f(x), f \in H\}$ est relativement compact.*

Exemple 2.1 *Soit $E = C([0,1],\mathbb{k})$.L'opérateur de Volterra $T : E \to F$ défini*

$$\forall f \in E, Af(x) = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0,1],$$

est compact.

On va utiliser le théorème d'Ascoli avec $I = [0,1]$ et $X = \mathbb{k}$.On pose $H = T(B_E)$.Soit $f \in B_E$, pour tous $x,y \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tf(y)| &= |\int_0^x f(t)dt| \\ &\leq |x-y|||f||_\infty \\ &\leq |x-y|. \end{aligned}$$

D'où, on a

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0 / \forall f \in B_E, \forall y \in I, (|x-y| < \delta) \Rightarrow (|Tf(x) - Tf(y)| < \varepsilon).$$

Autrement dit, l'ensemble H est équicontinu. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $H(x)$ est une partie de $\mathbb{k}$ donc si $H(x)$ est bornée alors, $H(x)$ est relativement compacte. Or, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} \forall f &\in B_E : |Tf(x)| \leq \int_0^x |f(t)|dt \\ &\leq x||f||_\infty \\ &\leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Les conditions du théorème d'Ascoli sont satisfaites, il s'en suit que T est compact.

Théorème 2.14 *[11]* ***(Théorème de Riesz)***

Soit E un espace vectoriel normé Alors, la boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Remarque 2.2 **(a)** *Il résulte du théorème de Riesz que l'application identité sur E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

(b) *Si E et F sont de dimensions infinies, le théorème de Riesz entraîne que si $T \in \mathcal{L}(E,F)$est inversible alors, T n'est pas compact.*

2.2 Opérateurs de rang finie

définition 2.15 *[5] Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$.On dit que T est un opérateur de rang fini si $Im(T)$ est de dimension finie.*

Exemple 2.2 *Soient $E := L^p(]0,1[,\mathbb{R})$ et T l'opérateur défini sur E par*

$$\forall f \in E, Tf(x) := \int_0^1 xy(1-xy)f(y)dy, \forall x \in]0,1[.$$

Alors, T est à valeurs dans $F := \mathbb{R}_2[x]$ (espace des polynômes à coefficients réels de degré .Comme F est de dimension finie, l'opérateur T est de rang fini.

. *L'ensemble des opérateurs de rang fini de E dans F sera noté $\mathcal{K}_0(E)$.*

Proposition 2.2 *Tout opérateur borné de rang fini est compact.*

Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ un opérateur de rang fini. L'opérateur T est continu donc, pour tout $x \in B_E$, $||Tx|| \leq ||T||$.Alors, $T(B_E)$ est borné dans F et, par conséquent, $\overline{T(B_E)}$ aussi. De plus, $Im(T)$ est fermé car c'est un espace vectoriel de dimension finie, d'où$\overline{T(B_E)} \subset \overline{Im(T)} = Im(T)$. Finalement $\overline{T(B_E)}$ est un fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie $Im(A)$, c'est donc un compact de $Im(A)$, d'où $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

.L'espace $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé et tout opérateur borné de rang fini est compact. On en déduit le résultat suivant :

corollaire 2.2 *Toute limite dans $\mathcal{L}(E,F)$ d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.*

La réciproque est fausse en général mais si F est un espace de Hilbert.

Proposition 2.3 *Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$.Alors, $Im(T)$ est fermé si et seulement si T est de rang fini*

2.3 Opérateur compact dans un espace de Hilbert

On va donner une caractérisation plus précise de la compacité dans le cadre hilbertien. On a vu au Corollaire 2.2 que toute limite dans $\mathcal{L}(E,F)$ d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.

. *La réciproque est fausse en général, mais si F est un espace de Hilbert, on a le résultat*

Théorème 2.16 *[22] Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{K}(E,H)$.Alors, il existe une suite $(A_n)_n$ de $\mathcal{L}(E,H)$ d'opérateurs de rang fini, qui converge vers A dans $\mathcal{L}(E,H)$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ,puisque $\overline{T(B_E)}$ est un compact de H, il existe, $k_n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1....y_{k_n} \in H$ tels que

$$\overline{T(B_E)} \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B_H(y_i, \frac{1}{n+1}), \tag{2.1}$$

où $B_H(y,r) := \{x \in H : \ ||x-y|| < r\}$.Or $F_n := Vect\{y_1....y_{k_n}\}$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc un fermé de l'espace de Hilbert H, d'où $H = F_n \oplus F_n^{\perp}$.Soit $p_n \in \mathcal{L}(H)$ la projection orthogonale de H sur F_n.Alors,$T_n := p_nT \in \mathcal{L}(E,H)$ est un opérateur de rang fini puisque

$$dim(Im(T_n)) = dim(Im(P_nT)) \leq dim(F_n) \leq k_n.$$

Enfin, pour $x \in B_E$,d'après 2.1, il existe $i_0 \in \{1,....k_n\}$ tel que

$$||Tx - y_{i0}|| < \frac{1}{n+1}.$$

Mais $y_{i0} \in F_n$ et P_nTx est la projection orthogonale de Ax sur F_n donc

$$||Tx - P_nAx|| = dist(Tx, L_n) \leq ||Tx - y_{i0}|| < \frac{1}{n+1}.$$

Il résulte que

$$x \in B_E : ||Tx - T_nx|| < \frac{1}{n+1}.$$

En revenant à la ddéfinition de la norme d'opérateurs, on trouve $||T - T_n|| < \frac{1}{n+1}$.

Remarque 2.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. De ce qui précède, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *L'opérateur Test adhérent (en norme d'opérateur) à l'espace des opérateurs linéaires bornés de rang fini.*
2. *L'opérateur T est compact de H dans H.*

Chapitre 3

Opérateur de Hilbert - Schmidt

L'objectif de ce chapitre est de est donné par la famille des opérateur de Hilbert-Schmidt qui ne sont définis que si l'espace de Hilbert est séparable (ce que nous supposerons dans la suite). Pour les introduire, nous avons besoin du résultat qui suit.

3.1 Généralités

définition 3.1 *[11] soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H. Un opérateur linéaire $T : H \to H$ est un opérateur de **Hilbert-Schmidt** (ou simplement HS) si*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||Te_n||^2 \prec +\infty.$$

Le réel

$$||T||_{HS} = (\sum_{n=1}^{+\infty} ||Te_n||^2)^{\frac{1}{2}},$$

*s'appelle la norme de **Hilbert - Schmidt** de l'opérateur T.*

Proposition 3.1 *On suppose H séparable et on désigne par (e_n) une base hilbertienne de H. Pour tout élément $T \in \mathcal{L}(H)$,le nombre (fini ou infini)*

$$|||T|||^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} ||Te_n||^2,$$

ne dépend pas de la base hilbertienne considérée et on a

$$|||T||| = |||T^*|||.$$

Soit (f_n) une autre base hilbertienne de H. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{P=1}^{+\infty} ||Te_P||^2 &= \sum_{P=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} |\langle Te_p, f_q\rangle|^2 = \sum_{P=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} |\langle e_p, T^* f_q\rangle|^2 \\
&= \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} |\langle e_p, T^* f_q\rangle|^2 = \sum_{q=1}^{+\infty} ||T^* f_q||^2,
\end{aligned}$$

en particulier, en prenant la même base, on obtient

$$\sum_{P=1}^{+\infty} ||Te_P||^2 = \sum_{P=1}^{+\infty} ||T^* e_P||^2,$$

ce qui montre que $|||T||| = |||T^*|||$ *On en déduit ensuite que* $|||T|||$ *ne dépend pas de la base considérée, puisque*

$$\sum_{P=1}^{+\infty} ||Te_P||^2 = \sum_{P=1}^{+\infty} ||T^* f_p|||^2 = \sum_{P=1}^{+\infty} ||Tf_p||^2.$$

Proposition 3.2 *Si* $T \in \mathcal{L}(H, H)$ *est de Hilbert-Schmidt, alors son adjoint* T^* *est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt.*

3.2 Caractérisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt

Proposition 3.3 *soit* $T \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur de Hilbert - Schmidt , on a*

1. *La norme* $|| \cdot ||_{HS}$ *ne dépendent pas du choix de la base hilbertienne de* H.
2. $||T^*||_{HS} = ||T||_{HS}$.
3. *on a toujours,* $||T|| \leq ||T||_{HS}$.

Théorème 3.2 *[10] Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.*

Soit (e_n) *une base hilbertienne de* H *et soit* T *un opérateur de Hilbert-Schmidt sur* H. *Pour tout* n, *on désigne par* P_n *l''opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace engendré par* $\{e_1,e_2,..e_n\}$.*, L'opérateur* $T_n = TP_n$ *est de rang fini égal à* n *et on a* $T_n e_j = Te_j$ *, si* $j \leq n$ *et* $T_n e_j = 0$*, si* $j \succ n+1$*,donc*

$$(T - T_n)\, e_j = \begin{cases} 0 & ,si \quad j \leq n, \\ Te_j & ,si \quad j \geq n+1, \end{cases}$$

Il en résulte que

$$||T - T_n||^2 \leq |||T - T_n|||^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} ||Te_j||^2$$

Le second membre de cette inégalité tend vers zéro lorsque n *tend vers l'infini, puisque c'est le reste d'une série convergente. L'opérateur* A *est donc limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Proposition 3.4 *l'ensemble des opérateurs de* ***Hilbert-Schmidt*** *est un idéal bilatèral de* $\mathcal{L}(H)$ *et si* T *est un opérateur de Hilbert Schmidt, pour toute base hilbertienne* (e_n) *de* H*, On a*

$$|||T|||^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{i,j}|^2 \text{ où } a_{i,j} = \langle Te_j, e_i \rangle.$$

Si T *est un opérateur de* ***Hilbert-Schmidt*** *et* S *un élément de* $\mathcal{L}(H)$*,On a*

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||STe_j||^2 \leq ||S||^2 \sum_{j=1}^{\infty} ||Te_j||^2 = ||S||^2 |||T|||^2$$

L'opérateur ST *est donc un opérateur de* ***Hilbert-Schmidt****. De même,* S^*T^* *est un opérateur de Hilbert-Schmidt et il en sera de même de son adjoint* TS*, ce qui prouve de l'égalité*

$$||Te_j||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle Te_j, e_i \rangle|^2.$$

3.3 Opérateurs de Hilbert-Schmidt dans L^2

Proposition 3.5 *soit $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ un opérateur linéaire continu.T est un opérateur de Hilbert-Schmidt ssi il existe une fonction*

$$K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R},\ K \in L^2 \in ([0,1] \times [0,1])$$

$$||T\ ||_{Hs} = ||k\ ||_{L^2[0,1]},$$

et telle que pour tout $f \in L^2[0,1]$

$$(Tf\ )(x) = \int_0^1 K(x,y)f\ (y)dy.$$

Montrons que tout opérateur intégral dont la fonction $K(x,y)$ est de classe L^2 est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Pour simplifier, nous nous plaçons dans l'espace de fonctions réelles.Soit $K \in L^2([0,1]\times[0,1])$.Choisissons une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $L^2([0,1]\ )$.Alors la famille de fonctions

$$f_{i,j}(x,y) = e_i(x)e_j(y)$$

forme une base hilbertienne de $L^2([0,1] \times [0,1])$.On peut donc décomposer K sur cette base :

$$k(x,y) = \sum_i\sum_j a_{i,j}e_i(x)e_j(y)$$

et

$$a_{i,j} = \langle k,f_{i,j}\rangle_{L^2([0,1]\times[0,1])} = \int_0^1\int_0^1 k(x,y)e_i(x)e_j(y)dxdy$$

$$= \int_0^1 e_i(x)(\int_0^1 k(x,y)e_j(y)dy)dx$$

$$= \int_0^1 e_i(x)(Te_j)(x)dx = \langle e_i,Te_j\rangle.$$

D'Après l'égalité de Parseval on a

$$||k\ ||^2 = \sum_i\sum_j|a_{i,j}|^2 = \sum_j\sum_i|\langle Te_j,e_i\rangle|^2 = \sum_j||Te_j||^2$$

Nous avons utilisé dans le dernier calcul l' égalité de Parseval une deuxième fois,en décomposant chaque vecteur Te_j sur la base (e_i) :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \sum_j = \sum_i|\langle Te_j,e_i\rangle|^2$$

Ainsi nous avons montre que pour toute base hilbertienne dans $L^2([0,1]\ )$ on a

$$\sum_j||Te_j\ ||^2 = ||k||^2 \prec \infty$$

Donc T est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Montrons maintenant que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est un opérateur intégral. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt sur L^2 ([0,1]) .Choisissons une base $(e_n)_{n\in N}$ dans L^2 ([0,1]) . Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on peut décomposer le vecteur Te_j sur la base :

$$Te_j = \sum_i a_{i,j}e_i, a_{i,j} = \langle Te_j,e_i\rangle$$

Posons

$$k(x,y) = \sum_i\sum_j a_{i,j}e_i(x)e_j(x)$$

Sachant que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, on a

$$\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 = \sum_j (\sum_i |\langle Te_j, e_i\rangle|^2) = \sum_j ||Te_j||^2 \prec \infty.$$

Donc $K \in L^2([0,1] \times [0,1])$ et définit alors un opérateur intégral

$$(T_k f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$$

Montrons que $T = T_K$ .Il est évident, par définition des coefficients $a_{i,j}$ et de la fonction $K(x,y)$ que pour i et pour tout j

$$\langle Te_j, e_i\rangle = a_{i,j} \ \langle T_k e_j, e_i\rangle$$

Donc pour tout j ,$Te_j = T_k e_j$. Les opérateurs T et T_k coïncident sur la base hilbertienne (e_i). Donc, ils coïncident sur le sous-espace dense $Vect(e_i, i \in \mathbb{N})$ de combinaisons linéaires finies des vecteurs de cette base. Comme ils sont tous les deux continus ils coïncident . Donc sur $L^2([0,1])$ on a

$$T = T_k.$$

Proposition 3.6 *Si $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est de Hilbert-Schmidt, alors son adjoint T^* est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt.*

Théorème 3.3 *[1] On considère un espace de Hilbert séparable H et un opérateur $T \in k(H)$.Soit (e_n) une base orthonormée de H. Alors, la suite la suite (Te_n) tend vers 0.*

On suppose que (Te_n) ne tende pas vers 0. Sinon, on pourrait (pour un certain $3b5 > 0$) extraire de (e_n) une sous-suite $(e_{k(n)})$ telle que $||T(e_{k(n)})|| \succ \varepsilon$ pour tout n. Comme T est compact, on peut extraire de $(Te_{k(n)})$ une sous-suite(notée$(Te_{k(n)})$) convergente. Si on note x sa limite, on a $||e|| \succeq \varepsilon$. Or, pour tout $y \in H$ on a

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle Te_{k(n)}, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle e_{k(n)}, T^* y\rangle = 0.$$

La dernière égalité ddécoule du fait que pour tout vecteur $z \in H$,la série $\sum_n |\langle e_k, z\rangle|^2$converge alors, son terme général tend vers 0. En choisissant $y = x$,on obtient $x = 0$, ce qui est une contradiction.

3.4 Le théorème de diagonalisation

3.4.1 Le contenu du théorème

*On sait que tout opérateur autoadjoint sur $\mathbb{C}^d$ est diagonalisable. En dimension infinie, ce résultat peut-être généralisé aux opérateurs de **Hilbert-Schmidt** autoadjoints , c'est ce que nous allons étudier dans ce paragraphe. Comme dans ce qui précède, H désigne un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.*

définition 3.4 *[10]* ***(de diagonalisation)*** *: Soit $T \in \mathcal{L}(H, H)$ un opérateur de **Hilbert-Schmidt** autoadjoint. Alors il existe une famille orthonormale finie ou infinie dénombrable $(\phi_n)_{n\in D}$ composée de vecteurs propres de T telle que si λ_n est la valeur propre associée à ϕ_n, on a*

$$\forall x \in H, Tx = \sum_{n\in D} \lambda_n \langle x, \phi_n\rangle \phi_n \tag{3.1}$$

(série convergente dans H si $D = \mathbb{N}^*$ et somme ordinaire si D est fini). De plus si l'ensemble $\{\lambda_n ; n \in D\}$ est infini ,on a $\sum_{n\in D} \lambda_n^2 \prec +\infty$.

Remarque importantes

1. *Comme T est autoadjoint, tous les λ_n de la formule 3.1 sont des réels d'après le théorème 1.2.4*
2. *Attention, dans 3.1 les valeurs λ_n ne sont pas forcément distinctes deux à deux comme on peut le voir sur l'exemple d'un opérateur diagonal dans une base hilbertienne donnée de H .*
3. *Toutes les valeurs propres non nulles de T figurent dans la liste des $\lambda_n(n \in D)$.En effet si $\lambda \neq 0$ était une valeur propre de T n'appartenant pas à $\{\lambda_n ;n \in D\}$ et si ϕ est un vecteur propre associé, alors ϕ serait orthogonal à tous les $\phi_n(n \in D)$ d'après le théorème 1.2.4 . D'après 3.1on aurait donc $T\phi = \lambda\phi = 0$, ce qui est impossible.*
4. *Si $x \in \ker T(i.e.Tx = 0)$, alors pour tout $n \in D$, $\langle x, \phi_n \rangle = 0$ donc $x \in \overline{(V[\phi_n ;n \in D)}^{\perp}$ et inversement donc $kerT = \overline{(V[\phi_n ;n \in D)}^{\perp}$.On obtient ainsi le corollaire suivant*

corollaire 3.1 *En adjoignant à $\{\phi_n ;n \in D\}$une base hilbertienne de $KerT$. On obtient une base hilbertienne de H dans laquelle l'opérateur T est diagonal.*

Remarque 3.1 *Si $T : H \to H$ est un opérateur de* ***Hilbert-Schmidt*** *auto adjoint,on peut résoudre facilement les équations de la forme*

$$Tx = y$$

où y est un vecteur donné d'un espace de Hilbert H. C'est l'une des applications pratiques les plus importantes du théorème de diagonalisation.

3.5 Annexe : démonstration du théorème de diagonalisation

3.5.1 compacité d'un opérateur de Hilbert-Schmidt :

Lemme 3.1 *Si $T \in \mathcal{L}(H,H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt et $(x^{(n)})_{n\in N}$ une suite bornée de vecteurs de H, alors la suite $(Tx^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admet toujours une sous-suite convergente.*

Si H est de dimension finie, le résultat est évident. Supposons donc dim $H = +\infty$,et fixons une base hilbertienne $(\phi)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de H. Pour$n \in \mathbb{N}^*$

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^{(n)} \phi_k,$$

où,$x_k^{(n)} = \langle x^{(n)}, \phi_k \rangle$ est la coordonnée d'ordre k de$x^{(n)}$dans la base hilbertienne.

Par hypothèse, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} ||x_n|| = M \prec +\infty.$$

On notera que pour tout $k \geq 1$ (fixé), la suite $(x_k^{(n)})_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{C}$ puisque .

$$|x_k^{(n)}| = |\langle x^{(n)},\phi_k \rangle| \leq ||x^n||.||\phi_k|| \leq M.$$

De la suite $(x_1^{(n)})_{n\geq 1}$on peut donc extraire une sous suite$(x_1^{(\psi_1(n))})_{n\geq 1}$qui converge vers un nombre $x_1 \in \mathbb{C}$:

$$|x_1^{(\psi_1(n))} - x_1| \to 0 \ (n \to +\infty).$$

De la suite $(x_2^{(\psi_1(n))})_{n\geq 1}$on peut alors extraire une sous-suite $(x_2^{(\psi_2(n))})_{n\geq 1}$qui converge vers un nombre $x_2 \in \mathbb{C}$:

$$|x_2^{(\psi_2(n))} - x_2| \to 0 \ (n \to +\infty).$$

En poursuivant ainsi par récurrence, pour tout $k \geq 2$ il existe une suite croissante d'entiers$(\psi_k(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ extraite de la suite$(\psi_{k-1}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$et un nombre $x_k \in \mathbb{C}$,tels que

$$|x_k^{(\psi_k(n))} - x_k| \to 0 \ (n \to +\infty).$$

Notons que la suite extraite $x^{(\psi_k(n))} \in H$ *est telle que ses k premières coordonnées convergent. Considérons alors la suite* $x^{(\psi_n(n))}$ *qui est extraite de toutes les précédentes. Alors toutes ses coordonnées convergent , précisément pour tout entier* $k \geq 1$*, on a :*

$$|x_k^{(\psi_n(n))} - x_k| \to 0 \ (n \to +\infty).$$

Attention on ne peut pas en conclure que la suite $x^{(\psi_n(n))}$ *converge dans* H *mais considérons la suite* $(Tx^{(\psi_n(n))})$*.Le lemme sera prouvé si on montre que cette suite est de Cauchy dans* H*. Soit* $n < m$*, et pour simplifier les notations écrivons*

$$a_k^{n,m} = x_k^{(\psi_n(n))} - x_k^{(\psi_m(m))}.$$

Pour tout entier $N > 1$ *fixé, on peut écrire (puisque* T *est continu)*

$$\begin{aligned} Tx^{(\psi_n(n))} - Tx^{(\psi_m(m))} &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{n,m} T\phi_k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{n,m} T\phi_k + \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k^{n,m} T\phi_k \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \left|\left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k^{n,m} T\phi_k \right|\right| &\leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} |a_k^{n,m}|.||T\phi_k|| \\ &\leq \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} |a_k^{n,m}|^2 \right)^{1/2} . \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} ||T\phi_k||^2 \right)^{1/2} \\ &\leq ||x^{(\psi_n(n))} - x^{(\psi_m(m))}|| \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} ||T\phi_k||^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2M \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} ||T\phi_k||^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si on se donne $\varepsilon > 0$*, comme* T *est de* ***Hilbert-Schmidt****, on peut choisir un entier* $N > 1$ *tel que la quantité 3.2 soit inférieure à* $\varepsilon/2$*. Pour ce N fixé, il est clair que la quantité* $|| \sum_{k=1}^{N} a_k^{n,m} T\phi_k||$ *peut être rendue inférieure à* $\varepsilon/2$ *pour n,m assez grands. Dans ce cas, il en résulte qu'on a aussi* $||Tx^{(\psi_n(n))} - Tx^{(\psi_m(m))}|| \leq \varepsilon$*.Q.E.D.*

Chapitre 4

Applications

*Les applications des opérateurs sont très nombreuses et ont recherché plusieurs domaines, tel que les différent disciplines mathématiques et physique. Dans ce chapitre, nous allons proposer deux exemples d'application des opérateurs**Hilbert-Schmidt.***

4.1 Exemples sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt

Exemple 1 (Opérateurs diagonaux)

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une base hilbertienne de* H *et* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *une suite fixée de nombres complexes telle que* $\sum\limits_{K=1}^{+\infty}|\lambda_k|^2 < +\infty$.

Pour tout $x \in H$*, posons*

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\langle x,e_k\rangle e_k.$$

Alors T *est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur* H *et pour tout* $k \geq 1, Te_k = \lambda_k e_k$ *i.e* λ_k *est une valeur propre et est et* e_k *un vecteur propre associé. Autrement dit la matrice de* T *dans la base hilbertienne* (e_n) *est diagonale et sa diagonale est composée des coefficients* λ_n.

Exemple 2 (Opérateurs à noyau)

soit $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ $(a < b)$ *une fonction continue. Pour toute* $f \in L^2([a,b])$*,on considère la fonction* Kf *définie pour* $t \in [a,b]$ *par*

$$(kf)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds.$$

Alors K *est un opérateur de Hilbert-Schmidt de l'espace de Hilbert* $L^2([a,b])$ *sur lui même. Donnons quelques détails :*

Pour tout $t \in [a,b]$ *fixé, notons* k_t *la fonction* $s \to k(t,s)$*. En termes du produit scalaire de* $L^2([a,b])$*, on peut écrire*

$$(kf)(t) = \langle k_t, \overline{f}\rangle. \tag{4.1}$$

Considérons une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de* $L^2([a,b])$*.D'après 4.1,on a* $||ke_n||^2 = \int_a^b |\langle k_t,\overline{e_n}\rangle|^2dt$*. D'où en* *utilisant le théorème de **Fubini-Tonelli***

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}||ke_n||^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b |\langle k_t,\overline{e_n}\rangle|^2 dt\\ &= \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty}|\langle k_t,\overline{e_n}\rangle|^2 dt.\end{aligned}$$

Mais $\sum_{n=1}^{+\infty}|\langle k_t,\overline{e_n}\rangle|^2 = ||k_t||^2$ *(formule de Bessel-Parseval). Ainsi*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}||ke_n||^2 = \int_a^b ||k_t||^2 dt = \int_a^b\int_a^b |k(t,s)|^2 dtds < +\infty. Q.E.D \tag{4.2}$$

Conclusion

*En conclusion, que L'étude des opérateurs **Hilbert-Schmidt** une partie importante en analyse fonctionnelle spécifiquement hilbertienne. Dans ce travail, nous donne les propriétés générales des opérateurs linéaires dans un espace normé :spectre, adjoint, opérateurs auto-adjoints, opérateurs de projection orthogonale,..., etc.*

Parmi tous les opérateurs continus dans un espace de Hilbert, on distingue dans le deuxième chapitre une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compacts, appelés encore opérateurs complètement continus .Dans ce chapitre, on vu que lorsque l'opérateur compact est en plus auto-adjoint (non nul), son spectre ne peut être réduit à 0 et qu'un tel opérateur est diagonalisable.

*En fin, on prend deux exemples comme une applications d'opérateur **Hilbert-Schmidt**.*

Bibliographie

[1] *G.AUBRUN, Théorie des Opérateurs, cours M1 Mathématiques Université de la Réunion, http ://math.univ-lyon1.fr/˜aubrun/enseignement/operateurs/cours.pdf .*

[2] *D.Anya , Analyse Fonctionnelle. Espaces de Hilbert (Ecole Internationale des Sciences de Traitement de l'Information), 2010-2011.*

[3] *M. Akkouchi. Remark son the spectrum of bounded and normal operator son Hilbert space,An.St.Univ.Ovidius Constanta.16/2(2008), 7-14.*

[4] *A. Azzouz, Sur la Somme, le Produit et Passage à l'adjoint dans la Classe des Opérateurs Fermés sur un Espace de Hilbert (Thèse doctorat, Université d'Oran), 2011.*

[5] *J.P Aubin. Analyse fonctionnelle appliquée, Tome 2, Presses universitaire de France, 1987.*

[6] *F. Bayen, C. Margaria. Espace de Hilbert et opérateurs problémes de mathématiques appliquées.Tome 2, Ellipses, 1986.*

[7] *J. Bass. de mathématique"TOME III", Massonet CIE, diteurs120, Boulevard Saint-Germain, Paris, 1971.*

[8] *S. Carlos, Kubrusly. Spectral theory of operators on Hilbert spaces, Birkhäuser.*

[9] *H. Chebli. Analyse Hilbertienne, Centre publication universitaire,Tunis, 2001.*

[10] *I. Chalendar, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, 2011.*

[11] *J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs,Dunod, Paris, 2010*

[12] *N. Dunford and J.Schwartz, Linear Operators,Part II,Wiley,NewYork,1971.*

[13] *Gretton, A., Bousquet, O., Smola, A., Schölkopf, B. (2005, October). Measuring statistical dependence with Hilbert-Schmidt norms. In International conference on algorithmic learning theory (pp. 63-77). Springer, Berlin, Heidelberg.*

[14] *E. Fricain, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs cours et ex.ercices, 2009-2010.*

[15] *M.Guesba, Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, Mémoire de Doctorat, université de M'sila, 2017.*

[16] *.F.Hirsch, G.Lacombe, Elements d'analyse fonctionnelle, Coures et éxercices avec réponses.Masson, Paris, 1997 pour la première édition, Dunod, Paris, 1999, pour la nouvelle présentation.*

[17] *F. Helein, Notes pour le cours de théorie spectrale, Université Paris 7, Master 1 de Mathématiques, 2008-2009.*

[18] *G. Iooss, Bifurcation et Stabilité, UNIVERSITE´ PARIS XI, 1972-1973.*

[19] *M. L. Gallardo, Notes du cours sur les espaces de Hilbert(Licence 3-ième année),Université de Tours,2007-2008.*

[20] *A. Kolmogorov, S. Fomine, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, 2e édition, E´ DITIONS MIR. MOSCOU, Décembre 1973.*

[21] *G. Leborgne.Notes de cours de l'ISIMA, Problèmes d'évolution de type parabolique et hyperbolique, théorie spectrale, éléments nis,et condition inf-sup , 3 janvier 2021,troisième année, http ://www.isima.fr/ leborgne*

[22] *S. Maingot et D.Manceau, Théorie spectrale, Université de Harve, 2011.*

[23] *E. Matheron, Topologie, Analyse Fonctionnelle, notes de cours, 2008-2009.*

[24] *B. Maurey, Analyse fonctionnelle et théorie spectrale, MT404, 2001-2002.*

[25] *M. Nadir, Cours d'analyse fonctionnelle, Université de M'sila, 2004.*

[26] *M.Nadir, Operators Theory Courses, université de M'sila, 2017. http ://www.mostefanadir.com/Operators%20Theory.ht*

[27] *M.Nadir, Functional Analysis Courses, université de M'sila, 2017. http ://www.mostefanadir.com/Functional%20Analysis.htm*

[28] *O. Noura, Spectre étendu d'un opérateur et quelques applications (Mémoire magister, Université Hamma Lakhdar D'Eloued), 2014-2015.*

[29] *M.Saïdi Soumia,Cours sur La théorie spectrale des opérateurs,Master Analyse Fonctionnelle,2016-2017.*

[30] *S. Campanato, Proprietà di inclusione per spazi di Morrey, Ricerche Mat. 12 (1963), 67–86.*

[31] *S. Campanato, Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17 (1963), 175–188.*

[32] *V. I. Burenkov and H. V. Guliyev, Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces. Studia Math. 163(2004), No. 2, 157-176.*

[33] *V. Kokilashvili and S. Samko, Maximal and fractional operators in weighted $L^{p(x)}$ spaces. Rev. Mat. Iberoamericana 20(2004), No. 2, 493-515.*

[34] *V. Kokilashvili and S. Samko, Maximal and fractional operators in weighted $L^{p(x)}$ sapces. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 129(2002), 145-149.*

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons intéresse en particulier à l'étude d'une classe importante des opérateurs linéaires bornés, qui s'appelle l'opérateur de Hilbert-schmidt .

Où nous avons commencé par quelques préliminaires sur les opérateurs linéaires bornés, et on a donné quelques classes des opérateurs . Nous avons introduit les notions fondamentales. Ensuite, on présente la définition d'opérateur compact et on a donné quelques propriétés principales.

En fin, on a conclut par introduire le théorème de diagonalisation d'un opérateurs de Hilbert-Schmidt et on a donné quelques exemple.

Mots clés: Espace de Hilbert, Opérateur linéaire borné, compact, adjoint d’un opérateur

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة صنف هام من أصناف المؤثرات الخطية المحدودة التي تسمى

عامل هيلبرت شميدت حيث بدأنا ببعض التعريفات الأولية حول المؤثرات الخطية المحدودة، وقد قدمنا بعض اصناف المؤثرات وخصائصها ثم انطلقنا لبعض تعريفات حول المؤثرات المتراصة وبعض الخواص الاساسية .

أخيرًا، اختتمنا بتقديم نظرية القطر لمشغل هيلبرت شميدت وأعطينا بعض الأمثلة .

Abstract

In this memory, we had particularly interested in the study of an important Where we started with some preliminaries on bounded linear operators, and we gave some classes of operators. We introduced the fundamental notions. Then we present the definition of compact operator and we give some main properties.

Finally, we conclude by introducing the diagonalization theorem of a Hilbert-Schmidt operator and we give some examples.

Keywords : Hilbert space, bounded linear operator, compact, adjoint of an operator.