

Table des matières

0.1	Introduction	2
1	Notations et préliminaires	3
1.1	Opérateurs linéaires bornés	4
1.2	Les espaces de Banach classique $C(K)$, L^p et $\ell_p(1 \leq p \leq \infty)$	6
1.3	Espaces de suites à valeur d'un espace de Banach	8
1.4	Idéal des opérateurs linéaires	8
1.5	Les opérateurs p -sommants	10
2	Idéal des opérateurs (p, σ)-continus	13
2.1	Les suites faiblement (p, σ) -sommables	14
2.2	Les opérateurs (p, σ) -continus et théorème de domination	18
2.3	Caractérisation par les suites faiblement (p, σ) -sommable.	26
3	Factorisation des opérateurs (p, σ)-continus	29
3.1	Théorème de Dvoretzky-Rogers	29
3.2	Construction de l'espace $L_{p,\sigma}(\eta)$	30
3.3	Théorème de factorisation	34

0.1 Introduction

En 1987, Jarchaw et Matter introduit une procédure générale d'interpolation pour créer un nouvel idéal linéaire à partir de deux idéaux linéaires. Par la suite, celui-ci définit l'idéal linéaire $\Pi_{p,\sigma}$ des opérateurs linéaires (p, σ) -continus, où $1 \leq p < \infty$ et $0 \leq \sigma < 1$, à l'aide de cette procédure. Cet idéal doit être compris entre les opérateurs linéaires p -sommants et les opérateurs linéaires continus préservant certaines des propriétés caractéristiques de la première classe. En 2012 Dahia, Achour et Sánchez Pérez ont traité le problème de factorisation de ces opérateurs travers l'espace $L_{p,\sigma}$. L'objectif de notre mémoire est l'étude détailler de l'idéal de ces opérateurs.

Notre travail se divise en trois chapitres. Le chapitre 1 est un rappel sur les opérateurs linéaires bornés, les espaces de Banach classiques et quelques notions sur les idéaux des opérateurs linéaires.

Dans le deuxième chapitre, on donne une étude générale sur les opérateurs linéaires (p, σ) -continus.

Le troisième chapitre représente le théorème de factorisation de ces opérateurs.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Nous rappellerons les résultats dont nous aurons besoin au fil de notre travail concernant les opérateurs linéaires bornés, les idéaux linéaires en general et en particulier les opérateurs p -sommants.

1.1 Opérateurs linéaires bornés

Espace de Banach

Un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé complet. Autrement dit X est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente est une série convergente.

La boule unité fermée de l'espace X est définie par

$$B_X = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Opérateur linéaire borné

Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ entre deux espaces de Banach est dit borné s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|Tx\| \leq C \|x\|, \text{ pour tout } x \in X.$$

Dans ce cas, pour tout $x \in X$, on définit

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf \{C : \|Tx\| \leq C \|x\|\} \\ &= \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de X dans Y qui est un espace de Banach sur $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ muni de la norme définie par (1.1).

Le dual topologique

L'espace des formes linéaires continues sur X est dit le dual topologique de X , noté X^* , i.e $(X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K}))$. Pour $x^* \in X^*$ et $x \in X$ on notera généralement $\langle x, x^* \rangle$ au lieu de $x^*(x)$.

La propriété suivante, que nous énonçons sans démonstration, est une conséquence du théorème de Hahn-Banach sur le prolongement des formes linéaires.

Proposition 1.1.1 [4]

Soit X un espace de Banach. Pour tout $x \in X$ on a

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle|. \quad (1.2)$$

Ceci suggère la définition suivante.

Définition 1.1.2 Soit X un espace de Banach. On dit qu'un sous-ensemble K de B_{X^*} est normant si

$$\|x\| = \sup_{x^* \in K} |\langle x, x^* \rangle|, \text{ pour tout } x \in X. \quad (1.3)$$

L'adjoint d'un opérateur linéaire borné

Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, l'opérateur adjoint de T est l'unique opérateur linéaire borné $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ définie par

$$T^*(y^*)(x) = y^*(Tx) \text{ i.e. } \langle x, T^*y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle$$

pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$.

De plus on a $\|T\| = \|T^*\|$ et $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ pour tout $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

Isomorphisme, isométrie

L'application linéaire $T : X \rightarrow Y$ est dite isomorphisme si T est bijective continue et T^{-1} continue.

De plus si $\|T(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$, on dit que T est une isométrie.

Si l'isomorphisme $T : X \rightarrow T(X)$ vérifie $\|T(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$, on dit que T est une isométrie injective et on écrit $T : X \hookrightarrow Y$.

Espace de Banach réflexif

Soit X un espace de Banach et soit X^* son dual topologique. On définit l'espace bidual X^{**} de X comme étant l'espace dual de X^* .

Il existe une application linéaire canonique $k_X : X \rightarrow X^{**}$ associant à $x \in X$ la forme linéaire $k_X(x) : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$k_X(x)(x^*) = \langle k_X(x), x^* \rangle := \langle x, x^* \rangle$$

pour toute forme linéaire $x^* \in X^*$. Cette définition entraîne que l'application linéaire $k_X : X \longrightarrow X^{**}$ est une isométrie, en effet, pour tout $x \in X$ on a

$$\|k_X(x)\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle k_X(x), x^* \rangle| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle| = \|x\|$$

(grâce au (1.2)). Alors on peut dire que k_X est une injection canonique et on écrit

$$k_X : X \hookrightarrow X^{**}.$$

En général l'application k_X n'est pas surjective.

Définition 1.1.3 Soit X un espace de Banach. On dit que X est réflexif si k_X est surjective. i.e. $k_X(X) = X^{**}$ isométriquement.

Lorsque X est réflexif on identifie implicitement X et X^{**} (à l'aide de l'isomorphisme k_X).

1.2 Les espaces de Banach classique $C(K)$, L^p et ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$)

Pour $p > 1$ on note p^* le conjugué de p défini par la formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. On pose $p^* = \infty$ si $p = 1$.

1) L'espace $C(K)$

Soit K un espace topologique compact. L'espace de Banach $C(K)$ est défini par :

$$C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{K} : \text{continue}\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_K |f(x)|, f \in C(K).$$

2) L'espace L^p

Soit $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = L^p(\mu) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$L^p(\mu)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$ nous avons $f \in L^\infty(\mu)$ s'il existe $C > 0$ telle que

$$|f| \leq C. \mu \text{ p.p.} \quad (1.4)$$

$L^\infty(\mu)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C, \text{ vérifier (1.4)}\}.$$

3) L'espace ℓ_p

Soit $1 \leq p < \infty$. On note par ℓ_p l'espace de Banach des suites scalaires p -sommables

$$\ell_p = \ell_p(\mathbb{K}) \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \|(x_i)_i\|_p := \left(\sum_{i \geq 0} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

pour $p = +\infty$

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \|(x_i)_i\|_\infty := \sup_i |x_i| < +\infty \right\}.$$

On définit aussi l'espace des suites scalaires convergent vers zéro

$$c_0 = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \lim_{i \rightarrow +\infty} |x_i| = 0 \right\}$$

cet espace est un sous-espace fermé de ℓ_∞ muni de la norme sup.

Inégalité de Hölder généralisé

Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n$ deux suites finies d'éléments de X et $p, q, r \in [1, +\infty[$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^n (\|x_i\| \|y_i\|)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.5)$$

1.3 Espaces de suites à valeur d'un espace de Banach

Soient X et Y deux espaces de Banach.

1) On désignera par $\ell_p(X)$ l'espace de Banach des suites p -sommables d'éléments de X dont la norme est

$$\|(x_i)_i\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty,$$

et par $\ell_\infty(X)$ l'espace de Banach des suites bornées, normé par

$$\|(x_i)_i\|_\infty = \sup_i \|x_i\|.$$

2) On désignera par $c_0(X)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)_i$ d'éléments de X convergent vers 0. Notons que $c_0(X)$ est un sous-espace fermé de $\ell_\infty(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3) On désignera par $\ell_{p,\omega}(X)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)_i$ d'éléments de X faiblement p -sommables, c'est à dire des suites $(x_i)_i$ vérifiant

$$(\langle x_i, x^* \rangle)_i \in \ell_p, \quad \text{pour tout } x^* \in X^*,$$

muni de la norme définie par

$$\|(x_i)_i\|_{p,\omega} := \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|(\langle x_i, x^* \rangle)_i\|_p,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \|(x_i)_i\|_{p,\omega} &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|(x_i)_i\|_{\infty,\omega} &= \|(x_i)_i\|_\infty. \end{aligned}$$

1.4 Idéal des opérateurs linéaires

Définition 1.4.1 [9]

Soit X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est de rang fini si

$\dim(\text{Im } T) < \infty$.

De plus T est de rang fini si et seulement si

$$T = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, x_i^* \rangle y_i$$

avec $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ et $y_1, \dots, y_n \in Y$. On écrit $T \in \mathcal{L}_f(X, Y)$.

Définition 1.4.2 [9]

Une classe \mathcal{I} des opérateurs linéaires bornés est dite idéal si

1) $\mathcal{I}(X, Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X, Y)$ et $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset \mathcal{I}(X, Y)$ pour tout espaces de Banach X et Y .

2) (Propriété d'idéal) si $u \in \mathcal{L}(E, X)$, $T \in \mathcal{I}(X, Y)$ et $v \in \mathcal{L}(Y, F)$, alors $v \circ T \circ u \in \mathcal{I}(E, F)$.

De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

i) $(\mathcal{I}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ est un espace normé (de Banach).

ii) $\|id_{\mathbb{K}}\| = 1$.

iii) $\|v \circ T \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|u\|$.

Alors $(\mathcal{I}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs linéaire.

Définition 1.4.3 Un idéal linéaire \mathcal{I} est dit fermé si $\mathcal{I}(X, Y)$ est fermé dans l'espace des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{L}(X, Y)$ pour tout espaces de Banach X et Y .

Définition 1.4.4 Un idéal linéaire \mathcal{I} est dit injectif s'il vérifie la propriété d'injectivité

$$i \circ T \in \mathcal{I}(X, Z) \implies T \in \mathcal{I}(X, Y)$$

où $i : Y \hookrightarrow Z$ est une isométrie injective. De plus on a

$$\|i \circ T\|_{\mathcal{I}} = \|T\|_{\mathcal{I}} \tag{1.6}$$

i.e. l'idéal ne dépend pas de l'espace d'arrivé.

Proposition 1.4.5 [9, Proposition 6.1.4]

Soit \mathcal{I} un idéal normé. Alors $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{I}}$ pour tout $T \in \mathcal{I}$.

Quelques exemples

1) Les opérateurs compacts

Un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dit *compact* si, pour toute suite bornée $(x_i)_i$ de X , la suite $(T(x_i))_i$ contient une sous-suite convergente. On note $\mathcal{K}(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires compacts de X dans Y .

2) Les opérateurs faiblement compacts

Un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dit *faiblement compact* si, pour toute suite bornée (x_i) de X , la suite $(T(x_i))_i$ contient une sous-suite faiblement convergente. On note $\mathcal{W}(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires faiblement compacts de X dans Y .

3) Les opérateurs complètement continus

Un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dit *complètement continu* s'il transforme une suite convergeant faiblement dans X vers 0 en une suite convergeant en norme vers 0 dans Y . On écrit $T \in \mathcal{V}(X, Y)$.

Proposition 1.4.6 [3] et [9]

Les trois classes \mathcal{K}, \mathcal{W} et \mathcal{V} sont des idéaux de Banach fermés et injectifs dont la norme de chaque idéal est la norme d'opérateur.

1.5 Les opérateurs p -sommants

Définition 1.5.1 Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $1 \leq p < \infty$ on dit que T est p -sommant, et on écrit $T \in \Pi_p(X, Y)$, s'il existe une constante $C > 0$ tel que pour toute $(x_i)_{i=1}^n \subset X$, on ait

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p, \omega}. \quad (1.7)$$

Pour tout $T \in \Pi_p(X, Y)$ on pose

$$\pi_p(T) = \inf \{C : \text{vérifiant (1.7)}\}.$$

Remarque 1.5.2 Il est clair que pour tout $T \in \Pi_p(X, Y)$ on a $\|T\| \leq \pi_p(T)$ puisque si on prend $n = 1$ dans (1.7) i.e $x_1 = \dots = x_n = x \in X$ on trouve

$$\|T(x)\| \leq \pi_p(T) \|x\|,$$

ce qui donne $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \leq \pi_p(T)$.

Proposition 1.5.3 [5, Page 38] $(\Pi_p, \pi_p(\cdot))$ est un idéal de Banach.

Pour les preuves des exemples suivants voir [5, Page 40].

Exemple 1.5.4 1) Soit K un espace compact et μ une mesure de probabilité régulière sur K . Alors l'injection canonique

$$j_p : C(K) \longrightarrow L_p(K, \mu)$$

est p -sommante de plus on a $\pi_p(j_p) \leq 1$.

2) Soient (Ω, Σ, μ) un espace de mesure finie et $1 \leq p < \infty$. Alors l'inclusion canonique

$$i_p : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_p(\mu)$$

est p -sommant, avec $\pi_p(i_p) = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$.

Théorème 1.5.5 [5](caractérisation des opérateurs p -sommants)

Soient $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $1 \leq p < \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) $T \in \Pi_p(X, Y)$.

2) L'opérateur T transforme les suites faiblement p -sommables en des suites p -sommables, c'est-à-dire $(T(x_i))_i \in \ell_p(Y)$ pour toute $(x_i)_i \in \ell_{p,\omega}(X)$.

3) (*Domination de pietsch*) Il existe une probabilité régulière μ sur B_{X^*} , munie de la topologie $*$ -faible, et une constante $C > 0$ telle que

$$\|T(x)\| \leq C \|\langle x, \cdot \rangle\|_{L_p(B_{X^*}, \mu)} = C \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x, x^* \rangle|^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } x \in X; \quad (1.8)$$

4) (*Factorisation de Pietsch*). Il existe une probabilité régulière μ sur B_{X^*} , munie de la topologie $*$ -faible, un sous-espace S_p de $L_p(B_{X^*}, \mu)$ et un opérateur linéaire borné $\tilde{T} \in \mathcal{L}(S_p, Y)$ tel que

$$T = \tilde{T} \circ \tilde{j}_p \circ i_X.$$

Où $i_X : X \longrightarrow i_X(X) \subset C(B_{X^*})$ est isométrie injective définie par $i_X(x) = \langle x, \cdot \rangle$ et \tilde{j}_p est j_p restreint à $i(X)$. C'est-à-dire le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i_X \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\ i_X(X) & \xrightarrow{\tilde{j}_p} & S_p \\ \cap & & \cap \\ C(B_{X^*}) & \xrightarrow{j_p} & L_p(\mu). \end{array}$$

De plus on a

$$\pi_p(T) = \|\tilde{T}\| = \inf \{C : \text{vérifiant (1.8)}\}.$$

Chapitre 2

Idéal des opérateurs (p, σ) -continus

Nous rappellerons les résultats dont nous aurons besoin au fil de notre travail concernant les opérateurs linéaires bornés, les idéaux linéaires en general et en particulier les opérateurs p -sommants.

2.1 Les suites faiblement (p, σ) -sommables

Dans la suite on définit l'espace des suites, introduit par J.A. López et E.A. Sánchez Pérez dans [6], et qui a été utilisé pour trouver une caractérisation importante pour les opérateurs linéaires (p, σ) -continus.

Soient X un espace de Banach, $p \geq 1$ et $0 \leq \sigma < 1$.

Pour tout $(x_i)_{i=1}^{\infty} \subset X$ on pose

$$\delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (|\langle x_i, \varphi \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \quad (2.1)$$

Et

$$H_{p,\sigma}(X) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \subset X : \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^{\infty}) < \infty\}.$$

Pour les cas $\sigma = 1$, $p = +\infty$, pour tout $0 \leq \tau \leq 1$ et $1 \leq q \leq \infty$ on définit

$$\delta_{q1}((x_i)_{i=1}^n) = \delta_{\infty\tau}((x_i)_{i=1}^n) = \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| = \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\infty}.$$

Dans la suite on donne la définition d'une suite faiblement (p, σ) -sommable.

Définition 2.1.1 [6, Page 352]

On dira que la suite $(x_i)_{i=1}^{\infty} \subset X$ est faiblement (p, σ) -sommable si elle appartenant à l'espace vectoriel $\ell^{p\sigma}(X)$ engendré par l'ensemble $H_{p,\sigma}(X)$.

Lemme 2.1.2 Soient X un espace de Banach, $p \geq 1$ et $0 \leq \sigma < 1$. Alors pour tout $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(X)$ on a

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega} \leq \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^{\infty}) \leq \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\frac{p}{1-\sigma}}. \quad (2.2)$$

Démonstration. Soit $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(X)$

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega} &= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i \geq 1} |\langle \varphi, x_i \rangle|^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i \geq 1} (|\langle \varphi, x_i \rangle|^{1-\sigma} |\langle \varphi, x_i \rangle|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &\leq \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i \geq 1} (|\langle \varphi, x_i \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &= \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^{\infty}), \end{aligned}$$

alors

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega} \leq \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^\infty).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^\infty) &= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i \geq 1} (|\langle x_i, \varphi \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &\leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}}. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.3 *Soient X un espace de Banach, $p \geq 1$ et $0 \leq \sigma < 1$. Alors $\ell^{p\sigma}(X)$ est un espace vectoriel normé muni de la norme*

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,\sigma} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^k \delta_{p\sigma}((x_i^j)_{i=1}^\infty), (x_i)_{i=1}^\infty = \sum_{j=1}^k (x_i^j)_{i=1}^\infty, (x_i^j)_{i=1}^\infty \in H_{p,\sigma}(X), 1 \leq j \leq k \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.3)$$

Et on a les inclusions

$$\ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(X) \subset \ell^{p\sigma}(X) \subset \ell_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega}(X), \quad (2.4)$$

avec

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega} \leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,\sigma} \leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \quad (2.5)$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(X)$.

De plus cette norme vérifiée l'inégalité suivante,

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,\sigma} \leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^k \|(x_i^j)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}}^\sigma \cdot \|(x_i^j)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega}^{1-\sigma} \right\} \quad (2.6)$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(X)$ avec

$$(x_i)_{i=1}^\infty = \sum_{j=1}^k (x_i^j)_{i=1}^\infty, (x_i^j)_{i=1}^\infty \in H_{p,\sigma}(X), k \in \mathbb{N}$$

Démonstration. Soient $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell^{p\sigma}(X)$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $(x_i^j)_{i=1}^\infty \in H_{p,\sigma}(X)$, $j = 1, \dots, k$ tels que

$$(x_i)_{i=1}^\infty = \sum_{j=1}^k (x_i^j)_{i=1}^\infty \text{ et } \sum_{j=1}^k \delta_{p\sigma}((x_i^j)_{i=1}^\infty) \leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,\sigma} + \varepsilon$$

Si on utilise l'inégalité triangulaire et (2.2) on obtient

$$\begin{aligned}
\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega} &= \left\| \sum_{j=1}^k (x_i^j)_{i=1}^\infty \right\|_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega} \\
&\leq \sum_{j=1}^k \|(x_i^j)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega} \\
&\leq \sum_{j=1}^k \delta_{p\sigma}((x_i^j)_{i=1}^\infty) \\
&\leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p, \sigma} + \varepsilon, \text{ pour tout } \varepsilon > 0
\end{aligned}$$

Alors $\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega} \leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p, \sigma}$ ce qui donne $\ell^{p\sigma}(X) \subset \ell_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega}(X)$.

Si $\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p, \sigma} = 0$ on a $\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega} = 0$ ce qui implique que $(x_i)_{i=1}^\infty = 0$.

Pour l'autre inclusion, soit $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(X)$ d'après (2.2) on a

$$\delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^\infty) \leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}} < \infty.$$

Alors $(x_i)_{i=1}^\infty \in H_{p, \sigma}(X)$. Par la définition de $\|\cdot\|_{p, \sigma}$ on a

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p, \sigma} \leq \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^\infty) < \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}} < \infty$$

Par conséquent $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell^{p\sigma}(X)$ d'où

$$\ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(X) \subset \ell^{p\sigma}(X) \subset \ell_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega}(X)$$

Pour l'inégalité triangulaire, soient $(x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty \in \ell^{p\sigma}(X)$ et $\varepsilon > 0$, il existe des représentations $(x_i)_{i=1}^\infty = \sum_{j=1}^k (x_i^j)_{i=1}^\infty$ et $(y_i)_{i=1}^\infty = \sum_{j=1}^r (y_i^j)_{i=1}^\infty$ telles que $(x_i^j)_{1 \leq j \leq k}, (y_i^j)_{1 \leq j \leq r}$ dans $H_{p, \sigma}(X)$ avec

$$\sum_{j=1}^k \delta_{p\sigma}((x_i^j)_{i=1}^\infty) \leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p, \sigma} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^r \delta_{p\sigma}((y_i^j)_{i=1}^\infty) \leq \|(y_i)_{i=1}^\infty\|_{p, \sigma} + \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $(x_i)_{i=1}^\infty + (y_i)_{i=1}^\infty = \sum_{j=1}^{k+r} (z_i^j)_{i=1}^\infty$ telle que

$$z_i^j = \begin{cases} x_i^j & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ y_i^{j-k} & \text{si } k+1 \leq j \leq k+r \end{cases}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\|(x_i)_{i=1}^\infty + (y_i^j)_{i=1}^\infty\|_{p,\sigma} &\leq \sum_{j=1}^{k+r} \delta_{p\sigma} \left((z_i^j)_{i=1}^\infty \right) \\
&= \sum_{j=1}^k \delta_{p\sigma} \left((x_i^j)_{i=1}^\infty \right) + \sum_{j=k+1}^{r+k} \delta_{p\sigma} \left((y_i^{j-k})_{i=1}^\infty \right) \\
&= \sum_{j=1}^k \delta_{p\sigma} \left((x_i^j)_{i=1}^\infty \right) + \sum_{j=1}^r \delta_{p\sigma} \left((y_i^j)_{i=1}^\infty \right) \\
&\leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,\sigma} + \|(y_i)_{i=1}^\infty\|_{p,\sigma} + \varepsilon
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité triangulaire. Il est clair que $\|\lambda(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,\sigma} = |\lambda| \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,\sigma}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell^{p\sigma}(X)$.

Finalement montrons l'inégalité (2.6), pour tout $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(X)$ on a

$$\delta_{p\sigma} \left((x_i)_{i=1}^\infty \right) = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (|\langle x_i, \varphi \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}$$

et d'après l'inégalité de Hölder, où les exposants conjugués sont $\frac{1}{1-\sigma}$ et $\frac{1}{\sigma}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\delta_{p\sigma} \left((x_i)_{i=1}^\infty \right) &\leq \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, \varphi \rangle|^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{(1-\sigma)^2}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{(1-\sigma)\sigma}{p}} \\
&= \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega}^{1-\sigma} \cdot \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\frac{p}{1-\sigma}}^\sigma
\end{aligned}$$

■

Dans la proposition suivante, J.A. López et E.A. Sánchez Pérez donnent une description des éléments de $\hat{\ell}^{p\sigma}(X)$, le complété de $\ell^{p\sigma}(X)$.

Proposition 2.1.4 [6, Page 354] Soient X un espace de Banach et φ un élément de $\hat{\ell}^{p\sigma}(X)$. Alors il existe une suite $x^n = (x_i^n)_{i \geq 1}$ de $H_{p\sigma}(X)$ telle que

$$\sum_{n \geq 1} \delta_{p\sigma}(x^n) < \infty \text{ et } \varphi = \sum_{n \geq 1} x^n \text{ dans } \hat{\ell}^{p\sigma}(X)$$

De plus on a

$$\|\varphi\|_{\hat{\ell}^{p\sigma}(X)} = \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} \delta_{p\sigma}(x^n) \right\}$$

Où l'infimum porte sur toutes les représentations de la forme $\varphi = \sum_{n \geq 1} x^n$ dans $\hat{\ell}^{p\sigma}(X)$.

2.2 Les opérateurs (p, σ) -continus et théorème de domination

Dans la suite on donnent la définition d'un opérateur (p, σ) -continu

Définition 2.2.1 Soient X, Y deux espaces de Banach, $1 \leq p < \infty$ et $0 \leq \sigma < 1$. Un opérateur $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dit (p, σ) -continu s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ on a

$$\|(u(x_i))_{i=1}^n\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \leq C \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^n) \quad (2.7)$$

De plus

$$\pi_{p,\sigma}(u) = \inf \{C, \text{ vérifie l'inégalité (2.7)}\}$$

On note $\Pi_{p,\sigma}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires (p, σ) -continus. Il est clair que $\Pi_{p,0}(X, Y) = \Pi_p(X, Y)$

Remarque 2.2.2 Pour tout $u \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$ On a

$$\|u\| \leq \pi_{p,\sigma}(u). \quad (2.8)$$

En effet, si on pose $n = 1$ dans (2.7), on a pour tout $x \in X$

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq \pi_{p,\sigma}(u) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\langle x, \varphi \rangle|^{1-\sigma} \|x\|^\sigma \\ &= \pi_{p,\sigma}(u) \|x\| \end{aligned}$$

ce que implique que $\|u\| \leq \pi_{p,\sigma}(u)$.

Proposition 2.2.3 $(\Pi_{p,\sigma}(X, Y), \pi_{p,\sigma}(\cdot))$ est idéal de Banach

Démonstration. Soient $S, T \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$. Pour tout $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ on a

$$\begin{aligned} \|((T + S)(x_i))_{i=1}^n\|_{\frac{p}{1-\sigma}} &\leq \|(T(x_i))_{i=1}^n\|_{\frac{p}{1-\sigma}} + \|(S(x_i))_{i=1}^n\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \\ &\leq (\pi_{p,\sigma}(T) + \pi_{p,\sigma}(S)) \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^n) \end{aligned}$$

Donc $S + T \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$ et $\pi_{p,\sigma}(T + S) \leq \pi_{p,\sigma}(T) + \pi_{p,\sigma}(S)$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|((\lambda T)(x_i))_{i=1}^n\|_{\frac{p}{1-\sigma}} &= |\lambda| \| (T(x_i))_{i=1}^n \|_{\frac{p}{1-\sigma}} \\ &\leq |\lambda| \pi_{p,\sigma}(T) \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^n) \end{aligned}$$

Donc $\lambda T \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$ et $\pi_{p,\sigma}(\lambda T) \leq |\lambda| \pi_{p,\sigma}(T)$. D'autre part on a

$$\pi_{p,\sigma}(T) = \pi_{p,\sigma}\left(\frac{1}{\lambda} \lambda T\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \pi_{p,\sigma}(\lambda T)$$

ce qui donne $\pi_{p,\sigma}(\lambda T) \geq |\lambda| \pi_{p,\sigma}(T)$. Alors

$$\pi_{p,\sigma}(\lambda T) = |\lambda| \pi_{p,\sigma}(T)$$

Pour le cas $\lambda = 0$ l'égalité est évidente.

Soit $u \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$ tel que $\pi_{p,\sigma}(u) = 0$. Par (2.8) on a $\|u\| \leq \pi_{p,\sigma}(u) = 0$ ce qui implique $\|u\| = 0$, alors $u = 0$. Finalement $\Pi_{p,\sigma}(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$ de plus $\pi_{p,\sigma}(\cdot)$ est une norme sur $\Pi_{p,\sigma}(X, Y)$. Maintenant montrons que $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$, pour ceci il suffit de montrer cette inclusion pour les opérateurs de la forme

$$u(x) = \langle x, x^* \rangle y : x^* \in X^*, y \in Y, x \in X \quad (2.9)$$

puisque pour tout $f \in \mathcal{L}_f(X, Y)$ on a

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \cdot, x_i^* \rangle$$

avec $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ et $(x_i^*)_{i=1}^n \subset X^*$.

Pour tout $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle y|_{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}, \quad 0 \neq x^* \in X^* \\
&= \|y\| \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|_{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\
&= \|y\| \|x^*\| \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\langle x_i, x^* \rangle}{\|x^*\|} \right|_{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \quad \text{on pose } \xi = \frac{x^*}{\|x^*\|} \in B_{X^*} \\
&\leq \|y\| \|x^*\| \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n (|\langle x_i, \xi \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}
\end{aligned}$$

Donc $u \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$ et $\pi_{p,\sigma}(u) \leq \|y\| \|x^*\|$. Par (2.8) on a

$$\|y\| \|\varphi\| = \|u\| \leq \pi_{p,\sigma}(u)$$

ce que donne $\|u\| = \pi_{p,\sigma}(u)$.

Soient $u \in \mathcal{L}(E, X)$, $T \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$, $v \in \mathcal{L}(Y, F)$ et $(e_i)_{i=1}^n \subset E$

$$\begin{aligned}
\|(v \circ T \circ u(e_i))_{i=1}^n\|_{\frac{p}{1-\sigma}} &\leq \|v\| \|(T \circ u(e_i))_{i=1}^n\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \\
&\leq \|v\| \pi_{p,\sigma}(T) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n (|\langle u(e_i), \varphi \rangle|^{1-\sigma} \|u(e_i)\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\
&\leq \|v\| \pi_{p,\sigma}(T) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n (|\langle e_i, u^*(\varphi) \rangle|^{1-\sigma} \|u\|^\sigma \|e_i\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\
&= \|v\| \pi_{p,\sigma}(T) \|u\| \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\left| \left\langle e_i, \frac{u^*(\varphi)}{\|u\|} \right\rangle \right|^{1-\sigma} \|e_i\|^\sigma \right)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\
&\leq \|v\| \pi_{p,\sigma}(T) \|u\| \delta_{p\sigma}((e_i)_{i=1}^n)
\end{aligned}$$

Donc

$$v \circ T \circ u \in \Pi_{p,\sigma}(E, F) \text{ et } \pi_{p,\sigma}(v \circ T \circ u) \leq \|v\| \pi_{p,\sigma}(T) \|u\|.$$

Pour tout $(\lambda_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{K}$. Puisque $\ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(\mathbb{K}) = \ell_{\frac{p}{1-\sigma},\omega}(\mathbb{K})$ avec $\|\cdot\|_{\frac{p}{1-\sigma}} = \|\cdot\|_{\frac{p}{1-\sigma},\omega}$ et d'après (2.2) on a

$$\|id_{\mathbb{K}}((\lambda_i)_{i=1}^n)\|_{\frac{p}{1-\sigma}} = \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_{\frac{p}{1-\sigma}} = \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_{\frac{p}{1-\sigma},\omega} \leq \delta_{p\sigma}((\lambda_i)_{i=1}^n)$$

Donc $\pi_{p,\sigma}(id_{\mathbb{K}}) \leq 1$. Et

$$1 = \|id_{\mathbb{K}}\| \leq \pi_{p,\sigma}(id_{\mathbb{K}}) \leq 1$$

donc $\pi_{p,\sigma}(id_{\mathbb{K}}) = 1$. En fin nous montrons que $(\Pi_{p,\sigma}(X, Y), \pi_{p,\sigma}(\cdot))$ est complet. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suit de Cauchy dans $\Pi_{p,\sigma}(X, Y)$. Soit $\varepsilon > 0$ alors existe N tel que

$$\pi_{p,\sigma}(u_n - u_k) < \varepsilon \text{ pour tout } n, k > N.$$

D'après (2.8),

$$\|u_n - u_k\| \leq \pi_{p,\sigma}(u_n - u_k) < \varepsilon,$$

alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(X, Y)$, donc il existe $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $\|u_n - u\| \rightarrow 0$. L'opérateur $u_n - u_k$ est (p, σ) -continu, alors pour tout $(x_i)_{i=1}^m \subset X$

$$\begin{aligned} \|((u_n - u_k)(x_i))_{i=1}^m\|_{\frac{p}{1-\sigma}} &\leq \pi_{p,\sigma}(u_n - u_k) \delta((x_i)_{i=1}^m) \\ &\leq \varepsilon \delta((x_i)_{i=1}^m), \end{aligned}$$

pour $k \rightarrow +\infty$ on obtient ,

$$\|((u_n - u)(x_i))_{i=1}^m\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \leq \varepsilon \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^m) \text{ pour tout } n \geq N.$$

D'où $(u_n - u) \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$ avec

$$\pi_{p,\sigma}(u_n - u) < \varepsilon, \text{ pour tout } n \geq N.$$

Par consequence $(u_n)_n$ est convergent vers $u \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$, car $u = -(u_n - u) + u_n \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$. ■

Dans la suite nous donnons le théorème de domination de Pietsch concernant les opérateurs linéaires (p, σ) -continus

Théorème 2.2.4 [7, Page 197] Soient X, Y deux espaces de Banach, $1 \leq p < \infty, 0 \leq \sigma < 1$ et $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur linéaire borné. Alors les affirmations suivantes sont

équivalentes

1) $u \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$

2) Il existe une constante $C > 0$ et une probabilité de Radon μ sur B_{X^*} muni de la topologie \ast -faible, telles que

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} (|\langle x^*, x \rangle|^{1-\sigma} \|x\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}, \text{ pour tout } x \in X \quad (2.10)$$

Démonstration. 2) \implies 1)

Pour tout $(x_i)_{i=1}^n \subset X$, il existe une constante $C > 0$ et une probabilité de Radon μ sur B_{X^*} telles que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^{\frac{p}{1-\sigma}} &\leq C^{\frac{p}{1-\sigma}} \left(\int_{B_{X^*}} \sum_{i=1}^n (|\langle x^*, x_i \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} d\mu(x^*) \right) \\ &\leq C^{\frac{p}{1-\sigma}} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n (|\langle x_i, \varphi \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right) \end{aligned}$$

Donc $u \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$

1) \implies 2)

On considère les ensembles

$$F_1 = \left\{ f \in C(B_{X^*}), \sup_{x^* \in B_{X^*}} f(x^*) < 1 \right\},$$

et

$$F_2 = \text{cov} \left\{ f \in C(B_{X^*}), f(x^*) = \|x\|^{\frac{\sigma p}{1-\sigma}} |\langle x^*, x \rangle|^p \text{ avec } \|u(x)\| = C \right\}$$

Il est clair que F_1 et F_2 sont des ensembles convexes et F_1 est ouvert. On a $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, en effet si $f \in F_2$ alors pour tout $x^* \in B_{X^*}$, il existe $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $\|u(x_i)\| = C$ et

$$f(x^*) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \|x_i\|^{\frac{\sigma p}{1-\sigma}} |\langle x^*, x_i \rangle|^p.$$

Dans ce cas $\sup_{x^* \in B_{X^*}} f(x^*) \geq 1$ car

$$\begin{aligned}
\sup_{x^* \in B_{X^*}} f(x^*) &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n \alpha_i (\|x_i\|^\sigma |\langle x^*, x_i \rangle|^{1-\sigma})^{\frac{p}{1-\sigma}} \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n \left(\left\| \alpha_i^{\frac{1-\sigma}{p}} x_i \right\|^\sigma \left| \left\langle x^*, \alpha_i^{\frac{1-\sigma}{p}} x_i \right\rangle \right|^{1-\sigma} \right)^{\frac{p}{1-\sigma}} \\
&= \delta_{p\sigma} ((\alpha_i^{\frac{1-\sigma}{p}} x_i)_{i=1}^n) \\
&\geq \frac{1}{C^{\frac{p}{1-\sigma}}} \sum_{i=1}^n \left\| u \left(\alpha_i^{\frac{1-\sigma}{p}} x_i \right) \right\|^{\frac{p}{1-\sigma}} \\
&= \frac{1}{C^{\frac{p}{1-\sigma}}} \sum_{i=1}^n \alpha_i C^{\frac{p}{1-\sigma}} = 1
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, ils existent un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ et une forme linéaire ψ sur $C(B_{X^*})$ de norme 1 ($\|\psi\| = 1$) telle que pour tout $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$ on a

$$\psi(f_1) \leq \lambda \leq \psi(f_2)$$

Il est clair que si $f \in C(B_{X^*})$ avec $f \leq 0$ alors $f \in F_1$, donc on peut écrire $\psi(nf) \leq \lambda$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $f \in C(B_{X^*})$ avec $f \leq 0$. Alors $\psi(f) \leq \frac{\lambda}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ce qui donne

$$\psi(f) \leq 0, \quad f \in C(B_{X^*}) \text{ avec } f \leq 0.$$

Il en résulte que ψ est une forme linéaire positive sur $C(B_{X^*})$.

Par le théorème de représentation de Riesz pour les formes linéaires positives sur $C(B_{X^*})$, alors il existe une probabilité de Radon μ définie sur B_{X^*} muni de la topologie *-faible telle que

$$\psi(f) = \int_{B_{X^*}} f(x^*) d\mu(x^*)$$

Soit $(f_n)_{n \geq 1} \in F_1$ définie par $f_n = 1 - \frac{1}{n}$. Donc

$$\int_{B_{X^*}} f_n(x^*) d\mu(x^*) = 1 - \frac{1}{n} \leq \lambda, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Ce qui implique que $\lambda \geq 1$. Ainsi, pour la fonction $f = (\|x\|^\sigma |\langle \cdot, x \rangle|^{1-\sigma})^{\frac{p}{1-\sigma}} \in F_2$ avec $\|u(x)\| = C$, on a

$$\int_{B_{X^*}} (\|x\|^\sigma |\langle x^*, x \rangle|^{1-\sigma})^{\frac{p}{1-\sigma}} d\mu(x^*) \geq 1 = \left(\frac{\|u(x)\|}{C} \right)^{\frac{p}{1-\sigma}}.$$

Donc

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} (|\langle x^*, x \rangle|^{1-\sigma} \|x\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}, \text{ pour tout } x \in X$$

Ce qui termine la preuve. ■

Dans la suite on donne la relation d'inclusion pour les opérateurs (p, σ) -continus

Corollary 2.2.5 *Pour tout $0 \leq \sigma < 1$ et $1 \leq p \leq q < +\infty$ on a*

$$\Pi_{p,\sigma}(X, Y) \subset \Pi_{q,\sigma}(X, Y).$$

De plus $\pi_{q,\sigma}(T) \leq \pi_{p,\sigma}(T)$ pour tout $T \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$.

Démonstration. Soit $T \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$ alors pour tout $x \in X$ on a

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &\leq \pi_{p,\sigma}(T) \left(\int_{B_{X^*}} (|\langle x^*, x \rangle|^{1-\sigma} \|x\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &\leq \pi_{p,\sigma}(T) \left(\int_{B_{X^*}} (|\langle x^*, x \rangle|^{1-\sigma} \|x\|^\sigma)^{\frac{q}{1-\sigma}} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1-\sigma}{q}} \end{aligned}$$

Alors

$$T \in \Pi_{q,\sigma}(X, Y) \text{ et } \pi_{q,\sigma}(T) \leq \pi_{p,\sigma}(T)$$

■

Dans la suite on donne la relation entre ces opérateurs et les opérateurs linéaire p -sommants.

Définition 2.2.6 *Soient $1 \leq p, q < +\infty$ et X, Y deux espaces de Banach. Un opérateur $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ est (p, q) -sommant s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ on a*

$$\|(u(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,\omega} \quad (2.11)$$

De plus

$$\pi_{p,q}(u) = \inf \{C : \text{vérifie l'inégalité (2.11)}\}$$

On not $\Pi_{p,q}(X, Y) = \{u : X \longrightarrow Y, \text{ opérateur linéaire } (p, q)\text{-sommant}\}$.

Dans la proposition suivante Matter [7, Proposition 4.2] a montré que tout opérateur p -sommant est un opérateurs (p, σ) -continu.

Proposition 2.2.7 Soient $p \geq 1, 0 \leq \sigma < 1$ et X, Y deux espaces de Banach, alors

$$\Pi_{\frac{p}{1-\sigma}}(X, Y) \subset \Pi_{p,\sigma}(X, Y) \subset \Pi_{\frac{p}{1-\sigma},p}(X, Y)$$

Démonstration. Soit $u \in \Pi_{\frac{p}{1-\sigma}}(X, Y)$ un opérateur linéaire $\frac{p}{1-\sigma}$ -sommant, alors il existe une probabilité de Radon μ sur B_{X^*} muni de la topologie $*$ -faible telle que

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq \pi_{\frac{p}{1-\sigma}}(u) \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x \rangle|^{\frac{p}{1-\sigma}} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}, \forall x \in X \\ &\leq \pi_{\frac{p}{1-\sigma}}(u) \left(\int_{B_{X^*}} (|\langle x^*, x \rangle|^{1-\sigma} \|x\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \end{aligned}$$

Donc, d'après le Théorème 2.2.4 on a $u \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$ et $\pi_{p,\sigma}(u) \leq \pi_{\frac{p}{1-\sigma}}(u)$.

Pour la deuxième inclusion, si $u \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$, en vertu de l'inégalité

$$\left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq \pi_{p,\sigma}(u) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n (|\langle x_i, \varphi \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}$$

Sachant que $\|x_k\| \leq \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega}$ pour tout $1 \leq k \leq n$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} &\leq \pi_{p,\sigma}(u) \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega}^\sigma \cdot \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n (|\langle x_i, \varphi \rangle|^p) \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &= \pi_{p,\sigma}(u) \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega} \end{aligned}$$

Ce qui implique que $u \in \Pi_{\frac{p}{1-\sigma},p}(X, Y)$ et $\pi_{\frac{p}{1-\sigma},p}(u) \leq \pi_{p,\sigma}(u)$. ■

Corollary 2.2.8 Pour tout $p \geq 1$ et $0 \leq \sigma < 1$ on a $\Pi_p(X, Y) \subset \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$

Démonstration. Comme conséquence du théorème d'inclusion pour les opérateurs p -sommants, puisque $p \leq \frac{p}{1-\sigma}$, on a

$$\Pi_p(X, Y) \subset \Pi_{\frac{p}{1-\sigma}}(X, Y) \subset \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$$

■

2.3 Caractérisation par les suites faiblement (p, σ) -sommable.

Pour tout opérateur $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ on peut associer un opérateur $\hat{u} : X^{\mathbb{N}} \rightarrow Y^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\hat{u}((x^n)_{n \geq 1}) = (u(x^n))_{n \geq 1},$$

pour toute suite $(x^n)_{n \geq 1}$ dans X .

Pietsch dans [8, Proposition 4.2] a montré que l'opérateur u est p -sommant si et seulement si, il transforme toute suite faiblement p -sommable en une suite p -sommable, autrement dit $u \in \Pi_p(X, Y)$ si et seulement si $\hat{u}(\ell_{p,w}(X)) \subset \ell_p(Y)$.

Par la densité de $\ell^{p\sigma}(X)$ dans $\hat{\ell}^{p\sigma}(X)$, nous confirme que si $\phi \in \hat{\ell}^{p\sigma}(X)$ il existe $(x_i^n)_{i \geq 1} \in \ell^{p\sigma}(X)$ telle que $\phi = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_i^n)$, alors on peut définir $\hat{u} : \hat{\ell}^{p\sigma}(X) \rightarrow Y^{\mathbb{N}}$ comme suite,

$$\hat{u}((x^n)_{n \geq 1}) = (u(x^n))_{n \geq 1} \text{ pour tout } (x^n)_{n \geq 1} \in \ell^{p\sigma}(X)$$

et

$$\hat{u}(\phi) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_i^n) \right)_{i \geq 1} \text{ avec } \phi = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_i^n).$$

Théorème 2.3.1 [6, Théorème 1.7] *Soient $p \geq 1, 0 \leq \sigma < 1$ et X, Y deux espaces de Banach. Alors les deux propriétés suivantes son équivalentes*

1) $u \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$

2) $\hat{u}(\hat{\ell}^{p\sigma}(X)) \subset \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(Y)$.

Autrement dit, l'opérateur u est (p, σ) -continu si et seulement si, il transforme toute suite faiblement (p, σ) -sommable en une suite $\frac{p}{1-\sigma}$ -sommable.

Démonstration. Notons en premier lieu que si $(x_i)_{i \geq 1} \in H_{p,\sigma}(X)$ et $u \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$.

Pour $h \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^h \|u(x_i)\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq \pi_{p,\sigma}(u) \cdot \delta_{p\sigma}((x_i)_{1 \leq i \leq h})$$

Par passage à la limite quand $h \rightarrow +\infty$ on obtient

$$\|(u(x_i)_{i \geq 1})\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \leq \pi_{p,\sigma}(u) \cdot \delta_{p\sigma}((x_i)_{i \geq 1})$$

Soient maintenant $(x_i)_{i \geq 1} \in \ell^{p\sigma}(X)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une représentation $(x_i)_{i \geq 1} = \sum_{j=1}^k (x_i^j)_{i \geq 1}$ avec $(x_i^j)_{i \geq 1} \in H_{p,\sigma}(X)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{j=1}^k \delta_{p\sigma}((x_i^j)_{i \geq 1}) \leq \|(x_i)_{i \geq 1}\|_{p,\sigma} + \varepsilon$.

Alors on a

$$\begin{aligned} \|(u(x_i)_{i \geq 1})\|_{\frac{p}{1-\sigma}} &= \left\| \sum_{j=1}^k (u(x_i^j))_{i \geq 1} \right\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \\ &\leq \sum_{j=1}^k \|(u(x_i^j))_{i \geq 1}\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \\ &\leq \pi_{p,\sigma}(u) \sum_{j=1}^k \delta_{p\sigma}((x_i^j)_{i \geq 1}) \\ &\leq \pi_{p,\sigma}(u) \left(\|(x_i)_{i \geq 1}\|_{p,\sigma} + \varepsilon \right), \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\|(u(x_i)_{i \geq 1})\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \leq \pi_{p,\sigma}(u) \cdot \|(x_i)_{i \geq 1}\|_{p,\sigma}$$

Donc l'opérateur $\bar{u} : \ell^{p\sigma}(X) \rightarrow \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(Y)$ avec

$$\bar{u}((x_i)_{i \geq 1}) = (u(x_i))_{i \geq 1}$$

est bien définie et continu avec une norme $\leq \pi_{p,\sigma}(u)$, sa prolongement par continuité à $\hat{\ell}^{p\sigma}(X)$ est l'application $\hat{u} : \hat{\ell}^{p\sigma}(X) \rightarrow \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(Y)$ c'est-à-dire $\hat{u}(\hat{\ell}^{p\sigma}(X)) \subset \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(Y)$.

(2) \implies (1) Tout d'abord, montrons à l'aide du théorème de graphe fermé que \hat{u} est continu.

Pour cela considérons la suite $(\varphi_n, \hat{u}(\varphi_n))_{n \geq 1} \subset \hat{\ell}^{p\sigma}(X) \times \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(Y)$ convergente vers $(\varphi, (y_i)_{i \geq 1}) \in \hat{\ell}^{p\sigma}(X) \times \ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(Y)$.

Par Proposition 2.1.4 on a

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{+\infty} x_i^{n_j}, (x_i^{n_j}) \in H_{p,\sigma}(X), \varphi = \sum_{j=1}^{+\infty} x_i^j, (x_i^j)_{i \geq 1} \in H_{p,\sigma}(X)$$

Soit $\hat{J} : \hat{\ell}^{p\sigma}(X) \rightarrow \ell_{\frac{p}{1-\sigma},\omega}(X)$ l'extension de l'injection canonique $J : \ell^{p\sigma}(X) \rightarrow \ell_{\frac{p}{1-\sigma},\omega}(X)$.

La suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ tends vers φ dans $\hat{\ell}^{p\sigma}(X)$, alors par l'opérateur \hat{J} on obtient qu'elle est

aussi dans $\ell_{\frac{p}{1-\sigma}, \omega}(X)$.

Pour chaque $i \geq 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} x_i^{n_j} = \sum_{j=1}^{+\infty} x_i^j$. Comme u est continu on trouve

$$\left\| \sum_{j=1}^{+\infty} u(x_i^{n_j} - x_i^j) \right\| \leq \|u\| \left\| \sum_{j=1}^{+\infty} (x_i^{n_j} - x_i^j) \right\|, \forall i \geq 1,$$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{j=1}^{+\infty} (x_i^{n_j} - x_i^j) \right\| = 0$ on a

$$y_i = \sum_{j=1}^{+\infty} u(x_i^{n_j}) = \sum_{j=1}^{+\infty} u(x_i^j), \forall i \geq 1$$

Et en fin, par la définition de l'opérateur \hat{u} nous pouvons conclure que $(y_i)_{i \geq 1} = \hat{u}(\varphi)$, par conséquent le graphe de \hat{u} est fermé alors \hat{u} est continu.

Soit $(x_i)_{i=1}^n \in H_{p,\sigma}(X)$, la continuité de \hat{u} entraîne

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} &= \|\hat{u}((x_i)_{i=1}^n)\|_{\frac{p}{1-\sigma}} \\ &\leq \|\hat{u}\| \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\sigma} \\ &\leq \|\hat{u}\| \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^n) \end{aligned}$$

Donc u est (p, σ) -continu et en plus $\pi_{p\sigma}(u) \leq \|\hat{u}\|$. ■

Chapitre 3

Factorisation des opérateurs

(p, σ) -continus

3.1 Théorème de Dvoretzky-Rogers

Dans la proposition suivante, nous démontrons le théorème de Dvoretzky-Rogers pour les opérateurs linéaires (p, σ) -continus .

Proposition 3.1.1 *Soit $1 \leq p < \infty$ et $0 \leq \sigma < 1$. Un espace de Banach X est de dimension fini si et seulement si l'identité $id_X : X \rightarrow X$ est (p, σ) -continu.*

Démonstration. Si X est de dimension finie, il est clair que $id_X \in \Pi_{p,\sigma}(X, X)$ car id_X est un opérateur de rang fini. Inversement, supposons que id_X est (p, σ) -continu. Alors d'après le théorème de domination (Théorème 2.2.4) il existe constant une $C > 0$ et une probabilité de Radon μ sur B_{X^*} telle que pour tout $x \in X$ on a

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq C \left(\int_{B_{X^*}} (|\phi(x)|^{1-\sigma} \|x\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} d\mu(\phi) \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &= C \|x\|^\sigma \left(\int_{B_{X^*}} |\phi(x)|^p d\mu(\phi) \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} . \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|x\| \leq C^{1/1-\sigma} \left(\int_{B_{X^*}} |\phi(x)|^p d\mu_j(\phi) \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Par conséquent, d'après le théorème de domination de Pietsch id_X est p -sommant et d'après théorème de Dvoretzky-Rogers pour les opérateurs p -sommant X est de dimension fini. ■

Remarque 3.1.2 De la proposition précédente et l'inclusions (2.4) on a $\ell_{\frac{p}{1-\sigma}}(X) = \ell^{p\sigma}(X)$ si seulement si l'espace de Banach X est de dimension finie .

3.2 Construction de l'espace $L_{p,\sigma}(\eta)$

Maintenant on donne le théorème de factorisation de Pietsch pour les opérateurs (p, σ) -continus, on utilise les espaces $C(B_{X^*})$ et $L^p(\eta)$, où η est une mesure de Radon sur B_{X^*} .

Nous utilisons les propositions suivantes dans la suite.

Proposition 3.2.1 Soit ν une semi-norme sur l'espace vectoriel X et soit

$$S = \{x \in X : \nu(x) = 0\}.$$

Alors S un sous-espace vectoriel de X . De plus X/S est un espace normé muni de la norme définie par

$$N([x]) = \nu(x)$$

pour tout $x \in X$, où $[x] \in X/S$ est la classe d'équivalence de $x \in X$.

Démonstration. Pour tout $x, y \in S$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$\nu(x + \alpha y) \leq \nu(x) + |\alpha| \nu(y) = 0$$

donc $x + \alpha y \in S$. Ainsi S est un sous-espace vectoriel de X . Pour tout $z \in [x]$ nous obtenons $z - x \in S$, i.e. $\nu(z - x) = 0$. ceci donne $\nu(z) = \nu(x)$ car $|\nu(z) - \nu(x)| \leq \nu(z - x) = 0$, posons $N([x]) = \nu(x)$ nous vérifions que N est une norme sur X/S .

i) Si $N([x]) = 0$ alors $\nu(x) = 0$ pour tout $x \in [x]$. Par conséquent $[x] = [0]$.

ii) $N(\alpha[x]) = N([\alpha x]) = \nu(\alpha x) = |\alpha| \nu(x) = |\alpha| N([x])$.

iii) $N([x] + [y]) = N([x + y]) = \nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y) = N([x]) + N([y])$. ■

Soit X un espace de Banach, $p \geq 1$, $0 \leq \sigma < 1$ et soit η probabilité de Radon sur B_{X^*} (avec la topologie *-faible). On note i_X l'application isométrique $X \longrightarrow C(B_{X^*})$ donnée par $i_X(x) = \langle x, \cdot \rangle$. Pour $f \in i_X(X) \subset C(B_{X^*})$, nous considérons

$$\|f\|_{p,\sigma} = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |f_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}, f = \sum_{k=1}^n f_k, (f_k)_{k=1}^n \subset i_X(X) \right\}.$$

Proposition 3.2.2 [1, Section 2.1.3] $\|\cdot\|_{p,\sigma}$ est une semi-norme sur $i_X(X)$.

Démonstration. Soit $f \in i_X(X)$ et $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$. Si $f = \sum_{k=1}^n f_k$ est une représentation de f alors $\alpha f = \sum_{k=1}^n \alpha f_k$, et nous avons donc

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{p,\sigma} &\leq \sum_{k=1}^n \|\alpha f_k\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |\alpha f_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &= |\alpha| \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |f_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{1}{|\alpha|} \|\alpha f\|_{p,\sigma} \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |f_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}.$$

Puisque ceci est vrai pour chaque représentation de f , il en résulte que $\|\alpha f\|_{p,\sigma} \leq |\alpha| \|f\|_{p,\sigma}$.

D'autre parts on a

$$\|f\|_{p,\sigma} = \left\| \frac{1}{\alpha} \alpha f \right\|_{p,\sigma} \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha f\|_{p,\sigma}$$

donnant $|\alpha| \|f\|_{p,\sigma} \leq \|\alpha f\|_{p,\sigma}$, par conséquent $\|\alpha f\|_{p,\sigma} = |\alpha| \|f\|_{p,\sigma}$. Cette égalité est évidente lorsque $\alpha = 0$.

Soit $f, g \in i_X(X)$ et $\varepsilon > 0$ et en considérons les représentations

$$f = \sum_{k=1}^{n'} f_k, (f_k)_{k=1}^{n'} \subset i_X(X) \quad \text{et} \quad g = \sum_{k=1}^{n''} g_k, (g_k)_{k=1}^{n''} \subset i_X(X)$$

de f et g respectivement telle que

$$\sum_{k=1}^{n'} \|f_k\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |f_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq \|f\|_{p,\sigma} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n''} \|g_k\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |g_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq \|g\|_{p,\sigma} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.2)$$

Posons $f + g = \sum_{k=1}^{n'+n''} h_k$ avec

$$\begin{cases} h_k = f_k & \text{si } 1 \leq k \leq n' \\ h_k = g_{k-n'} & \text{si } n' + 1 \leq k \leq n' + n'' \end{cases}$$

. alors nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n'} \|f_k\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |f_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} + \sum_{k=1}^{n''} \|g_k\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |g_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ = & \sum_{k=1}^{n'} \|f_k\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |f_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} + \sum_{k=n'+1}^{n'+n''} \|g_{k-n'}\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |g_{k-n'}|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ = & \sum_{k=1}^{n'+n''} \|h_k\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |h_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}. \end{aligned}$$

de (3.1) et (3.2) nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{n'+n''} \|h_k\|_{i_X(X)}^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |h_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq \|f\|_{p,\sigma} + \|g\|_{p,\sigma} + \varepsilon.$$

Ceci prouve que $\|f + g\|_{p,\sigma} \leq \|f\|_{p,\sigma} + \|g\|_{p,\sigma}$ et completes la preuve . ■

Soit S le sous espace vectoriel de $i_X(X)$ donné par

$$S = \|\cdot\|_{p,\sigma}^{-1}(\{0\}) = \left\{ f \in i_X(X), \|f\|_{p,\sigma} = 0 \right\}.$$

Nous écrivons, $L_{p,\sigma}(\eta)$ la completion de l'espace quotient $i_X(X)/S$ muni de la norme

$$\|[f]\|_{p,\sigma} = \|f\|_{p,\sigma}, f \in i_X(X).$$

Notez que la valeur de la norme $\|[\cdot]\|_{p,\sigma}$ est la même pour tous les $g \in i_X(X)$ appartenant à la classe de f (voir Proposition 3.2.1), avec cette notation dans le cas $\sigma = 0$ l'espace $L_{p,0}(\eta)$

ne coïncide pas avec $L_p(\eta)$ mais avec un sous espace de $L_p(\eta)$ qui permet le théorème de factorisation pour les opérateurs p -sommats.

L'exemple fondamental (prototype) d'application (p, σ) -continue est donné par :

Proposition 3.2.3 [1, Lemme 2.1.19] *L'application canonique $J_{p,\sigma} : i_X(X) \rightarrow L_{p,\sigma}(\eta)$ est (p, σ) -continue, et $\pi_{p,\sigma}(J_{p,\sigma}) \leq 1$.*

Démonstration. Soit $\delta_\omega : C(B_{X^*}) \rightarrow \mathbb{K}$, $\langle f, \delta_\omega \rangle = f(\omega)$ est la mesure du Dirac associé avec $\omega \in B_{X^*}$. Depuis $\|\delta_\omega\| = 1$. Pour chaque $(f_k)_{k=1}^n \subset i_X(X)$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|(J_{p,\sigma}(f_k))_{k=1}^n\|_{\frac{p}{1-\sigma}} &= \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{\frac{p}{1-\sigma}}^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{\frac{p}{1-\sigma}}^{\frac{\sigma p}{1-\sigma}} \int_{B_{X^*}} |f_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\
&= \left(\int_{B_{X^*}} \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{\frac{p}{1-\sigma}}^{\frac{\sigma p}{1-\sigma}} |f_k|^p d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\
&\leq \sup_{\omega \in B_{X^*}} \left| \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{\frac{p}{1-\sigma}}^{\frac{\sigma p}{1-\sigma}} \cdot |f_k(\omega)|^p \right|^{\frac{1-\sigma}{p}} \left(\int_{B_{X^*}} d\eta \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\
&= \sup_{\omega \in B_{X^*}} \left| \sum_{k=1}^n (\|f_k\|^\sigma |f_k(\omega)|^{1-\sigma})^{\frac{p}{1-\sigma}} \right|^{\frac{1-\sigma}{p}} \\
&= \sup_{\omega \in B_{X^*}} \left| \sum_{k=1}^n (\|f_k\|^\sigma |\langle f_k, \delta_\omega \rangle|^{1-\sigma})^{\frac{p}{1-\sigma}} \right|^{\frac{1-\sigma}{p}} \\
&\leq \sup_{\omega \in B_{X^*}} \sup_{\substack{\phi \in B_{(i_X(X))^*} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left| \sum_{k=1}^n (\|f_k\|^\sigma |\langle f_k, \phi \rangle|^{1-\sigma})^{\frac{p}{1-\sigma}} \right|^{\frac{1-\sigma}{p}} \\
&= \sup_{\substack{\phi \in B_{(i_X(X))^*} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left| \sum_{k=1}^n (\|f_k\|^\sigma |\langle f_k, \phi \rangle|^{1-\sigma})^{\frac{p}{1-\sigma}} \right|^{\frac{1-\sigma}{p}}.
\end{aligned}$$

Alors $J_{p,\sigma} \in \Pi_{p,\sigma}(i_X(X), L_{p,\sigma}(\eta))$ et $\pi_{p,\sigma}(J_{p,\sigma}) \leq 1$. ■

3.3 Théorème de factorisation

Le résultat suivant, fondamental sur les opérateurs (p, σ) -continus, dit que le prototype d'exemple que l'on a donné ci-dessus.

Théorème 3.3.1 [1, Théorème 2.1.20] *Pour chaque opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$, les affirmations suivantes sont équivalentes.*

(i) T est (p, σ) -continu.

(ii) Il existe une probabilité régulière de Borel μ sur B_{X^*} (muni de la topologie $*$ faible) et un opérateur linéaire continu $\tilde{T} \in \mathcal{L}(L_{p,\sigma}(\mu), Y)$ tel que diagramme suivant soit commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i_X \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\ i_X(X) & \xrightarrow{J_{p,\sigma}} & L_{p,\sigma}(\eta) \end{array}$$

Démonstration. (i) \implies (ii) Si T est (p, σ) -continu, d'après le théorème de domination (Théorème 2.2.4) il existe une probabilité régulière de Borel μ sur B_{X^*} tel que

$$\|Tx\| \leq \pi_{p,\sigma}(T) \cdot \|x\|^\sigma \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x, x^* \rangle|^p d\mu \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \text{ for all } x \in X.$$

Alors, nous obtenons

$$\|Tx\| \leq \pi_{p,\sigma}(T) \|\langle x, \cdot \rangle\|_{p,\sigma} = \pi_{p,\sigma}(T) \|J_{p,\sigma} \circ i_X(x)\|_{p,\sigma}.$$

On note, $M = \text{Im}(J_{p,\sigma} \circ i_X)$ et alors $J_{p,\sigma} \circ i_X : X \rightarrow M$. Par définition on a $\overline{M} = L_{p,\sigma}(\mu)$. Considérons l'opérateur $T_1 : M \rightarrow Y$ avec $T_1(J_{p,\sigma} \circ i_X(x)) = Tx$. Il est clair que cette application est linéaire et bien définie, puisque par

$$\|T_1(J_{p,\sigma} \circ i_X(x))\| \leq \pi_{p,\sigma}(T) \|J_{p,\sigma} \circ i_X(x)\|_{p,\sigma} \text{ pour tout } x \in X$$

nous avons

$$J_{p,\sigma} \circ i_X(x) = 0 \text{ implies } T_1(J_{p,\sigma} \circ i_X(x)) = 0$$

Par ailleurs, T_1 est continue pour la topology de $L_{p,\sigma}(\mu)$ avec $\|T_1\| \leq \pi_{p,\sigma}(T)$. Par conséquent, T_1 peut être prolongé par continuité à l'opérateur

$$\tilde{T} : \overline{M} = L_{p,\sigma}(\mu) \rightarrow Y$$

telle que $\|\tilde{T}\| = \|T_1\| \leq \pi_{p,\sigma}(T)$.

(ii) \implies (i) Puisque $J_{p,\sigma}$ est (p, σ) -continue et par la propriété d'idéal $\tilde{T} \circ J_{p,\sigma} \circ i_X = T$ est (p, σ) -continu et

$$\pi_{p,\sigma}(T) \leq \|\tilde{T}\| \cdot \pi_{p,\sigma}(J_{p,\sigma}) \cdot \|i_X\| \leq \|\tilde{T}\|.$$

■

Comme application, nous montrons que les opérateurs linéaires (p, σ) -continus sont compact avec certaines conditions. Pour ceci, nous présentons la proposition suivante.

Proposition 3.3.2 *Soit $0 \leq \sigma < 1$, $1 \leq p < \infty$ et X un espace de Banach. Alors l'inclusion / quotient $i : X \rightarrow L_{p,\sigma}(\eta)$ défini par $i(x) = [\langle x, \cdot \rangle]$ est complètement continue.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite dans X converge faiblement vers zéro. Alors, pour chaque $x^* \in X^*$ nous avons $(\langle x_n, x^* \rangle)_n$ converge vers 0. Mais ceci signifie que la suite des fonctions $(\langle x_n, \cdot \rangle)_n$ converge simplement vers 0. Considérons la suite des fonctions $|\langle x_n, \cdot \rangle|^p \|x_n\|^{\frac{p\sigma}{1-\sigma}}$. Cette suite est convergente simplement vers 0 (car la suite $(x_n)_n$ est bornée). Aussi, cette suite est dominée dans $L^1(\eta)$ par la fonction intégrable $x^* \mapsto \sup_n \|x_n\|^{\frac{p}{1-\sigma}} \chi_{B_{X^*}}$ car pour tout $x^* \in B_{X^*}$ nous avons

$$|\langle x_n, x^* \rangle|^p \|x_n\|^{\frac{p\sigma}{1-\sigma}} \leq \|x_n\|^p \|x^*\|^p \|x_n\|^{\frac{p\sigma}{1-\sigma}} \leq \|x_n\|^{\frac{p}{1-\sigma}}$$

et alors

$$|\langle x_n, \cdot \rangle|^p \|x_n\|^{\frac{p\sigma}{1-\sigma}} \leq \sup_n \|x_n\|^{\frac{p}{1-\sigma}} \chi_{B_{X^*}}.$$

Par le théorème de Lebesgue de convergence dominée (T.C.D) on a

$$\lim_n \int_{B_{X^*}} |\langle x_n, \cdot \rangle|^p \|x_n\|^{\frac{p\sigma}{1-\sigma}} d\eta = 0.$$

D'autre part on a,

$$\| [\langle x_n, \cdot \rangle] \|_{L_{p,\sigma}}^{\frac{p}{1-\sigma}} \leq \int_{B_{X^*}} |\langle x_n, \cdot \rangle|^p \|x_n\|^{\frac{p\sigma}{1-\sigma}} d\eta$$

Par conséquenton $\| [\langle x_n, \cdot \rangle] \|_{L_{p,\sigma}} \longrightarrow 0$. ■

Corollary 3.3.3 *Soit X, Y espace de Banach avec X est réflexive et soit $0 \leq \sigma < 1$, $1 \leq p < \infty$. Si $T \in \Pi_{p,\sigma}(X, Y)$, alors T est compact.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.3.1 nous avons $T = \tilde{T} \circ i$ avec $\tilde{T} \in \mathcal{L}(L_{p,\sigma}(\mu), Y)$ et $i \in \Pi_{p,\sigma}(X, L_{p,\sigma}(\mu))$. Ce dernier opérateur est complètement continue, alors $T = \tilde{T} \circ i$ est complètement continue aussi par la propriété d'idéal et la réflexivité de X . Donc T est compact ■

Bibliographie

- [1] E. Dahia, *On the tensorial representation of multi-linear ideals*, Ph.D. thesis, University of Mohamed Boudiaf, M'sila (Algeria), 2014.
- [2] H. Apiola, *Duality between spaces of p -summable sequences, (p, q) -summing operators and characterizations of nuclearity*, Math. Ann. **219** (1976), 53–64.
- [3] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note Mat. **25** (2005/2006), 69–102.
- [4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, MASSON Paris, New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [5] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*. Cambridge University Press, 1995.
- [6] J.A. López Molina and E.A. Sánchez-Pérez, *Ideales de operadores absolutamente continuos*, Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid. **87** (1993), 349–378.
- [7] U. Matter, *Absolutely continuous operators and super-reflexivity*, Math. Nachr. **130** (1987), 193–216.
- [8] A. Pietsch, *Absolute p -summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math., 28 (1967), 333–353.
- [9] A. Pietsch, *Operator ideals*. Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.