



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
MASTER EN GENIE ELECTRIQUE
OPTION : AUTOMTIQUE ET SYSTEMES**

Par : KRIM Imane
REBIHI Brahim

THEME

**Applications des filtres de Kalman étendu
et non parfumé à l'estimation d'état
d'un système non linéaire**

Soutenue le 26 /06/ 2019 devant le jury composé de :

ZEGHLACHE Samir

Université de M'SILA Président

LAAMARI Yahia

Université de M'SILA Rapporteur

ROUBACHE Toufik

Université de M'SILA Examineur

Promotion 2018-2019

REMERCIEMENTS

Nous remercions avant tous ALLAH pour son aide, ses innombrables dons, ALLAH qui nous a donné la force, la volonté et le moral pour accomplir nos études en Master Génie-Électrique.

Nous remercions notre encadreur Mr. LAAMARI Yahia, pour ses remarques et conseils qui nous ont beaucoup aidés.

Nous remercions aussi tous les membres du jury qui nous ont fait l'honneur de participer à l'évaluation de ce travail.

Et enfin, nos remerciements vont également à tous les enseignants de notre département et aux étudiants.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A ma chère mère, mon cher père et mon grand-père, pour leurs soutient morale.

A mes chers frères et sœurs Surtout ZAKI et BOUCHRA ainsi que mon mari Abdou pour leurs encouragements.

*A toute ma Famille, Aux petits bourgeons,
SAFA, NOUSSA, NADA, ISSAM, YAÏIA, IYAD,
AKRAM, ANOIR, ASSIL ,
HALLA, SIDRA, SERINE.*

*A tous les amis surtout les amis du groupe
Automatique 2019.*

KRIM Imane.

Dédicaces

*A mes perles du cœur, à mes très chers parents en
guise de ma profonde reconnaissance pour leur
amour, leur affection, leur soutien et l'aide qui
ils m'ont donnée le long de ma vie et mes études,
que Dieu leur ouvre les portes du paradis.*

*A mes très chers frères, je leur souhaite le
bonheur,*

et toute La réussite dans la vie

A mes chères amies

Sans oublier la petite Amouna.

REBIHI Brahim.

Liste des abréviations

MSAP	Moteur synchrone à aimants permanents (en anglais PMSM: Permanent Magnet Synchronous Motor)
KF	Filtre de Kalman (en anglais : Kalman Filter)
EKF	Filtre de Kalman étendu (en anglais : Extended Kalman Filter)
UKF	Filtre de Kalman non parfumé (en anglais : Unscented Kalman Filter)
UT	Transformation non parfumée (en anglais : Unscented Transformation)
DSP	Densité Spectrale de puissance

Liste de figures

Figure (I.1) Fonction de répartition de la loi normale.....	6
Figure (I. 2) Densité de lois normales	7
Figure (I. 3) Techniques d'estimation sans capteurs	8
Figure (I. 4) Observateur d'état en boucle ouverte.	9
Figure (I. 5) Schéma fonctionnel d'un observateur d'état en boucle fermée	10
Figure (II. 1) Étapes du filtre de Kalman	15
Figure (II. 2) Processus itératif du filtre de Kalman linéaire.	17
Figure (II. 3) Schéma d'un filtre de Kalman Étendu (EKF) associé à un processus physique.	19
Figure (II. 4) Principe de la transformation Unscented (UT).	23
Figure (III. 1) Modèle d'un pendule simple.	26
Figure (III. 2) Schéma block de simulation d'un pendule simple.....	27
Figure (III. 3) Schéma block du pendule simple avec filtre de Kalman.	29
Figure (III. 4) Évolution de l'angle Θ réelle, mesurée et estimée par filtre de Kalman ainsi que l'erreur d'estimation.	29
Figure (III. 5) Évolution de l'angle Θ réelle, mesurée et estimée par filtre de Kalman ainsi que l'erreur d'estimation.	30
Figure (III. 6) Évolution de l'angle Θ réelle, mesurée et estimée par filtre de Kalman ainsi que l'erreur d'estimation.	31
Figure (III. 7) Schémas de l'ensemble chariot pendule inversé [3].	31
Figure (III. 8) Schéma block d'un pendule inversé	35
Figure (III. 9) Schéma de simulation d'un pendule inversé avec EKF et UKF	36
Figure (III. 10) Évolution de la position $x(t)$ réelle, mesurée et estimée par filtres EKF et UKF.	36
Figure (III. 11) Évolution de la vitesse du chariot $\dot{x}(t)$: valeurs réelle, mesurée et estimée par filtres EKF et UKF.	37
Figure (III. 12) Évolution de l'angle du pendule $\Theta(t)$ réelle, mesurée et estimée par filtres EKF et UKF.	37
Figure (III. 13) Évolution de la vitesse angulaire du pendule $\dot{\theta}(t)$ réelle, mesurée et estimée par filtres EKF et UKF.	37
Figure (III. 14) Évolution de l'erreur d'estimation et MSE des filtres EKF et UKF.	38

Figure (III. 15) Schémas de pendule inversé double.....	39
Figure (III. 16) Schéma de simulation d'un pendule inversé double.....	40
Figure (III. 17) Schéma d'un pendule inversé à double bras avec EKF et UKF.....	41
Figure (III. 18) Évolution de la position $x(t)$ d'un pendule inversé double avec FKE et UKF.....	41
Figure (III. 19) Évolution de la vitesse du chariot $\dot{x}(t)$ d'un pendule inversé double avec EKF et UKF.....	42
Figure (III. 20) Évolution de l'angle $\theta_1(t)$ d'un pendule inversé double avec EKF et UKF.....	42
Figure (III. 21) Évolution de la vitesse angulaire $\dot{\theta}_1(t)$ d'un pendule inversé double avec EKF et UKF.....	42
Figure (III. 22) Évolution de la vitesse angulaire $\theta_2(t)$ d'un pendule inversé double avec EKF et UKF.....	43
Figure (III. 23) Évolution de la vitesse angulaire $\dot{\theta}_2(t)$ d'un pendule inversé double avec EKF et UKF.....	43
Figure (III. 24) Évolution de l'erreur d'estimation et MSE des filtres EKF et UKF.....	43
Figure (III. 25) Schéma représentatif de la MSAP.....	44
Figure (III. 26) Schéma bloc du modèle de la MSAP dans le repère d, q.....	48
Figure (III. 27) Schéma de simulation de la MSAP associée aux filtres EKF et UKF.....	49
Figure (III. 28) Évolution des valeurs du courant I_d d'un MSAP (réelle, mesurée et estimée par EKF et UKF).....	49
Figure (III. 29) Évolution des valeurs du courant I_q d'un MSAP (réelle, mesurée et estimée par EKF et UKF).....	50
Figure (III. 30) Évolution des valeurs de la position du rotor Θ d'un MSAP (réelle, mesurée et estimée par EKF et UKF).....	50
Figure (III. 31) Évolution des valeurs de la vitesse du rotor Ω (rad/s) d'un MSAP (réelle, mesurée et estimée par EKF et UKF).....	50
Figure (III. 32) Évolution de l'erreur d'estimation et MSE des filtres EKF et UKF.....	51
Figure (III. 33) Scenario d'approximation d'une Gaussien par le filtre de Kalman étendu (EKF) autour de la moyenne.....	52
Figure (III. 34) Scenario d'approximation d'une Gaussien par le filtre de Kalman étendu (EKF) autour de la moyenne.....	52

Sommaire

REMERCIEMENT

Dédicaces

Liste des abréviations

Liste de figures

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre I. État de l'art sur les techniques d'estimation	3
I.1. Introduction	3
I.2. Notions de probabilité et variable aléatoire.....	3
I.2.1. Probabilité	3
I.2.2. Variable aléatoire	3
I.2.3. Espace échantillonnal (des épreuves).....	4
I.2.4. Événements	4
I.2.5. Calcul des probabilités	4
I.2.6. Variable aléatoire	5
I.2.7. Espérance, variance, écart-type	6
I.2.7.a. Espérance	6
I.2.7.b. Variance	6
I.2.7.c. Écart type	6
I.3. Fonctions de répartition et de distribution.....	6
I.3.1. Variable à densité	7
I.3.2. Loi Normale (ou loi Gaussienne) : $N(m, \sigma^2)$, avec $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ réel	7
I.4. Technique d'estimation d'état	8
I.4.1. Principe d'un observateur d'état.....	9
I.4.2. Observateur d'état en boucle ouverte.....	9
I.4.3. Observateur d'état en boucle fermée.....	10
I.4.4. Observateurs discrets prédicteurs ou correcteurs	11
I.5. Classification des observateurs	11
I.5.1. Observateurs déterministes.....	11
I.5.1.a. Observateur de Luenberger	11
I.6. Conclusion.....	12
Chapitre II. Filtres de Kalman	13
II.1. Introduction	13
II.2. Filtre de Kalman (historique)	13
II.3. Présentation du filtre de Kalman standard	13
II.3.1. Fonctionnement du filtre de Kalman.....	14
II.3.2. Hypothèses	16
II.3.3. Algorithme du Filtre de Kalman standard.....	17
II.4. Filtre de Kalman étendu	18
II.4.1. Équations du filtre de Kalman étendu (EKF)	19
II.4.2. Algorithme du filtre de Kalman étendu.....	20
II.5. Le filtre de Kalman sans parfum	21
II.5.1. Principe de la transformation Unscented (UT).....	22

II.5.2. L'algorithme du filtre de Kalman non parfumé (UKF).....	23
II.6. Conclusion.....	25
Chapitre III. Application des Filtres de Kalman à l'estimation non linéaire	26
III.1. Introduction	26
III.2. Classification des systèmes	26
III.3. Application des filtres de Kalman à l'estimation d'état des systèmes	26
III.3.1. Cas du pendule simple.....	26
III.3.1.a. Présentation.....	26
III.3.1.b. Modèle dynamique et modèle d'état.....	27
III.3.1.c. Modèle d'état discret non linéaire.....	28
III.3.1.d. Estimation par filtre de Kalman	28
III.3.1.e. Estimation par filtre de Kalman étendu	30
III.3.2. Cas du pendule inverse.....	31
III.3.2.a. Présentation.....	31
III.3.2.b. Modélisation du pendule inversé	32
III.3.2.c. Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule.....	34
III.3.2.d. Modèle d'état discret de l'ensemble chariot-pendule	35
III.3.2.e. Simulation et résultats.....	36
III.3.3. Cas du pendule inversé à double bras	38
III.3.3.a. Présentation et modélisation	38
III.3.3.b. Modèle d'état discret de l'ensemble chariot-pendule inversé double bras	40
III.3.4. Simulation et résultats	41
III.3.5. Cas du moteur synchrone à aimants permanents	44
III.3.5.a. Structure générale d'une MSAP	44
III.3.5.b. Hypothèses simplificatrices	45
III.3.5.c. Mise en équations de la machine	45
III.3.5.d. Équations de la MSAP dans le référentiel de PARK	46
III.3.5.e. Équations de la MSAP sous forme d'état	47
III.3.5.f. Schéma bloc du modèle de la MSAP.....	48
III.3.6. Équations de la MSAP sous forme d'état non linéaire discret.....	49
III.3.6.a. Simulation et résultats.....	49
III.4. Comparaison entre les trois variantes du Filtre de Kalman.....	51
III.5. Conclusion.....	52
Conclusion générale	54
Références Bibliographiques	55
RESUME (ABSTRACT).....	59

Introduction générale

De nos jours, l'automatique s'est introduite dans quasiment tous les domaines qui affectent notre vie quotidienne à savoir : l'électroménager, les distributeurs de boisson, les ascenseurs, le transport, la robotique, l'aéronautique, l'économétrie...etc. L'automatique consiste donc à étudier des systèmes réels de différentes disciplines scientifiques (électronique, mécanique, physique, ...) en vue de les analyser, les surveiller, les diagnostiquer, et les commander.

Cependant, le besoin d'information sur l'état d'un système est motivé par le fait qu'elle est une étape importante voire indispensable pour la synthèse de lois de commande, pour la modélisation (identification), la détection et le diagnostic de défauts ou la supervision des systèmes industriels. Récemment, beaucoup de méthodes et techniques d'estimation des états et paramètres, sans capteurs, ont été développées. En effet, la présence de capteurs rend les techniques d'estimation coûteuses et fragiles, ce qui contribue éventuellement à la dégradation de leurs performances. Ainsi, l'estimateur sans capteur peut être envisagé dans la plupart des applications industrielles.

L'estimation des paramètres représente l'art et la science de construction de modèles mathématiques des systèmes dynamiques à partir des données d'entrée-sortie mesurées. Elle peut être considérée comme l'interface entre le monde réel des applications et le monde mathématique du contrôle ou de diagnostic. Dans les techniques d'estimation basées sur des modèles, ces derniers, peuvent être linéaires ou non linéaires, déterministes ou stochastiques.

Le filtre de Kalman est un outil mathématique récursif permettant d'estimer l'état d'un système dynamique à partir d'une série de mesures incomplètes ou bruitées. Il est utilisé dans une large gamme de domaines technologiques, tels que le traitement du signal, l'automatique, le radar et les systèmes de communication [1] [2].

Dans notre présente étude nous avons choisis quelques systèmes types non linéaires à savoir le pendule simple, le pendule inversé simple et inversé à double bras ainsi la machine synchrone à aimants permanents (MSAP). En effet, le choix des pendules a assez bien d'importance. Il y a plusieurs raisons à cela :

L'homme est un pendule double inversé dont les deux axes de rotation principaux sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Dans le même ordre d'idée, la robotique utilise ce genre de concept. En outre, les étudiants en automatique, robotique font souvent intervenir beaucoup de notions intéressantes concernant ces dispositifs.

Les Machines Synchrones à Aimants Permanents (MSAP) sont de plus en plus utilisées dans l'industrie parce qu'ils offrent beaucoup d'avantages par rapport aux autres types de machines à courant continu ou alternatif avec un couple massique élevé.

Dans ce cadre, nous avons structuré notre travail comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons évoqué quelques notions de base sur les probabilités, les variables aléatoires ainsi que certains principes généraux sur les techniques d'estimation ou d'observation.

Le deuxième chapitre présente d'une manière détaillé le principe de fonctionnement du Filtre de Kalman standard (KF), le Filtre de Kalman étendu (EKF) ainsi que le filtre de Kalman non parfumé (UKF) avec leurs algorithmes.

Dans le dernier chapitre, nous présenterons, les résultats de l'application du filtre de Kalman standard sur le pendule simple, filtre de Kalman étendu et filtre de Kalman non parfumé avec quelques exemples de systèmes non linéaires qui sont très répandus en automatique à savoir : le pendule inversé simple et à double bras, et aussi le Moteur Synchrone à aimants permanents).

Chapitre. I. État de l'art sur les techniques d'estimation d'état des systèmes non linéaire

I.1. Introduction

De nombreux travaux de recherche sur les estimateurs (observateurs) invariants non linéaires ont été menés durant ces dix dernières années notamment par P. Rouchon, S. Bonnabel et E. Salaun dont les résultats ont permis d'élaborer une méthode constructive utilisant conjointement la géométrie différentielle et la théorie des groupes pour synthétiser des filtres non linéaires dédiés aux problèmes d'estimation non linéaire de l'état d'un système. Cette dernière décennie se caractérise donc par l'essor de nouvelles techniques, remettant en cause la définition classique de l'erreur d'estimation d'état utilisée traditionnellement dans les méthodes de conception d'observateur non linéaire [3].

Dans ce chapitre avant d'entamer les principes généraux des observateurs et leur classification [4]. Nous commencerons ce qui suit par un petit rappel sur les probabilités et les variables aléatoires, éléments nécessaires à la compréhension des estimateurs stochastiques.

I.2. Notions de probabilité et variable aléatoire

I.2.1. Probabilité

La probabilité d'un événement caractérise la possibilité qu'il se produise. Lorsque nous ne sommes pas certains du résultat d'une expérience, on parle alors de la probabilité que des événements se réalisent la chance qu'ils ont de se produire. La Statistique est la branche des mathématiques dont l'objet est l'étude des données issues de l'observation de phénomènes aléatoires, c'est-à-dire caractérisés par le hasard, l'incertitude [5].

I.2.2. Variable aléatoire

Une expérience aléatoire est un processus dans lequel intervient le hasard et qui est susceptible de produire différents résultats ; elle se caractérise de quatre façons [6] :

- Nous ne pouvons prédire avec certitude le résultat,
- Nous pouvons décrire à priori l'ensemble de tous les résultats possibles,
- Elle peut être répétée,
- Elle a un but précis.

Exemples d'expériences aléatoires

1. Lancer deux dés et observer le total
2. Tirer le numéro gagnant d'une loterie
3. Jeter une pièce de monnaie deux fois et noter le côté qui apparaît.

I.2.3. Espace échantillonnal (des épreuves)

L'espace échantillonnal d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience, noté Ω [6], Chaque résultat d'une expérience aléatoire correspond à une réalisation [7].

Exemple : L'espace échantillonnal associé à l'expérience aléatoire qui consiste à jeter une pièce de monnaie deux fois présentée dans l'exemple précédent est : $\Omega = \{PF, FP, FF, PP\}$

I.2.4. Événements

Un événement relié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble de l'espace échantillonnal Ω . On note habituellement les événements par A, B, C, ...

Exemple :

Soit l'expérience consistant à jeter une pièce de monnaie deux fois et de noter le côté qui apparaît. On peut considérer les exemples d'événements suivants [6] :

A = "obtenir face au premier lancer " = $\{FP, FF\}$

B = "obtenir face au deuxième lancer " = $\{PF, FF\}$

C= "obtenir le même côté lors des deux lancers" = $\{PP, FF\}$

I.2.5. Calcul des probabilités

Si un espace échantillonnal est fondamental, alors la probabilité qu'un événement $A \subseteq \Omega$ se réalise, notée $P(A)$, est obtenue de la formule suivante :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments } A}{\text{nombre d'éléments } \Omega}$$

La probabilité d'apparition de l'évènement $C=A \cup B$, avec A et B deux évènements disjoints :

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{I.1}$$

La probabilité d'apparition de l'évènement $D=A \cap B$, avec A et B deux évènements non disjoints :

$$P(D) = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \tag{I.2}$$

Le terme, $P(A, B)$ est la probabilité conjointe (ou composée) mesurant les chances de réalisation de l'évènement $A \cap B$

➤ **Si** $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A, B) = 0$ (I.3)

➤ **La probabilité d'apparitions de l'évènement A lorsque B est réalisé est appelée la probabilité conditionnelle, et donner par :**

$$P(A / B) = P(A \cap B) / P(B) \quad (I.4)$$

➤ **deux évènements A et B sont statistiquement indépendants si :**

$$\begin{aligned} P(A / B) &= P(A) \\ P(B / A) &= P(B) \end{aligned} \quad (I.5)$$

Donc, $P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$ (I.6)

I.2.6. Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction définie sur l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, telle qu'il soit possible de déterminer la probabilité pour qu'elle prenne une valeur donnée ou qu'elle prenne une valeur dans un intervalle donné. À l'origine, une variable était une fonction de gain, qui représentait le gain obtenu à l'issue du résultat d'un jeu[8].

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat." L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s'appelle l'univers des possibles. On considère l'évènement A : "On obtient un résultat pair" On a donc : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$. On considère l'évènement élémentaire E : "On obtient un 3". On a donc : $E = \{3\}$ [9].

Définitions

- Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une issue.
- L'univers des possibles est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
- Un évènement est un sous-ensemble de l'univers des possibles.
- Un évènement élémentaire est un évènement contenant une seule issue.

I.2.7. Espérance, variance, écart-type

Soit une variable aléatoire discrète x , à n états et N réalisations. L'état x_1 apparaît N_1 fois, l'état x_2 apparaît N_2 fois, etc., avec $N_1+N_2+\dots+N_n=N$

La valeur moyenne statistique de x est [7] :

$$\bar{x} = (x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_n N_n) / N \quad (\text{I.7})$$

I.2.7.a. Espérance

L'espérance mathématique de x est la valeur moyenne statistique lorsque N tend vers l'infini. Celle-ci, notée μ_x , est égale, en tenant compte de l'équation I.2, à :

$$\mu_x = [E(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \quad (\text{I.8})$$

Par analogie avec le cas discret, l'espérance mathématique continue est donnée par :

$$\mu_x = [E(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (\text{I.9})$$

I.2.7.b. Variance

La variance d'une variable aléatoire peut être calculée en considérant l'espérance mathématique de la variable aléatoire moins sa moyenne comme suit :

$$\text{var}(x) = E[(x - E(x))^2] = E(x^2) - E(x)^2 = \sigma_x^2 \quad (\text{I.10})$$

I.2.7.c. Écart type

La racine carrée de la variance, connue sous le nom d'écart type, est également une unité de mesure statistique utile parce qu'elle nous donne une grandeur à la même unité que celle du signal. L'écart type est donné par :

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(x)} \quad (\text{I.11})$$

I.3. Fonctions de répartition et de distribution

En théorie des probabilités ou en statistiques, la fonction de répartition (ou fonction de distribution cumulative, en anglais cumulative distribution function) d'une variable aléatoire réelle caractérise la loi de probabilité de cette variable aléatoire réelle. La fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X est la fonction F_x qui à tout réel x associe [10].

$$F_x(x) = P(X \leq x) \quad (\text{I.12})$$

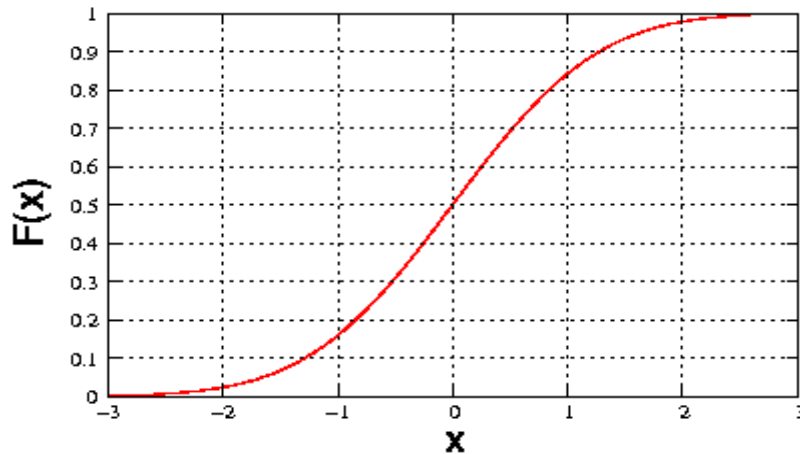


Figure (I.1) Fonction de répartition de la loi normale.

I.3.1. Variable à densité

La fonction de répartition F_x d'une variable aléatoire x de densité de probabilité f_x est une des primitives (en un sens un peu relâché, voir ci-dessous) de cette densité f_x . Plus précisément, F_x est définie, pour tout nombre réel x , par

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(t) dt \tag{I.13}$$

➤ Propriétés de la fonction de répartition

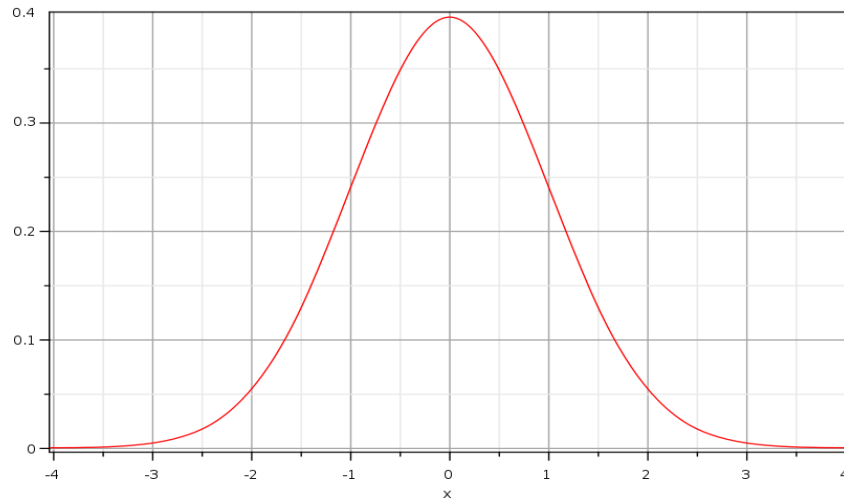
Théorème : La fonction de répartition d'une variable aléatoire x a les propriétés caractéristiques suivantes[11]:

- ✓ F_x est croissante
- ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(x) = 1$
- ✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(x) = 0$

I.3.2. Loi Normale (ou loi Gaussienne) : $N(m, \sigma^2)$, avec $m \in \mathbf{R}, \sigma > 0$ réel

La loi Normale est une loi centrale dans la théorie des probabilités. Elle est notamment très utilisée en statistique. Une grandeur influencée par un grand nombre de paramètres indépendants est souvent modélisée par une loi normale (par exemple, les erreurs de mesures lors d'une expérience) [12].

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \text{ avec } (x \in \mathbf{R}) \tag{I.14}$$



Figure(I. 2) Densité de lois normales

I.4. Technique d'estimation d'état

L'estimation d'état ou de paramètres représente l'art et la science de construction de modèles mathématiques des systèmes dynamiques à partir des données d'entrée-sortie mesurées. Elle peut être considérée comme l'interface entre le monde réel des applications et le monde mathématique du contrôle ou de diagnostic. Les grandeurs physiques caractéristiques d'un processus dont on ne peut ou ne désire pas mesurer l'état par une méthode directe seront le plus souvent reconstruites et estimées à partir d'un modèle d'état du système [13].

Généralement, la présence de capteurs rend les techniques d'estimation coûteuses et fragiles, ce qui contribue éventuellement à la dégradation de leurs performances. Ainsi, beaucoup de méthodes et techniques d'estimation sans capteurs, ont été développées [14][15][16]. En effet, les techniques d'estimation sans capteurs mécaniques (i.e. capteur de vitesse) sont nombreuses et peuvent être classées en deux grandes catégories, comme le montre la Figure 1.3 ci-dessous.

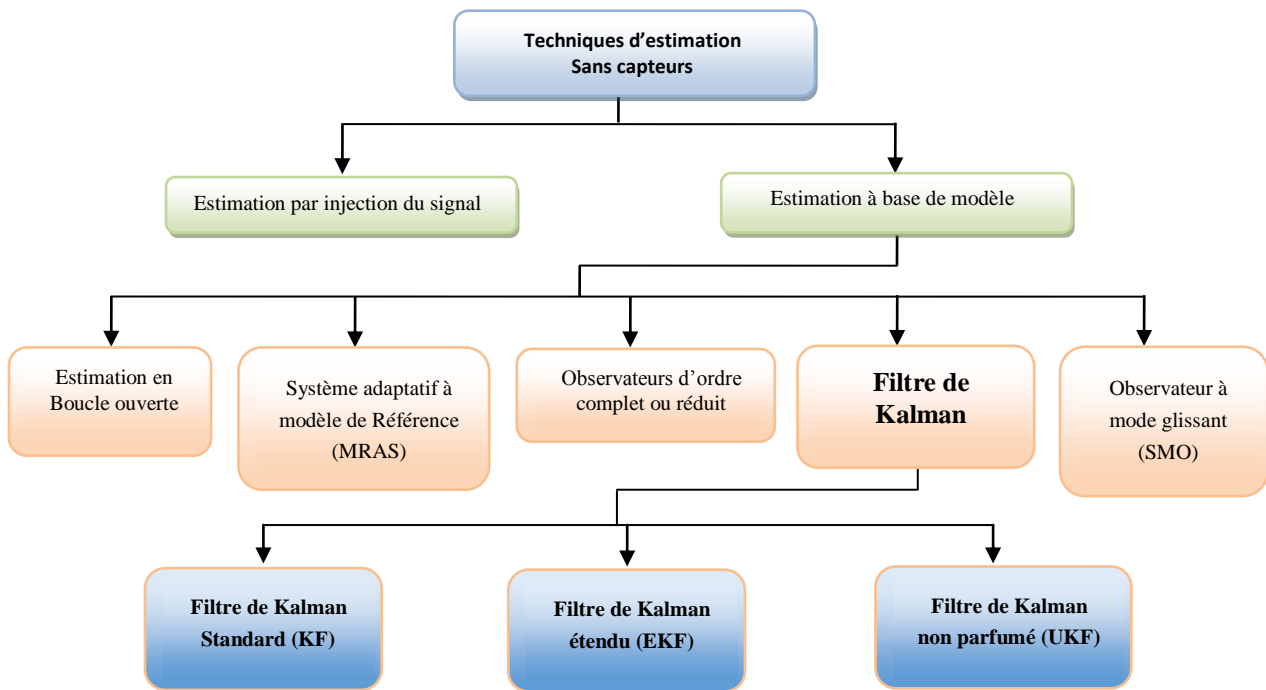


Figure (I. 3) Techniques d'estimation sans capteurs [13].

I.4.1. Principe d'un observateur d'état

Le besoin d'information sur l'état d'un système est motivé par le fait qu'elle est une étape importante voire indispensable pour la synthèse de lois de commande, pour la modélisation (identification), la détection et le diagnostic de défauts ou la supervision des systèmes industriels [17].

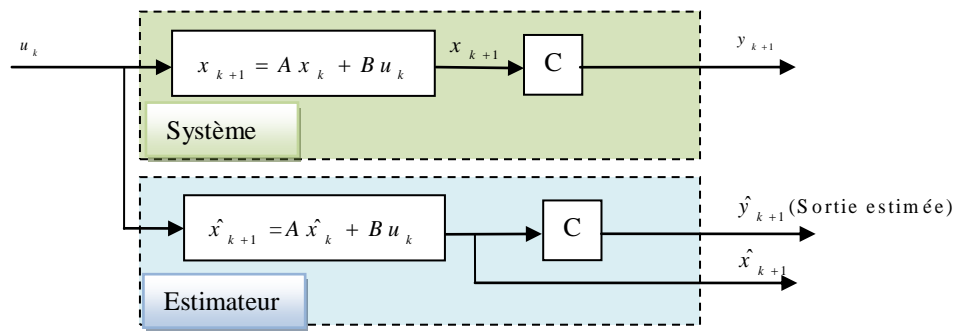
La structure d'un observateur d'état fait intervenir tout d'abord un estimateur fonctionnant en boucle ouverte qui porte également le nom de prédicteur et qui est caractérisé par la même dynamique que celle du système.

Un observateur peut être qualifié d'observateur linéaire ou non linéaire, il peut être déterministe ou stochastique [18].

I.4.2. Observateur d'état en boucle ouverte

$$\text{Soit le système d'ordre } n \text{ défini par : } \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

$$\text{L'observateur est défini par : } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.16})$$



Figure(I. 4) Observateur d'état en boucle ouverte.

I.4.3. Observateur d'état en boucle fermée

La structure fonctionnant en boucle fermée obtenue par l'introduction d'une matrice de gains (L) permet d'imposer la dynamique propre à cet observateur. Le vecteur de sortie (y) est comparé au vecteur équivalent \hat{y} donné par l'observateur pour assurer le fonctionnement en boucle fermée. Ainsi on définit une nouvelle variable, l'erreur d'observation. Celle-ci est multipliée par une matrice de gain L et envoyée à l'entrée de l'observateur pour influencer les états estimés. Ainsi, par un choix judicieux de la matrice de gain L . On peut modifier la dynamique de l'observateur et par conséquent faire évoluer la vitesse de convergence de l'erreur vers zéro [19].

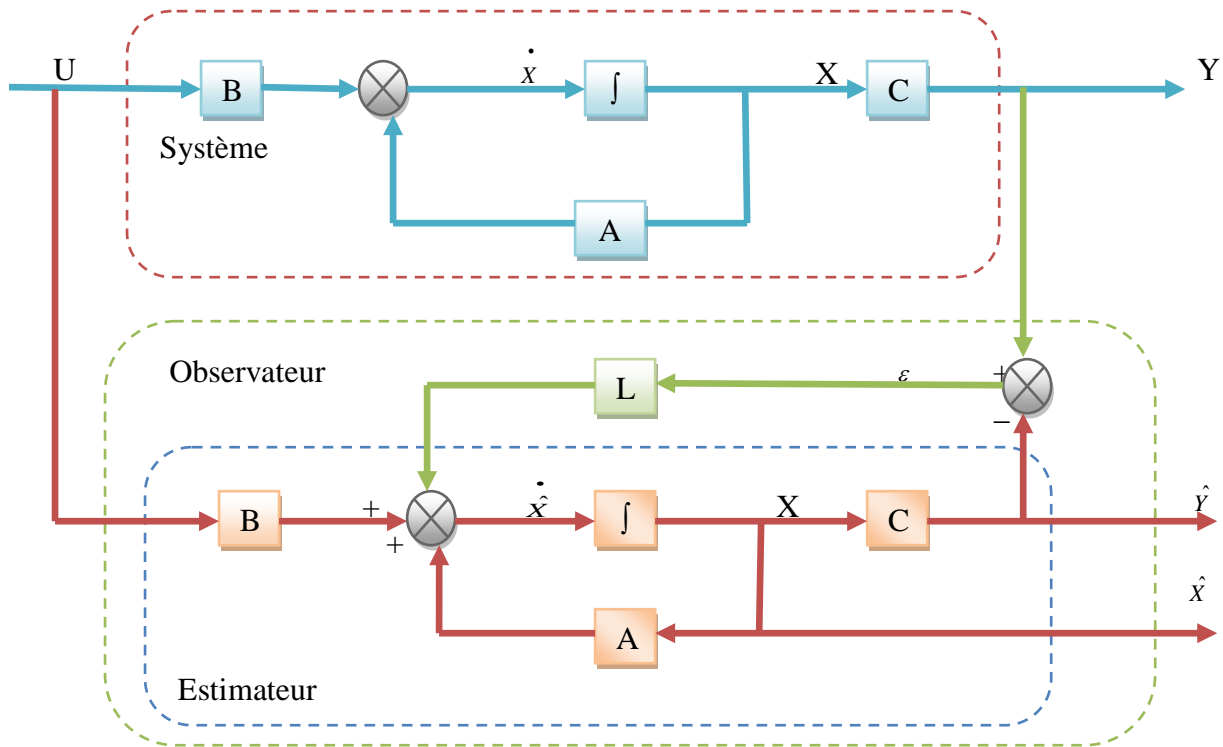
Dans ce cas le système est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Alors que l'observateur en boucle fermée est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

Où $(y - \hat{y})$ est un terme de correction, L est un vecteur colonne de dimension n .



Figure(I. 5) Schéma fonctionnel d'un observateur d'état en boucle fermée (Observateur de Luenberger)

I.4.4. Observateurs discrets prédicteurs ou correcteurs

Considérons le système discret défini par :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k \\ Y_k = C_k X_k \end{cases} \quad (I.19)$$

On construit un observateur pour ce système par le principe énoncé dans le cas des systèmes continus ; seulement ici, nous distinguerons deux types d'observateurs suivant que la mesure est disponible à l'instant k ou à l'instant $k + 1$ d'après ce que l'on connaît à l'instant k nous noterons $\hat{x}_{k+1/k}$ cette prédiction. Dans le deuxième cas, nous construisons un observateur correcteur, l'estimation de l'état sera alors notée : $\hat{x}_{k+1/k+1}$ [20] .

I.5. Classification des observateurs

Il existe de nombreuses techniques d'observation. Elles diffèrent en fonction de l'environnement considéré (déterministe ou stochastique), la nature du système considéré (linéaire ou non linéaire), et en fin, suivant le nombre d'états à observer, on distingue les observateurs d'ordre réduit et les observateurs d'ordre complet. Pour les observateurs d'ordre réduit on observe seulement une partie du vecteur d'état alors que pour les observateurs d'ordre complet on observe tout le vecteur d'état.

En fait, que se soit le critère de classification à considérer, les observateurs se classent généralement en deux grandes familles [4].

- ✓ **Observateurs déterministes**
- ✓ **Observateurs stochastiques**

I.5.1. Observateurs déterministes

Observateurs déterministes Ce sont les observateurs qui ne prennent pas en compte les bruits de mesures et les fluctuations aléatoires des variables d'état : l'environnement est déterministe. Parmi ces observateurs on peut citer l'observateur Luenberger, observateur adaptatif à modèle de référence MRAS, dans le cas de modèles linéaires [21].

I.5.2. Observateurs stochastiques

Ces observateurs donnent une estimation optimale des états en se basant sur des critères stochastiques. Leurs observations se basent sur la présence du bruit dans le système ce qui est souvent le cas. Parmi ces observateurs, on cite le fameux filtre de Kalman. Cet observateur, est caractérisé par la prise en compte des bruits de mesure et d'état par des algorithmes stochastiques tendant à minimiser la variance de l'erreur d'estimation. Ce filtre avec ces trois variantes sera évoqué en détail dans le prochain chapitre [21].

I.5.1.a. Observateur de Luenberger

La théorie de l'observation de Luenberger (voir figure I.3) repose essentiellement sur des techniques de placement de pôles. On se place dans le cas déterministe, où les bruits d'état w et de mesure v sont nuls, Luenberger propose l'observateur suivant pour le système (I.20).

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ a pour expression :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad (\text{I.21})$$

En utilisant une technique de placement de pôles, il suffit alors de choisir le gain L de l'observateur de telle sorte que les valeurs propres de la matrice $A - LC$ soient dans le demi plan complexe gauche.

Pour ce type d'observateur, une grande liberté est laissée au choix des valeurs propres, mais en pratique on choisit une dynamique d'erreur plus rapide que celle du processus.

I.6. Conclusion

Dans ce présent chapitre, nous avons introduits les notions mathématiques élémentaires fondamentales couramment utilisées en descriptions des modèles.

A cet effet, nous avons présenté quelques concepts sur lesquels reposent les fondements mathématiques du Filtre de Kalman, ainsi que quelques outils mathématiques indispensables pour analyser les processus stochastiques. Nous avons également introduit la notion de bruit blanc, qui est entièrement caractérisé par sa fonction d'auto-corrélation, et qui présente l'une des hypothèses de base du filtre de Kalman [10].

Chapitre .II. Filtres de Kalman

II.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions, les concepts, les définitions et les principes généraux du filtre de Kalman (FK) et (FKE) et(UKF).

Le filtre de Kalman est un filtre récursif, qui utilise une approche temporelle [24]. Il permet d'estimer l'état (cet état correspond à l'information utile) d'un système dynamique à partir d'une information, à priori, sur l'évolution de cet état (modèle) et de mesure réelles [25]. L'utilisation de ce filtre est particulièrement recommandée lorsque l'imprécision sur les données traitées peut être interprétée comme un bruit aléatoire, dont la distribution est connue à priori. Le filtre de Kalman est un outil de traitement utilisé dans une large gamme de domaines technologiques tels que le traitement du signal, l'automatique le radar et les systèmes de communication. Il est également de plus en plus utilisé en dehors du domaine du traitement du signal, par exemple en météorologie et en océanographie, en finance et en navigation [1][2].

Dans la littérature on trouve plusieurs variantes du filtre de Kalman, bien que dans notre cas on s'intéresse seulement aux deux variantes suivantes [4] :

- **Filtre de Kalman standard (KF)**
- **Filtre de Kalman étendu (EKF)**
- **Filtre de Kalman non parfumé (UKF)**

II.2. Filtre de Kalman (historique)

Le filtre de Kalman introduit par Rudolf Emil Kalman en 1960, [26], est l'un des développements mathématiques les plus intéressants dans la théorie de l'estimation linéaire. Il est un reconstituteur d'état dans un environnement stochastique, lorsque les variances des bruits sont connues, c'est un estimateur linéaire minimisant la variance de l'erreur d'estimation. Les applications du filtre de Kalman sont nombreuses. Le filtre de Kalman permet de donner un estimé de l'état du système à partir d'une information a priori sur l'évolution de cet état (modèle) et des mesures réelles. Il sera utilisé pour estimer des conditions initiales inconnues, prédire des trajectoires, localiser des engins, implanter des lois de commande, etc. [27].

II.3. Présentation du filtre de Kalman standard

Le principe d'un tel filtre repose sur un modèle à variables d'état basé sur deux équations [28] :

- L'équation récursive de modélisation du processus aléatoire X_K (vecteur d'état) discret, dite équation d'état ou équation de transition.
- L'équation d'observation (ou équation de mesure) du processus Y_K (vecteur de mesure).

Les équations de base du filtre de Kalman sont alors les suivantes [29] :

$$\begin{cases} X_{K+1} = A_K X_K + B_K U_K + W_K \\ Y_K = C_K X_K + V_K \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$$W_K \rightarrow N(0, Q_K)$$

$$V_K \rightarrow N(0, R_K)$$

Avec :

X_K : Vecteur d'état à l'instant K qui inclut les quantités à estimer, de taille $n * 1$.

A_K : Matrice de transition. Elle décrit l'évolution du vecteur d'état de l'instant $K-1$ à l'instant K , de taille $n * n$.

B_K : Matrice de commande à l'instant K , dépend de la modélisation du système.

C_K : Matrice d'observation (mesure). Elle est en fait le lien entre les paramètres du système et les mesures de taille $m * n$.

U_K : Vecteur représentant les commandes appliquées au système à l'instant K .

Y_K : Vecteur de mesure à l'instant K , de taille $m * 1$.

W_K : Bruit de modélisation lié à l'incertitude que l'on a sur le modèle de processus.

V_K : Bruit de mesure, de taille $m * 1$.

Q_K : Matrice de variances-covariances du bruit de processus à l'instant K .

R_K : Matrice de variances-covariances du bruit de mesure à l'instant K .

Les bruits sont considérés comme blancs, gaussiens, centrés, indépendants entre eux et indépendants de l'état du système.

II.3.1. Fonctionnement du filtre de Kalman

L'estimation optimale consiste à trouver la meilleure estimation \hat{X}_K de l'état X_K en minimisant un critère qui est la variance de l'erreur d'estimation :

$$e_k = X_k - \hat{X}_k \quad (\text{II.2})$$

$$P_k = E(e_k e_k^T) \quad (\text{II.3})$$

Filtre de Kalman, travaille généralement en deux étapes Prédiction et mise à jour [4]. La phase de prédiction utilise l'état estimé de l'instant précédent pour produire une estimation courante. Dans l'étape de mise à jour, les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise [30].

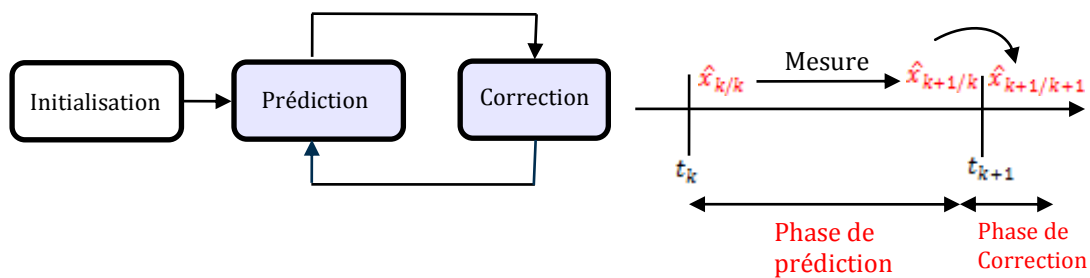


Figure (II. 1) Étapes du filtre de Kalman

➤ La phase de prédiction

On se place à l'instant k . A cet instant, on dispose d'une estimation initiale fondée sur la connaissance du processus et des mesures jusqu'à l'instant précédent, c'est-à-dire $k-1$. Cette estimation est appelée estimation à priori. Si on notera $\hat{X}_{k/k}$ l'estimation d'état à priori, donc l'erreur à priori est donnée par [10] :

$$e_{k/k-1} = X_k - \hat{X}_{k/k-1} \quad (\text{II.4})$$

Ainsi que la matrice de covariance de l'erreur à priori donnée par :

$$P_{k/k-1} = E(e_{k/k-1} e_{k/k-1}^T) = E((X_k - \hat{X}_{k/k-1})(X_k - \hat{X}_{k/k-1})^T) \quad (\text{II.5})$$

Les équations de la phase de prédiction sont :

$$\begin{cases} \hat{X}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{X}_{k-1/k-1} + B_{k-1} U_{k-1} \\ P_{k/k-1} = A_{k-1} P_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + Q_{k-1} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

➤ La phase de mise à jour (correction)

Nous allons, maintenant, utiliser la mesure Y_K pour corriger l'estimation à priori $\hat{X}_{K/K-1}$ obtenir l'estimation à posteriori $\hat{X}_{K/K}$.

L'erreur à posteriori est : $e_{K/K} = X_K - \hat{X}_{K/K}$ (II.7)

La matrice de covariance de l'erreur à posteriori s'écrit alors :

$$P_{K/K} = E(e_{K/K} e_{K/K}^T) = E((X_K - \hat{X}_{K/K})(X_K - \hat{X}_{K/K})^T) \quad (\text{II.8})$$

Les équations de la phase de correction sont :

$$\begin{cases} \hat{X}_{K/K} = \hat{X}_{K/K-1} + K_K (Y_K - C_K \hat{X}_{K/K-1}) \\ P_{K/K} = (I - K_K C_K) P_{K/K-1} \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

I : est la matrice identité de même taille que $P_{K/K-1}$

K: Gain de Kalman optimal [30].

$$K_K = P_{K/K-1} C_K^T (C_K P_{K/K-1} C_K^T + R_K)^{-1} \quad (\text{II.10})$$

II.3.2. Hypothèses

Nous supposons que :

H1 : La paire (A, C) est d'observable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et inobservable dans le système[31].

H2 : les signaux $w(t)$ et $v(t)$ sont des bruits blancs gaussiens centrés de Densité Spectrale de Puissance (DSP) W et V respectivement, c'est-à-dire :

$$E(W_K V_i^T) = 0, \forall K, i \quad (\text{II.11})$$

$$E(W_K W_i^T) = Q_K \delta_{iK} \quad (\text{II.12})$$

$$E(V_K V_i^T) = R_K \delta_{iK} \quad (\text{II.13})$$

H3 : V est inversible (il y a autant de sources de bruits blancs indépendantes que de mesures dans l'équation de mesure).

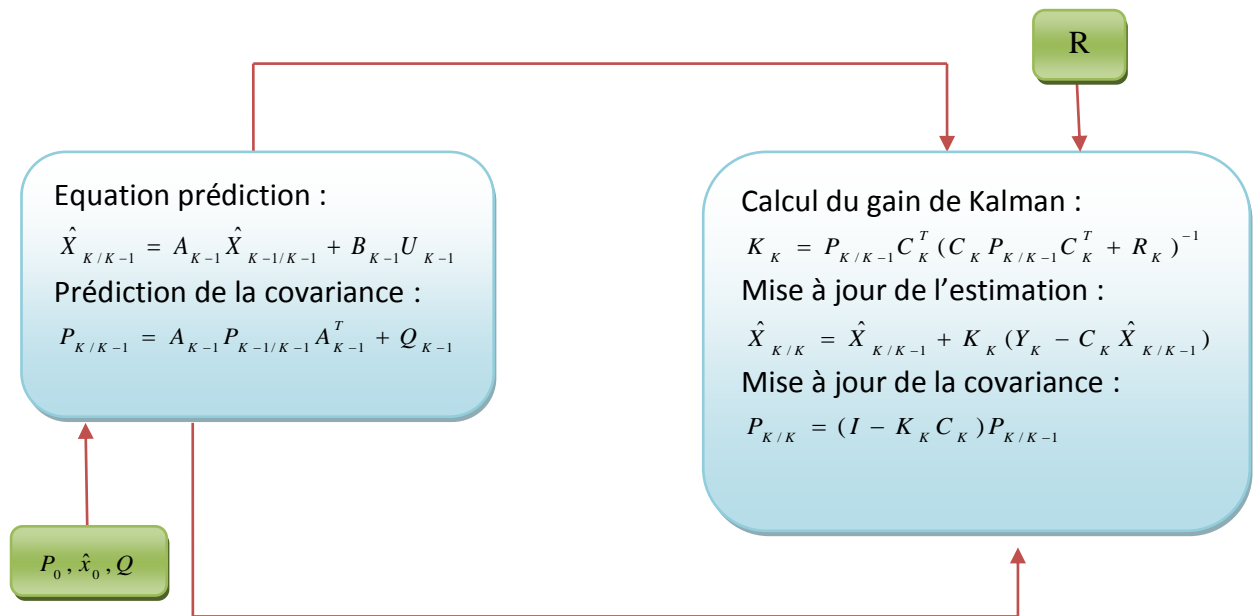


Figure (II. 2) Processus itératif du filtre de Kalman linéaire.

II.3.3. Algorithme du Filtre de Kalman standard

L'algorithme suivant indique les différentes étapes qui permettent d'obtenir un état estimé à chaque instant [32] [33] [34].

1) Initialisation (conditions initiales) :

Lors de l'exécution de l'algorithme il est nécessaire d'initialiser les grandeurs suivantes :

- ✓ Le Vecteur d'état initial,
- ✓ La Matrice de covariance d'erreur associée au vecteur d'état initial,
- ✓ La Matrice de covariance des bruits du système,
- ✓ La Matrice de covariance des bruits de mesures,
- ✓ La Matrice de transition d'état,
- ✓ La Matrice de mesure

2) Calcul de l'estimé $\hat{X}_{K/K-1}$ et de la matrice de covariance $P_{K/K-1}$ à partir des mesures

disponibles à l'instant $K-1$:

$$\begin{cases} \hat{X}_{K/K-1} = A_{K-1} \hat{X}_{K-1/K-1} + B_{K-1} U_{K-1} \\ P_{K/K-1} = A_{K-1} P_{K-1/K-1} A_{K-1}^T + Q_{K-1} \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

3) Calcul du gain de Kalman :

$$K_K = P_{K/K-1} C_K^T (C_K P_{K/K-1} C_K^T + R_K)^{-1} \quad (\text{II.15})$$

4) Mise à jour de l'estimation :

$$\hat{X}_{K/K} = \hat{X}_{K/K-1} + K_K (Y_K - C_K \hat{X}_{K/K-1}) \quad (\text{II.16})$$

5) Calcul de la matrice de covariance de l'erreur :

$$P_{K/K} = (I - K_K C_K) P_{K/K-1} \quad (\text{II.17})$$

6) Préparation du pas suivant [10] :

$$\begin{cases} \hat{X}_{K+1/K} = A_K \hat{X}_K + B_K U_K \\ P_{K+1/K} = A_K P_{K/K} A_K^T + Q_K \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

II.4. Filtre de Kalman étendu

Le filtre de Kalman standard décrit dans la première partie, permet d'estimer l'état d'un système linéaire (les coefficients des équations d'état sont constants) dans le cas contraire où les équations sont variables (système non linéaire) [35].

Le Filtre de Kalman étendu (EKF) permet d'appliquer le principe du filtre de Kalman pour estimer les états d'un système non-linéaire. Pour cela, les équations du système sont linéarisées autour d'un point de fonctionnement, correspondant dans le cas du EKF à l'état estimé [36]. La non linéarité peut être associée au modèle du processus, au modèle d'observation ou bien aux deux. Ces non linéarités dans le système rendent inapplicable le filtre de Kalman classique et il devient donc nécessaire d'adapter le EKF [30].

La linéarisation des équations du système autour d'un point de fonctionnement en utilisant les séries de Taylor, nous permet d'aboutir à des équations similaires au cas du filtre de Kalman linéaire [37], le filtre de Kalman linéarisé autour du point de fonctionnement actuel est le filtre de Kalman étendu. [38].

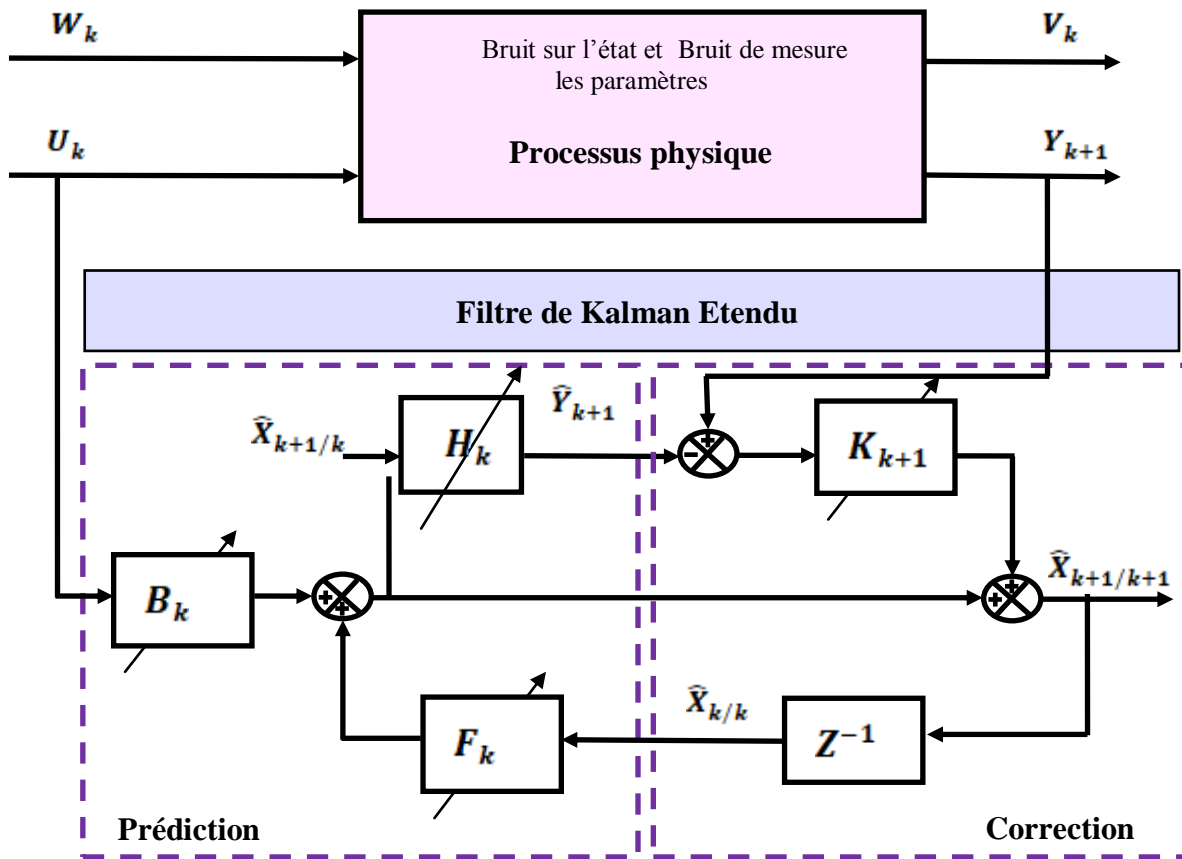


Figure (II. 3) Schéma d'un filtre de Kalman Étendu (EKF) associé à un processus physique.

Pour le cas d'un système non linéaire, les équations d'état et de mesure deviennent :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, w_k, u_k, k) \\ y_k = h(x_k, v_k, k) \end{cases} \quad \begin{cases} w_k \rightarrow N(0, Q_k) \\ v_k \rightarrow N(0, R_k) \end{cases} \quad (II.19)$$

De la même manière que dans le cas de filtre de Kalman simple, w et v sont des bruits blancs, gaussiens, de moyenne nulle et de variances respectives Q et R [30]. Les hypothèses faites précédemment sur ces bruits restent toujours valables [29].

II.4.1. Équations du filtre de Kalman étendu (EKF)

Les fonctions f et h (de l'équation (II.19) représentant respectivement la fonction d'évolution d'état et la fonction de mesure) ne sont pas des fonctions linéaires [36]. Comme il n'est pas possible de les utiliser directement pour obtenir les équations du filtre de Kalman étendu (calcul des matrices de covariance d'erreur et du gain de Kalman), on utilise les matrices Jacobéennes. Ces dernières sont calculées à chaque instant, autour du point

d'estimation courant \hat{X} . Le développement en série de Taylor des équations (II.19) s'écrit comme suit [39] [40] :

$$\begin{cases} X_{k+1} = f(\hat{X}_k, W_k, K) + A_k (X_k - \hat{X}_k) + F_k (W_k - \hat{W}_k) \\ Y_k = h(\hat{X}_k, V_k, K) + H_k (X_k - \hat{X}_k) + G_k (V_k - \hat{V}_k) \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

Et comme les vecteurs de bruit W_k et V_k ont, par hypothèse, une moyenne nulle les équations (II.20) sont approximées en considérant les estimés des bruits comme nuls :

$$\begin{cases} X_{k+1} = f(\hat{X}_k, 0, K) + A_k (X_k - \hat{X}_k) + F_k (W_k) \\ Y_k = h(\hat{X}_k, 0, K) + H_k (X_k - \hat{X}_k) + G_k (V_k) \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

On a alors :

Avec :

A_k : Matrice Jacobienne des dérivées partielles du modèle dynamique f par rapport à x :

$$A_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k} \quad (\text{II.22})$$

F_k : Matrice Jacobienne des dérivées partielles du modèle dynamique f par rapport à

$$w : \quad F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{w=\hat{w}_k} \quad (\text{II.23})$$

H_k : Matrice Jacobienne des dérivées partielles du modèle de mesure h par rapport à

$$x : \quad H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k} \quad (\text{II.24})$$

G_k : Matrice Jacobienne des dérivées partielles du modèle de mesure h par rapport à

$$v : \quad G_k = \left. \frac{\partial h}{\partial v} \right|_{v=\hat{v}_k} \quad (\text{II.25})$$

A partir de là, les équations de prédiction et de correction deviennent :

Équations de prédiction :

$$\begin{cases} \hat{X}_{k/k-1} = f(\hat{X}_{k-1/k-1}, 0) \\ P_{k/k-1} = A_{k-1} P_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + F_{k-1} Q_{k-1} F_{k-1}^T \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

Équations de correction :

$$\begin{cases} \hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (Y_k - h(\hat{X}_{k/k-1}, 0)) \\ P_{k/k} = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

$$\begin{cases} \hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (Y_k - h(\hat{X}_{k/k-1}, 0)) \\ P_{k/k} = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \end{cases}$$

$$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (Y_k - h(\hat{X}_{k/k-1}, 0))$$

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + G_k R_k G_k^T)^{-1}$$

$$P_{k/k} = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \quad (\text{II.28})$$

II.4.2. Algorithme du filtre de Kalman étendu

A l'issue de ce qui précède, les différentes étapes de l'algorithme de Kalman étendu sont les suivantes [33] :

1) Initialisation du processus :

$$\begin{aligned}\hat{x}_0 &= E[x_0] \\ p_0 &= E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \\ Q_0 &= E[(w - \bar{w})(w - \bar{w})^T] \\ R_0 &= E[(v - \bar{v})(v - \bar{v})^T]\end{aligned}\tag{II .29}$$

2) Calcul des matrices Jacobéennes de fonction non linéaire f autour de l'état précédent $(K - 1)$:

$$A_{k-1} = \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1/k-1}}\tag{II .30}$$

$$F_{k-1} = \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial w} \right|_{\hat{x}_{k-1/k-1}}\tag{II .31}$$

3) Prédiction de l'état à l'instant K par le calcul de l'estimé $\hat{X}_{k/k-1}$ et de la matrice de covariance $P_{k/k-1}$ à partir des mesures disponibles à l'instant $(K - 1)$:

$$\begin{cases} \hat{X}_{k/k-1} = f_{k-1}(\hat{X}_{k-1/k-1}, 0) \\ P_{k/k-1} = A_{k-1}P_{k-1/k-1}A_{k-1}^T + F_{k-1}Q_{k-1}F_{k-1}^T \end{cases}\tag{II .32}$$

4) Calcul des matrices Jacobiennes de fonction non linéaire h :

$$H_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k/k-1}}\tag{II .33}$$

$$G_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial v} \right|_{\hat{x}_{k/k-1}}\tag{II .34}$$

5) Correction de l'estimation par la mesure à partir des équations suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k/k} &= \hat{X}_{k/k-1} + K_k (Y_k - h(\hat{X}_{k/k-1}, 0)) \\ K_k &= P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + G_k R_k G_k^T)^{-1} \\ P_{k/k} &= (I - K_k H_k) P_{k/k-1}\end{aligned}\tag{II .35}$$

6- Bouclage sur l'étape 2**II.5. Le filtre de Kalman sans parfum**

A la différence du filtre de Kalman étendu, au lieu de faire une linéarisation des fonctions non linéaires \mathbf{f}_t et \mathbf{h}_t , le filtrage de Kalman sans parfum [41] [42] [43], utilise la technique de la transformation sans parfum [44] [45].

Étant donné une variable aléatoire de moyenne et covariance connues et une fonction non linéaire, on applique une technique d'échantillonnage déterministe autour de la valeur moyenne pour obtenir des échantillons appelés sigma-points, qui sont ensuite transformés par la fonction non linéaire. Moyenne et covariance de la fonction non linéaire de la variable aléatoire sont ensuite approchées par moyenne sur les sigma-points [46].

II.5.1. Principe de la transformation Unscented (UT)

Étant donné le vecteur d'état à l'étape $k-1$, un ensemble de «Points sigma» est calculé et stocké dans les colonnes de la matrice de points de taille $n * (2n + 1)$ et notée X_{k-1} . Ces points échantillons représentent les moyennes et covariances, ils sont calculés en utilisant un algorithme déterministe.

$$\begin{cases} x_{0,k} = \hat{x}_{k-1} \\ x_{i,k} = \hat{x}_{k-1} + (\sqrt{(n + \lambda) p_{k-1}})_i; i = 1 \dots n \\ x_{i,k} = \hat{x}_{k-1} - (\sqrt{(n + \lambda) p_{k-1}})_i; i = n + 1 \dots 2n \\ w_0^{(m)} = \lambda / (n + \lambda); w_0^{(c)} = \lambda / (\lambda + n) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ w_i^{(m)} = w_i^{(c)} = 1 / (2(\lambda + n)); i = 1 \dots 2n \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

$(\sqrt{(n + \lambda) p_{k-1}})_i$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de la racine carrée de la matrice $(n + \lambda) p_{k-1}$ en utilisant la décomposition de Cholesky; avec: $\lambda = \alpha^2 (d + k) - d$, λ un facteur d'échelle qui est fonction du paramètre. Celui-ci contrôle la répartition des points x_i autour de sa moyenne. α prend en général de faibles valeurs. κ est un second facteur d'échelle, qui est pris égal à 0 habituellement. β est un paramètre qui est lié au type de distribution de x (pour une distribution Gaussienne, $\beta = 2$). Une fois le vecteur X_{k-1} calculé, on exécute l'étape de prédiction en propageant d'abord chaque colonne de X_{k-1} en utilisant le modèle du système (chaque point de sigma est instancié par le modèle du processus pour rapporter un ensemble d'échantillons transformés)[47]:

$$x_{i,k} = f(x_{i,k-1}) \quad (\text{II.36})$$

Ayant calculé $X_{k,l}$, l'estimation a priori de l'état est:

$$\hat{X}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2n} w_i^{(m)}(x_{i,k}) \quad (\text{II.37})$$

De même, on calcule la covariance d'erreur a priori avec :

$$P_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2n} w_i^{(c)} (x_{i,k} - \hat{x}_{k/k-1}) * (x_{i,k} - \hat{x}_{k/k-1}) \quad (\text{II.38})$$

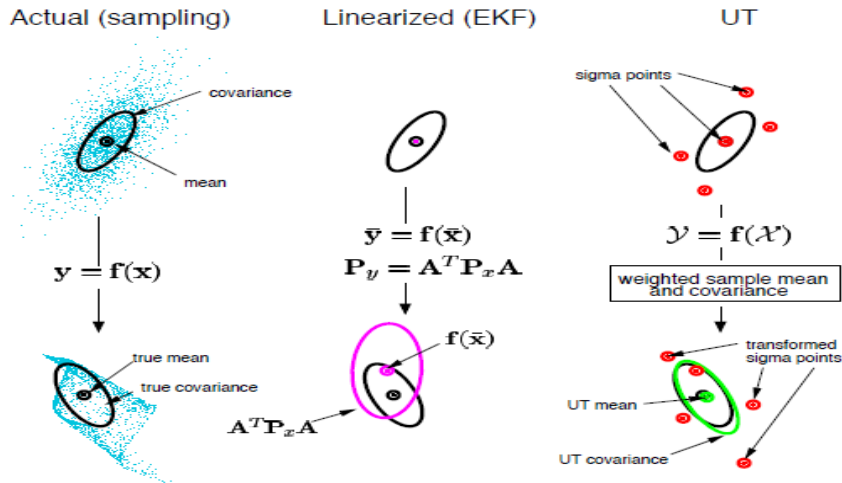


Figure (II. 4) Principe de la transformation Unscented (UT).

Pour résumer, voici les étapes ci-dessous qu'effectue la transformation non parfumée :

- ✚ Calculer un ensemble de points Sigma
- ✚ Attribuer des poids à chaque point sigma
- ✚ Transformer les points par une fonction non linéaire
- ✚ Calculer gaussien à partir de points pondérés et transformés
- ✚ Calculez la moyenne et la variance de la nouvelle gaussienne.

II.5.2. L'algorithme du filtre de Kalman non parfumé (UKF)

L'algorithme du filtre de Kalman non parfumé utilise la transformation non parfumée pour capturer la propagation des propriétés statistiques d'estimation d'état par le biais de fonctions non linéaires. L'algorithme génère d'abord un ensemble de valeurs d'état appelées **points sigma**. Ces points sigma capturent la moyenne et la covariance des estimations de l'état. L'algorithme utilise chacun des points sigma en tant qu'entrée des fonctions de mesure et de transition d'état pour obtenir un nouvel ensemble de points d'état transformés. La moyenne et la covariance des points transformés sont ensuite utilisées pour obtenir des estimations d'état et une covariance d'erreur d'estimation d'état [48].

Supposons que les équations de transition d'état et de mesure d'un système non linéaire à temps discret à états M comportent des termes de processus et de bruit de mesure additifs à moyenne nulle et à covariances Q et R , respectivement :

$$x[k+1] = f(x[k], u[k]) + w[k]$$

$$y[k] = h(x[k], u[k]) + v[k]$$

$$w[k] \sim (0, Q[k])$$

$$v[k] \sim (0, R[k])$$

Vous fournissez les valeurs initiales de Q et R dans les propriétés Bruit de processus et Bruit de mesure de l'objet filtre de Kalman non parfumé.

L'algorithme de filtrage récursif de l'UKF a été obtenu par Julier et Uhlmann en définissant l'état augmenté du système x_k^a , comme la concaténation de l'état x_k et des bruits w_k et v_k à l'instant k soit, $x_k^a = (x_k, w_k, v_k)^T$ où x_k^a est donc un vecteur de dimension $d_a = 2d + m$, m étant la dimension du vecteur de mesure. L'UKF calcule donc à chaque instant la moyenne conditionnelle \bar{x}_k et la variance a posteriori P_k :

$$\text{On pose : } p_k^a = \text{Cov}(x_k^a | y_{0:k}) = \begin{pmatrix} p_k & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}$$

➤ **Initialisation :**

1. $\bar{x}_0 = E(x_0)$
2. $p_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$
3. $p_0^a = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}$ Pour $k = 1 \dots n$

➤ **Calcul des sigma-points :**

$$1. x_{k-1}^{a,i} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{k-1}^a & \bar{x}_{k-1}^a \pm \sqrt{(d_a + k) p_{k-1}^{a,i}} \end{bmatrix} \quad i = 1 \dots 2d_a$$

Où $\sqrt{(d_a + k) p_{k-1}^{a,i}}$ représente la $i^{\text{ème}}$ colonne de la décomposition de Cholesky de $(d_a + k) p_{k-1}^{a,i}$

➤ **Prédiction**

1. $x_{k/k-1}^{x,i} = f_x(x_{k-1}^{x,i}, x_{k-1}^{w,i})$
2. $\bar{x}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2d_a} w_i x_{k/k-1}^{x,i}$
3. $p_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2d_a} w_i (x_{k/k-1}^{x,i} - \bar{x}_{k/k-1})(x_{k/k-1}^{x,i} - \bar{x}_{k/k-1})^T$
4. $y_{k/k-1}^i = h_k(x_{k-1}^{x,i}, x_{k-1}^{v,i})$
5. $\bar{y}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2d_a} w_i y_{k/k-1}^i$

➤ **Correction**

$$\begin{aligned}
1. \quad p_{k/k-1}^y &= \sum_{i=0}^{2d_a} w_i (y_{k/k-1}^i - \bar{y}_{k/k-1})(y_{k/k-1}^i - \bar{y}_{k/k-1})^T \\
2. \quad p_{k/k-1}^{xy} &= \sum_{i=0}^{2d_a} w_i (x_{k/k-1}^{x,i} - \bar{x}_{k/k-1})(y_{k/k-1}^i - \bar{y}_{k/k-1})^T \\
3. \quad k_k &= p_{k/k-1}^{xy} p_{k/k-1}^{y, -1} \\
4. \quad \bar{x}_k &= \bar{x}_{k/k-1} + k_k (\bar{y}_k - \bar{y}_{k/k-1}) \\
5. \quad p_k &= p_{k/k-1} + k_k p_{k/k-1}^y k_k^T
\end{aligned}$$

En général, le filtre de Kalman sans parfum fait partie de la famille de filtres appelée sigma-points Kalman filtre [49] ou linéaire régression Kalman filtre [50] ; Aussi, pour avoir une approximation gaussienne de la loi de filtrage, on doit utiliser une approche d'échantillonnage déterministe. Le choix du nuage de points prend une place très importante [51].

II.6. Conclusion

Le filtre de Kalman est un algorithme d'équations récurrentes optimales qui sont faciles à utiliser en calcul automatique et dont les deux équations de base regroupent toute l'information disponible [10].

Dans ce chapitre nous avons présenté un outil de filtrage de type stochastique qui est le filtre de Kalman simple utilisé dans le cas des systèmes linéaires puis nous avons introduit le filtre de Kalman étendu pour le cas des systèmes non linéaires. [30]

Le filtre de Kalman sans parfum [52] offre un éventail au filtre de Kalman étendu. Cela permet d'éviter les deux principaux inconvénients du filtre de Kalman étendu, telle que les erreurs de linéarisation et les difficultés d'implémentation des matrices Jacobiennes. La solution ramenée par ce type du filtre (UKF) basée sur la transformation non parfumée (UT) a permis de simplifier l'algorithme en éliminant le besoin de calculer des Jacobiennes à chaque étape et à chaque point de fonctionnement.

Chapitre .III. Application des Filtres de Kalman à l'estimation d'état des systèmes non linéaire

III.1. Introduction

Le but de ce chapitre n'est pas d'étudier d'une manière exhaustive la modélisation des systèmes non linéaires. Mais on se contentera de savoir modéliser rapidement et simplement les systèmes à étudier et d'apprendre à écrire à partir des équations différentielles le modèle du système en question sous forme d'état non linéaire continu stochastique (i.e. en tenant compte de la présence de bruits d'état et de mesure) puis on le discrétise. Ce dernier sera associé particulièrement aux deux variantes du Filtre de Kalman à savoir l'étendu et le non parfumé en vue d'estimation de leurs variables d'état. La simulation de certains systèmes types sous Matlab nous permettra la validation de ces modèles ainsi développés.

III.2. Classification des systèmes

(Linéaires et non linéaires, déterministes et stochastiques)

III.3. Application des filtres de Kalman à l'estimation d'état des systèmes

III.3.1. Cas du pendule simple

III.3.1.a. Présentation

En physique, le pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil sans masse et de longueur l , inextensible et sans raideur et oscillant sous l'effet de la pesanteur, il s'agit du modèle du pendule pesant le plus simple [54], le pendule simple représenté en figure (III.1).

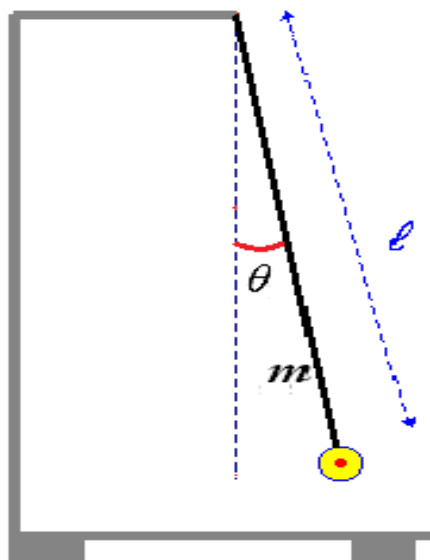


Figure (III. 1) Modèle d'un pendule simple.

On note θ l'angle que fait la corde avec la verticale. Afin d'écrire les équations du mouvement, il est nécessaire d'identifier les forces agissant sur la masse. Tout d'abord, il y a la force gravitationnelle donnée par $F_g=mg$ où g est l'accélération de la gravité. On suppose de plus que la masse est soumise à une force extérieure définie sous forme d'un couple moteur u .

III.3.1.b. Modèle dynamique et modèle d'état

En appliquant le principe fondamental de la dynamique par projection sur l'axe tangentiel, on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{k}{m} \dot{\theta} + \frac{1}{ml^2} u \tag{III.1}$$

A partir de ce modèle mathématique, il est possible de dériver un modèle dans l'espace d'état non linéaire en choisissant les variables d'états [55] :

- $x_1 = \theta \Rightarrow$ Représente la position angulaire.
- $x_2 = \dot{\theta} \Rightarrow$ Représente la vitesse angulaire.

Donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{k}{m} \dot{\theta} + \frac{1}{ml^2} u \end{cases} \tag{III.2}$$

Avec : $J = ml^2$
 k est le coefficient de frottements

Le système est alors complètement décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix} u \\ y = h(x) = x_1 \end{cases} \tag{III.3}$$

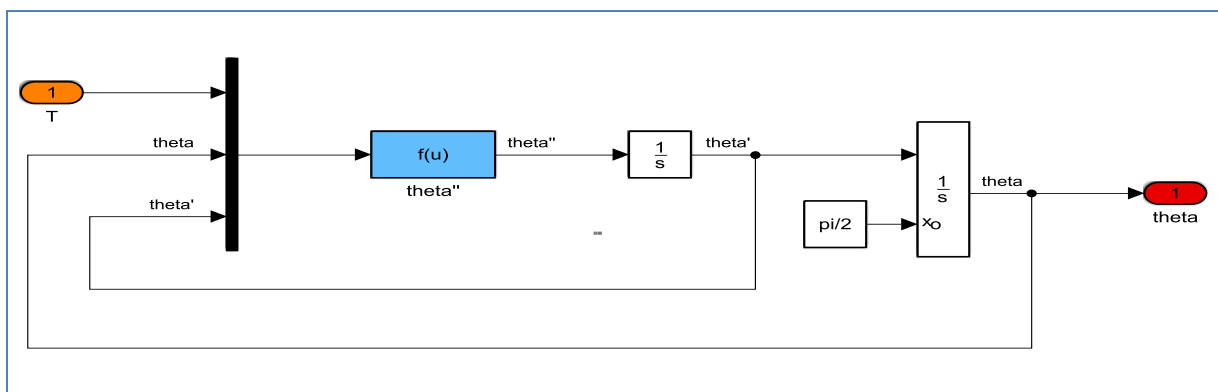


Figure (III. 2) Schéma block de simulation d'un pendule simple.

Tableau (III.1) : Les paramètres du pendule simple

Définition	Symbole	Valeur numérique
Longueur du bras	l	1m
La masse du bras	m	0.25kg
Accélération de la pesanteur	g	10m /s
Coefficient de frottements	k	0.005N.m.s/rad

III.3.1.c. Modèle d'état discret non linéaire

D'après Euler on peut discrétiser le modèle continu précédent (III.3) comme suit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{X_1(K+1) - X_1(K)}{T_e} \\ \frac{X_2(K+1) - X_2(K)}{T_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2(K) \\ -\frac{g}{l} \sin(X_1(K)) - \frac{k}{m} X_2(K) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix} u \\ y = h(x) = X_1(K) \end{cases} \tag{III.4}$$

On obtient alors le modèle discret non linéaire suivant :

$$\begin{cases} X(K+1) = X(K) + \begin{pmatrix} X_2(K) \\ -\frac{g}{l} \sin(X_1(K)) - \frac{k}{m} X_2(K) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix} u \\ y = h(K) = X_1(K) \end{cases} \tag{III.5}$$

Où T_e : est la période d'échantillonnage

III.3.1.d. Estimation par filtre de Kalman

Après avoir discrétisé le modèle continu du pendule simple ainsi développé, on l'associe au filtre de Kalman comme le montre la figure ci-dessous :

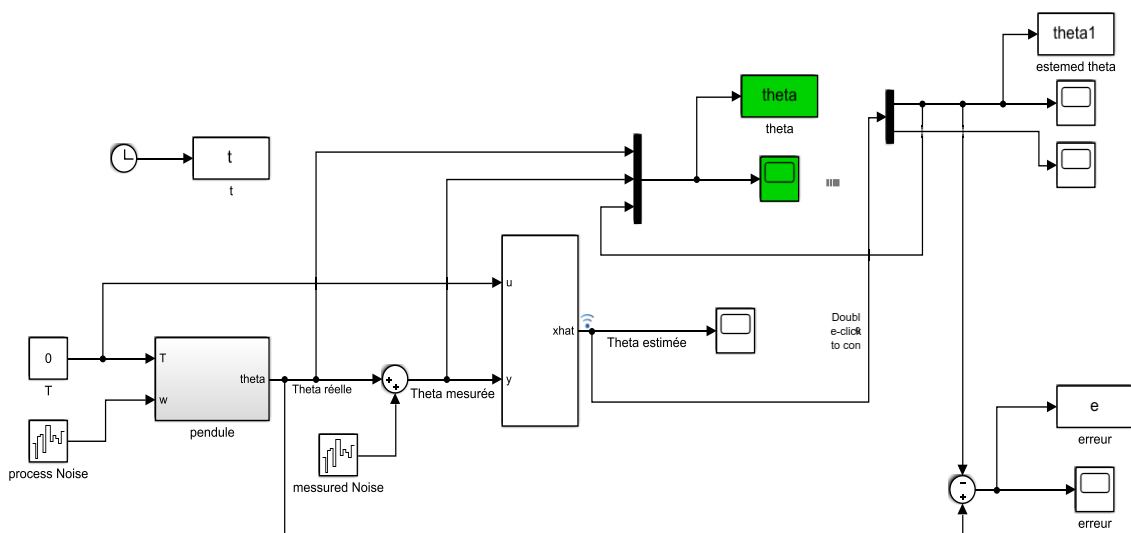


Figure (III. 3) Schéma block du pendule simple avec filtre de Kalman.

➤ **Cas de petites oscillations avec frottements :**

Si $\theta \ll \Rightarrow \sin(\theta) \cong \theta$, donc le modèle précédent devient linéaire et s'écrit alors:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}x_1 & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix} u \\ y = h(x) = x_1 \end{cases} \quad (III.6)$$

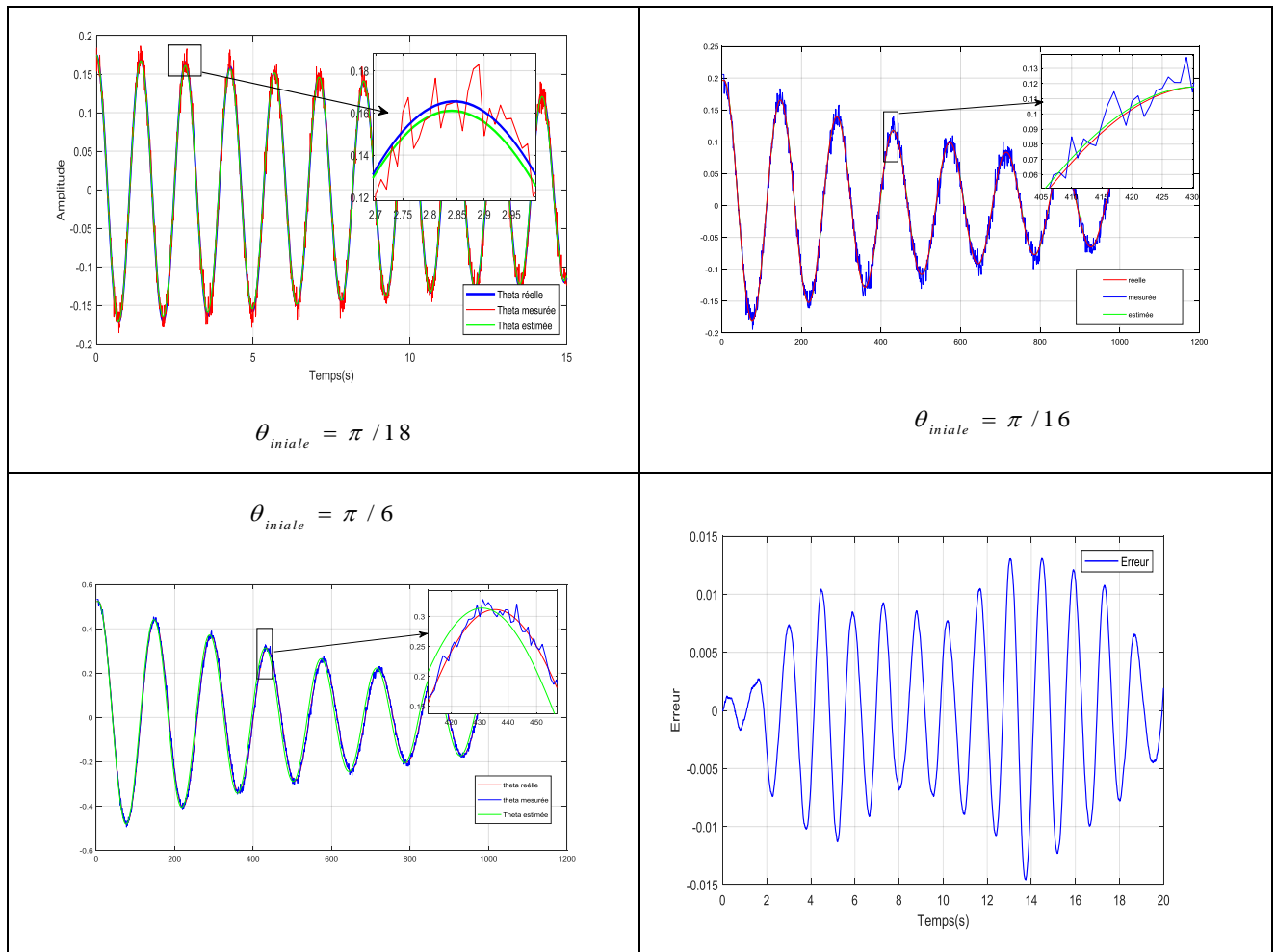


Figure (III. 4) Évolution de l'angle Θ réelle, mesurée et estimée par filtre de Kalman ainsi que l'erreur d'estimation.

➤ **Cas de petites oscillations avec frottements :**

Si $\theta \gg \Rightarrow \sin(\theta) \neq \theta$, donc le modèle précédent s'écrit sous sa forme non linéaire:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{mgl}{J}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{J}u \end{cases} \quad (III.7)$$

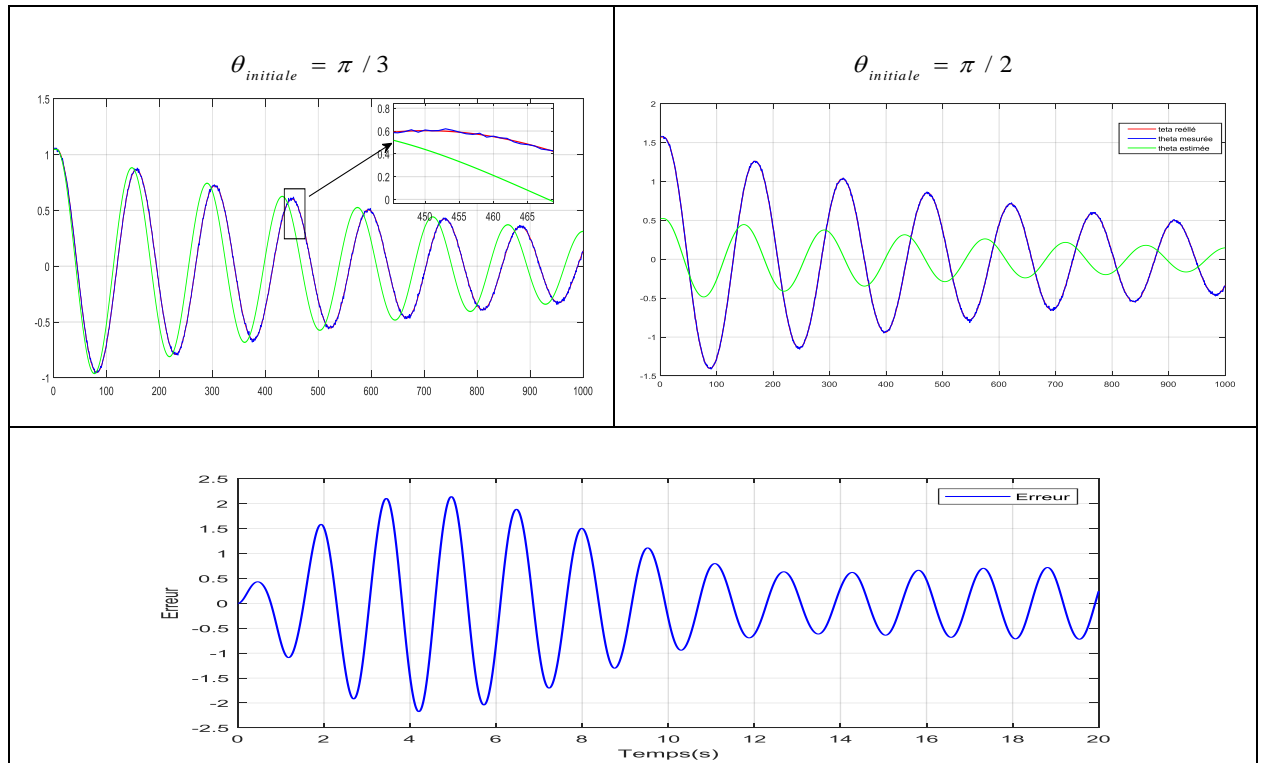
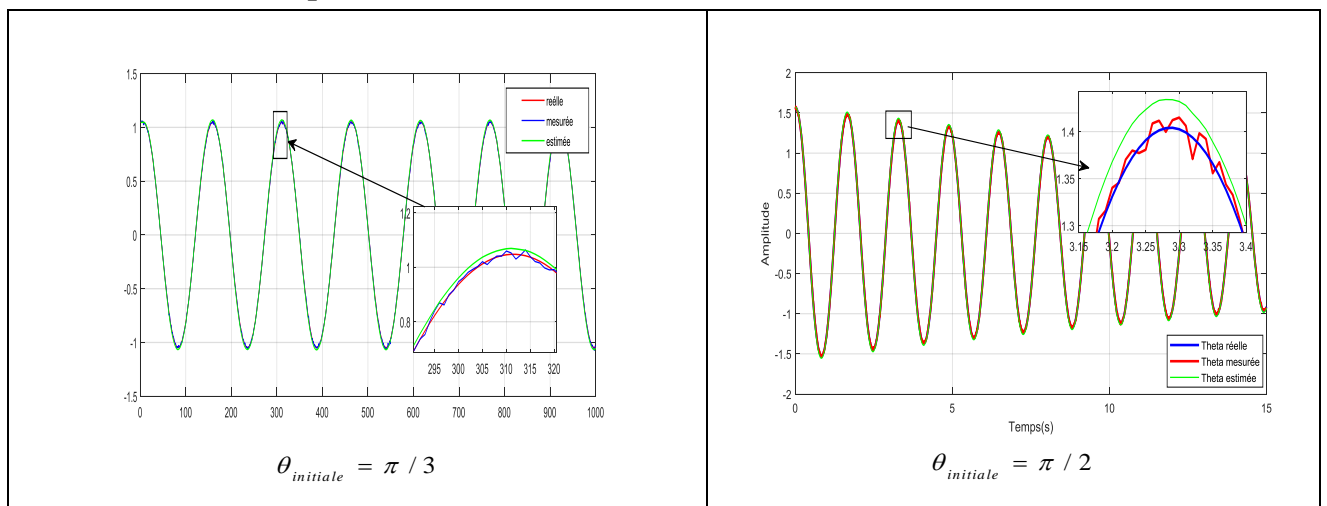


Figure (III. 5) Évolution de l'angle Θ réelle, mesurée et estimée par filtre de Kalman ainsi que l'erreur d'estimation.

Dans la première simulation (figure III.1) du pendule simple avec le filtre de Kalman standard, on constate que lorsque l'angle θ est faible (modèle linéaire) on obtient une bonne estimation (l'erreur très petit). Pour la deuxième simulation où la valeur θ est très grande (figure III.2) (i.e. le modèle devient non linéaire) on aura alors une estimation avec une grande erreur (i.e. la grandeur estimée ne suit plus la grandeur réelle).

III.3.1.e. Estimation par filtre de Kalman étendu



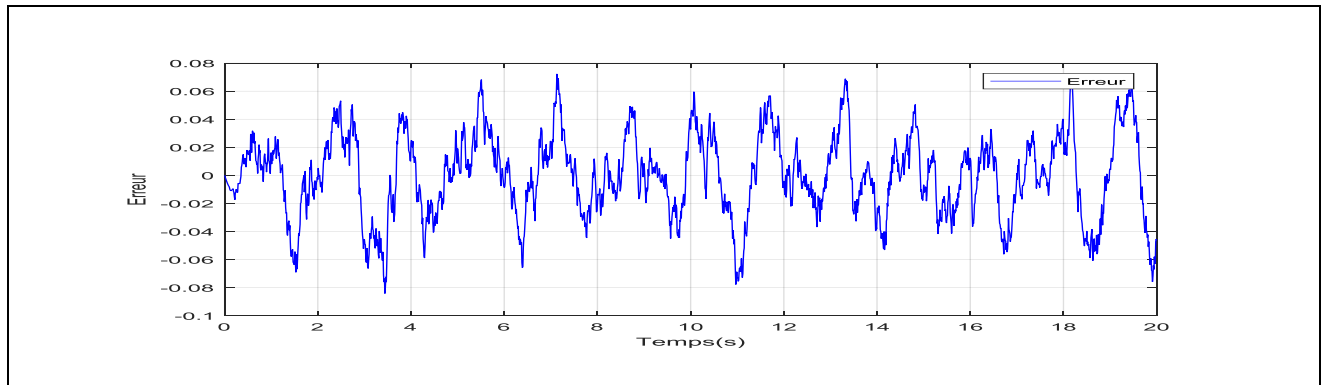


Figure (III. 6) Évolution de l'angle Θ réelle, mesurée et estimée par filtre de Kalman ainsi que l'erreur d'estimation.

D'après la figure (III.6), on constate que lorsque le pendule simple est associé au filtre de Kalman étendu (EKF), l'erreur d'estimation pour les deux cas traités ($\Theta=\pi/3$ et $\pi/2$) est relativement bonne aussi bien pour valeurs faibles que pour de grandes valeurs de l'angle θ .

III.3.2. Cas du pendule inverse

III.3.2.a. Présentation

Souvenez-vous quand vous étiez petit et que vous essayiez de tenir en équilibre une tige sur votre doigt. Vous deviez en permanence ajuster la position de votre main pour stabiliser la tige. Le pendule inversé fait la même chose, la seule différence étant que son support (le chariot) se translate dans une seule direction, alors que le doigt se déplace dans toutes les directions. Depuis 1950, les pendules inversés sont des plates-formes d'expérimentations classiques dans les laboratoires d'automatique. Ils ont été utilisés pour illustrer des idées de commande linéaire comme la stabilisation des systèmes instables [56].

Vue leur nature non linéaire on s'intéresse donc à l'étude du pendule inversé. Dans cette section, nous expliquerons son principe de fonctionnement, par la suite nous élaborons son modèle mathématique en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange. Enfin nous présentons ce système dans l'espace d'état ainsi que les résultats de simulation [57].

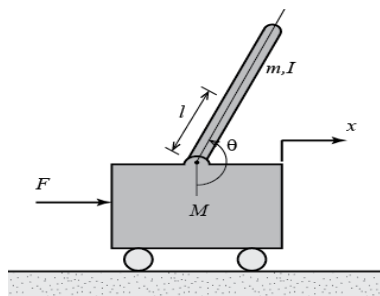


Figure (III. 7) Schémas de l'ensemble chariot pendule inversé [3].

Tableau (III.2) Paramètres de l'ensemble chariot et pendule.

Paramètre	valeur	Description
M	2.3Kg	Masse du chariot
m	0.2Kg	Masse du pendule
l	0.3m	Demi-longueur du pendule
F(t)	/	Forces exercées sur le chariot
X(t)	/	Position du chariot
Θ(t)	/	l'angle du pendule
d	0.005(Nms/rad)	Coefficient de Frottements du pendule
b	0.00005Ns.m	Coefficient de Frottements du déplacement du chariot
g	9.81 m.s ²	Intensité de la pesanteur
J	0.0099	Inertie du pendule en son centre de masse

III.3.2.b. Modélisation du pendule inversé

Il existe deux méthodes de détermination des équations du mouvement d'un pendule inversé : celle de la loi fondamentale de la dynamique de Newton qui est basée sur le concept de force, et celle de formalisme d'Euler-Lagrange [58] [59], qui est basée sur le principe de la conservation d'énergie mécanique. Dans ce travail on s'intéresse au formalisme d'Euler-Lagrange dans lequel le lagrangien (L) défini comme une différence entre l'énergie cinétique (E_C) et l'énergie potentielle (E_P) du système :

$$L = E_C - E_P \quad (\text{III.8})$$

✚ L'énergie cinétique du système en mouvement

L'énergie cinétique du chariot est donnée par l'équation :

$$E_{cM} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (\text{III.9})$$

\dot{x} : La vitesse du chariot

L'énergie cinétique du pendule est exprimée par l'équation :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m v_p^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (\text{III.10})$$

$\dot{\theta}$: La vitesse angulaire du pendule.

v_p : La vitesse du centre de gravité du pendule.

j = Moment d'inertie du pendule

- La position du chariot est exprimée par l'équation :

$$\dot{x}_c = (\dot{x} + l \sin \theta) i + (l \cos \theta) \dot{\theta} j \quad (\text{III.9})$$

i, j : étant les vecteurs unitaires du repère x, y.

✚ D'où la vitesse du centre de gravité du pendule est :

$$v_c = \frac{dx_c}{dt} = (\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta) i - (l\dot{\theta} \sin \theta) j \quad (\text{III.10})$$

En substituant l'équation (III.11) dans l'équation (III.10), l'expression de l'énergie cinétique du pendule devient :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{III.11})$$

Après simplification du terme ($\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$)

Finalement, l'énergie cinétique totale chariot-pendule est donc :

$$E_c = E_{cm} + E_{cM} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{III.12})$$

✚ L'énergie potentielle du système

Le chariot étant en mouvement sur un rail horizontal, seul le pendule en mouvement possède une énergie potentielle, l'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par :

$$E_p = m g l \cos \theta \quad (\text{III.13})$$

✚ Équations d'Euler-Lagrange :

Quand on établit les expressions de l'énergie cinétique E_c de l'ensemble chariot-pendule (III.12) et l'énergie potentielle du système E_p (III.13) on utilise l'équation générale d'Euler-Lagrange pour déterminer les équations du mouvement de l'ensemble chariot pendule :

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta \quad (\text{III.14})$$

L'équation générale d'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D_f}{\partial \dot{q}} = F_j \quad (\text{III.15})$$

q : Désigne les degrés de liberté du pendule

D_f : Désigne l'énergie dissipée par frottement

F : La force généralisée

L : Représente le lagrangien

En considérant que le système ait deux degrés de liberté, x pour le déplacement horizontal du chariot et θ pour la rotation du pendule, la modélisation du système selon la loi générale l'Euler-Lagrange est donnée par :

✚ Pour le degré de liberté $q = x$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F - b \dot{x} \quad (\text{III.16})$$

La première équation de Lagrange s'écrit alors :

$$(M + m) \ddot{x} + ml \ddot{\theta} \cos \theta - ml \dot{\theta}^2 \sin \theta = F - b \dot{x} \quad (\text{III.17})$$

✚ Pour le degré de liberté $q = \theta$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -d \dot{\theta} \quad (\text{III.18})$$

La deuxième équation de Lagrange est :

$$(ml^2 + J) \ddot{\theta} + ml \ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta = -d \dot{\theta} \quad (\text{III.19})$$

III.3.2.c. Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule

Afin d'obtenir le modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule, on utilise les deux équations obtenues précédemment (III.17) et (III.19), le vecteur d'état est :

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T \quad (\text{III.20})$$

Après quelques manipulations mathématiques, on obtient le modèle non linéaire (III.21) où la grandeur de commande est la force F :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-bn}{hn - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_2 - \frac{m^2 l^2 g}{hn - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \cos x_3 \sin x_3 + \\ \frac{mdl \cos x_3}{hn - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4 + \frac{m \ln \sin x_3}{hn - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4^2 + \frac{Fn}{hn - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{mgl}{n} \sin x_3 - \frac{d}{n} x_4 + \frac{mlb \cos x_3}{hn - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_2 + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 x_3 \sin x_3}{n(nh - m^2 l^2 \cos^2 x_3)} \\ - \frac{m^2 l^2 d \cos^2 x_3}{n(nh - m^2 l^2 \cos^2 x_3)} x_4 - \frac{m^2 l^2 \cos x_3 \sin x_3}{nh - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4^2 - \frac{mlF}{nh - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \cos x_3 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

Avec : $n=ml^2+J$ et $h=M+m$

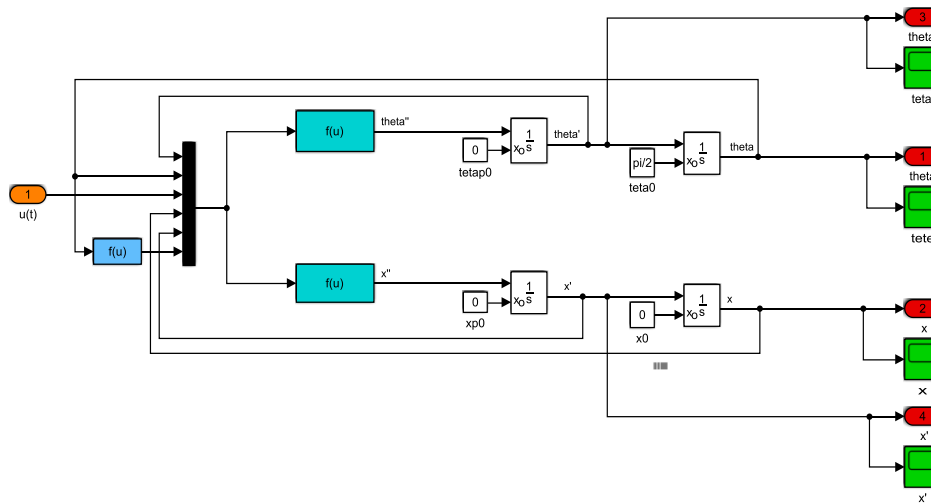


Figure (III. 8) Schéma block d'un pendule inversé

III.3.2.d. Modèle d'état discret de l'ensemble chariot-pendule

La représentation d'état discrète de l'ensemble chariot-pendule, en utilisant la méthode d'Euler et en prenant T_e comme période d'échantillonnage est obtenu comme suit:

$$\begin{cases}
 \frac{X_1(K+1) - X_1(K)}{T_e} = X_2(K) \\
 \frac{X_2(K+1) - X_2(K)}{T_e} = \frac{-bn}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} X_2(K) - \frac{m^2 l^2 g}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} \cos X_3(K) \sin X_3(K) + \\
 \frac{mdl \cos X_3(K)}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} X_4(K) + \frac{m \ln \sin X_3(K)}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} X_4(K)^2 + \frac{Fn}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} \\
 \frac{X_3(K+1) - X_3(K)}{T_e} = X_4(K) \\
 \frac{X_4(K+1) - X_4(K)}{T_e} = \frac{mgl}{n} \sin X_3(K) - \frac{d}{n} X_4(K) + \frac{mlb \cos X_3(K)}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} X_2(K) + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 X_3(K) \sin X_3(K)}{n(nh - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K))} \\
 - \frac{m^2 l^2 d \cos^2 X_3(K)}{n(nh - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K))} X_4(K) - \frac{m^2 l^2 \cos X_3(K) \sin X_3(K)}{nh - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} X_4(K)^2 - \frac{m l F}{nh - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} \cos X_3(K) \\
 y_1 = X_1(K) \\
 y_2 = X_3(K)
 \end{cases} \tag{III.22}$$

Après simplification on obtient le système d'équations discret suivant :

$$\begin{pmatrix} X_1(K+1) \\ X_2(K+1) \\ X_3(K+1) \\ X_4(K+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(K) \\ X_2(K) \\ X_3(K) \\ X_4(K) \end{pmatrix} + T_c \begin{pmatrix} X_2(K) \\ \frac{-bn}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} X_2(K) - \frac{m^2 l^2 g}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} \cos X_3(K) \sin X_3(K) + \\ \frac{mdl \cos X_3(K)}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} X_4(K) + \frac{m \ln \sin X_3(K)}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} X_4(K)^2 + \frac{Fn}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} \\ X_4(K) \frac{mgl}{n} \sin X_3(K) - \frac{d}{n} X_4(K) + \frac{mlb \cos X_3(K)}{hn - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} X_2(K) + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 X_3(K) \sin X_3(K)}{n(nh - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K))} \\ - \frac{m^2 l^2 d \cos^2 X_3(K)}{n(nh - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K))} X_4 - \frac{m^2 l^2 \cos X_3(K) \sin X_3(K)}{nh - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} X_4(K)^2 - \frac{m l F}{nh - m^2 l^2 \cos^2 X_3(K)} \cos X_3(K) \end{pmatrix} \quad (III.23)$$

$y_1 = X_1(K)$
 $y_2 = X_3(K)$

III.3.2.e. Simulation et résultats

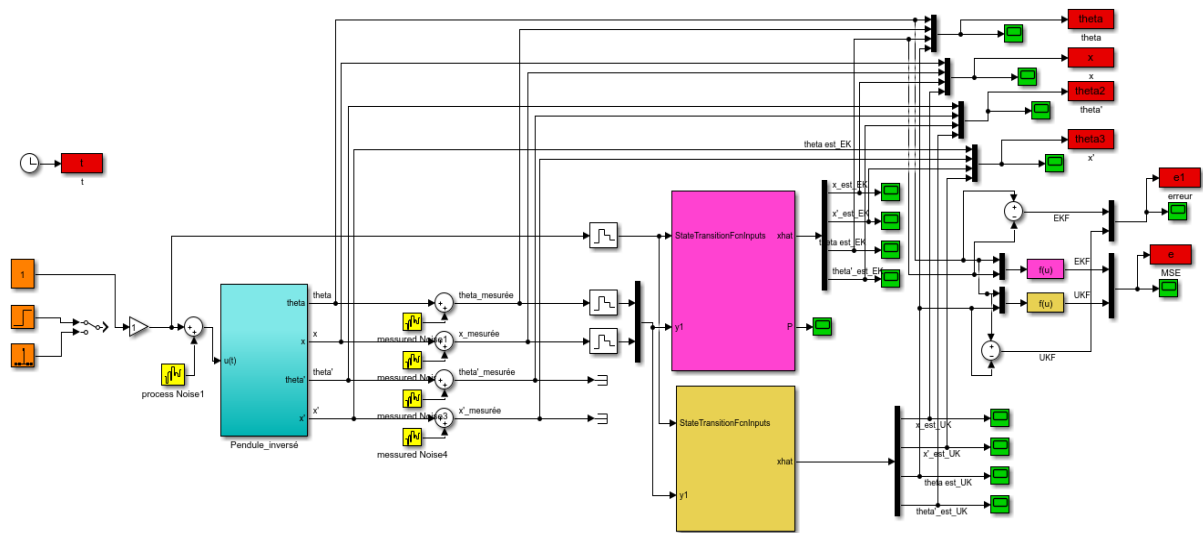


Figure (III. 9) Schéma de simulation d'un pendule inversé avec EKF et UKF

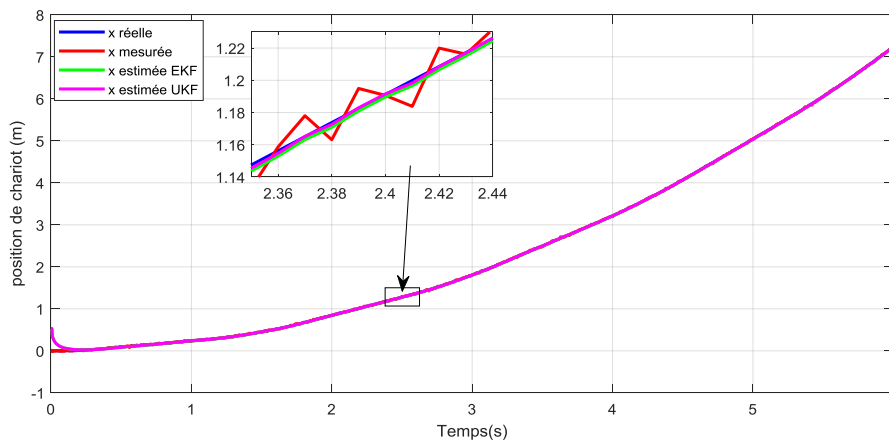


Figure (III. 10) Évolution de la position x(t) réelle, mesurée et estimée par filtres EKF et UKF.

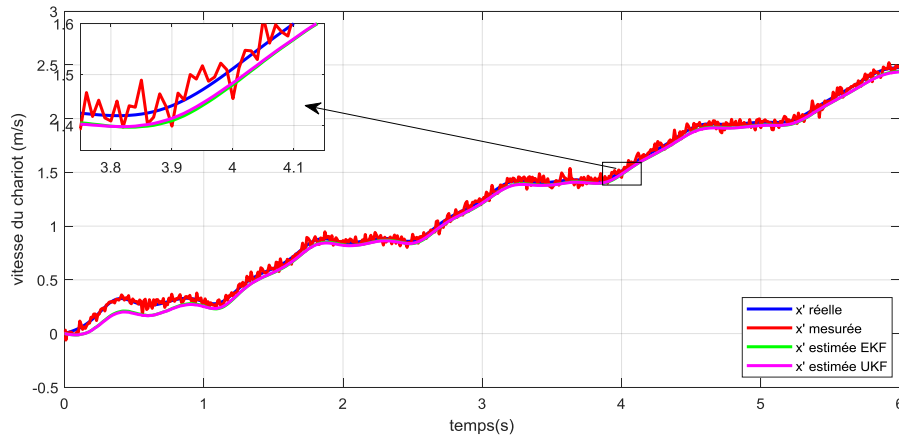


Figure (III. 11) Évolution de la vitesse du chariot $\dot{x}(t)$: valeurs réelle, mesurée et estimée par filtres EKF et UKF.

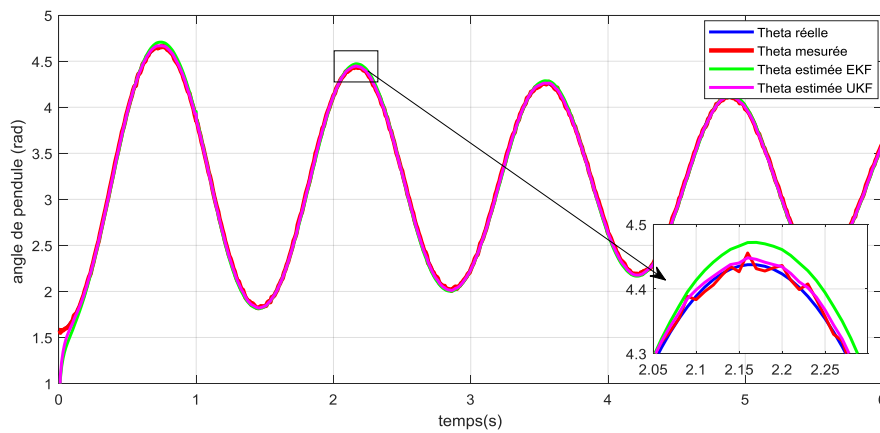


Figure (III. 12) Évolution de l'angle du pendule $\Theta(t)$ réelle, mesurée et estimée par filtres EKF et UKF.

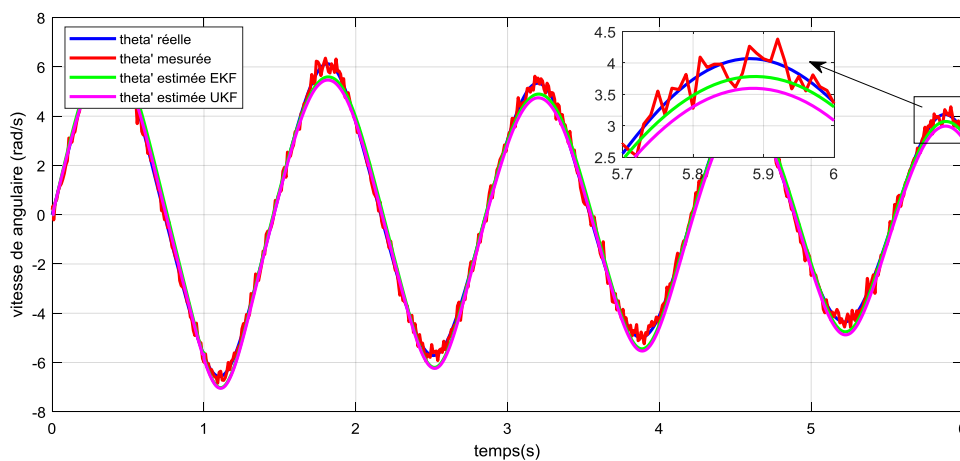


Figure (III. 13) Évolution de la vitesse angulaire du pendule $\dot{\theta}(t)$ réelle, mesurée et estimée par filtres EKF et UKF.

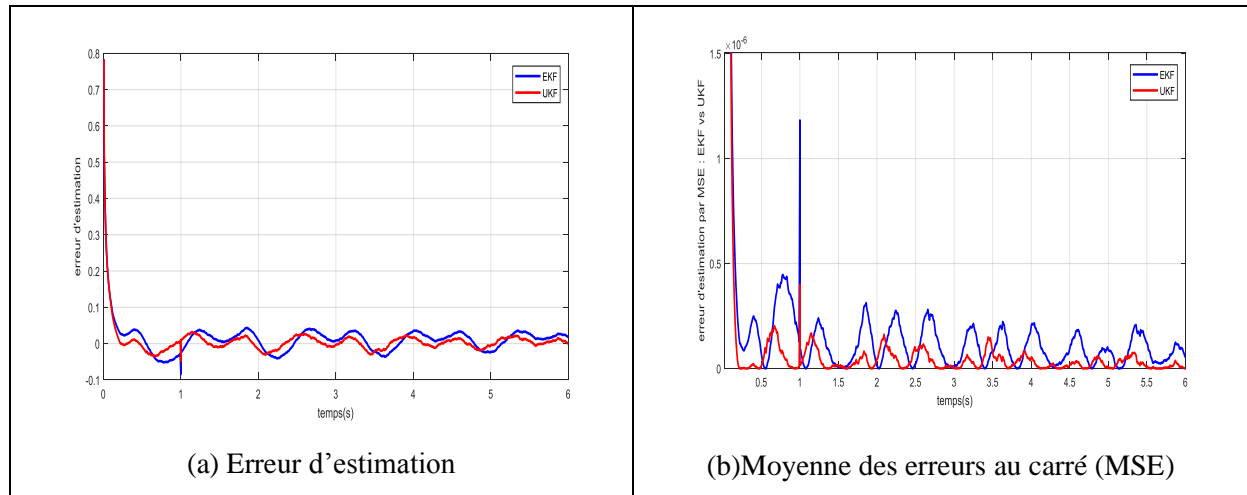


Figure (III. 14) Évolution de l'erreur d'estimation et MSE des filtres EKF et UKF.

Le pendule inverse est associé aux filtres de Kalman étendu (EKF) et au filtre de Kalman non parfumé (UKF). Selon les résultats de simulation obtenues on constate que l'estimation est relativement bonne aussi bien avec pour le EKF que pour le UKF, mais avec une supériorité remarquable pour les (UKF) ce que confirme la courbe de l'évolution de la moyenne des erreurs au carrée (MSE) pour les deux cas d'estimation étudiés (figure III.14).

III.3.3. Cas du pendule inversé à double bras

III.3.3.a. Présentation et modélisation

Un double pendule inversé est une inversion verticale d'un double pendule normal. Contrairement à un double pendule normal, un double pendule inversé est intrinsèquement instable. Une façon de le faire rester debout sous perturbation est de l'attacher à une base oscillatoire. Si l'oscillation est strictement verticale, sa fréquence est assez élevée, et son amplitude est assez grande, le double pendule inversé peut être stabilisé. Un double pendule inversé est beaucoup plus compliqué qu'un pendule inversé. La trajectoire de l'extrémité de masse peut être irrégulière et ne peut pas afficher une périodicité ou une symétrie autour de l'axe vertical, et le système est intrinsèquement chaotique. Le double pendule inversé est constitué d'un bras intérieur et extérieur, chacun d'eux caractérisé par sa masse m ($1/2$), sa longueur l ($1/2$), son moment d'inertie J (par rapport au centre de gravité) [60].

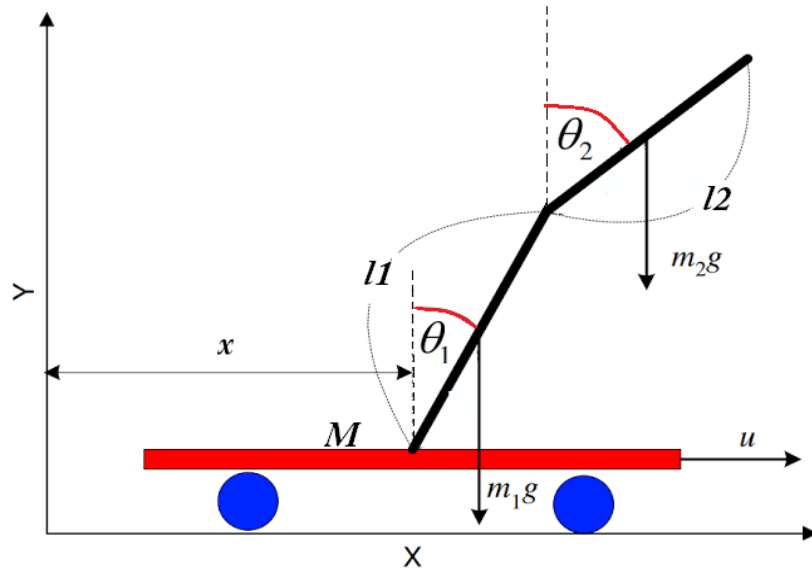


Figure (III. 15) Schémas de pendule inversé double.

Pour obtenu modèle d'un pendule inversé double en appliquant le formalisme de Lagrange. Cette approche nécessite le calcul du Lagrangien en fonction des Énergies cinétiques et potentielles des différents composants du système en fonction des coordonnées généralisés.

D'après le calcul de la formule Lagrangien on obtient les équations suivantes :

$$(M + m_1 + m_2) \ddot{x} - (m_1 + 2m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 =$$

$$u + (m_1 + 2m_2)l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2$$
(III .24)

$$-(m_1 + 2m_2)l_1 \ddot{x} \cos \theta_1 + 4\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + 2m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= (m_1 + 2m_2)g l_1 \sin \theta_1 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$
(III .25)

$$-m_2 \ddot{x} l_2 \cos \theta_2 + 2m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{4}{3}m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 =$$

$$m_2 g l_2 \sin \theta_2 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$
(III .26)

Donc en choisit vecteur d'état comme suit: $x = \left[x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2 \right]$

Donc le modèle non linéaire.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_4 \\ \vdots \\ \theta_1 \\ x_6 \\ \vdots \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (III.27)$$

$$Y = [x_1, x_3, x_5]$$

Avec : $m_1=0.75, m_2=0.57, l_1=0.57, l_2=0.75, M=1.5, g=9.81$

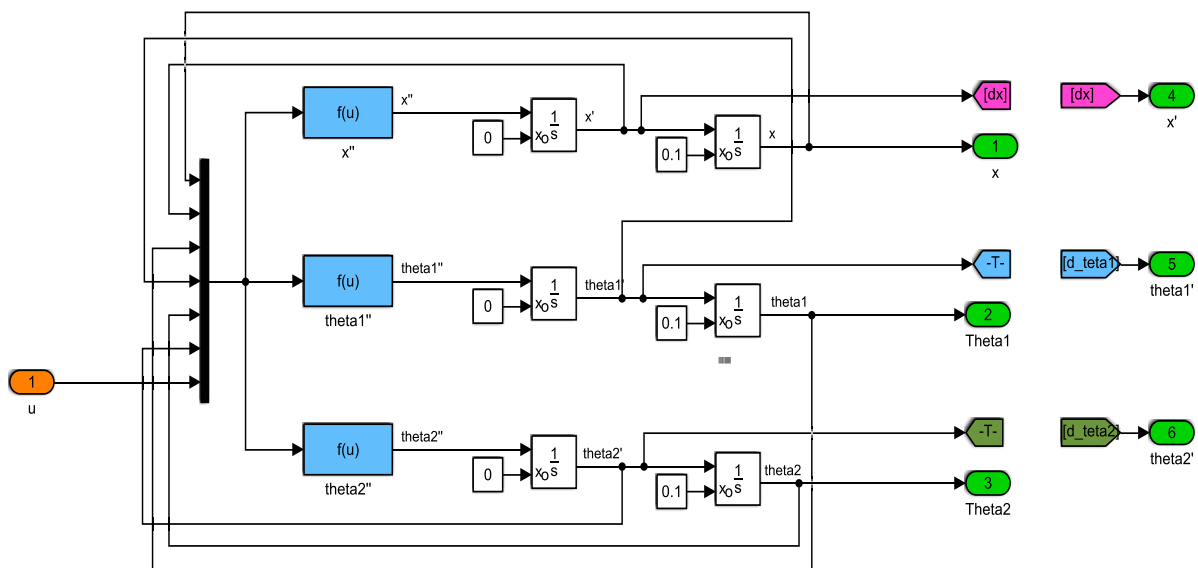


Figure (III. 16) Schéma de simulation d'un pendule inversé double.

III.3.3.b. Modèle d'état discret de l'ensemble chariot-pendule inversé double bras

La représentation d'état discrète d'un système non linéaire, avec T_e une période d'échantillonnage est donnée par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k, k) \\ y_k = h(x_k, k) \end{cases} = \begin{pmatrix} X_1(K+1) \\ X_2(K+1) \\ X_3(K+1) \\ X_4(K+1) \\ X_5(K+1) \\ X_6(K+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(k) \\ \dots \\ x(k) \\ x_4(k) \\ \dots \\ \theta_1(k) \\ x_6(k) \\ \dots \\ \theta_2(k) \end{pmatrix} T_e + \begin{pmatrix} X_1(K) \\ X_2(K) \\ X_3(K) \\ X_4(K) \\ X_5(K) \\ X_6(K) \end{pmatrix} \tag{III.28}$$

$$Y = [x(k)_1, x_3(k), x_5(k)]$$

III.3.4.Simulation et résultats

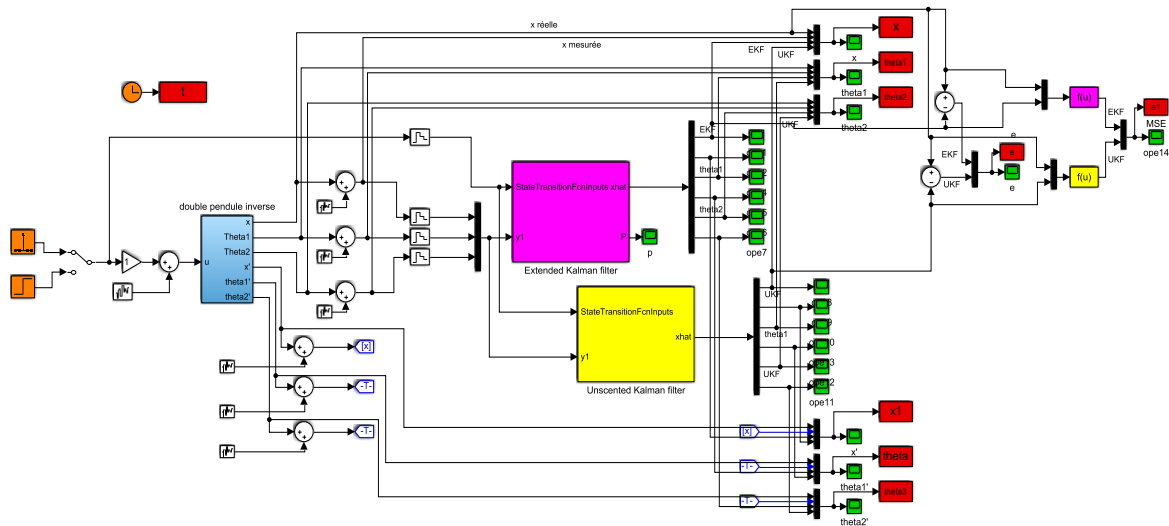


Figure (III. 17) Schéma d'un pendule inversé à double bras avec EKF et UKF.

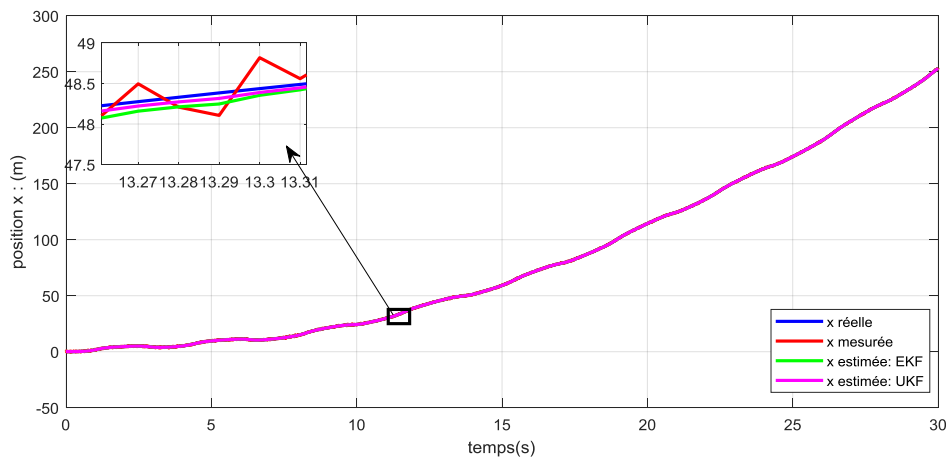


Figure (III. 18) Évolution de la position $x(t)$ d'un pendule inversé double avec FKE et UKF.

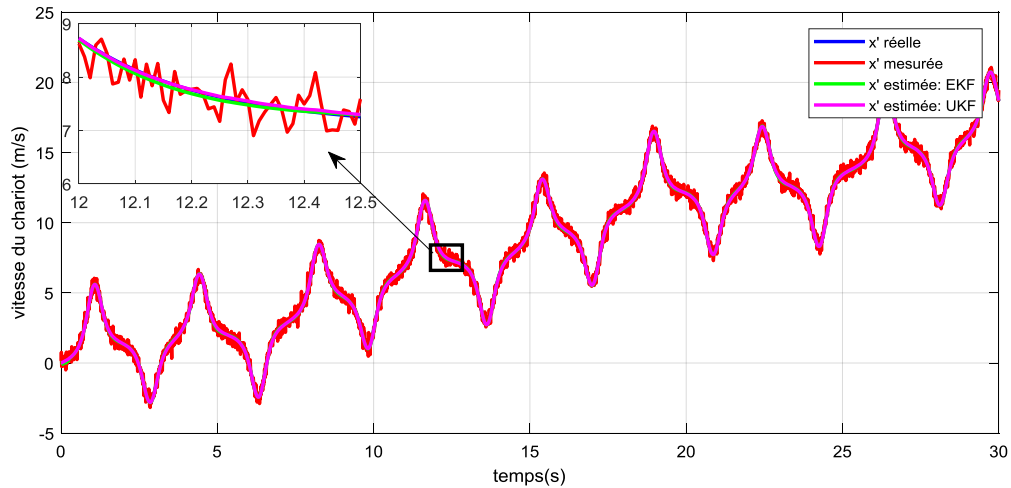


Figure (III. 19) Évolution de la vitesse du chariot $\dot{x}(t)$ d'un pendule inversé double avec EKF et UKF.

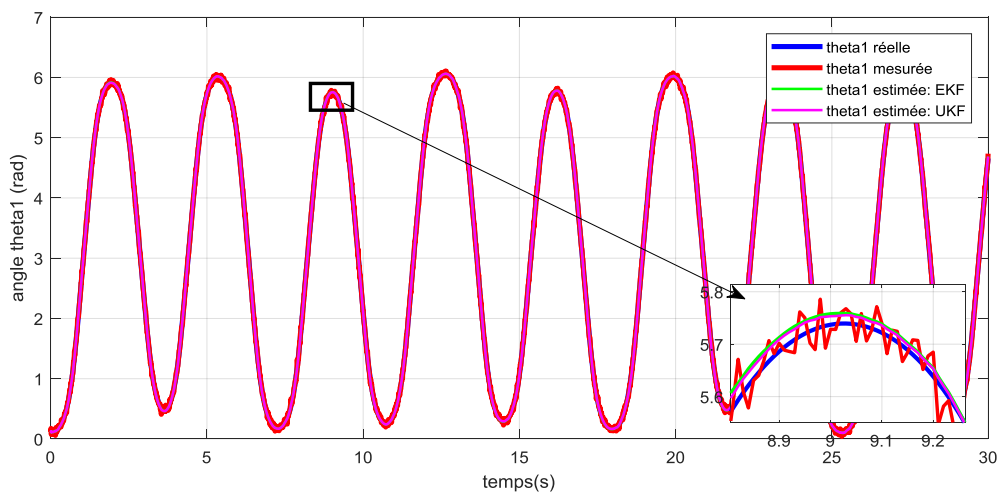


Figure (III. 20) Évolution de l'angle $\theta_1(t)$ d'un pendule inversé double avec EKF et UKF.

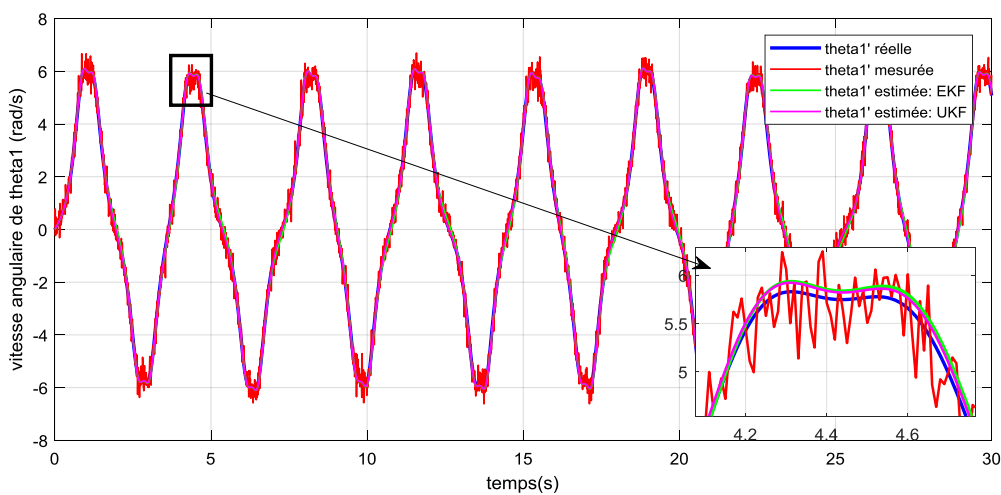


Figure (III. 21) Évolution de la vitesse angulaire $\dot{\theta}_1(t)$ d'un pendule inversé double avec EKF et UKF.

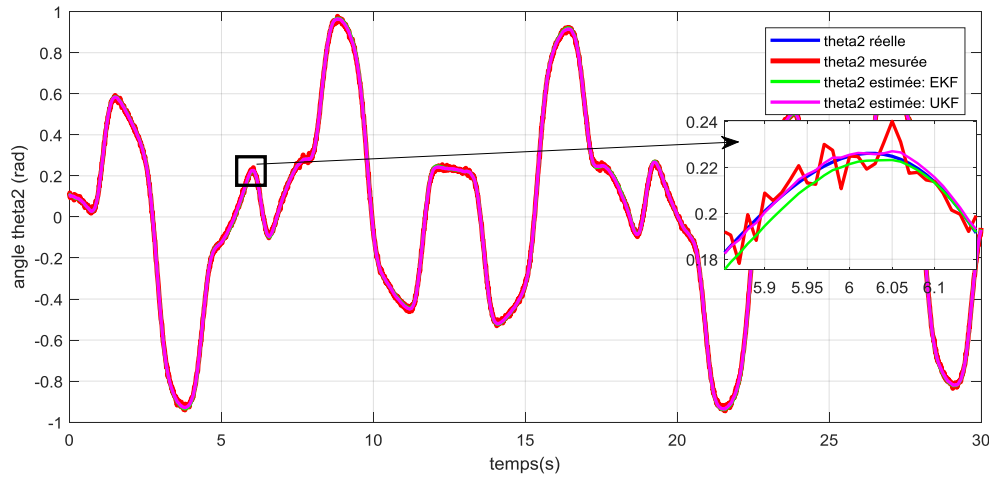


Figure (III. 22) Évolution de la vitesse angulaire $\theta_2(t)$ d'un pendule inversé double avec EKF et UKF.

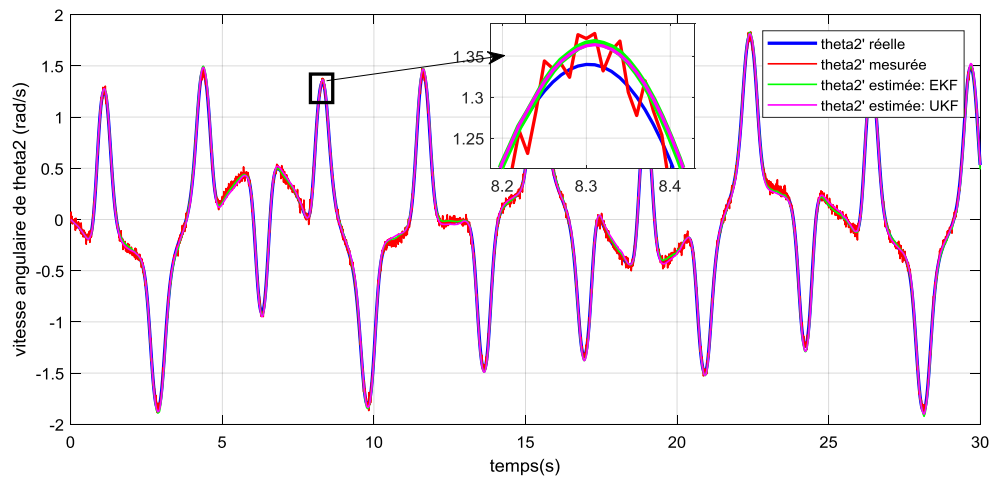


Figure (III. 23) Évolution de la vitesse angulaire $\theta_2'(t)$ d'un pendule inversé double avec EKF et UKF.

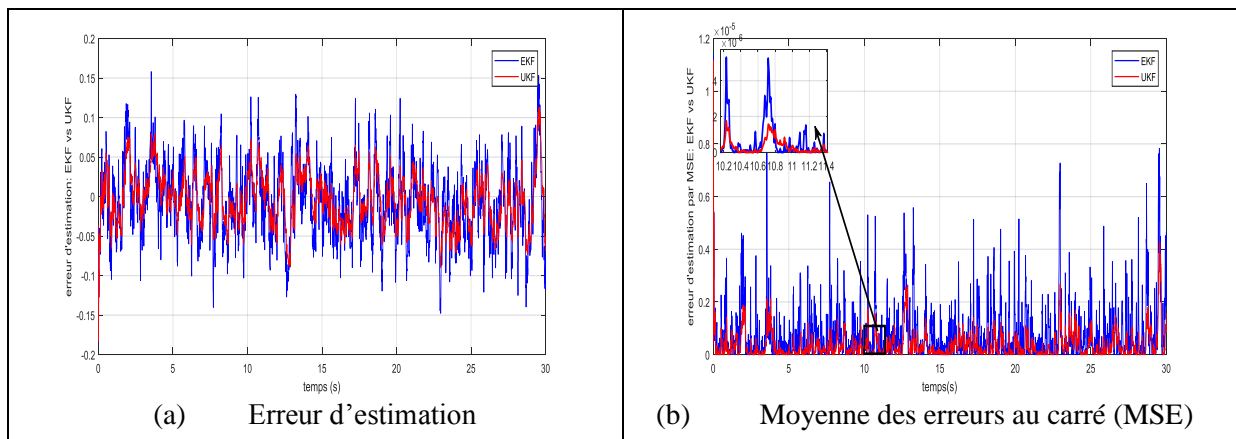


Figure (III. 24) Évolution de l'erreur d'estimation et MSE des filtres EKF et UKF

Le pendule inversé double bras est un système fortement non linéaire associé aux filtres de Kalman étendu et non parfumé, on constate que l'estimation d'état obtenue est

relativement bonne pour les deux types mais toujours avec une supériorité du deuxième type ce que montrent clairement l'erreur d'estimation et l'MSE obtenues (figure III.24).

III.3.5. Cas du moteur synchrone à aimants permanents

Dans cette partie, nous allons présenter la modélisation de la MSAP. En effet, la modélisation de la machine synchrone est primordiale aussi bien pour le concepteur que pour l'automaticien. Elle permet l'observation et l'analyse des différentes évolutions de ses grandeurs électriques d'une part et d'autre part l'élaboration des lois de commande. La machine utilisée pour notre étude est un moteur à distribution sinusoïdale qui se distingue par :

- L'absence de tout dispositif auxiliaire au niveau de l'inducteur constitué par l'aimant Permanent (flux d'excitation constant).
- L'absence des amortisseurs, donc seuls les enroulements d'induit sont parcourus par des courants.

En raison de l'absence des pièces polaires, cette machine a une structure à pôles lisses, dont les aimants sont de type terre rare (SmCo, NdFeBr).

III.3.5.a. Structure générale d'une MSAP

La structure générale d'une machine synchrone bipolaire à aimants permanents est présentée par la figure suivante [6] :

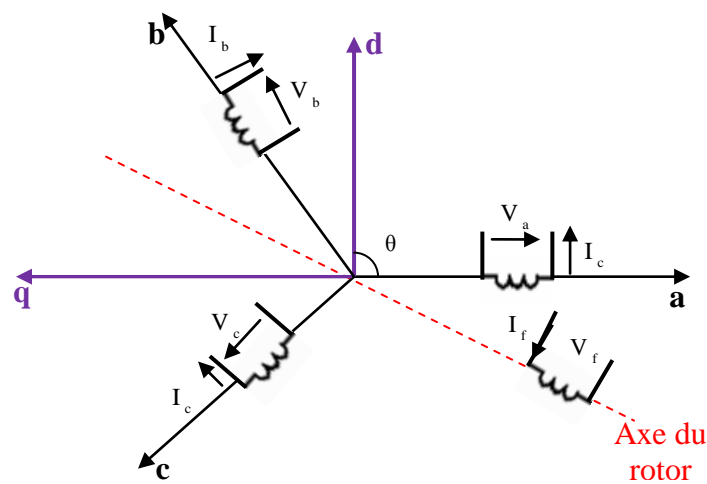


Figure (III. 25) Schéma représentatif de la MSAP.

Le stator comporte trois phases a, b et c identiques et décalées l'une par rapport à l'autre par un angle électrique de $(\frac{2\pi}{3})$, par contre le rotor comprend deux axes caractérisés par :

- Un axe d'aimantation rotorique longitudinale (d) ;

- Un axe interpolaire en quadrature (q), déphase de $(\frac{\pi}{2})$ par rapport à l'axe (d) ;
- La position du rotor est repérée par l'angle électrique : $\theta = \theta_0 + \omega t$
 θ_0 : L'angle électrique initial ;
 ω : La pulsation des grandeurs électriques.

III.3.5.b. Hypothèses simplificatrices

Dans cette modélisation, nous prenons en considération les hypothèses suivantes :

- ✓ L'effet d'hystérésis et les pertes dans l'acier sont négligeables ;
- ✓ La machine fonctionne dans un régime non saturé ;
- ✓ Les résistances de fuites sont indépendantes de la position du rotor ;
- ✓ La distribution de la force magnétomotrice est sinusoïdale. Ce qui nous permet de considérer seulement le premier harmonique d'espace de la distribution de la F.M.M créée par chaque phase de l'induit [3].

III.3.5.c. Mise en équations de la machine

Avec les hypothèses précédentes, les équations relatives au stator et au rotor dans le cas général d'une MSAP sans amortisseurs s'écrivent :

$$\begin{cases} [V] = [R_s] [i] + \frac{d[\varphi]}{dt} \\ [\varphi] = [L_s] [i] + \varphi_f \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

Tel que :

$[V] = [V_a, V_b, V_c]'$: vecteur tension statorique ;

$[i] = [i_a, i_b, i_c]'$: vecteur courant statorique ;

$[R_s] = R_s [I]$; où $[I]$: matrice identité ;

R_s : Résistance de phase statorique ;

$[L_s]$: Matrice inductance (propre et mutuelle statorique).

Donc le système [II.1] devient :

$$\begin{cases} V_a = R_s i_a + \frac{d[\varphi_a]}{dt} \\ V_b = R_s i_b + \frac{d[\varphi_b]}{dt} \\ V_c = R_s i_c + \frac{d[\varphi_c]}{dt} \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

L'équation mécanique s'écrit :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r - f_c \Omega \quad (\text{III.31})$$

Avec $\Omega = \frac{\omega_r}{P}$: vitesse de rotation de la machine ;

C_r : Couple résistant ;

C_{em} : Couple électromagnétique ;

$f_c \Omega$: Couple de frottements ;

J : moment d'inertie de la machine tournante ;

P : nombre de paires de pôles ;

ω_r : Vitesse électrique du rotor ;

f_c : Coefficient de frottements.

III.3.5.d. Équations de la MSAP dans le référentiel de PARK

Le modèle de la MSAP dans le repère d, q est obtenu en appliquant aux courants, tensions et flux la transformation de Park qui consiste à un changement du repère triphasé (a, b, c) vers le repère biphasé (d, q).

La matrice de transformation de Park adoptée dans notre cas est définie par :

$$P(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

• Équations électriques

En faisant l'hypothèse que toutes les grandeurs homopolaires sont nulles, le passage du système triphasé au système (d, q) lié au rotor se fait en utilisant la transformation de Park.

$$[V_{dqo}] = P(\theta) [V_{abc}] \quad (\text{III.33})$$

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_o \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

Après un long calcul, on trouve :

$$\begin{cases} V_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d\phi_d}{dt} - \omega_r \phi_q \\ V_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d\phi_q}{dt} + \omega_r \phi_d \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

- **Équations électromagnétiques**

Le flux total qui traverse chaque bobine du stator peut être décomposé en flux propre de la même bobine et des flux mutuels provenant des autres bobines.

Les flux sont donnés dans le système (a, b, c) par :

$$\begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{sc} & 0 & 0 \\ 0 & L_{sc} & 0 \\ 0 & 0 & L_{sc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \phi_f \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

L_{sc} : Inductance cyclique principale

Le passage au système (d, q) nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \phi_d = L_d i_{ds} + \phi_f \\ \phi_q = L_q i_{qs} \end{cases}$$

- **L'équation mécanique** de la machine peut être écrite comme suit :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r - C_f \quad (\text{III.37})$$

Où : $C_{em} = \frac{3}{2} P (\phi_d i_{qs} - \phi_q i_{ds})$

$$C_{em} = \frac{3}{2} P (\phi_d i_{qs} + (L_d - L_q) i_{ds} i_{qs}) \quad (\text{III.38})$$

Avec :

$\frac{3}{2} P \phi_f i_{qs}$: Couple que l'on obtiendrait avec une machine à pôles lisses ;

$\frac{3}{2} P (L_d - L_q) i_{ds} i_{qs}$: Couple supplémentaire dû à la saillance des pôles.

III.3.5.e. Équations de la MSAP sous forme d'état

Afin de trouver une résolution analytique et numérique pour le système d'équations du modèle, on peut écrire les équations électriques et l'équation mécanique sous formes

d'état, en rassemblant les équations des courants et de la vitesse, on obtient le modèle d'état non linéaire continu complet suivant :

$$\begin{cases} J \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r - f_c \Omega \\ \frac{di_{ds}}{dt} = \frac{V_{ds}}{L_d} - \frac{R_s i_{ds}}{L_d} + \omega_r L_q \frac{i_{qs}}{L_d} \\ \frac{di_{qs}}{dt} = \frac{V_{qs}}{L_q} - \frac{R_s i_{qs}}{L_q} - \omega_r L_d \frac{i_{ds}}{L_q} + \frac{\omega_r}{L_q} \varphi_f \\ C_{em} = \frac{3}{2} p [(L_d - L_q) i_{ds} i_{qs} + \varphi_f i_{qs}] \end{cases} \quad (III.39)$$

On pose : $K_T = \frac{3}{2} P \varphi_f$

III.3.5.f. Schéma bloc du modèle de la MSAP

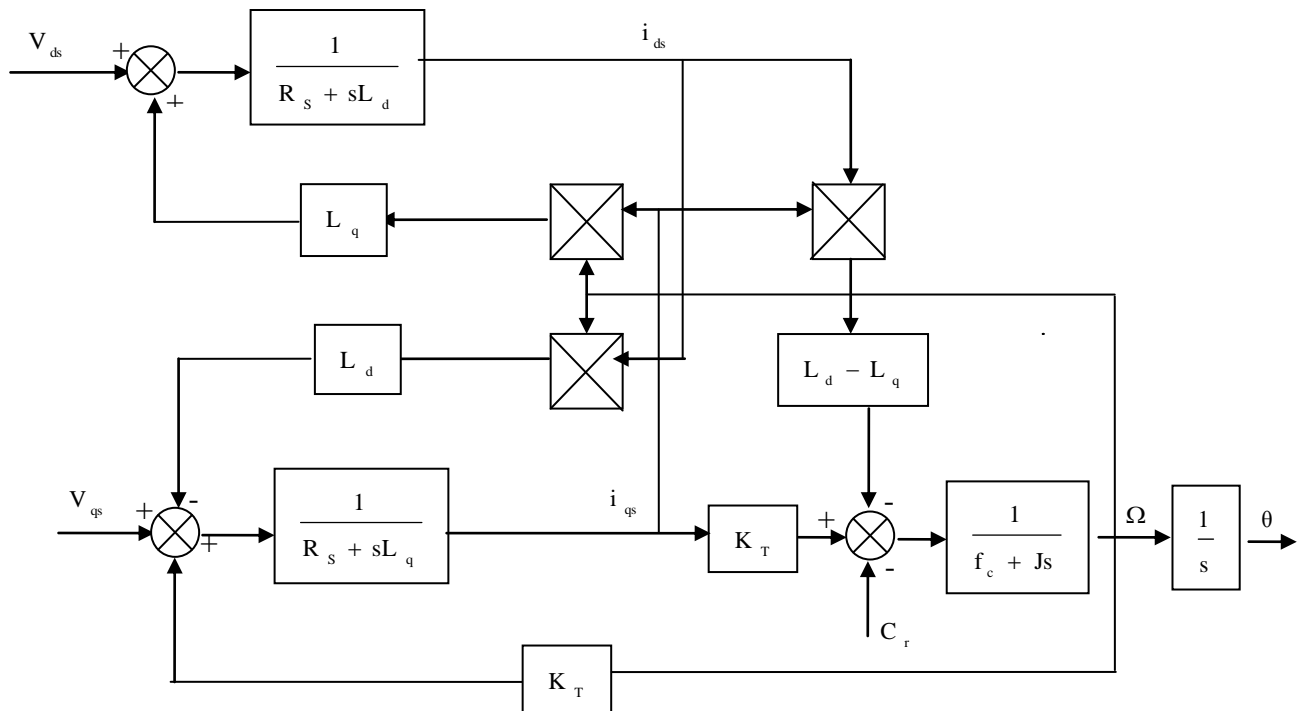


Figure (III. 26) Schéma bloc du modèle de la MSAP dans le repère d, q.

III.3.6.Équations de la MSAP sous forme d'état non linéaire discret

$$\begin{cases} X_1(K+1) \\ X_2(K+1) \\ X_3(K+1) \\ X_4(K+1) \end{cases} = \begin{cases} X_1(K) \\ X_2(K) \\ X_3(K) \\ X_4(K) \end{cases} + T_e \begin{cases} \frac{1}{L_d}(v_d - R_s I_d + w L_q I_q) \\ \frac{1}{L_q}(v_q - R_s I_q - w L_d I_d - w \Phi_{sf}) \\ \frac{3}{2} P [(L_q - L_d)] I_d I_q + \Phi_{sf} I_q \\ \frac{3}{2} P \frac{\phi_{sf}}{J} I_q - \frac{3}{2} P \frac{(L_q - L_d)}{J} I_d I_q - \frac{f}{J} \Omega_r - \frac{C_r}{J} \end{cases} \quad (III.40)$$

III.3.6.a. Simulation et résultats

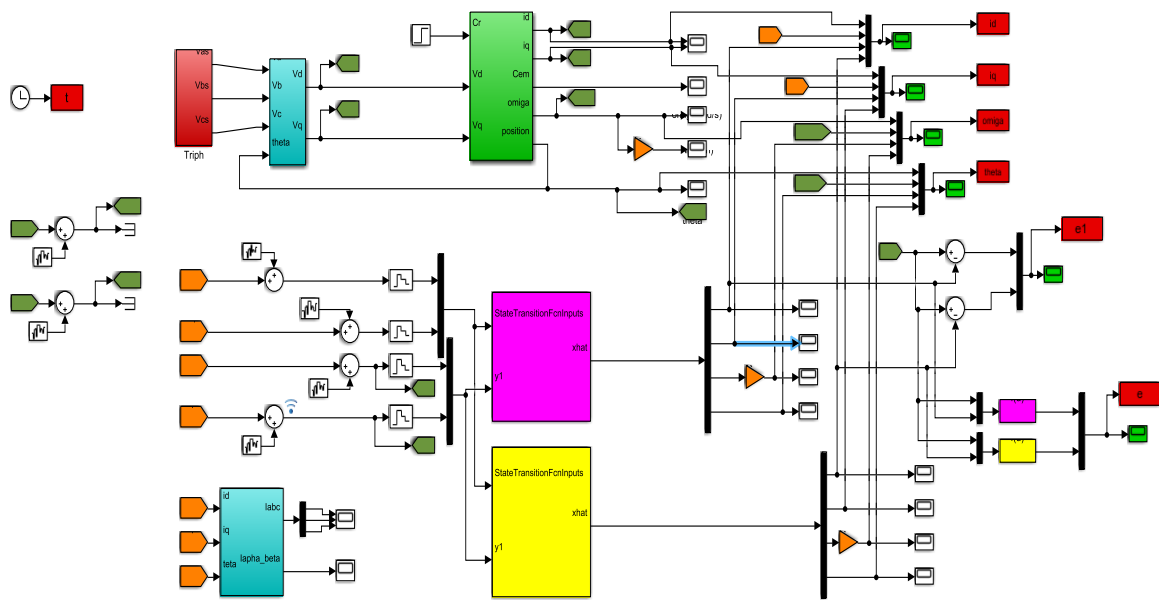


Figure (III. 27) Schéma de simulation de la MSAP associée aux filtres EKF et UKF.

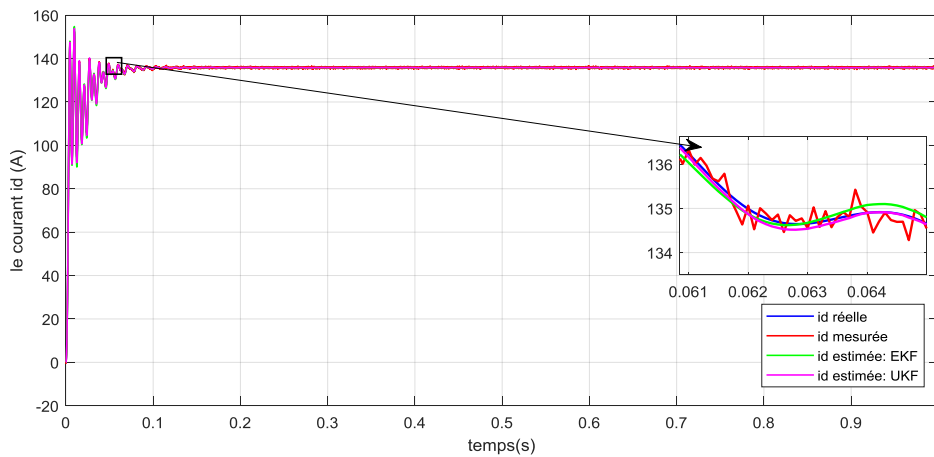


Figure (III. 28) Évolution des valeurs du courant I_d d'un MSAP (réelle, mesurée et estimée par EKF et UKF).

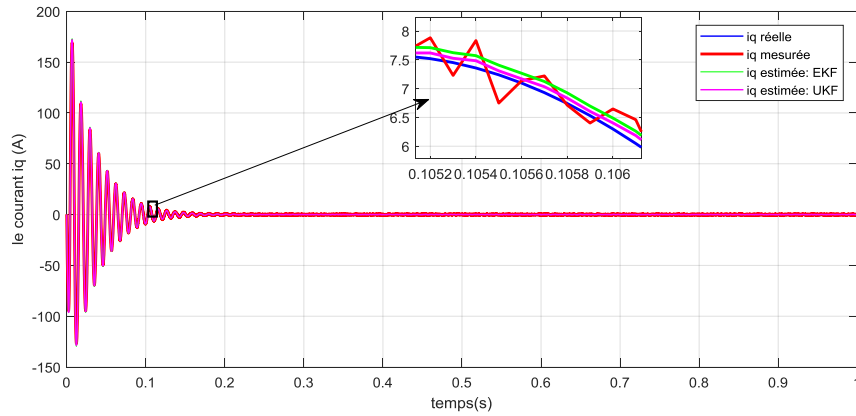


Figure (III. 29) Évolution des valeurs du courant I_q d'un MSAP (réelle, mesurée et estimée par EKF et UKF).

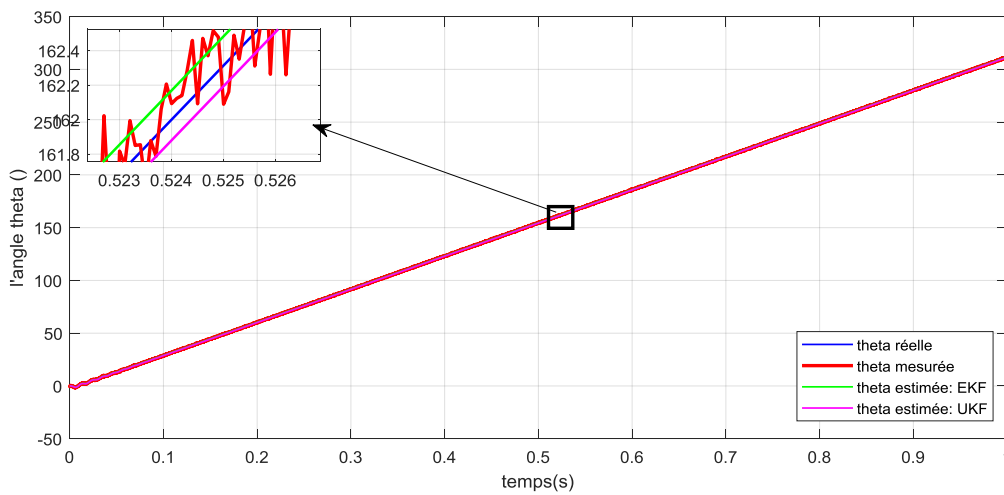


Figure (III. 30) Évolution des valeurs de la position du rotor Θ d'un MSAP (réelle, mesurée et estimée par EKF et UKF).

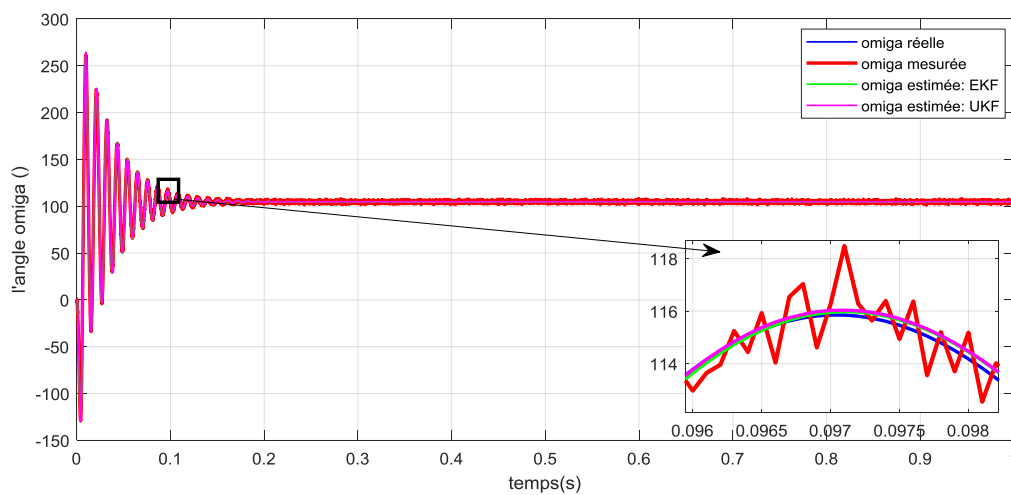


Figure (III. 31) Évolution des valeurs de la vitesse du rotor Ω (rad/s) d'un MSAP (réelle, mesurée et estimée par EKF et UKF).

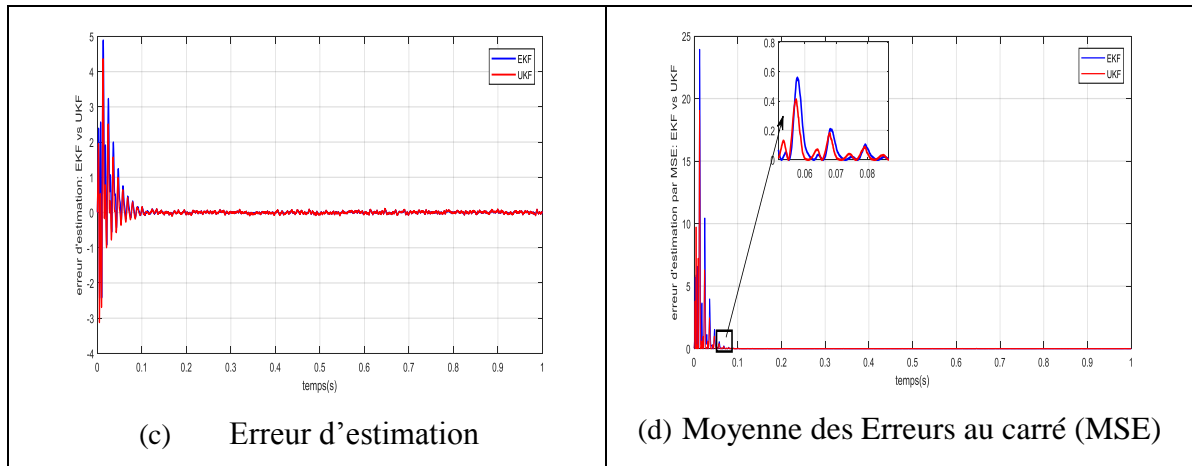


Figure (III. 32) Évolution de l'erreur d'estimation et MSE des filtres EKF et UKF.

La MSAP est associé avec le filtre de Kalman étendu et non parfumé, on constate que l'estimation est relativement bonne aussi bien avec (FKU), Parce qu'une erreur dans (FKE) est supérieure à une erreur dans (FKU), Montre clairement avec MSE.

III.4. Comparaison entre les trois variantes du Filtre de Kalman

On peut résumer notre étude sur les diverses variantes de filtre de Kalman, comme suit :

- **Filtre de Kalman** : C'est un outil qui permet de prédire les valeurs à l'aide d'un ensemble d'équations mathématiques en supposant que nos données se présentent sous la forme de distribution gaussienne et que nous appliquons des équations linéaires à cette distribution gaussienne.
- **Filtre de Kalman étendu** : Dans le monde réel, nous avons des équations non linéaires, car nous pouvons prédire dans une direction alors que notre capteur prend la lecture dans une autre direction. Il implique des fonctions angulaires, sinus et cosinus non linéaires. Ainsi, EKF utilise l'aide de Taylor Séries (matrices Jacobiennes) pour approximer linéairement une fonction non linéaire autour de la moyenne de la gaussienne, puis prédire les valeurs.
- **Dans le filtre de Kalman non parfumé**, nous avons un concept de points Sigma. Nous prenons quelques points sur la source gaussienne et les cartographions sur la cible gaussienne après avoir passé des points à travers une fonction non linéaire, puis nous calculons la nouvelle moyenne et la variance de la gaussienne transformée.

Il peut être très difficile de transformer la distribution d'états entiers en une fonction non linéaire, mais il est très facile de transformer certains points individuels de la distribution d'états, ces points individuels étant des points sigma. Ces points sigma sont les représentants de toute la distribution.

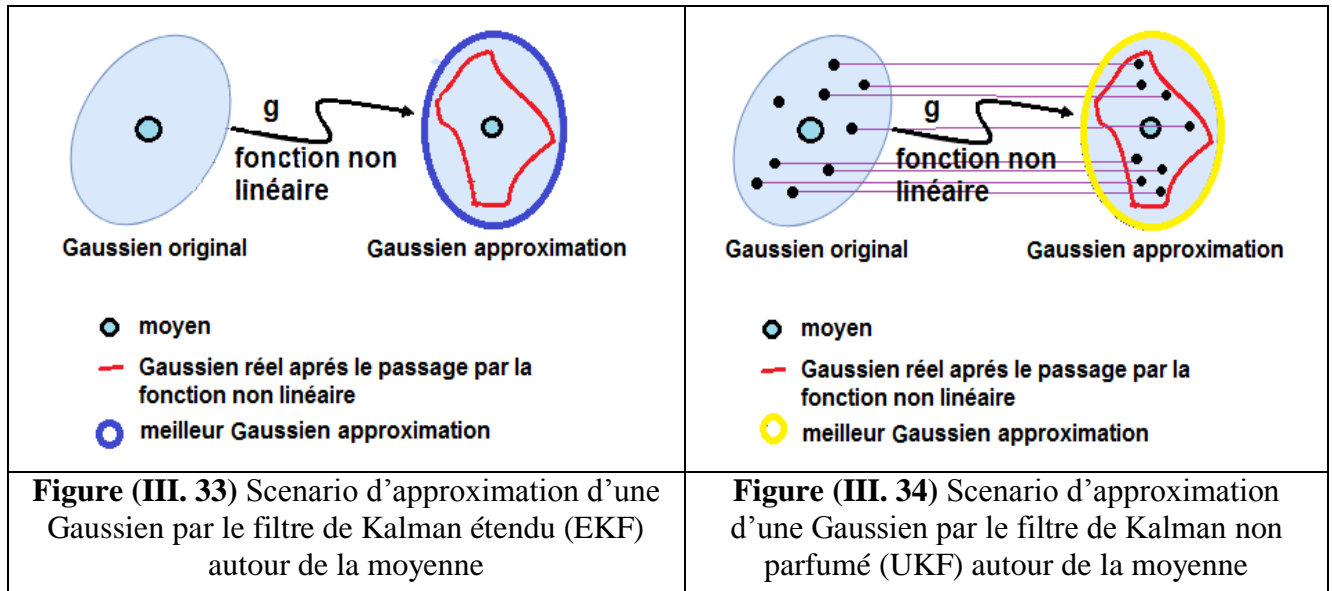


Tableau (III.3) Récapitulatif de la comparaison entre les trois filtres (KF, EKF, UKF).

Estimateur d'état	Modèle	Distribution supposé	Cout de calcul
Filtre de Kalman (KF)	Linéaire	Gaussien	Faible
Filtre de Kalman (EKF)	Non linéaire	Gaussien	Faible (si les jacobienes doivent être calculés analytiquement) Moyen (si les jacobienes peuvent être calculés analytiquement)
Filtre de Kalman (UKF)	Non linéaire	Gaussien	Moyen

III.5. Conclusion

Selon les résultats de simulation obtenues on constate que l'estimation est relativement bonne aussi bien avec pour le EKF que pour le UKF, mais avec une supériorité remarquable pour les (UKF) surtout dans le cas de systèmes fortement non linéaires tel est le cas du pendule inversé simple et à double bras. Cela a été confirmé par la courbe de l'évolution de la moyenne des erreurs au carrée (MSE) pour les deux cas d'estimation étudiés.

La principale différence du UKF par rapport à EKF est que, dans EKF, nous ne prenons qu'un seul point, c'est-à-dire la moyenne et son approximatif, mais en UKF, nous

prenons un ensemble de points appelés points sigma et leurs approximatifs avec le fait que plus le nombre de points est grand, plus notre approximation sera précise.

Conclusion générale

Le travail traité dans ce présent mémoire s'inscrit dans la thématique d'estimation et d'observation d'état des systèmes non linéaires. En fait, il est donc important de développer des techniques d'estimation permettant de reconstruire l'état d'un système d'une manière simple, efficace et précise.

L'estimation d'état à base d'observateurs de Kalman, a été l'objet de notre étude. Dans ce mémoire, nous avons abordé le problème d'estimation d'état d'un système non linéaire. Deux types du filtre de Kalman ont été étudiés à savoir le filtre de Kalman étendu (EKF) et le filtre de Kalman non parfumé (UKF).

La méthode d'estimation à base de filtres de Kalman étendu et non parfumé étudié a montré son efficacité pour la reconstruction des variables d'état d'un système non linéaire avec une erreur d'estimation très faible. L'avantage du filtre de Kalman réside dans sa robustesse vis à vis des bruits d'état et de mesure.

Pour cela, nous avons scindé notre travail en trois parties essentielles : la première partie évoque un état de l'art sur les techniques d'estimation non linéaire. Dans la seconde partie du travail, nous avons présenté une étude détaillée sur les trois variantes du filtre de Kalman. Nous avons focalisé notre étude sur les filtres de Kalman étendu et non parfumé. Dans le troisième chapitre, nous avons appliqué la technique basée sur les filtres de Kalman pour estimer les variables d'état d'un système non linéaire et surtout des systèmes fortement non linéaires tels que le pendule inversé simple et inversé à double bras ainsi que la MSAP.

Cette technique a été testée par simulation avec le logiciel MATLAB. Les résultats obtenus montrent que le filtre de Kalman non parfumé (UKF) assure une bonne estimation par rapport au filtre de Kalman étendu et notamment lorsqu'il s'agit du système fortement non linéaire tel est le cas du pendule inversé et inversé à double bras. On constate bien que le filtre de Kalman sans parfum offre un éventail au filtre de Kalman étendu. Cela permet d'éviter les deux principaux inconvénients du filtre de Kalman étendu, telle que les erreurs de linéarisation et les difficultés d'implémentation des matrices Jacobiennes. La solution basée sur la transformation non parfumée a permis de simplifier l'algorithme en éliminant le besoin de calculer des Jacobiennes à chaque étape et à chaque point de fonctionnement.

Enfin, dans le cadre plus général, Il serait également intéressant de réfléchir à exploiter ces résultats pour réaliser la commande sans capteurs des systèmes ainsi étudiés.

Références Bibliographiques

- [1] **Alazard D**, « Introduction au filtre de kalman ». Notes de cours, exercices, sessions Matlab,2006.
- [2] **A. TITAOUINE, F. BENCHABANE, K. YAHIA, A. MOUSSI**, « Commande d'une machine Synchrone A Aimants Permanents et Estimation de ces paramètres en utilisant le Filtre de Kalman Etendu ». Courrier du Savoir, article Biskra, Décembre2006.
- [3] **Hamani s, Bakour Abd elbasset** « ajustement optimal des paramètres du filtre de kalman étendu en vue d'estimation d'état d'une machine synchrone à aimants permanents », Mémoire de master, université Mohamed Boudiaf - m'sila,2017.
- [4] **Benzahia Y**, « observateurs non linéaires : application sur un trms », Mémoire de master, université Mohamed Boudiaf - m'sila,2016.
- [5] **Boukhari F**, « probabilités », université Aboubekr belkaid Tlemcen, cours.
- [6] **P. Borne Dauphin, J.P Richard**, « modélisation et identification des processus », “tome 1, t éditions techni,1992.
- [7] **Ouali M**, « débruitage du signal électrocardiogramme ecg par le filtre de Kalman étendu », Mémoire de magistère, Université Mohamed Boudiaf de M'sila,2010.
- [8] [https //www.techno_sience.net](https://www.techno_sience.net).
- [9] **Yvan Monka**–académie de Strasbourg–www.maths-et-tiques.fr.
- [10] **K. Mohammed**, « le filtre de kalman pour la prédiction multi-site des apports liquides annuels du bassin versant Cheliff », Mémoire de master, Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique,2017.
- [11] **f.de colon**, « théorie et traitement des signaux », école polytechnique fédérale de Lausanne.
- [12] **Y. Velenik**, « probabilités et statistique », Université de Genève, <http://www.unige.ch/math/folks/velenik/cours.html>.
- [13] **Ibrahim M. Alsofyani, n.r.n. Idris**, « a review on sensor less techniques for sustainable reliability and efficient variable frequency drives of induction motors », renewable and sustainable energy reviews, 2013.
- [14] **Luenberger d. G.**, « an introduction to observers », iee transactions on automatic control, 1971.
- [15] **Melle ATMANI A.**, « Estimation et stabilité de la fonction de demande de monnaie en Algérie sur la période allant de 1970 à 2014», Mémoire de master, Université de Abderrahmane Mira de Bejaia,2016.
- [16] **Kalman r.**, « a new approach to linear filtering and prediction problems », transactions of the asme - journal of basic engineering, 1960.

- [17] **Franck Morand** « techniques d'observation sans capteur de vitesse en vue de la commande des machines asynchrones », Thèse de doctorat, institut national des sciences appliquées (insa) de Lyon, janvier, 2005.
- [18] **Chafaa Kheireddine**, « structures d'identification et de commande des systèmes non linéaires basées sur les techniques floues », Thèse de doctorat es sciences, Université de Batna, 2006.
- [19] **Dehimi Thameur, Benzahia Ahlam**, « commande par backstepping à base d'observateur appliquée à un vol d'hélicoptère trms », Mémoire de master, université Mohamed Boudiaf - M'sila,2017.
- [20] **Benaissi Oussama**, « commande non linéaire avec observateur d'un moteur à induction », Mémoire de master, université Mohamed Boudiaf - M'sila,2013.
- [21] **Lebbou Walid**, « modélisation et estimation des états d'un système linéaire à commutation par la synthèse d'un observateur d'états :application au trafic routier », Mémoire de master, Université Badji Mokhtar-annaba,2017.
- [22] Lyes et Mohamed H et BELHOCINE, «Contrôle actif robuste d'une structure flexible»,Mémoire de master, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou,2010.
- [23] **Nait Slimani Boukhalfa**, « synthèse d'observateurs : application au diagnostic de Défauts », "Mémoire de magister. Université de Tizi Ouzou,2011.
- [24] **Rotella D**, « Filtrage optimal », Ecole nationale d'ingénieurs de Tarbes,2004.
- [25] **Naamane Bounar**, « systèmes linéaires multivariables », Université Mohammed Seddiki ben Yahia- Jijel ,2001.
- [26] **Sayah Abdelkader**, « commande en réseau des systèmes retardes avec observateur linéaire et simulation sur un moteur électrique « DC » »,Mémoire de magistère, Université d'Oran es-senia,2012.
- [27] **S. J. Julier and J. K. Uhlmann**, « A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems», In Proc. Of AeroSense: The 11th Int. Symp, On Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls, 1997.
- [28] **Jutten C** « Filtrage linéaire optimal », Cours de cinquième année du département 3i options image et signaux et automatique, Université joseph fourier-polytech' Grenoble(2010),. France.
- [29] **A. Nabil** « implantation d'une identification en temps réel de la machine asynchrone a cage sur le dsp tms320lf 2407a », Mémoire de magistère, Université de Mohamed Kheider biskra,2004.
- [30] **Belmahdi. Fatiha** « application du filtre de kalman pour le débruitage des signaux », Mémoire de magister, Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou,2015.
- [31] **Z. Zheng**, « commande à haute performance et sans capteur mécanique du moteur synchrone à aimants permanents », Thèse de doctorat, institut national polytechnique de Toulouse, 2008.
- [32] **Welch G, Bishop G**,«An introduction to the kalman filter. Department of The computer science». (2006). University of North Carolina at chapel hill. Etats-Unis.

- [33] **Ndjeng Ndjeng. A.** « Localisation robuste multi-capteurs et multi-modèles », Thèse De doctorat. Université d'Evry val d'Essonne. France,2009.
- [34] **GREWAL M.S. et ANDREWS A.P.** «Kalman filtering. Theory and practice using Matlab», Éd., John Willy et sons, (2008).
- [35] **M. NAJIM**, « modélisation et identification en traitement de signal », édition Masson 1988.
- [36] **BRICE AUBERT**, « détection des court-circuit inter-spires dans les générateurs synchrones à aimants permanents : méthodes basées modèles et filtre de kalman étendu application à un canal de génération électrique en aéronautique », Thèse de doctorat, Université de toulouse,2014.
- [37] **EMMANUEL SEDDA**, « estimation en ligne de l'état des paramètres d'une machine asynchrone par filtrage à erreur bornée et par filtrage de kalman », Thèse de doctorat, Université de paris 6 1998.
- [38] **GREG WELCH and GARY BISHOP**, « an introduction to the kalman filter », university of North Carolina at chapel hill 2003.
- [39] **NØRGAAD M.** Kalmtool, «State estimation for nonlinear systems. Technical report imm-rep-2000-6 (revised edition, déc. 2001)», Technical university of Denmark.
- [40] **SAMENI R SHAMSOLLAHI M.B, JUTTEN C**, « Filtering electrocardiogram Signals using the extended kalman filter»,2005.
- [41] **JULIER S.J, UHLMANN J.K. & DURRANT-WHYTE H.F**, « a new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators », ieee, trans automat control, 2000.
- [42] **WAN E.A. & VANDER MERWE R**, « the unscented kalman filter for nonlinear estimation », in proceedings of adaptive systems for signal processing, communication and control (as-spcc) Symposium, Alberta, 2000.
- [43] **WAN E.A. & VANDER MERWE R**, « the unscented kalman filter », in haykin kalman filtering and neural networks, Willy, New-York, 2001.
- [44] **JULIER S.J.**, « the scaled unscented transformation”, in proceedings of the American control conference anchorage, 2002.
- [45] **JULIER S.J.& UHLMANN J.K.**, « reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through non linear transformations », in proceeding of the American control conference, 2002.
- [46] **RE-MI Hage**, « estimation du temps de parcours d'un réseau urbain par fusion de données de boucles magnétiques et de véhicules traceurs », thèse de doctorat, université de nantes,2012.
- [47] **ALI Kazem**, « particules déterministes généralisées en filtrage non-linéaire : applications défense et télécommunications », Thèse de doctorat, Université Toulouse iii,2008.
- [48] **Z. Chen**, bayesian filtering: from kalman filters to particle filters, and beyond, Tech, Report, McMaster université, 2003.
- [49] **S.A. BANANI and M.A. MASNADI-SHIRAZI**, a new version of unscented kalman filter, proc. Of the world academy of science, engineering and technology (waset), 2007.

- [50] **S.J. JULIER**, the scaled unscented transformation, proc. Other American control conference, nov.2002.
- [51] **R. Vander Merwe, ARNAUD Doucet, n. De Freitas and e. Wan**, « the unscented particle filter», Cambridge university engineering department, technical report n. Cued/f-enfing/tr380,cslu.cse.ogi.edu/publications/ps/merwe00a.ps.gz, aug.2000.
- [52] **BENYAMINA Mokhtar**, « observateurs pour l'estimation des états dynamique d'un véhicule », Mémoire de magister, Université des sciences et de la technologie d'Oran Mohamed boudiaf,2014.
- [53] **COTE Jimmy**, « application des estimateurs de type unscented pour l'estimation d'état des perturbations et des parametres d'une satellite », Université Sherbrooke canada,2007.
- [54] **BAUDOIR Rima**, « détermination de la région de stabilité transitoire au sens de Lyapunov d'un oscillateur non linéaire force par l'approche graphique :application au pendule », Mémoire de magister, Université M'hamed bougara-boumerdes,2011.
- [55] **CHEYMA A, IMANE K, MERYEM H**, « commande par mode glissant d'un pendule simple », min-projet, Université Mohamed Boudiaf de m'sila,2017.
- [56] **TOUATI Billal, MOUSSAOUI Mahdi**, « commande d'un pendule inversé par mode glissant », Mémoire de master, Université Abderrahmane mira – bejaia,2017.
- [57] **FERHAT Lahouazi**, « mise en œuvre d'une stratégie de commande nuer floue application A un pendule inversé », Mémoire de magister, Université mouloud Mammeri tizi-ouzou,2011.
- [58] **BUGEJA M**, « nonlinear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system », eurocon, computer as a tool, slovenia2003.
- [59] **LAM J.** « control of an inverted pendulum », dept of electrical &computer engineering, University of California, USA 2004.
- [60] **KAHLA Sami**, « commande par intervalle des systèmes linéaires », Mémoire de magister, Université de tebessa,2013.

RESUME (ABSTRACT)

Notre présent travail porte particulièrement sur l'application du filtre de Kalman à l'estimation d'état d'un système non linéaire. Pour cela nous avons choisis d'étudier les trois différentes variantes du filtre de Kalman à savoir le filtre de Kalman standard (KF), le filtre de Kalman étendu (EKF) et le filtre de Kalman non parfumé (UKF). Ces deux dernières variantes sont associées à quelques systèmes non linéaires types souvent étudiés en automatique et surtout dans la robotique dont on peut citer à titre d'exemples : le pendule simple et le pendule inversé avec unique et double bras. Les résultats de simulation obtenus nous a permet d'établir une comparaison entre ces trois variantes du filtre Kalman et ce du point de vue performances et limites d'application.

Mots clés :

Système non linéaire, Filtre de Kalman, filtre de Kalman étendu, Bruit gaussienne, Estimation, Filtre de Kalman non parfumé. Pendules simple et inversé.

ABSTRACT:

Our present work focuses on the application of the Kalman filter to state estimation of a non-linear system. For this we chose to study the three different variants of the Kalman filter : the standard Kalman filter (KF), the extended Kalman filter (EKF) and the unscented Kalman filter (UKF). These last two variants are associated with some non linear type systems often studied in automatic and especially in robotics which can be cited as examples: the simple pendulum and inverted pendulum with single and double arms. The simulation results obtained allow us to establish a comparison between these three variants of the Kalman filter and this from the point of view of performance and application limits.

Keywords:

Non linear System, Kalman Filter, Extended Kalman Filter, Gaussian Noise, Estimate, Unscented Kalman Filter, Pendulums simple and inverted.