REPUBLIQUEALGERIENNEDEMOCRATIQUEETPOPULAIRE
MINISTEREDEL’ENSEIGNEMENTSUPERIEURETDELARECHERCH ESCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M’sila

Faculté des Mathématiques et de l’Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématiques et numérique

Thème

Quelques applications de l'algorithme "simplex", pour résolution d'un problème d'optimisation

---

Présentéepar:
DJALAL ABDELATIF

Devant le jury composéde:

Président:	*DILMI Mustapha*	M.C.B,	Université de M’sila
Encadreur:	*SELT Omar*	M.C.A,	Université de M’sila
Examinateur:	*GAGUI Bachir*	M.C.A,	Université de M’sila

Année universitaire 2020/2021

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant pour mavoir donné toute cette force et ce courage pour faire aboutir ce travail. Je tiens remercier ma encadreur de mémoire Mr Omar Selt. Pour mavoir soutenue et encouragée tout au long de la préparation de cette mémoire. Et pour mavoir inspirée et guidée durant le cheminement de ce travail. Cette mémoire naurait pas vu le jour sans sa détermination mener bien ce projet. Ma sincére reconnaissance tous les membres du jury pour lhonneur quils me font en acceptant de présider et examiner ce travail. Mr Gagui Bachir Mr Dilmi Mustapha Je remercie également ceux qui mont aidé de prés ou loin réaliser ce travail

Table des matières

Introduction

La recherche opérationnelle (RO), appelée aussi aide à la décision définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles d'analyse et de synthèse des phénomènes des managements du système d'information utilisable pour élaborer de meilleurs décisions.

La RO est un domaine qui a pris son essor au cour de la seconde guerre mondiale, lorsque l'Etat – major Britannique fit l'appel à des équipes de mathématiciens et de physiciens pour analyser divers problèmes de nature militaire (développement d'un réseau de radar, organisation de convois maritimes…). Après la guerre. Les techniques se sont considérablement développées, grâce, notamment, à l'explosion des capacités de calculs des ordinateurs. Les domaines d'application se sont également multipliés.

Une des parties essentielles de la recherche opérationnelle est la programmation linéaire, qui étudie l'optimisation d'une fonction objectif linéaire soumise à des contraintes linéaire.

La programmation linéaire est l'un des principaux utile de modélisation en recherche opérationnelle. C'est aussi la source des principale méthodes avancées plusieurs méthodes de résolution, la méthode graphique, l'algorithme de simplexe, la dualité ...

Dans notre travail, nous nous intéressons à la modélisation et la résolution des problèmes de programmation linéaire avec l'algorithme de simplexe

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de : la programmation linéaire, définitions de la programmation linéaire, les formes d'un programme linéaire, Méthodologie de modélisation en programmation linéaire...

Le deuxième chapitre présente quelques méthodes de résolution d'un PL (méthode simplexe,méthode des deux phases,

La méthode des pénalités,méthode graphique, ...)

Le troisième chapitre,mentionne quelques exemples d'application et de méthode de résolution PL

Chapitre 1

Généralités sur la programmation linéaire

Introduction

La programmation linéaire est l'une des acquisitions la plus importantes de la théorie économique après la deuxième guerre mondiale. Elle s'est développée très rapidement, grâce aux efforts conjugués des mathématiciens, des chefs d'entreprise, des chefs militaires et des économistes.

Dans le présent chapitre on va faire le point sur la littérature de la programmation linéaire et son aspect mathématique

1.1 Notions de base

1.1.1 Définition d'un programme linéaire :

Selon **William J.BAUMAUL : la programmation linéaire est une technique mathématique d'optimisation (maximisation et minimisation) de fonction objectif linéaire sous des contraintes ayant la forme d'inéquations linéaire car elle vise à sélectionner parmi différents actions, celle qui atteindra le plus probablement l'objectif visé.**

Selon **Robert DORMAN et Paul SAMUELSON** ajoutent que **la programmation linéaire est une méthode de détermination de meilleur plan d'action pour réaliser des objectifs données dans une situation où les ressources sont limitées.**

Donc la programmation linéaire peut se définir comme un outil mathématique qui permet d'analyser divers types de situation dans lesquelles nous retrouvons une fonction linéaire d'un certain désire à optimiser c'est-à-dire minimiser où maximiser.

1.1.2 Les formes d'un programme linéaire :

Forme générale d'un programme linéaire :

Plus généralement, on appelle programme mathématique un problème d'optimisation d'une fonction objectif de plusieurs variables en présence des contraintes. Le programme est dit linéaire si la fonction et les contraintes sont toutes des combinaisons linéaires de variables. Il a la forme générique suivante :

Il comporte n variables non négatives (3), m contraintes d'égalité ou d'inégalité (2), et la fonction objectif à optimiser (1). Le coefficient de coût ou de profit de la variable x_j est noté c_j , celui de la variable xj dans la contrainte i et noté aij. La contrainte i a un second membre constant b_i. les contraintes simple de positivité ne sont pas incluses dans les m contraintes, car elle sont gérées à part par les algorithmes.

$1 - \max ou \quad \min z = \sum_{i=1}^{n} C_2 X_2$

$2 - \forall i = 1, \cdots, m : \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j=ou} \geq b$

$3 - \forall j = 1, \cdots, n : x_j \geq 0\cdot$

Des valeurs des variables qui vérifient toutes les contraintes forment une solution réalisable du programme linéaire. Une solution réalisable est optimale si aucune autre n'a un profit supérieur (dans le cas où Z$\longrightarrow$ max) .

Si les variables sont astreintes à être entier, on a un programme linéaire en nombre entiers (PLNE). Un programme linéaire en 0-1 est un cas particulier de PLNE dont les variables ne peuvent prendre que deux valeurs 0-1 ; ces variables sont dites booléennes, binaires ou de décision. Un PL mixte comprend à la fois des variables continues et des variables entiers. Enfin, à partir du moment où une contrainte ou la fonction objectif n'est plus une combinaison linéaire de variables, on a affaire à un programme non linéaire (PNL).

Formes matricielles classiques :

Notons $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\ldots, \mathbf{x}_n)$ le vecteur des variables, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m)$ celui des secondes membres des contraintes, $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$ les coûts ou profits associés aux variables, et **A la matrice m×n** des $\mathbf{a}_{ij}$, on peut alors écrire PL sous forme matricielle. Deux formes sont courantes : **la forme canonique** avec des contraintes $\leq$, utilisée pour la résolution graphique, et la forme standard avec égalité, pour la résolution algébrique par des algorithmes.

Forme canonique	**Forme standard**
max $\mathbf{c}\cdot x$	**max** $\mathbf{c}\cdot x$
$\mathbf{A}\cdot x = b$	$\mathbf{A}\cdot x \leq ou \geq b$
$\mathbf{x} \geq 0$	$\mathbf{x} \geq 0$

Ces formes ne servent qu'à simplifier les présentations théoriques. Dans la réalité, un PL peut comporter à la fois des égalités et des inégalités. On peut facilement convertir les formes mixtes en formes classiques. Ainsi, toute contrainte d'égalité peut être remplacée par des inégalités.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = b_i \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leq -b_i \end{array} \right\}$$

On peut convertir une inégalité en égalité en ajoutant ou soustrayant une variable d'écart e i $\geq$0, propre à chaque contrainte i. A l'optimum, pour une inégalité$\leq$concernant la consommation d'une ressource i, cette variable indique la quantité inutilisée de la ressource.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_i et \qquad ei \geq 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i + ei = b_i$$

D'autres conversions sont possibles. Ainsi, on peut passer d'une maximisation à une minimisation, car maximiser Z revient à minimiser -Z. il ne faut pas oublier de multiplier par trouvée par -1 la valeur de la fonction objectif la minimisation ! L'exigence des variables positives n'est pas restrictive, car une variables xj non contrainte en signe peut toujours s'écrire comme une différence $x_j^{'}$- $x_j^{"}$ de deux variables non négatives·

Interprétation économique :

Il existe une interprétation et une terminologie suffisamment générale pour s'appliquer à la plupart des cas concrets. Nous reprenons ici un problème de minimisation et de maximisation.

▶ **Minimisation d'un coût des obligations de fonctionnement.**

Min Z = $\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_i, i = 1, \cdots, m$

$x_j \geq 0, j = 1, \cdots, n$

a) **i** : bien produit

j : activité bi: demande de bien i à satisfaire

$\mathbf{a}_{ij}$: taux de production de bien i par l'activité j

$\mathbf{c}_j$: coût unitaire de l'activité j

$\mathbf{x}_j$: niveau de l'activité j

b) **i** : activité

j : bien consommé (matières première)

$\mathbf{b}_i$: niveau minimum de fonctionnement de l'activité i

$\mathbf{a}_{ij}$: taux de fonctionnement de l'activité i pour la consommation de bien j

$\mathbf{c}_j$: coût unitaire de bien j

$\mathbf{x}_j$: quantité consommée de bien j.

▶ **Maximisation d'un gain sous des contraintes de capacité**

Min Z = $\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_i, i = 1, \cdots, m$

$x_j \geq 0, j = 1, \cdots, n$

a) **i** : bien consommé

j : activité

$\mathbf{b}_i$: quantité disponible de bien i.

$\mathbf{a}_{ij}$: taux d'utilisation de bien i par l'activité j

$\mathbf{c}_j$: gain unitaire de l'activité j

$\mathbf{x}_j$: niveau de l'activité j

b) **i** : activité

j : bien produit

$\mathbf{b}_i$: capacité maximum de fonctionnement de l'activité i

$\mathbf{a}_{ij}$: taux de fonctionnement l'activité i pour la production de bien j

$\mathbf{c}_j$: gain unitaire du bien j

$\mathbf{x}_j$**:** quantité produite de bien j.

Il est important de mettre en évidence et de souligner les hypothèses sous – jacentes à l'obtention de ce modèle de programmation linéaire.

· Les activités j doivent pouvoir être considérées indépendamment, les unes des autres de sorte qu'il n'y ait aucune interaction entre elles, que ce soit au niveau de l'utilisation du bien ou du point de vue de gain engendré. Cette hypothèse est indispensable pour obtenir l'additivité sur les activités j de la fonction économique et des contraintes.

· Le gain réalisé par l'activité j ainsi que l'utilisation d'un bien i par l'activité j, doivent être proportionnels à son niveau de fonctionnement, de sorte que seuls des termes du premier degré soient nécessaires pour exprimer le gain total ($c_j x_j$) ou l'utilisation totale du bien i par l'activité j ($a_{ij} x_j$). Cette hypothèse de proportionnalité est indispensable pour obtenir le caractère linéaire de la fonction économique et des contraintes.

· Les variables doivent être divisibles, de sorte que les niveaux d'activité peuvent être mesurés par des nombres fractionnaires. Cette hypothèse de divisibilité est indispensable pour utiliser des variables continues prenant des valeurs non nécessairement entières.

1.2 Méthodologie de modélisation en programmation linéaire

Nous voulons présenter une démarche qui permettra, dans la plupart des cas, de structurer sans trop de difficultés un modèle de programmation linéaire. Bien que la démarche est simple, la complexité de la modélisation provient du contexte même de la situation à modeler.

Comme vous allez le constater ultérieurement, la résolution par les techniques appropriées sera l'étape la plus facile, une fois que le modèle est bien structuré.

Le schéma de la figure suivant résume les étapes à suivre dans le processus de modélisation:

Identification d'une situation problématique de gestion	→	Formulation de la situation problématique et identification des objectifs en vue d'une représentationquantitative	→	Construction du modèle

Figure I-1 : Etapes à suivre dans le processus de modélisation

Dans le cas où la situation que l'on veut analyser se prête à l'utilisation de la programmation linéaire comme outil d'aide à la décision, la démarche à suivre dans l'application de cette technique d'optimisation est résumé dans la figure suivante :

Enoncé de la situation à optimiser

↓

Identification des variables de décision

↓

Formulation des contraintes et restrictions associées aux variables de décision

↓

Formulation de la fonction économique ou fonction objectif

⟵ Construction du modèle de programmation linéaire

↓

Optimisation mathématique du modèle avec les techniques de programmation linéaire ⟵ Détermination de la solution optimale

↓

Analyse de la sensibilité de la solution optimale à certaines variations des paramètres du modèle, s'il ya lieu, et évaluation des conséquences ⟵ Analyse poste optimale

↓

Recommandation, mise en œuvre et suivi

Comme l'indique ce schéma, la structure d'un modèle de programmation linéaire comporte trois éléments importants :

∘ Les variables de décisions ;

◦ Les contraintes linéaires ;

◦ La fonction économique.

▶**Eléments d'un modèle de programmation linéaire**

Variables de décision : la première étape dans le processus de modélisation est d'identifier correctement toutes les variables de décision (inconnues) de la situation à modeler. On peut se poser immédiatement la question suivante :

« Est ce que l'identification des variables de décision (en nombre et en description) va nous permettre, suite à la résolution du problème (avec les techniques appropriées), une prise de décision adéquate, compatible à l'aspect pratique de la situation ? »

Contraintes : dans la problématique de la situation, il faut être en mesure d'identifier tout genre de restriction (main d'œuvre, espace, budget,..) qui peut limiter les valeurs que peuvent prendre les variables de décision. Existe-il également des restrictions ou exigences minimales sur les variables de décision (contraintes de marché, politiques de l'entreprise ?)

A chaque restriction, limitation ou exigences correspond habituellement une contrainte qui prendra la forme d'une équation ou d'une inéquation linéaire.

L'ensemble des contraintes ainsi formulées constitue le domaine (région) des solutions possibles (valeurs possibles des variables de décision) au modèle de programmation linéaire.

Fonction objectif : à chaque variable de décision qui a été identifié dans le modèle correspond un coefficient économique indiquant la contribution unitaire de la variable correspondante à l'objectif poursuivi. Par la suite, on pourra en déduire la fonction objectif que l'on veut optimiser (soit maximiser, soit minimiser).

D'une façon générale, résoudre un problème de programmation linéaire consiste à déterminer les valeurs des variables de décision qui maximisent (ou minimisent selon le cas) une fonction économique (linéaire) soumise à un ensemble de contraintes (linéaires).

1.3 formulation mathématique d'un programme linéaire

1.3.1 Formulation mathématique d'un programme linéaire

Avant d'aborder divers contexte d'application, précisons à quoi correspond la structure mathématique d'un modèle de programmation linéaire.

Le modèle mathématique de programmation linéaire est présenté habituellement en termes suivants :

Maximiser (ou minimiser selon l'objectif poursuivi) la fonction objectif

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots\ldots + c_nx_n \qquad (1-1)$$

Soumise aux contraintes linéaires

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \ (\leq \cdot = \cdot \geq)\ b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \ (\leq \cdot = \cdot \geq)\ b_2 \qquad (1-2)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots\ldots + a_{in}x_n (\leq \cdot = \cdot \geq)\ b_i$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

et aux contraintes de non négativité

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots\ldots\ x_n \geq 0 \qquad (1-3)$$

Ces différents éléments du modèle ont la signification suivante :

Z représente la valeur de la fonction objectif (ou fonction économique). Cette quantité représente habituellement une valeur monétaire.

x_1, x_2, ... x_n, les variables de décision (inconnues)du modèle.

c_1, c_2, ... c_n, les coefficients des variables de a fonction objectif.

a_{11}, a_{12}, ... a_{mn}, les coefficients des variables de décision (appelés parfois coefficients technologiques) des divers contraintes. Les a_{ij} représentent la quantité de la ressource i requise par unité de x_j.

b_1, b_2, ... b_m sont les seconds membres des contraintes et représentent fréquemment les quantités des divers ressources qui sont disponibles. La notation ($\leq$, $=$, $\geq$) qui est indiquée à la gauche de chaque $b_i$signifie que chaque contrainte possède l'un des trois signes mentionnés.

Optimiser un modèle de programmation linéaire, c'est déterminer les valeurs de diverses variables de décision x_j devant respecter les contraintes $(1-2)$ et $(1-3)$

qui maximisent (ou minimisent) la fonction objectif $(1-1)$.

Remarques:

a)Les éléments $a_{ij}b_{ij}$etc$_j$sont des quantités connues dans lemodèle de programmation linéaire.Ils sont identifiés comme étant des paramètres du modèle qui permettent de mettre en relation les variables de décision aux contraintes et à la fonction objectif du modèle.

b) Chaque contrainte n'a qu'un seul des signes ($\leq$, $=$, $\geq$) ; d'autre part, le signe de la contrainte peut varier d'une contrainte à l'autre. De plus, le modèle de programmation linéaire ne tient pas compte des différents types d'unités (heures, mètres, carrés, litres,...) qui peuvent exister entre les contraintes. Il est important toutefois qu'il y ait comptabilité d'unités au sein d'une même contrainte.

c) Les contraintes (1-2) s'appellent aussi **contraintes fonctionnelles ou contraintes technologiques** par opposition aux restrictions imposes sur les valeurs des variables de décision xj par les contraintes de non négativité (1-3).

d) Dans la structure dans contraintes, on constate que chaque variable de décision x_j exige a_{ij} unités de la ressource i et que la somme utilisée de la ressource i par l'ensemble des variables de décision x_j donne l'utilisation effective de cette ressource i disponible en quantité b_i.

Chapitre 2

Méthodes de résolution d'un PL

2.1 Méthode simplexe

Résoudre un programme linéaire consiste à déterminer les valeurs des variables non négatives (Xj) qui permettent d'optimiser la fonction économique. Il existe plusieurs méthodes de résolution, la méthode algébrique, la méthode graphique, qui porte chacune des limites. Il faut donc trouver une autre méthode : celle du simplexe, qui est la plus utilisée dans la résolution des programmes linéaires, puisqu'elle répond aux développements des techniques de résolution par ordinateur.

L'algorithme du simplexe constitue« une procédure répétitive permettant, de progresser rapidement vers la solution optimale» . Elle examine comme première solution un des sommets (en général l'origine), qui constitue la solution de base de l'algorithme. Son principe consiste à «se déplacer de sommet en sommet adjacent de façon à améliorer la fonction objectif ; après un nombre fini d'itération, il arrive à un sommet à partir duquel tout déplacement vers un autre sommet n'améliore plus cette valeur, on est alors au sommet optimal, l'algorithme simplexe consiste à passer d'une solution de base à une autre jusqu'à ce qu'une solution réalisable de base optimal soit trouvée» . En d'autres termes, la solution optimale est celle qui ne contient aucune variable positive dans la fonction objectif dans le tableau final de simplexe pour un problème demaximisation et aucune variable négative dans la fonction objectif dans le tableau . . . nal de simplexe pour un problème de minimisation. Pour calculer la solution optimale, la règle de sélection est appelée règle de pivotage.

2.1.1 Principe de l'algorithme de simplexe

La recherche systématique d'une solution optimale à l'aide de l'algorithme du simplexe peut se résumer comme suit :

1. Déterminer une première solution de base réalisable ; cette solution initiale sert de départ au cheminement vers la solution optimale(si elle existe).

2. Si la solution obtenue en (1) n'est pas optimale, déterminer une autre solution de base réalisable qui permettrait d'améliorer la fonction objectif(augmentation pour une maximisation ou diminution pour une minimisation).

3. On répète cette procédure itérative jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer la fonction objectif. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale au programme linéaire.

Pour mieux expliquer l'algorithme de simplexe, nous allons prendre comme exemple le programme linéaire lorsque les contraintes sont de type ($\leq$;=;$\geq$).

2.1.2 La résolution des programmes de maximisation et type de contrainte ($\geq$) :

Dans le cas d'une contrainte de signe ($\geq$) on doit, pour la transformer en équation, soustraire une variable d'écart, également appelée dans ce cas, variable d'excédent.

Soit le programme linéaire suivant :

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ::: + a_{1n}X_n - X_{n+1} \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n - X_{n+2} \geq b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n - X_{n+m} \geq b_m \\ X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}, X_{n+m} \geq 0\cdot \end{pmatrix}$$

Le tableau de simplexe (solution de base Z = 0) :

H·Base ⁄Base	X_1	$\cdots$	X_n	X_{n+1}	$\cdots$	X_{n+m}	b_i
x_{n+1}	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	-1	0	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	$\cdots$	a_{2n}	0	0	0	b_2
.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	.
x_{n+m}	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	-1	b_m
z	C_1	$\cdots$	C_m	0	$\cdots$	0	b_j

On constante dans ce tableau que le diagonal de la matrice des variables d'écarts est négatif :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De ce fait, pour appliquer la méthode de simplexe, il faut ajouter à chaque contrainte une variable artificielle (t_i) comme suit :

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n - 0X_{n+1} - 0X_{n+2} - \cdots 0X_{n+m} - Mt_1 - Mt_2 \cdots Mt_m$$

Sous contraintes :

$$
\left(\begin{array}{c}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1_n}X_n - X_n + 1 + T_1 = b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n - X_n + 2 + T_2 = b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n - X_n + m + T_m = b_m \\
X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots, X_{n+m}, T_1, T_2, \cdots, T_m \geq 0
\end{array}\right)
$$

Le tableau précédent devient comme suit :

Le tableau de simplexe.

H·Base ⁄Base	X_1	$\cdots$	X_n	X_{n+1}	$\cdots$	X_{n+m}	T_1	$\cdots$	T_m	b_i
T_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	-1	$\cdots$	0	1	0	0	b_1
T_2	a_{21}	$\cdots$	a_{2n}	0	-1	0	0	$\cdots$	0	b_2
.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	.
T_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	-1	0	0	1	b_m
Z	C_1	$\cdots$	C_m	0	$\cdots$	0	-M	$\cdots$	-M	b_i

La résolution de ce programme demande l'utilisation de la méthode des pénalités pour éliminer les coec cients (M) des variables artificielles. Donc, la dernière ligne du tableau précédent devientcomme suit :

Δou m_J	$C1 + M\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, Cm + M\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{m1} \end{pmatrix}, -M, \cdots, -M, 0, \cdots, 0,$	$Z + M\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$

2.1.3 La résolution des programmes de maximisation et type de contraintes (=)

Lorsque les contraintes de programme linéaire à résoudre sont sous forme d'équation, on ne peut pas introduire des variables d'écarts, puisqu'il n'existe pas d'écart entre la disponibilité et la contrainte.

La forme standard pour ce type de programme nécessite l'introduction des variables arti. . . cielles à la place des variables d'écart.

Soit à résoudre le programme linéaire suivant sous sa forme canonique :

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m \\ X_1, X_2, \cdots, X_n \geq 0 : \end{pmatrix}$$

La forme standard : Nous allons introduire «Ti» comme variable arti. . . cielle :

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n - MT - MT_2 - \cdots - MT_m.$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1_n}X_n + T_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + T_2 = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n + T_m = b_m \\ X_1, X_2, \cdots, X_n, T_1, T_2, \cdots, T_m \geq 0 \end{pmatrix}$$

Les variables arti. . . cielles (T_1, T_2, $\cdots$, T_m) sont associées aux valeurs très élèves (coefficients M = $+\infty$).

Le tableau de simplexe (solution de base Z = 0) :

H·Base ／Base	X_1	$\cdots$	X_n	T_1	$\cdots$	T_m	b_i
T_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	b_1
T_2	a_{21}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	0	b_2
.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	.
T_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	1	b_m
C_j	C_1	$\cdots$	C_m	M	$\cdots$	M	Z=0

Pour pouvoir appliquer la méthode de simplexe et les critères de Dantzig sur le tableau ci-dessus, il s'agit de respecter les conditions de la solution par cette méthode. Il faut procéder à éliminer les coefficients (M) dans la ligne (C_J). La ligne (C_J) donne les coefficients de la fonction économique, mais pas les valeurs marginales des variables hors base ; de plus, les variables artificielles sont dans la base et devraient donc avoir des valeurs marginales nulles.
Pour calculer les valeurs marginales (m_J) qui sont nulles pour les variables base : $m_j = C_j + (a_{11} + a_{12}, \cdots + a_{mj})M$. (voir l'itération suivante) :
Tableau indiquant l'itération suivante :

H·Base ⁄Base	X_1	$\cdots$	X_n	T_1	$\cdots$	T_m	b_i
T_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	b_1
T_2	a_{21}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	0	b_2
.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	.
T_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	1	b_m
C_i	C_1	$\cdots$	C_m	-M	$\cdots$	-M	Z=0
Δou m_i	$C_1 + M\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{m1} \end{pmatrix}$	$\cdots$	$C_m + M\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{mn} \end{pmatrix}$	0	$\cdots$	0	$Z + M\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$

Ă partir de ce tableau on peut appliquer les critères de la variable entrante et de la variable sortante. Les modifications à l'intérieur de tableau se font par la méthode de pivotage.

2.1.4 La résolution des programmes de maximisation et type de contraintes ($\leq$)

L'application de la méthode nécessite de transformer les inégalités des contraintes économiques en égalités par l'introduction des variables supplémentaires positives ou nulles appelées variables d'écart. Ces variables d'écart sont utilisées pour justifier le stock résiduel des ressources à la solution optimale. Ă la solution de base, les variables d'écart égaux aux disponibilités.

On peut déterminer les variables d'écart de programme linéaire précédent comme suit :

La variabled'ecart $E_1 = X_{n+1} = b_1$ - $(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1j}X_1 + \cdots\cdots + a_{1n}X_n)$

La variabled'ecart $E_2 = X_{n+2} = b_2$ - $(a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2j}X_2 + \cdots\cdots + a_{2n}X_n)$

$$\vdots$$

La variabled'ecart $E_m = X_{n+m} = b_m$ - $(a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mj}X_m + \cdots\cdots + a_{mn}X_n)$

– **La forme standard**

Le nouveau programme linéaire après l'introduction des variables d'écart est le suivant :

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n + 0X_{n+1} + 0X_{n+2} + \cdots 0X_{n+m}$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1_n}X_n + X_{n+1} = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + X_{n+2} = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n + X_{n+m} = b_m \\ X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots, X_{n+m} \geq 0 \end{pmatrix}$$

– **Définition d'un tableau de simplexe :**

Selon Daniel DEWOLF :«un tableau de simplexe est constitué des coefficients des équations algébriques sans le nom des variables» . On aura donc :

1. Les coefficients de la fonction objectif ;
2. Les coefficients des variables dans le membre de gauche des contraintes ;
3. Les coefficients du membre de droite.

Où l'on sépare les coefficients de l'objectif des contraintes d'une barre horizontale, et les coefficients du membre de gauche des contraintes des coefficients du membre de droite par une barre verticale.

– **Tableau 01** : Le tableau de simplexe (solution de base Z = 0) :

H·Base ∕Base	X_1	X_2	$\cdots$	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	$\cdots$	X_{n+m}	b_i
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2
.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m
C_j	C_1	C_2	$\cdots$	C_m	0	0	$\cdots$	0	Z=0

Le tableau ci-dessus représente la forme standard et la solution de base (Z = 0) d'un programme linéaire de (n) variables et (m) contraintes.

Le passage de la solution de base à la solution optimale afin d'améliorer la fonction économique se fait par plusieurs itérations.

Pour pouvoir passer d'une itération à l'itération suivante, il s'agit de sélectionner une variable entrante à la base et une variable sortante de la base.

Dans un programme de maximisation (minimisation), selon les critères de «Dantzig» la variable entrante est celle qui correspond à la valeur maximale (minimale) des coefficients (C_j). La variable sortante est celle qui correspond au plus petit rapport positif des disponibilités données comme suit :

Min $(b_1/a_1^e, b_2/a_2^e, \cdots, b_m/a_m^e \succ 0$

$a_1^e, a_2^e, \cdots, a_m^e$:représentent le vecteur des coefficients techniques de la variable entrante. On arrête les différentes itérations dès que la ligne (C_j) ne contient que des coefficients : négatifs ou nuls pour un programme de maximisation, positifs ou nuls pour un programme de minimisation. Pour effectuer le passage de la solution de base au tableau suivant (itération suivante), nous allons considérer (C_2) comme le plus grand (petit) coefficient des coefficients (C_j), et (b_1=a_{12}) est le plus petit rapport positif des rapports$(b_i/a_i^e) \succ 0$Donc,

X_2 : variable entrante à la base et, X_{n+1} : variable sortante de la base.

Dans ce nouveau tableau nous allons diviser la ligne X_{n+1}, de tableau précédent sur le coefficient (a_{12}) pour calculer le pivot à l'intersection de la variable entrante et de la variable sortante pour obtenir le tableau, on applique les règles suivantes :

– Le pivot est égal à (1) ;

– Les coefficients de la ligne de pivot sont divisés par le pivot ;

– Les coefficients de la colonne de pivot sont nuls ;

– Les autres coefficients sont obtenus par la règle du rectangle suivante :

$A \xrightarrow{\quad \times \quad} B$

$\uparrow \div$ D' = d - (c/a)*b

Nouveau ancien

$C \xleftarrow{\qquad} D$

– **Tableau N03** : le tableau suivant de simplexe (itération suivant).

H.Base/ Base	X_1	X_2	$\cdots$	X_n	X_{n+1}	$\cdots$	X_{n+m}	b_i
X_1	(a_{11}/ a_{12})	1	$\cdots$	(a_{1n}/ a_{12})	$(1/ a_{12})$	$\cdots$	0	b_1/a_{12}
X_2	a_{21}-$a_{22}\cdot(a_{11}/ a_{12})$	$\cdots$	$\cdots$	a2n-$a_{22}\cdot(a_{11}/ a_{12})$	0-$a_{22}\cdot(a_{11}/ a_{12})$	$\cdots$	0-$a_{22}\cdot(a_{11}/ a_{12})$	b_2-$a_{22}\cdot(a_{11}/ a_{12})$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
X_{n+m}	a_{m1}-$a_{m2}\cdot(a_{11}/a_{12})$	$\cdots$	$\cdots$	a_{mn}-$a_{m2}\cdot(a_{11} /a_{12})$	0-$a_{m2}\cdot(a_{11}/a_{12})$	$\cdots$	1-$a_{m2}\cdot(a_{11}/a_{12})$	b_m-$a_{m2}\cdot(a_{11}/ a_{12})$
C_j	$C_1 - C_2\cdot(a_{11}/ a_{12})$	$\cdots$	$\cdots$	C_m -$C_2\cdot(a_{11}/ a_{12})$	0-$C_2\cdot(a_{11}/ a_{12})$	$\cdots$	0	Z-$c_2\cdot(a_{11}/ a_{12})$

La colonne des disponibilités représente les valeurs des variables non négatives (variable de décision).

2.1.5 La résolution des programmes de minimisation à (n) variables et (m) contraintes

Le processus de résolution par la méthode de simplexe est identique pour les programmes linéaires à maximiser ou à minimiser. Le traitement de la fonction économique est indépendamment des contraintes :

1. Quelle que soit la fonction économique (Max ou Min), les modifications à porter sur les contraintes pour réaliser la forme standard sont les suivantes :

– Lorsque la contrainte est de forme ($\geq$), on ajoute une variable d'écart négative (-E) et une variable artificielle positive (T_i).

– Type de contrainte est de forme ($\leq$), on ajoute uniquement une variable d'écart positive(E_i).

– La contrainte sous forme d'équation (=), on ajoute uniquement une variable artificielle (T_i).

– Lorsque l'objectif est de maximiser une fonction économique, les variables d'écart sont associées aux coefficients (-0), les variables artificielles sont associées aux coefficients (-M).

– Lorsque l'objectif consiste à minimiser une fonction économique, les variables d'écart sont associées aux coefficients (+0),lesvariables artificielles sont associées aux coefficients (+M).

2. **Règles générales pour la résolution d'un programme linéaire par la méthode de simplexe (problème de maximisation).**

Selon Eric jacquet-LAGREZE :« pour passer d'un sommet à un sommet adjacent, Dantzig a introduit deux critères(critères de Dantzig) qui sont au coeur de la méthode du simplexe : un critère de la nouvelle variable précédemment hors base à faire entrer dans la base et un critère du choix d'une variable de la base à faire sortir» .

A $\triangleright$Choix de la colonne pivot (critère de sélection de la variable entrante dans la base) :

La colonne pivot est définie à partir des coefficients de la fonction économique.

« Le critère de sélection de la variable entrante est donc le suivant : on choisit la

variable avec le coefficient objectif le plus élevé» . On cherche à se focaliser sur la variable qui, en augmentant, augmentera le plus possible la fonction objectif. Cette variable correspond au plus grand coefficient positif de la fonction objectif.
Considérons les coefficients [C1,C2, $\cdots$,Cj , $\cdots\cdots$,Cn] de la fonction économique. Parmi tous les coefficients positifs, on considère le plus grand, la colonne pivot est la colonne qui le contient. S'il existe plusieurs coefficients correspondant à cette valeur positive maximale, on peut choisir celui que l'on veut (arbitrairement). La variable correspondante sera la variable entrante car elle ne va plus s'annuler. On sélectionne la variable hors base ayant le plus grand coefficient positif dans la ligne.
Pour sélectionner la variable sortante de la base, il est nécessaire de rajouter une colonne (T) (ratios) au tableau, obtenue en faisant le rapport membre à membre de la colonne (b_i) (disponibilités) et de la colonne de la variable entrante dans la base.

B$\triangleright$ Choix de la ligne pivot (critère de sélection de la variable sortante de la base) :

La variable entrante va prendre la place d'une des variables de base, appelé variable sortante. Il faut maintenant trouver quelle valeur maximum peut prendre cette variable entrante afin de maximiser la fonction objectif. Pour un programme linéaire à plusieurs variables on fait diviser, chaque coefficient de la colonne (b_i) sur le coefficient correspondant de la colonne pivot et on calcule les rapports ($b_i \diagup a_{ij}$). On sélectionne le plus petit rapport, la variable correspondante à cette ligne est la variable sortante. On sélectionne la variable dans la base ayant le plus petit coefficient positif dans la colonne (T). «Le critère de sélection de la variable sortante est donc le suivant : prendre comme variable sortante la première variable de base à s'annuler. De manière générale, on calcule le minimum du rapport du coefficient du membre de droite sur le coefficient de la variable entrante dans la même ligne, lorsque celui-ci est positif. La variable sortante est celle dont on lit la valeur dans la ligne où ce minimum se produit» . Et l'élément pivot correspond à l'intersection de la colonne et la ligne pivot «on appelle élément pivot le coefficient situé à l'intersection de la colonne pivot et de la ligne pivot» .

C$\triangleright$Itération :

S'il existe un coefficient (Cj) positif dans le nouveau tableau, on retourne à la première étape (choix du pivot) puis à la deuxième (itération suivante). On réitère ce processus jusqu'à ce que tous les coefficients de la fonction économique soient négatifs.

D $\triangleright$Critère d'arrêt des itérations :

Si tous les coefficients d.e la ligne relatifs aux variables hors base, sont négatifs ou nuls pour la maximisation, ou positifs ou nuls pour la minimisation, la solution trouvée est optimale.

La solution d'un (PL) avec la méthode simplexe cas de munimusation (min) la fonction objectif, ie : tous les contraintes ($\geq$ou $=$), dans des cas spécial en utilisé l'une des méthode suivant :

1. Méthode des deux phases.
2. La méthode des pénalités (ou du grand M).

2.2 Méthode des deux phases

La méthode des deux phases est plus simple que la méthode de grande (M) pour pour trouvée la solution optimale sur la (PL) dans le cas de minimisation , on peut trouver la solution optimale si la valeur de la nouvelle fonction (t) est égale à zéros(0), si non on ne peut pas trouver la solution optimale, cette méthode est décomposer à deux phases :

2.2.1 La première phase

1. Transformation de la forme canonique à la forme standard et ajouté les variable artificielles (T_i) à les contraintes.
2. La Formalation de la fonction objetif (t) avec l'utilisation de les variables artificielle (T_I) ie :$r = T_1 + T_2 + \cdots T_n \longrightarrow$ Min.
3. Construit un tableau qui contient la solution primal en fonction des coefficient des variables (T_i,X_j) et la nouvelle fonction objective.
4. Suivons les étapes précédents jusque'à ce que nous obtenons la valeur ($t = 0$) ce qui signifie qu'il y a une solution ie : ($C_j \leq 0$) d $\leq$ de la fonction de toutes

les coefficient objectif (t):

2.2.2 La deuxièmme phase

1. Utilise la solution finale de la (4) étapede la première phase aprés la suppersion des variables artifficielle (T) la fonction objectif (t)
2. Utilise la fonction objectif (Z) et améliore leur valeur pour trouver la solution optimal.
3. Si on trouve les coefficient (C_j) soient obtenus inferieure ou égale zéros (0) ie : ($C_j \leq 0$) ce la indique que la solution optimale est trouve.

2.3 La méthode des pénalités (ou du grand M)

Cette méthode permet de tenir compte des variables artificielles. On les pénalise en leur affectant un coefficient de valeur très éleve dans la fonction économique (-M) pour un problème du maximum, (+M) pour un problème du minimum). Les pénalités ont pour objet de provoquer l'élimination des variables artificielles au fil des itérations.

Les étapes de la méthode :

1. Transformation de la forme standard à la forme canonique et ajoutée les variables (X_i) à la fonction objectif.
2. La formulation de la fonction objectif (Z) avec l'utilisation de les variables (X_i) et (X_j):
3. Construire qui un tablleau qui contient la solution en fonction des coefficient (T_i,X_i,X_j):
4. Trouvé le variable entrante et le variable sortante.
5. En suit, répéte les étapes de la méthode simplexe.
6. Finalement si tout les coefficient de fonction objectif est ($C_j \leq 0$) alors la solution optimal est trouver.

2.4 Méthode graphique

La méthode graphique permet la résolution de problèmes linéaires simples de manière intuitive et visuelle. Cette méthode de résolution n'est applicable que dans le cas où il n'y a que deux variables de décision,« appelée aussi résolution géométrique, elle est possible pour un programme linéaire sous forme canonique avec (n) égale à deux ou trois variables et impossible s'il y a plus de trois (03) variables d'activité.» . Et selon George b. DANTZIG, Mukund n. THAPA :« lorsque des problèmes linéaires ont exactement deux variables soumises à des contraintes d'inégalités, il est possible de les résoudre graphiquement» . Son avantage est de pouvoir comprendre ce que fait la méthode générale du simplexe, sans entrer dans la technique purement mathématique.

Les étapes du processus de la résolution la méthode des graphique sont les suivantes :

1. Créer un système de coordonnées cartésiennes, dans lequel chaque variable de décision est représentée par un axe.
2. Etablir une échelle de mesure pour chacun des axes appropriés à sa variable associée.
3. Dessiner dans le système de coordonnées les contraintes du problème, y compris celles de non - négativité(qui seront les propres axes). Remarquer qu'une inéquation précise une région qui sera le demi-plan limité par la ligne droite qu'on obtient de considérer la contrainte comme égalité, alors que si une équation détermine une région c'est la ligne droite, elle-même.
4. L'intersection de toutes les régions détermine la région ou l'espace faisable(qui est un ensemble convexe). Si cette région est non vide, passez à l'étape suivante. Sinon, il n'y a pas de point qui satisfait toutes les contraintes simultanément, de sorte que le problème ne sera pas résolu, dit infaisable.
5. Déterminer les points extrêmes ou les sommets du polygone ou polyèdre qui forme la région faisable. Ces points seront les candidats à la solution optimale.
6. Ěvaluer la fonction objective à chaque sommet et ceui (ou ceux) qui maximisent (ou minimisent) la valeur résultante définiront la solution optimale.

Chapitre 3

Exemple

3.1 Exemples d'application

3.1.1 Problème de production

Une usine produit deux ciments rapportant 50 DA et 70 DA /tonne. Pour faire une tonne de ciment 1, il faut 40min de calcination dans un four à chaud et 20 min de broyage. Pour fabriquer une tonne de ciment 2, il faut 30 min de four à chaud et 30min de broyage. Le four et l'atelier de broyage sont disponibles 360 min et 480 min par jour. La question que se pose l'exploitant de cette usine est la suivante : Combien de ciment de chaque type peut-on produire par jour pour maximiser le bénéfice ?

★**Résolution**

1- Notant par x_1, x_2 les quantités à produire des deux ciments. Ces quantités doivent vérifier les conditions suivantes le four ne peut fonctionner plus de 360min par jour et l'atelier pas plus de480min

$40\ x_1 + 30\ x_2 \leq 360$

$30\ x_1 + 30\ x_2 \leq 480$

2- Les quantités à produire de ciment sont toutes positives ou nulles : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Le chef de production du produit choisira le

programme réalisable qui donnera le maximum de la fonction bénéfice Z : $Z(x_1,\ x_2) = 50x_1 + 70x_2 \longrightarrow \max$.

En résumé le chef de production aura pour objectif, de trouver la solution optimale du problème suivant :

$Z = 50x_1 + 70x_2 \longrightarrow \max$

$40x_1 + 30x_2 \leq 360$

$30x_1 + 30x_2 \leq 480$

$x_1, x_2 \geq 0$

3.1.2 Problème de la coupe :

Un service de ravitaillement d'une usine à reçu d'un fournisseur 500 feuilles d'acier de longueur 5m .Celles-ci doivent être découpées en feuilles de 2m et 1.5 m désignées respectivement par A et B. Avec ces dernières feuilles on fabrique un produit dénote par P .Chaque produit P a besoin de 3 feuilles de A et 2 feuilles de B. Le problème consiste à avoir un modèle mathématique en faisant un plan de découpage des feuilles, qui nous permet d'avoir une quantité maximale de produit P.

★**Résolution :**

On peut avoir trois variantes de découpage représentées par le tableau suivant :

Variante de découpage	A	B	Reste
1	2	0	1m
2	1	2	0m
3	0	3	0,5m
Produit P	3	2	

La première variante de découpage par exemple consiste à découper une feuille de 5m en trois : (2m + 2m + 1m), c'est-à-dire 2 unités de A et un reste de 1m. Soit Z= x = nombre d'unités de P, et soit x_j = nombre de feuilles de 5m à couper par la $j^{ème}$ variante (j=1...3). De là, notre problème de découpe sera modélisé par :

$Z = x \longrightarrow \max$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$

$2x_1 + x_2 \geq 3x$

$2x_1 + 3\,x_3 \geq 2x$

$x_j \geq 0$, j=1...3, $x \geq 0$

3.2 Exemple

Considérons le problème:

$$maxz = 20x_1 + 25x_2$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 48 \\ x_{1,}x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Au préalable, on écrit le problème sous la forme canonique

$$\max z = 20x_1 + 25x_2$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 40 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 48 \\ x_{1,}x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Voici les étapes du simplexe.

0. On forme le tableau initial T

B	x_1,	x_2,	x_3,	x_4,	
x_3	2,	3,	1,	0,	40
x_4	4,	2,	0,	1,	48
	20,	25,	0,	0,	0

Les variables de base sont fx_3, x_4g et la solution de base est (0 ,0, 40, 48) ce qui correspond à l'origine dans le plan.

1. La fonction z varie plus rapidement en fonction de la variable x_2. Donc, on choisit la deuxième colonne comme colonne de pivot. La variable x_2 entre dans la base mais une variable doit sortir.

2. On doit choisir la ligne de pivot. Pour cela, on utilise le critère du quotient

$$\frac{b_i}{a_{ij}} = \min\left\{\frac{b_k}{a_{kj}} \mid a_{kj \geq 0} \qquad K = 1, 2, \cdots, m\right\}$$

où j est la colonne de pivot de l'étape 2. Le critère assure que la solution sera admissible.

B	x_1,	x_2,	x_3,	x_4,		critère
x_3	2,	3,	1,	0,	40	$40 \div 3 = 40/3$
x_4	4,	2,	0,	1,	48	$48 \div 2 = 24$
	20,	25,	0,	0,	0	

La ligne de pivot sera la première : i = 1. Les variables de base deviennent B = $\{x_2, x_4\}$.

3. On pivote autour de l'élément $T_{1,2}$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	$2/3$	1	$1/3$	0	$40/3$
x_4	$8/3$	0	$-2/3$	1	$64/3$
	$10/3$	0	$-25/3$	0	$-1000/3$

La solution de base sera $x_2 = 40/3$, $x_4 = 64/3$, $x_1 = x_3 = 0$.

4. On choisit la première colonne comme colonne de pivot car x_1 est la seule variable qui augmente z.

B	x_1	x_2	x_3	x_4		critère
x_3	$2/3$	1	$1/3$	0	$40/3$	$40/3 \div 2/3 = 20$
x_4	$8/3$	0	$-2/3$	1	$64/3$	$64/3 \div 8/3 = 8$
	$10/3$	0	$-25/3$	0	$-1000/3$	

On applique le critère du quotient pour chercher la ligne de pivot et on trouve i = 2. La nouvelle base sera B = $\{x_2, x_1\}$.

5. On pivote autour de l'élément $T_{2,1}$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	1	$1/2$	$-1/4$	8
x_4	1	0	$-1/4$	$3/8$	8
	0	0	$-15/2$	$-5/4$	-360

6. L'algorithme se termine ici car tous les coefficients des colonnes x_1, x_2, x_3, x_4 sont

négatifs. Donc, on ne peut augmenter davantage z. La solution optimale sera

$$x_1 = 8,\ x_2 = 8,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad z = 360:$$

ce qui correspond au sommet (8, 8) dans le plan. Le signe dans le coin inférieur droit est dû au fait que l'on avait initialement ajouté la ligne $c^t x$ - z = 0. Donc, à la fin, on aura -z = -360.

La solution de l'exercice avec la méthode simplexe.

% PROGRAMME simplexe.m

% exemple :

*% max 20*x1+25*x2*

*% s.t 2*x1+3*x2<=4*

*% 4*x1+2*x2<=60*

% x1,x2>=0

%on a deux contraintes ,donc on ajoute deux variables d 'écrit

%x3,x4

% i.e on ajoute x3 à la 1ère contrainte ,x4 à la 2 ème contrainte

% Donc N=[3 4]

% qui est l'ensemble d'indice des variable d ?écart

% la matrice A est donc A=[2 3 1 0 40 ;4 2 0 1 48 ;20 25 0 0 0]

% dont : la 1 ère ligne cotientles coefficients de la 1 ére contrainte

% la 2 ème ligne cotientles coefficients de la 2 éme contrainte

% la dernière ligne contient les confficients de la fonction objective

% Et puis exécuter ? [sol,val,kk] = ssimplex1(A,N)

% Note : la variable de base correspondant à la matrice de base doit etre la matrice

% unité. (cette limitation sera derrière la mise à niveau est d'améliorer)

*% Résoudre le programme linéaire standard : max c*x ; st A*x =b ; pour x<=0*

% Cette fonction est simplement la table initiale ,y compis : la dernière ligne est

le

% nombre de l'indice de base des variable initiales

% Sortie : variable sol est la solution optimale

```
% variable val est la valeur de la fonction objective
% kk est le nombre d'itérations
function [sol,val,kk] = simplexe1(A,N)
A=[ 2 3 1 0 40 ;4 2 0 1 48 ;20 25 0 0 0]
N=[3 4]
[mA,nA] = size(A) ;
kk=0 ;
stop =0 ;
while ~stop
kk=kk+1 ;
if A(mA, :)<=0
stop=1 ;
sol= zeros(1,nA-1) ;
for i=1 :mA-1
sol(N(i))=A(i,nA) ;
end
disp('') ;
disp('LES VARIABLES DE BASE : ') ;
disp('========================') ;
x1= sol(1)
x2= sol(2)
disp('')
disp('LA FONCTION ECONOMIQUE : ') ;
disp('========================') ;
val = -A(mA,nA)
disp('') ;
else
for i=1 :nA-1
if A(mA,i) > 0 & A(1 :mA-1,i) <= 0
disp('have in...nite solution !') ;
```

```
stop=1 ;
break ;
end
end
if ~stop
temp=0 ;
for i=1 :nA-1
if A(mA,i) > temp
temp = A(mA,i) ;
inb=i ;
end
end
temp = inf ;
for i=1 :mA-1
if A(i,inb) > 0
if A(i,nA)/A(i,inb)> 0 & A(i,nA)/A(i,inb) < temp
temp=A(i,nA)/A(i,inb) ;
outb=i ;
end
end
end
for i=1 :mA-1
if i==outb
N(i)=inb ;
end
end
for i=1 :mA
if i~= outb
A(i, :)=A(i, :)-A(outb, :)*A(i,inb)/A(outb,inb) ;
end
```

```
end
A(outb, :)=A(outb, :)/A(outb,inb) ;
end
end
end
end
% FIN DU PROGRAMME
A = 2 3 1 0 40
    4 2 0 1 48
    20 25 0 0 0
N =
3 4
LES VARIABLES DE BASE :
========================
x1 =
8
x2 =
8
LA FONCTION ECONOMIQUE :
=========================
val =
360
```

3.3 Exemple

3.3.1 Exemple

Trouver la solution optimale de (PL) suivant avec la méthode graphique

$$MaxZ = 3X_1 + 2X_2$$

Sous contraintes :

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 &\leq 18 \\ 2X_1 + 3X_2 &\leq 42 \\ 3X_1 + X_2 &\leq 24 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution 3·3·1 Sous contrainte :

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 &= 18 \\ 2X_1 + 3X_2 &= 42 \\ 3X_1 + X_2 &= 24 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Sommet	Coordonnées(X_1;X_2)	Valeur objectif(Z)
A	$(0,0)$	0
B	$(0,14)$	28
C	$(3,12)$	33
D	$(6,6)$	30
E	$(8,0)$	24

Remarque 3·3·1

Aprés l'évaluation de la fonction objectif ($3X_1 + 2X_2$) dans chacun des points(résultat qu'on recueilli dans le tableau suivant). Comme le point G fournit la plus grande valeur à la fonction Z et l'objectif c'est de maximiser, ce point représente la solution optimale : $Z = 33$ avec $X_1 = 3$et $X_2 = 12\cdot$

3.3.2 Exemple

Trouver la solution optimale de (PL) suivant avec la méthode graphique.

$$MaxZ = 10X_1 + 20X_2$$

Sous contraintes :

$$\begin{array}{lcl} 3X_1 + 5X_2 & \geq & 75 \\ X_1 & \leq & 12 \\ X_1,\ X_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Solution 3·3·2

Sous contrainte :

$$\begin{array}{lcl} 3X_1 + 5X_2 & = & 75 \\ X_1 & = & 12 \\ X_1,\ X_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Sommet	Coordonnées(X_1;X_2)	Valeur objectif(Z)
A	$(25, 12)$	490
C	$(30, 12)$	540
G	$(35, 12)$	590

Remarque 3·3·2

En remarque qu'il n'y a pas de solution limité.

3.3.3 Exemple

Trouver la solution optimale de (PL) suivant avec la méthode graphique.

$$Max\ Z = 10X_1 + 20X_2$$

Sous contraintes :

$$\begin{aligned} 5\mathrm{X}_1 + 10\mathrm{X}_2 &\leq 25 \\ 5\mathrm{X}_1 + 10\mathrm{X}_2 &\geq 50 \\ \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution 3·3·3

Sous contrainte :

$$\begin{aligned} 5\mathrm{X}_1 + 10\mathrm{X}_2 &= 25 \\ 5\mathrm{X}_1 + 10\mathrm{X}_2 &= 50 \\ \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Remarque3·3·3

Graphiguement en déduire qu'il n'y a pas de solution.

Conclusion

La programmation linéaire fait partie de la programmation mathémattique

que étudie les méthodes de recherche de l'extrémun lieé des fonctions de plusieurs variables. Dans la littérateur mathématique, on trouve plusieurs méthodes pour la résolution d'un programmation linéaire : graphique, simplex, grand M, deux phase.......

Dans notre travail, on s'est intéresser à appliquer la technique de la programmation linéaire pour guider l'utilisation des ressours de l'entreprise disponible c'est -t-à-dire d'essyer de déterminer la réparation optimal des ressources diponible de générer la meilleur revenu possible, mais cela ne peut atteint pas sauf si les conditiosn sont convenables, si les condition ne sont convenable il faut trouver un autre ensemble de solution qui utilisé la même technique, finalement en laisant la liberté de décision à l'entreprise et leurs dirigents par ce qu'ils sont conscients de véritable situation par rapport aux autres.

Alors on peut donner certaines suggestion peuvant être pour améliorer l'utilisation des ressources de l'entreprise disponible :

– Attention à la programmation linéaire et autre méthodes quantatives, au du moins les définir pour n'est pas restée sant utilisation.

– Il faut utilise les gens de ce domaine pour bon décision et pour bon profit.

Bibliographie

[1] Gérald BAILLARGEON : programme linéaire appliqué : outils d'optimisation et d'aide à la décision, édition SMG 1996 ;

[2] Jacques TEGHEM, programmation linéaire· édition de l'université de Bruxelles ; Ellipses édition, 1996 ;

[3] A. Gourdin, M.Boumahrat, Méthodes Numériques Appliquées

[4] S.ACHMANOV, Programmation linéaire.

[5] Dantzig G.B , linear programming and extension press,princeton , Jersey,1963.

[6] Gass S.I Linear programming ,MacGr-Hill , New York,1958.

[7] 1. ANTOINE Joseph, CORNIL jean-paul, Lexique thématique de la comptabilité, dictionnaire spécialisé explicatif édition revue, augmentée et mise à jour avec la collaboration de Stéphane mercier, Belgique 2002

[8] BARRE.R, LORY.R, RICHEZ.M, comptabilité analytique d'exploitation, édition ISTRA, Paris 1980.

[9] BASTIN Fabian, modèle de recherche opérationnelle, édition viaduc de Millau, France 2006.

[10] BENGHEZAL Amour Farouk, programmation linéaire, revues et augmentée, édition de l'office des publications universitaire, 2eme édition, Alger 2006·

ملخص

في هذه المذكرة نستعرض موضوع البرمجة الخطية بصفة عامة مع ذكر بعض الطرق المستعملة في حلها وقمنا أيضا بذكر بعض الأمثلة حول طريقة "simplex" المفيدة

الكلمات المفتاحية

- البرمجة الخطية
- خوارزمية
- Simplex

Abstract

In this memory we review the topic of linear programming in general with some of the methods used to solve it, and we also mention some examples about the useful "simplex" method

key words

- Linear programming
- Algorithm
- Simplex