REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Étude théorique et numérique d'un problème de contact unilatéral

---

Présentée par :
M^{elle} BENHAMIDA Khouloud

Soutenu publiquement le : 05/06/2016.

Devant le jury composé de :

Président :	*M^{r} MERZOUGUI* Abdelkrim	M.C.A., Université de M'sila
Encadreur :	*M^{r} NOUIRI* Brahim	M.C.B., Université de M'sila
Examinateur :	*M^{r} SAADI* Abderachid	M.A.A., Université de M'sila

Année universitaire 2015/2016

Remerciements

*Je tiens avant tout à remercier **ALLAH**, le tout puissant, qui m'a donné la patience, la volonté et la courage pour bien achever mes étude.*

*Je tiens à remercier infiniment et chaleureusement a mon encadreur Monsieur **NOUIRI Brahim**, maitre de conférence à l'université de M'sila, que m'a guidé tout le long de mon travail pour l'aboutissement de mémoire et qui a toujours fait preuve de patience et de compréhension. je lui serai assez reconnaissante.*

*Je remercie le Docteur **MERZOUGUI Abdelkrim** , maitre de conférence à l'université de M'sila , pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.*

*Je remercie vivement aussi Monsieur **SAADI Abderachid** ,maitre assistant à l'université de M'sila, pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

Je tiens aussi à manifester tout ma gratitude envers tout les membres du conseil scientifique.

*je tiens à remercier tout les collègues qui m'"ont accompagné pendant les années de l'étude en particulier **Karima, Zeynab, Abir, Houda** .*

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué de prés, ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Merci pour tout.

Dédicaces

Au nom de Allah le clément et le miséricordieux

Dédie ce modeste travail A

joyau de ma vie "ma mère", qui sont la source de ma réussite, je souhaite qu'elle trouve à travers ce mémoire le faible témoignage de leur efforts et sacrifices.

Mes grand parents

Mes tantes, et mes oncles

Mes sœurs, et mes frère

Mes chères amis.

Résumé

ملخص: إنّ مسائل الاتصال لا تزال تشكل تحدّيا بالنسبة للرياضيين. على الرغم من العديد من الدراسات حول هذا الموضوع هناك نوعان من مشاكل الاتصال: إما اتصال من جانب واحد واتصال مصحوبا باحتكاك. في هذه العمل، قمنا بدراسة فقط مسألة الاتصال من جانب واحد. وبالإضافة إلى ذلك، فإننا سوف نقتصر على حالة المرونة الخطية في المستوي. وعلى الرغم من هذه الافتراضات، والصعوبة الرئيسية هي عدم التفاضل الناتجة عن القيود المصاحبة للاتصال. باستعمال طريقة العناصر المنتهية، طبقنا طريقة التدرج بإسقاط لحل المسألة عدديا.

كلمات مفتاحية: اتصال من جانب واحد، جسم مرن، عناصر منتهية، طريقة الاسقاط .

Malgré de nombreux travaux sur le sujet, la résolution des problèmes de contact constitue encore un défi pour le numéricien. Il existe deux types de problèmes de contact : soit le contact unilatéral et le contact frottant. Dans ce mémoire, nous allons uniquement considérer le contact unilatéral. De plus, nous allons nous limiter au cas de l'élasticité linéaire bidimensionnel. Malgré ces hypothèses, la difficulté majeure provient de la non différentiabilité engendrée par la contrainte d'inégalité du contact. Avec la méthode des éléments finis, on applique la méthode du gradient projeté pour la résolution numérique de ce problème.

Mots-Clés : Contact unilatéral, éléments finis, Méthode de projection.

Despite numerous studies on the subject, the resolution of contact problems is still a challenge for the mathematician. There are two types of contact problems : either the unilateral contact and sliding contact. In this brief, we will only consider the unilateral contact. In addition, we will limit ourselves to the case of two-dimensional linear elasticity. Despite these assumptions, the main difficulty comes from the non differentiability generated by the contact inequality constraint. With the finite element method, we apply the method of projected gradient for the numerical solution of this problem.

Keywords : Finite elements, Unilateral contact, Projection method.

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

Les problèmes de contact mécanique se rencontrent principalement dans des domaines variés que l'aéronautique, la mécanique automobile, le génie civil, les sciences du bois, et même la médecine. Il existe deux types de problèmes de contact : le contact unilatéral, et le contact frottant. La formulation du problème de contact unilatéral a été décrite par A. Signorini en 1933. L'étude mathématique des problèmes de contact a commencé en 1972, avec l'ouvrage de Duvaut et Lions [5]. Beaucoup de travaux portant sur l'étude numérique des problèmes de contact ont été réalisés, on peut citer par exemple [10].

Dans ce mémoire, on considère uniquement le contact unilatéral. De plus, nous nous limitons au cas de l'élasticité linéaire en petites déformations. Le cadre mathématique qui correspond à ce type de problèmes est celui des inéquations variationelles dont l'approximation a été étudiée par plusieurs auteurs. Les solutions numériques de ces problèmes ont été proposées par Kikuchi et Oden [13] dans le cas d'un solide en contact avec une fondation rigide (problème de Signorini). Haslinger, Hlavâcek et Necas [11] ont étudié le problème de contact entre deux solides déformables. Le problème de contact unilatéral entre une matériau déformable et une fondation rigide est une équation aux dérivées partielles avec des contraintes de type inégalités sur la surface de contact. Sous forme faible, ce problème correspond à un problème d'optimisation avec contraintes de la forme

$$J(u) = \min_{v\in K} J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v).$$

Où K est un ensemble convexe et fermé, $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue, et coercive et $\ell(\cdot)$ est une forme linaire continue. La condition d'optimalité de ce problème s'exprime sous la forme :

$$a(u, v-u) \geq \ell(v-u), \ \forall v \in K.$$

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude théorique, et numérique d'un problème élastique linéaire, bidimensionnel de contact unilatéral. Ce mémoire est divisé en trois chapitre :

Dans le chapitre 1, nous présentons les préliminaires mathématiques fondamentaux, qui nous utilisons dans ce mémoire. Nous allons donner un rappel sur les espaces vectoriels normés, et de Hilbert et leurs propriétés, ainsi que quelques résultats indispensables sur les opérateurs linéaires continus, dans les espaces de Hilbert, et en termine par le théorème de Stampacchia

Dans le chapitre 2, nous avons étudie théoriquement, et numériquement un problème d'élasticité linéaire plane. Nous avons montré par le théorème de *Lax-Milgram* un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Ensuite, nous présentons le problème discret par la méthode des éléments finis. Enfin, nous avons donné un programme par FreeFem++ pour résoudre numériquement ce problème.

Le chapitre 3 est réservé au problème plan de contact unilatéral, entre une membrane élastique, et une fondation rigide. Nous avons montré par le théorème de *Stampaschia* un résultat d'existence, et d’unicité. Ensuite, nous présentons un problème approché par la méthode des éléments finis. Enfin, nous avons donné un algorithme pour résoudre ce problème approché.

Ce mémoire se termine par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Dans ce chapitre, nous allons donner un rappel sur les espaces vectoriels normés, et de Hilbert et leurs propriétés, ainsi que quelques résultats indispensables sur les opérateurs linéaires continus dans les espaces de Hilbert, et en termine par par le théorème de Stampacchia.

Dans tout la suite $\mathbb{K}$ désignera soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Tout les espace vectoriel considérés seront réels ou complexes.

1.1 Espaces normés

Définition 1.1. (Norme). Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. On appelle norme sur E une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité),
3. $\left\|x + y\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\|$, pour tout $x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Remarque 1.1. L'espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par $(E, \|.\|)$.

Exemple 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, les application suivantes sont des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} |x_i|,$$
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1.$$

Exemple 1.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'espace vectoriel des fonction de carré intégrable sur Ω est :

$$L^2(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R}, \int_\Omega \left|f(x)\right|^2 < \infty\right\}.$$

L'application $\|.\| : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$\|f\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{ est une norme.}$$

Définition 1.2. (Semi norme). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on dit qu'une semi norme sur E si :

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x \neq 0.$$

Remarque 1.2. L'espace vectoriel E muni d'une semi norme s'appelle espace semi normé.

Définition 1.3. Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont équivalent s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que :

$$\forall \mu \in E : \ \alpha\|.\|_1 < \|.\|_2 < \beta\|.\|_1.$$

1.2 Espace de Banach

Définition 1.4. (Suite de cauchy). Soit E un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est suite de Cauchy si et seulement si,

$$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N};\forall n\in\mathbb{N},n>m\geq N\Rightarrow\|x_n-x_m\|<\epsilon.$$

Définition 1.5. (Espace complet). Soit E un espace vectoriel normé. On dit que E est complet si tout suite de Cauchy dans E est convergente dans E.

Un espace de Banach est un espace normé complet.

Exemple 1.3. .

- Tout espace vectoriel normé de dimension fini est un espace de Banach (en particulier $\mathbb{R}^n$).
- $C([0,1],\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_\infty$ c'est-à- dire :

$$\|f\|_\infty=\left\{f:[0,1]\to\mathbb{R},\sup_{x\in[0,1]}\left|f(x)\right|\right\}.$$

Théorème 1.1. *(Théorème de point fixe de Banach). Soit un espace normé complet $(E,\|.\|)$ et une application $f:E\to E$, on suppose cette application contractante c'est-à-dire :*

$$\exists K\in[0,1[\text{ tel que }\left\|f(x)-f(y)\right\|\leq K\left\|x-y\right\|\forall x,y\in E.$$

Alors f admet un point fixe unique $\left(\exists!x_0\in E:f(x_0)=x_0\right)$.

Définition 1.6. (Espace dual). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle dual de E, et on notera E' (ou E^*) . L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ des forme linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$.

Remarque 1.3. . On appelle bidual de E, et on notera $(E^*)^*$, dual de E^*.

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.7. (Produit scalaire). Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, un produit scalaire sur E est une application $\langle .,.\rangle:E\times E\to\mathbb{K}$ tell que pour tout $x,y,x_1,x_2\in E$ et pour $\lambda\in\mathbb{K}$ on a :

1. $\langle x,x\rangle\geq0$ et $\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$,
2. $\left\langle x,y\right\rangle=\overline{\left\langle y,x\right\rangle}$,
3. $\left\langle x_1+x_2,y\right\rangle=\left\langle x_1,y\right\rangle+\left\langle x_2,y\right\rangle$,
4. $\left\langle\lambda x,y\right\rangle=\lambda\left\langle x,y\right\rangle$.

Définition 1.8. (Espace Préhilbertien). Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Remarque 1.4. . Un produit scalaire sur E, définit une norme sur E donnée par :

$$\forall x\in E:\|x\|^2=\langle x,x\rangle.$$

Exemple 1.4. .

- L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i.$$

- L'espace $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ est un espace préhilbertien si on le muni d'un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) g(x) dx.$$

Proposition 1.1. *(Inégalités de Cauchy-Schwartz). Soit E un espace préhilbertien sur le corps $\mathbb{K}$, pour tout $x, y \in E$ on a :*

$$\left|\langle x, y \rangle\right| \leq \|x\| \left\|y\right\|.$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0,$$

Et

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, y \rangle + 2\Re\left(\lambda \langle x, y \rangle\right) + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle,$$

On prend

$$\lambda = \overline{t \langle x, y \rangle},$$

Et cela donne

$$t^2 \left|\langle x, y \rangle\right|^2 \langle y, y \rangle + 2\left|\langle x, y \rangle\right|^2 + \langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le discriminant du polynôme en t donc être négatif ou nul, ce qui donne

$$\left|\langle x, y \rangle\right|^4 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \left|\langle x, y \rangle\right|^2 \leq 0,$$

Ou encore

$$\left|\langle x, y \rangle\right| \leq \|x\| \left\|y\right\|.$$

□

Proposition 1.2. *(Loi de parallélogramme). La norme induite par un produit scalaire satisfait l'égalité*

$$\left\|x + y\right\|^2 + \left\|x - y\right\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \left\|y\right\|^2\right).$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\left\|x + y\right\|^2 + \left\|x - y\right\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle, \quad = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle \\ &\quad - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle, \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle, \\ &= 2\|x\|^2 + 2\left\|y\right\|^2, \\ &= 2\left(\|x\|^2 + \left\|y\right\|^2\right).\end{aligned}$$

□

Définition 1.9. (Espace de Hilbert). Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$, complet pour la norme induite par le produit scalaire.

Définition 1.10. (Orthogonalité). Soit H un espace de Hilbert, alors deux vecteur $x, y \in H$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, on note par $x \perp y$. L'orthogonale d'un sous espace vectoriel A est l'ensemble :

$$A^{\perp} = \left\{ x \in H, \langle x, y \rangle = 0, \ \forall y \in A \right\}.$$

Remarque 1.5. La relation d'orthogonalité possédé les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in H, x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$,
2. $\forall x \in H, 0 \perp x$,
3. $x \perp x \Rightarrow x = 0$,
4. Soit $x \in H$. pour tout $x_i \in H, i = 1, \ldots, n$. On a $x \perp x_i \Rightarrow x \perp \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \ \forall \lambda_i \in \mathbb{K}$.

Théorème 1.2. *Soit A un ensemble non vide d'un espace de Hilbert, et soit A la fermeture de A, alors, s'il existe $x \in \bar{A}$ tel que $x \perp A$ alors $x = 0$.*

Démonstration. Soit $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ tel que $x_n \xrightarrow{\|.\|} x$ donc $(x_n, x) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (x_n, x) = \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. □

Théorème 1.3. *Si A un ensemble non vide de H alors :*

$$A^{\perp} = \{x \in H / x \perp A\}.$$

est un sous espace fermé de H.

Démonstration. On a $A^{\perp} \neq 0$ car $0 \in A^{\perp}, \forall x_1, x_2 \in A^{\perp}, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall y \in A$ on a :

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle = 0.$$

alors $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A^{\perp}$ donc $A^{\perp}$ est un sous espace de H.

D'autre part on a $\forall x_0 \in \bar{A^{\perp}} \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\perp}$ tel que $x_n \xrightarrow{\|.\|} x_0$ alors,

$$\langle x_0, y \rangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = 0 \ \forall y \in A.$$

Donc $x_0 \in A^{\perp}$ est un sous espace fermé. □

Corollaire 1.1. *Soit H_1 espace fermé de H, et soit $x \in H$ Alors il existe un élément $y_0 \in H_1$ telle que :*

$$\left(x - y_0\right) \perp H_1 \ et \ \left\|x - y_0\right\| \leq \left\|x - y\right\| \ \forall y \in H_1$$

on appelle cet élément la projection orthogonale de x sur H_1 et l'on note par : $y_0 = p_{H_1}(x)$.

Théorème 1.4. *(Décomposition orthogonale). Si H_1 est un sous espace fermé de H alors*

$$H = H_1 \oplus H_1^{\perp}.$$

C'est- à-dire : $\forall x \in H, \exists y \in H_1, z \in H_1^{\perp} : x = y + z$.

Démonstration. L'existence d'une telle décomposition vient du fait que

$$x = px + (I - p)x$$

où p est la projection orthogonal de H sur H_1 supposons : $x = y + z, y \in H_1^{\perp}$ alors :

$$\begin{aligned} px = py + pz = y, \\ \left(I - p\right)x = \left(I - p\right)y + \left(I - p\right)z = z. \end{aligned}$$

Cette décomposition est donc unique. D'autre part si $x = px + \left(I - p\right)x \in H_1 \cap H_1^{\perp}$ alors $\left\langle x, px \right\rangle = \left\langle x, \left(I - p\right)x \right\rangle = 0$ ce qui entraine que

$$\left\langle x, px + \left(I - p\right)x \right\rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0 \text{ donc } x = 0.$$

□

Définition 1.11. (Ensemble convexe). Soit K un sous-ensemble de E, ($K \neq \varnothing$) On dit qui K est convexe si pour tout x et y de K le segment $\left[x, y\right]$ est inclus dans K ,i.e,

$$\forall x, y \in K, \ \forall \lambda \in [0,1] : \ (1 - \lambda)\, x + \lambda y \in K.$$

Exemple 1.5.
- Les sous-ensemble convexe de l'espace $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.
- Dans un espace vectoriel normé réel tout boule (ouverte ou fermé) est convexe.

1.4 Opérateur linéaire dans un espace de Hilbert

Définition 1.12. (Opérateur linéaire continue). Soit H_1 et H_2 deux espace de Hilbert réels, on appelle opérateur linéaire continue deH_1 dans H_2 tout application $T : H_1 \to H_2$ tell que :
Linéarité : $\forall x, y \in H_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : T\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha T x + \beta T y.$
Continuité : $\exists K > 0, \forall x \in H_1 : \|T x\|_{H_2} \leq K \|x\|_{H_1}.$
On définit la norme de l'opérateur T par :

$$T = \sup_{x \in H_1} \frac{\|T x\|_{H_2}}{\|x\|_{H1}}.$$

Proposition 1.3.
1. *$\left(\mathscr{L}(H), \|.\|_{\mathscr{L}(H)}\right)$ est un espace de Banach,*
2. *Si $A \in \mathscr{L}(H)$, alors $\|A\|_{\mathscr{L}(H)} = 0 \Rightarrow A = 0$,*
3. *Si $A, B \in \mathscr{L}(H)$, alors $A + B \in \mathscr{L}(H)$,*

$$\|A + B\|_{\mathscr{L}(H)} \leq \|A\|_{\mathscr{L}(H)} + \|B\|_{\mathscr{L}(H)},$$

4. *$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \|\alpha A\|_{\mathscr{L}(H)} = |\alpha|\, \|A\|_{\mathscr{L}(H)}$,*
5. *Si $A \in \mathscr{L}(H)$ et A bijectif alors $A^{-1} \in \mathscr{L}(H)$.*

Définition 1.13.
– Le noyaux de l'opérateur T est un sous espace de H_1 définie par :

$$\ker(T) = \{x \in H_1, T x = 0\}.$$

– L'image de l'opérateur T est le sous espace de H_2 définie par :

$$\Im(T) = \{Tx / x \in H_1\}.$$

Définition 1.14. (Opérateur adjoint). Soient H_1 et H_2 deux espace de Hilbert, et soit $T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$. L'unique application linéaire $T^* \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ tel que

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 \ \ \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

est appelée l'adjoint de l'opérateur T.

Proposition 1.4. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Soit $T, S \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ on a :*

1. $(T^*)^* = T$,
2. $(TS)^* = s^* T^*$,
3. $(T + S)^* = T^* + S^*$,
4. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$,
5. $\ker(T^*) = (\Im T)^{\perp}$.

Démonstration. 1. $\forall x \in H_1, \forall y \in_2$ on a

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = \overline{\langle T^* y, x \rangle} = \overline{\langle y, (T^*)^* x \rangle} \\ = \left\langle \left(T^*\right)^* x, y \right\rangle, \end{aligned}$$

2. $\forall x, y \in H$:

$$\begin{aligned} \langle (TS)^* x, y \rangle = \langle x, TS(y) \rangle = \langle T^*(x), S(y) \rangle \\ = \langle S^* T^*(x), y \rangle, \end{aligned}$$

3. $\langle (T+S)(x), y \rangle = \langle Tx, y \rangle + \langle Sx, y \rangle = \langle x, (T^* + S^*) y \rangle$,
4. $\langle \alpha Tx, y \rangle = \alpha \langle Tx, y \rangle = \alpha \langle x, T^* y \rangle = \langle x, \bar{\alpha} T^* y \rangle$,
5. Soit $y \in \ker(T^*)$ alors, on :

$$\begin{aligned} T^*(y) = 0 &\Leftrightarrow \langle x, T^* y \rangle = 0, \forall x \in H, \\ &\Leftrightarrow \langle Tx, y \rangle = 0, \\ &\Leftrightarrow y \in (\Im T)^{\perp}. \end{aligned}$$

Donc $\ker(T^*) = (\Im T)^{\perp}$.

□

Théorème 1.5. *(théorème représentation de Riesz). Soit H un espace de Hilbert, et soit $L \in H'$, alors $\exists! a \in H$ tel que :*

$$\forall x \in H : L(x) = \langle x, a \rangle \ \text{ et } \|L\|_{H'} = \|a\|_H.$$

Démonstration. 1. Si $L = 0 \Rightarrow \langle x, a \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$ (le cas trivial).

2. Si $L \neq 0$, soit $F = \ker(L)$(C'est un sous espace fermé car L est continue).
   On a $H = F^{\perp} \oplus F$, Soit $y_0 \neq 0, y_0 \in F^{\perp}$alors, $L\left(y_0\right) \neq 0, \forall x \in H$,
   On pose $u = x\frac{L(x)}{L(y_0)}y_0 \Rightarrow L(u) = 0$, c'est-à-dire $u \in F$ et comme $y_0 \in F^{\perp}$ on a : $\left\langle u, y_0\right\rangle = 0$,
   Cela s'écrit remplaçant u par son expression
   $$\left\langle x, y_0\right\rangle - \frac{L(x)}{L\left(y_0\right)}\left\|y^0\right\|^2 = 0,$$
   On en déduit que :
   $$L(x) = \left\langle x, y_0\right\rangle \frac{L\left(y_0\right)}{\left\|y_0\right\|^2} \quad \forall x \in H,$$
   Et il suffit alors de poser $a = \left\|y_0\right\|^{-2}\overline{\left\|L\left(y_0\right)\right\|}y_0$,
   a est unique car si $a_1 \neq a_2$ vérifiant
   $$L(x) = \langle x, a_1\rangle = \langle x, a_2\rangle \quad \forall x \in H \Rightarrow \langle x, a_1 - a_2\rangle = 0,$$
   Donc $a_1 = a_2$.
   $\|L\|_{H'} = \|a\|_H$ on a :
   $$\|L\|_{H'} = \sup_{x \in H}\frac{|L(x)|}{\|x\|_H} = \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|x\|}.$$
   Donc $\|L\|_{H'} = \|a\|_H$.

□

Définition 1.15. (Forme bilinéaire). Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que :

- a est continue sur H s'il existe $M > 0$ telle que :
  $$\forall u, v \in H, \quad |a(u, v)| \leq M\|u\|_H\|v\|_H.$$
- a est coercive (ou elliptique) si :
  $$\exists \alpha > 0, \forall u \in H \text{ tel que } a(u, u) \geq \alpha\|u\|_H^2.$$
- a est symétrique si :
  $$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H.$$

Théorème 1.6. *(Lax-Milgram). Soit H un espace de Hilbert réel, on considère $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur H et $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur H alors, la formulation variationnelle suivante :*

$$\begin{cases} \textit{trouver } u \in H \textit{ tel que} \\ \forall v \in H, a(u, v) = L(v) \end{cases} \tag{1.1}$$

admet une unique solution, de plus cette solution dépend continument de la forme linéaire L.

Démonstration. On a $a(u,v)$ est une forme bilinéaire continue sur H d'après le théorème de Riesz (1.5 : $\exists! A(u) \in H$ tel que :

$$a(u,v) = \langle A(u), v\rangle \quad \forall v \in H.$$

La bilinéarité de $a(u,v)$ implique la linéarité de $u \to A(u)$ car soit $u_1, u_2 \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\left\langle A\left(\alpha u_1 + \beta u_2\right), v\right\rangle &= a\left(\alpha u_1 + \beta u_2, v\right),\\ &= \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v),\\ &= \alpha \langle A(u_1), v\rangle + \beta \langle A(u_2), v\rangle,\\ &= \left\langle \alpha A(u_1) + \beta A(u_2), v\right\rangle.\end{aligned}$$

donc $u \to A(u)$ est linéaire.

On pose $v = A(u)$. D'après la continuité de $a(u,v)$, nous avons :

$$\begin{aligned}\|A(u)\|^2 = a(u, A(u)) &\leq M\|u\|\,\|A(u)\|,\\ \Rightarrow \|A(u)\| &\leq M\|u\| \quad \forall u \in H.\end{aligned}$$

Donc $u \to A(u)$ est continue.

Une autre application de théorème (1.5), on a :

$$\exists! f \in H \text{ tel que } \left\|f\right\|_{H'} = \|L\|_{H'} \text{ et } L(v) = \left\langle f, v\right\rangle \ \forall u \in H.$$

Donc le problème variationnelle (1.1) est équivalent à trouver $u \in H$ tel que $A(u) = f$. On va montrer que A est bijectif (ce implique l'existence et l'unicité de u.

A **est injectif** : D'après la coercitive de $a(\cdot,\cdot)$ on a :

$$\begin{aligned}\alpha\|u\|^2 &\leq a(u,u) = \langle A(u), u\rangle,\\ &\leq \|A(u)\|\,\|u\|.\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\alpha\|u\| \leq \|A(u)\| \quad \forall u \in H. \tag{1.2}$$

Soit u_1, u_2 tel que $A(u_1) = A(u_2)$ alors, $A(u_1 - u_2) = 0$ (car A est linéaire). En utilisant (1.2), on obtient :

$$\alpha\|u_1 - u_2\| \leq \|A(u_1 - u_2)\| = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

A **est surjectif** : Il suffit démontrer que $\Im A^{\perp} = \{0\}$.

Soit $v \in \Im A^{\perp}$, on a :

$$\forall A(u) \in \Im A, \langle A(u), v\rangle = 0 \Rightarrow a(u,v) = 0.$$

On pose $u = v$ et d'après la coercitive de $a(\cdot,\cdot)$ on a :

$$\alpha\|v\|^2 \leq a(v,v) = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Donc $\Im A^{\perp} = \{0\}$

D'autre part on a :

$$H = \Im A \oplus \Im A^{\perp} \text{ et } \Im A^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \Im A = H.$$

Alors A est surjectif. A^{-1} **est continue** : En remplaçant dans (1.2) on trouve que A^{-1} est continue sur H. Alors la solution u dépend continument de f. □

1.5 Inéquation variationnelle du première espèce

Définition 1.16. (Inéquation du première espèce). Soient $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, H' le dual de H et$\langle .,. \rangle_{H'}$ le produit de dualité entre H et H', et $f \in H'$. Nous considéré le problème suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que :} \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K. \end{cases} \tag{1.3}$$

Le problème (1.3) est appelé inéquation variationnelle de première espèce.

En plus, si $a(.,.)$ est symétrique, on définit une deuxième formulation à ce problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que :} \\ j(u) \leq j(v) \quad \forall v \in K. \end{cases}$$

O*ù*

$$j(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - (f,u).$$

1.6 Théorème de Stampacchia

Théorème 1.7. *(Stampacchia,[4]). Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue, et coercive, soit $L(.)$ est forme linéaire continue sur H, et soit K un sous ensemble fermé convexe, et non vide de H alors, la formulation variationnelle suivante*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u \in H \textit{ tel que} \\ \forall v \in K, a(u, v-u) \geq \langle L, v-u \rangle. \end{cases} \tag{1.4}$$

Admet une unique solution. De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire L.

Démonstration. Pour tout $u \in H$ fixé,
On a $a(u,v)$ est une forme bilinéaire continue sur H d'après le théorème de Riez (1.5) $\exists! A(u) \in H$ tel que :

$$a(u,v) = \langle A(u), v \rangle \quad v \in H.$$

La bilinéarité de $a(u,v)$ implique la linéarité de $u \to A(u)$ car

Soit $u_1, u_2 \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \left\langle A\left(\alpha u_1 + \beta u_2\right), v \right\rangle &= a\left(\alpha u_1 + \beta u_2, v\right), \\ &= \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v), \\ &= \alpha \langle A(u_1), v \rangle + \beta \langle A(u_2), v \rangle, \\ &= \left\langle \alpha A(u_1) + \beta A(u_2), v \right\rangle. \end{aligned}$$

Donc $u \to A(u)$ est linéaire.

On pose $v = A(u)$ D'près la continuité de $a(u,v)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|A(u)\|^2 = a(u, A(u)) &\leq M \|u\| \|A(u)\|, \\ &\Rightarrow \|A(u)\| \leq M \|u\|, \text{ est continue.} \end{aligned}$$

D'après la coercitive de $a(.,.)$ on a :

$$\begin{aligned} \alpha \|u\|^2 \leq a(u,u) &= \langle A(u), u \rangle, \\ &\leq \|Au\| \|u\| \quad u \in H. \end{aligned}$$

Une autre application de théorème (1.5) on a :

$$\exists! f \in H \text{ tel que } \|f\|_{H'} = \|L\|^{H'} \text{ et } L(v) = \langle f, v \rangle \ \forall v \in H.$$

Donc le problème variationnelle (1.4) est équivalent à trouve $u \in H$ tel que

$$\begin{aligned} \langle Au, v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in, \\ Au \geq f. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Soit $\rho > 0$ une constante qui sera fixée ultérieurement, cela s'écrit en remplacement dans (1.5)on trouve :

$$\langle \rho f - \rho Au + u - u, v-u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K.$$
$$(\text{ i.e. } u = p_K((\rho f - \rho A(u) + u))).$$

On va choisir $0 < \rho < \frac{2\alpha}{c^2}$ de sorte que la fonction $g : K \to K$ tel que $u \to g(u) = P_K(\rho f - \rho A(u) + u)$ soit contractante stricte
i.e. il existe $K < 1$ tel que

$$|g(u) - g(v)| \leq K|v| \quad u, v \in K.$$

On a :

$$\begin{aligned} \|g(u) - g(v)\|^2 &= \|P_K(\rho f - \rho A(u) + u) - P_K(\rho f - \rho A(v) + v)\|^2, \\ &\leq \|-\rho A(u) + u + \rho A(v) - v\|^2, \\ &\leq \|(u-v) - \rho(A(u) - A(v))\|^2, \\ &\leq \|u-v\|^2 - 2\rho(u-v, A(u-v)) + \rho^2 \|A(u-v)\|^2, \end{aligned}$$

Et donc

$$\|g(u) - g(v)\|^2 \leq (1 - 2\alpha\rho + \rho^2 c^2) \|u-v\|^2.$$

On voit que g admet un point fixe unique. □

Remarque 1.6.

1. Si $a(.,.)$ symétrique, alors u est l'unique solution d'un problème d'optimisation avec contraintes

$$\begin{cases} \min J(v) \\ v \in K \end{cases} \tag{1.6}$$

où

$$J(u) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \ \forall \varphi \in H.$$

2. La forme bilinéaire est coercive, donc la fonctionnelle J est fortement convexe sur K. D'autre part, le problème de minimisation avec contrainte admet un minimum global u sur K vérifiant l'inégalité d'Euler suivante :

$$J'(u)(v-u) \geq 0, \ pour tout v \in M$$

Chapitre 2

Problème d'élasticité linéaire

Dans ce chapitre, nous avons étudie théoriquement et numériquement un problème d'élasticité linéaire plane. Nous avons montré par le théorème de *Lax-Milgram* un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Ensuite, nous présentons le problème discret par la méthode des éléments finis. Enfin, nous avons donné un programme par FreeFem++ pour résoudre numériquement ce problème.

2.1 Position du problème

On considère une membrane élastique qui occupe un ouvert borné Ω, du plan Ox_1x_2, de frontière Γ, suffisamment régulière, divisée en deux parties Γ_d et Γ_N tel que $meas(\Gamma_d) > 0$, voir Figure 2.1. On lui applique une densité surfacique de force dirigée uniquement dans la direction e_3 : $f = f\left(x_1, x_2\right) e_3$. On suppose que le matériau est fixé par la partie de frontière Γ_d et l'autre partie de la frontière, le matériau est soumis par une force de traction h sur Γ_N. On admet que le déplacement u s'effectue uniquement dans la direction e_3 : $u = u\left(x_1, x_2\right) e_3$.

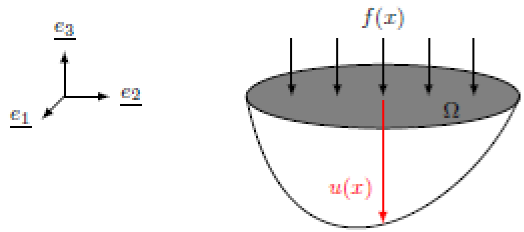

FIGURE 2.1 – Une membrane élastique plane.

Sous les hypothèses de petite déplacement, et des petites déformations (HPP), nous avons le problème suivant : Trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que

$$-div(\sigma(u)) = f, \text{ dans } \Omega, \tag{2.1}$$

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\epsilon(u)) I_3, \text{ dans } \Omega, \tag{2.2}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_d, \tag{2.3}$$

$$\sigma n = h \text{ sur } \Gamma_N. \tag{2.4}$$

où (2.1) représente l'équation d'équilibre, (2.2) représente la loi de Hooke avec $\mu, \lambda > 0$ sont les coefficients de Lamé et $\epsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right)$ est le tenseur des déformations linéarisé. (2.3)-(2.4) représentent les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann avec n le vecteur normale extérieur de Γ.

Proposition 2.1. *Le problème* (2.1)-(2.4) *se réduit au problème suivant : Trouver* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tel que*

$$-\mu\Delta u = f \;\; dans\, \Omega, \tag{2.5}$$

$$u = 0 \;\; sur\, \Gamma_d, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \;\; sur\, \Gamma_N. \tag{2.7}$$

Démonstration. De (2.2), nous avons :

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij},\ i, j = 1, \ldots, 3$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Comme $\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$, on obtient :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

et par suite, on a :

$$(div\sigma(u))\,e_3 = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right). \tag{2.9}$$

De (2.1) et (2.9), on trouve (2.5). Soit $n = (n_1, n_2, 0)^T$ le vecteur normale sur Γ. De (2.8), nous avons :

$$\sigma n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2\right)^T, \tag{2.10}$$

donc on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = \nabla u \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n} \tag{2.11}$$

De (2.4), (2.10) et (2.11), on trouve la condition de Neumann (2.7). □

2.2 Formulation variationnelle

On définit l'espace de Hilbert V par :

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega)\ \ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_d\right\}, \tag{2.12}$$

Est convexe, fermé, et non vide.
munit le produit scalaire suivant :

$$(u, v)_V = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx_1 dx_2.$$

Proposition 2.2. *La formulation variationnelle du problème* (2.5) -(2.7) *est donnée par :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v), \ \ \text{pour tout } v \in V. \end{cases} \tag{2.13}$$

Où

$$a(u, v) = \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx_1 dx_2,\ \ell(v) = \int_\Omega f(x_1, x_2)\, v dx_1 dx_2 + \mu \int_{\Gamma_N} hv ds.$$

Démonstration. En multipliant l'équation (2.5) par une fonction $v \in V$ et l'intégration sur Ω, on obtient :

$$-\mu \int_\Omega \Delta u v dx_1 dx_2 = \int_\Omega f(x_1, x_2)\, v dx_1 dx_2.$$

En utilisant la formule de Green et (2.6) et (2.7), on obtient :

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx_1 dx_2 = \int_\Omega f(x_1, x_2)\, v dx_1 dx_2 + \mu \int_{\Gamma_N} hv ds.$$

D'où (2.13). □

2.3 Existence et unicité

Pour l'existence et l'unicité du problème variationnel (2.13), nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Pour tout* $f \in L^2(\Omega)$ *et* $h \in L^2(\Gamma_N)$, *le problème variationnel* (2.13) *admet une solution unique* $u \in V$.

Démonstration. Grâce au Théorème 1.6 de Lax-Miligram, nous allons maintenant montre que le problème variationnel (2.13) a une solution unique.

Linéarité : on peut facilement montre que $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont forme bilinéaire et forme linéaire respectivement.

Coercivité : Nous avons :

$$a(v,v) = \mu \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx_1 dx_2 \geq \alpha \|v\|_V^2, \; 0 < \alpha \leq \mu.$$

Continuité :

1. Pour $\ell(\cdot)$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve :

$$\begin{aligned} |\ell(v)| &\leq \int_\Omega |f| \, |v| \, dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_N} |h| \, |v| \, ds \\ &\leq \left(\int_\Omega |f|^2 \, dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \\ &+ \left(\int_{\Gamma_N} |h|^2 \, ds \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_N} |v|^2 \, ds \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

D'autre part, nous avons l'inégalité de Poincaré ; qui donne une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $v \in V$:

$$\int_\Omega |v|^2 \leq c_1 \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \tag{2.15}$$

et l'inégalité de trace de Sobolev ; qui donne une constante $c_2 > 0$ telle que pour tout $v \in V$:

$$\int_{\Gamma_N} |v|^2 \, ds \leq c_2 \int_\Omega |v|^2 \, dx. \tag{2.16}$$

De (2.14)-(2.16), on obtient :

$$|\ell(v)| \leq M \|v\|_V, \; M = c_1 \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + c_2 \|h\|_{L^2(\Gamma_N)} \right].$$

donc, $\ell(\cdot)$ est continue.

2. Pour $a(\cdot,\cdot)$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Poincaré (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \mu \int_\Omega |\nabla u| \, |\nabla v| \, dx_1 dx_2 \\ &\leq \mu \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \\ &\leq M' \|u\|_V \|v\|_V, \; M' = \mu\sqrt{c_1}. \end{aligned}$$

□

2.4 Approximation interne du problème

L'approximation interne du problème variationnel (2.13) consiste à considérer une suite V_h de sous-espaces fermés de V de dimension finie. Alors, on s'intéresse au problème approché : trouver $u_h \in V_h$ telle que

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.17}$$

Proposition 2.3. *Le problème approché* (2.17) *admet une solution unique.*

Démonstration. L'existence et l'unicité de la solution de (2.17) découle du Théorème 1.6 de Lax-Milgram. □

Soit $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N\}$ une base de V_h. Alors, il existe $u_1^h, \ldots, u_N^h \in \mathbb{R}$ tels que la solution $u_h \in V_h$ de (2.17) s'écrit

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} u_j^h \phi_j.$$

Pour que l'égalité $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$ ait lieu pour tout $v_h \in V_h$, il faut et il suffit qu'elle ait lieu pour tous les vecteurs de base $\phi_1, \ldots, \phi_N$. En utilisant la bilinéarité de $a(\cdot,\cdot)$, le problème (2.17) s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1^h, \ldots, u_N^h \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} u_j^h a(\phi_j, \phi_i) = \ell(\phi_i). \end{cases}$$

En posant $U_h := \left(u_1^h, \ldots, u_N^h\right)^T \in \mathbb{R}^N$, on obtient que le problème (2.17) est équivalent au problème matriciel suivant :

$$K_h U_h = b_h.$$

où $K_h \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ et $b_h \in \mathbb{R}^N$ sont définis par

$$K_h := \left(a\left(\phi_j, \phi_i\right)\right)_{1\le i,j\le N} \quad \text{et} \quad b_h := \ell\left(\phi_i\right)_{1\le i\le N}. \tag{2.18}$$

Proposition 2.4. *La matrice K_h définie par* (2.18) *est définie positive. En particulier, K_h est inversible et donc le système $K_h U_h = b_h$ admet une solution unique $U_h \in \mathbb{R}^N$.*

Démonstration. Par définition, $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique donc K_h est une matrice symétrique. D'autre part, soit $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_N)^T$. On pose

$$\tilde{\xi} := \xi_1\phi_1 + \ldots + \xi_N\phi_N \in V_h.$$

Puisque $a(\cdot,\cdot)$ est coercive, on a :

$$K_h\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^{N} a\left(\phi_i, \phi_j\right)\xi_i\xi_j = \sum_{i,j=1}^{N} a\left(\xi_i\phi_i, \xi_j\phi_j\right) = a\left(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}\right) \ge \alpha \left\|\tilde{\xi}\right\|_V^2$$

donc K_h est définie positive. □

2.4.1 Convergence de la méthode

Il reste à montrer que la solution $u_h \in V_h$ de (2.17) est bien une approximation de u. Pour cela, on utilise le résultat suivant :

Lemme 2.1. *(lemme de Céa) Soit $u \in V$ la solution de* (2.13)*, et $u_h \in V_h$ la solution de* (2.17)*, alors on a*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M'}{\alpha} \inf_{v_h \in V} \|u - v_h\|_V$$

Démonstration. D'après (2.13) et (2.17), on a :

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V,$$
$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Puisque $V_h \subset V$. Donc, pour tout $w_h \in V_h$ on a :

$$a(u - u_h, w_h) = 0.$$

Posons $w_h = v_h - u_h \in V_h$. Nous avons :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v_h - u_h) = 0 &\Leftrightarrow a(u - u_h, v_h - u + u - u_h) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(u - u_h, u - u_h) = -a(u - u_h, v_h - u) \\ &\Leftrightarrow a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \end{aligned}$$

De la continuité et la coercivété de a, on a :

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq M' \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \Leftrightarrow \alpha \|u - u_h\|_V \leq M' \|u - v_h\|_V .$$

Donc, on a :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M'}{\alpha} \|u - v_h\|_V \leq \frac{M'}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V ,$$

ce qui donne le résultat. □

Théorème 2.2. *(Théorème de convergence, voir [6]). On suppose qu'il existe un sous-espace W de v dense dans V tel qu'il existe une application linéaire $r_h : W \to V_h$ vérifiant*

$$\forall v \in W, \ \lim_{h \to 0} \|v - r_h v\|_V = 0. \tag{2.19}$$

L'application r_h est appelée opérateur d'interpolation de W sur V_h. Alors, la solution $u_h \in V_h$ de (2.17) *converge vers la solution $u \in v$ de* (2.13)*, au sens où on a*

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_V = 0. \tag{2.20}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Puisque W est dense dans V, il existe $v \in W$ tel que

$$\|u - v\|_V \leq \epsilon.$$

De plus, l'existence de l'opérateur d'interpolation vérifiant (2.20) entraine qu'il existe $h_0 > 0$ tel que $h \leq h_0$ alors on a :

$$\|v - r_h v\|_V \leq \epsilon.$$

Puisque $r_h v_h \in V_h$, on a d'après Lemme 2.1 :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M'}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \frac{M'}{\alpha} \|u - r_h v\|_V \\ &\leq \frac{M'}{\alpha} \|u - v\|_V + \frac{M'}{\alpha} \|v - r_h v\|_V \leq \frac{2M'}{\alpha} \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

2.5 Résolution numérique par FreeFem++

```
// -------Maillage non structuré du domaine------
border a(t=-pi/2,pi/2){x=2*cos(t);y=sin(t) ;label=1;};
border b(t=pi/2, 3*pi/2){x=2*cos(t);y=sin(t);label=2;};
//-----------Coefficient de lamé-----
real E=21.5;
real ni=0.29;
real mu=E/(2*(1+ni));
mesh Th2=buildmesh(a(50)+b(50));
plot (Th2,wait=1);
// ---------Espace d'approximation-----
fespace Vh (Th2,P1);
Vh u,v;
func f=10;
func h=1;
// -------------Problème variationnel------
problem pbelastique(u,v,solver=Cholesky)=
int2d(Th2)(mu*(dx(u)*dx(v)+ dy(u)*dy(v)))
-int2d(Th2)(f*v)-int1d(Th2,1)(h*v)
+on(2,u=0);
//---------------- Résoudre le problème-----
pbelastique;
//----- Affichage la solution-------------
plot(u,wait=1);
```

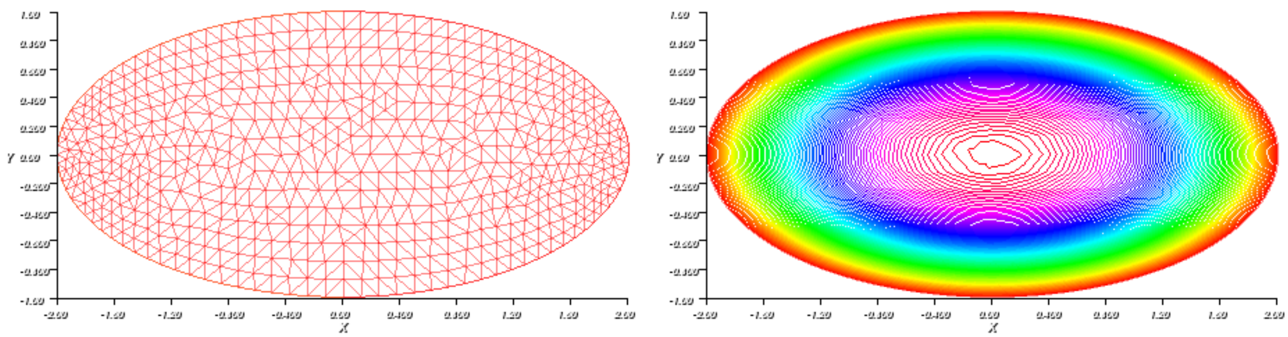

FIGURE 2.2 – Problème de Dirichlet

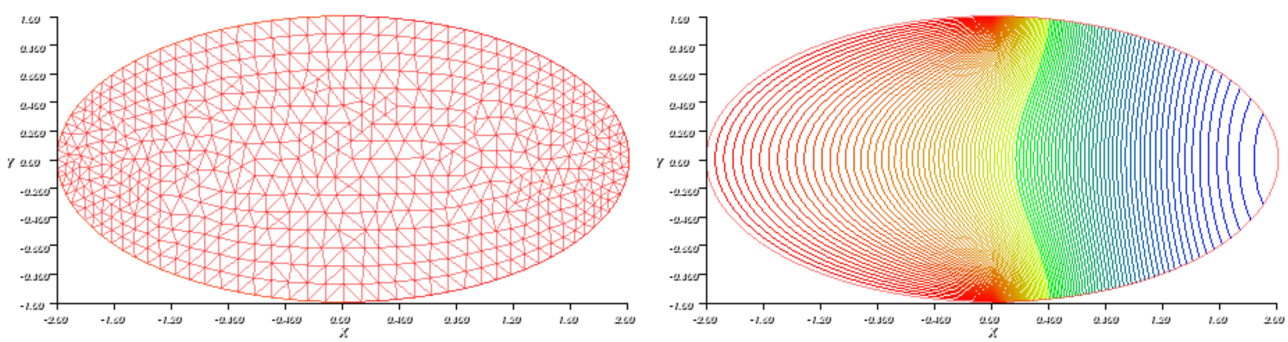

FIGURE 2.3 – Problème de Dirichlet-Neumann

Chapitre 3

Problème de contact unilatéral

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude théorique et numérique d'un problème plane de contact unilatéral entre une membrane élastique et une fondation rigide. Ensuite, nous avons montré par le théorème de *Stampaschia* un résultat d'existence et d'unicité. Ensuite, nous présentons un problème approché par la méthode des éléments finis. Enfin, nous avons présenté la méthode de projection pour résoudre ce problème approché.

3.1 Position du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un ouvert borné, de frontière Γ suffisamment régulière. On suppose que $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_N \cup \Gamma_c$ tel que $meas(\Gamma_d) > 0$ et $meas(\Gamma_c) > 0$, voir Figure 3.1. On considère le problème de Signorini suivant :

$$-\mu \Delta u = f \text{ sur } \Omega, \tag{3.1}$$

$$u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_d, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \ \text{ sur } \Gamma_N, \tag{3.3}$$

$$u \geq g, \ \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \ \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n}\left(u - g\right) = 0 \ \text{ sur } \Gamma_c. \tag{3.4}$$

Où $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\Gamma_N)$, $g \in L^2(\Gamma_c)$ et $\mu > 0$ coefficient de Lamé.

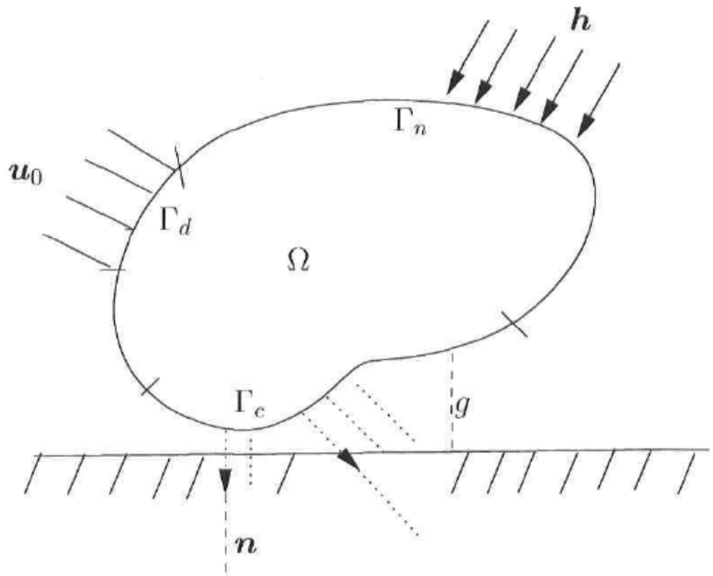

FIGURE 3.1 – Un corps élastique en contact avec une fondation rigide.

3.2 Formulation variationnelle

On définit l'espace de Hilbert suivant :

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega) \ / \ v = 0 \ \text{ sur } \Gamma_d\right\}, \tag{3.5}$$

muni par le produit scalaire suivant :

$$(u, v)_V = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx dy.$$

On considère K un sous ensemble convexe et fermé de V défini par :

$$K = \left\{v \in V \ / \ u \geq g \ \text{ sur } \Gamma_c\right\}. \tag{3.6}$$

Proposition 3.1. *La formulation variationnelle du problème* (3.1) -(3.4) *est donnée par :*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u \in K \textit{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq \ell(v-u), \quad \textit{pour tout } v \in K. \end{cases} \tag{3.7}$$

Où $a(\cdot,\cdot)$ *et* $\ell(\cdot)$ *sont définies par* (2.13).

Démonstration. En multipliant l'équation (3.1) par $v-u$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$-\mu \int_\Omega \Delta u (v-u)\, dxdy = \int_\Omega f(v-u)\, dxdy.$$

Avec la formule de Green, (3.2), (3.3) (3.4) et , on obtient :

$$\begin{aligned} \mu \int_\Omega \nabla u.\nabla(v-u)\, dxdy &= \int_\Omega f v dxdy + \mu \int_{\Gamma_N} h(v-u)\, ds + \mu \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\, ds \\ &= \int_\Omega f v dxdy + \mu \int_{\Gamma_N} h(v-u)\, ds + \mu \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}\left(v-g\right) ds \\ &\geq \int_\Omega f v dxdy + \mu \int_{\Gamma_N} h(v-u)\, ds. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire 3.1. *Le problème variationnel* (3.7) *est équivalent au problème de minimisation avec contraintes suivant :*

$$\begin{cases} \min J(v) \\ v \in K \end{cases} \tag{3.8}$$

où $J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v)$.

Démonstration.

1. On suppose que u une solution de problème (3.8). Alors, on a :

$$J(u) \leq J(u + t(v-u)), \quad \text{pour tout } v \in K \text{ et } 0 < t < 1$$

Donc, nous avons :

$$\frac{J(u+t(v-u)) - J(u)}{t} \geq 0,$$

Par passage à la limite quand $t \to 0^+$, on obtient :

$$a(u, v-u) \geq \ell(v-u).$$

2. On suppose que u une solution de (3.7). Alors, pour tout $v \in K$, on a :

$$J(v) = J(u+v-u) = J(u) + \frac{1}{2} a(v-u, v-u) + a(u, v-u) - \ell(v-u) \geq J(u).$$

D'où (3.8).

□

Pour l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.7), nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Le problème variationnel* (3.7) *admet une solution unique* $u \in V$.

Démonstration. D'après Théorème 2.1, la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue et coercive, $\ell(\cdot)$ est une forme linéaire et continue. Donc, avec le théorème 1.7 le problème variationnel (3.7) admet une solution unique $u \in K$. □

3.3 Approximation interne du problème

SoitV_h un sous espace de V de dimension N et $K_h = V_h \cap K$ une approximation interne de K. On considère le problème approché de (3.7) suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq \ell(v_h - u_h), \ \forall v_h \in K_h. \end{cases} \tag{3.9}$$

Proposition 3.2. *Le problème approché* (3.9) *admet une solution unique* $u_h \in V_h$.

Démonstration. Il suffit d'appliqué Théorème 1.7 de *Stampaschia.* □

Corollaire 3.2. *le problème approché* (3.9) *est équivalent au problème de minimisation approché avec contrainte suivant :*

$$\begin{cases} \min J(v_h) \\ v_h \in K_h \end{cases} \tag{3.10}$$

.

Soit (φ_i), $i = 1, \ldots, N$ une base de V_h. Soit u_h la solution de (3.10), alors

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i.$$

On pose

$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^T.$$

Le problème de minimisation approché (3.10) se ramène à

$$\begin{cases} \min J_h(U) = \frac{1}{2} U^T AU - b.U \\ u_i \geq g(x_i), \ i = 1, \ldots, M. \end{cases} \tag{3.11}$$

Où

$$A = (A_{ij}), \ A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) \ \text{ et } b = (b_i), \ b_i = \ell(\varphi_i), \ i, j = 1, \ldots, N$$

Remarque 3.1. D'après la symétrie et la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$, la matrice A est symétrique et définie positive. Donc, J_h est fortement convexe et K_h est convexe fermé. Alors, le problème (3.11) admet un point de minimum global unique U^* vérifiant l'inégalité d'Euler suivant :

$$\langle \nabla J_h(U^*), W - U^* \rangle \geq 0, \ \text{ pour tout } W \in \mathbb{R}^N. \tag{3.12}$$

Où $\nabla J_h(U) = AU - b$.

3.4 Méthode de projection

Soit $(U^p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U^0 \in K_h, \\ U^{p+1} = P_{K_h}\left(U^p - \mu\,(AU^p - b)\right)\ \forall p \in \mathbb{N},\ \mu > 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Proposition 3.3. *Si* $0 < \mu < 2\alpha/\,\|A\|^2$, *la suite* (3.13) *est convergente vers* U^* *l'unique solution du problème* (3.11).

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|U^{p+1} - U^*\right\|^2 &= \left\|P_{K_h}\left(U^p - \mu\left(AU^p - b\right)\right) - P_{K_h}\left(U^* - \mu\left(AU^* - b\right)\right)\right\|^2 \\
&\leq \left\|U^p - U^* - \mu A\left(U^p - U^*\right)\right\|^2 \\
&= \left\|U^p - U^*\right\|^2 - 2\mu\left\langle A\left(U^p - U^*\right), U^p - U^*\right\rangle + \mu^2\left\|A\left(U^p - U^*\right)\right\|^2 \\
&\leq \left(1 - 2\mu\alpha + \mu^2 c^2\right)\left\|U^p - U^*\right\|^2,\ c = \|A\|.
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient :

$$\left\|U^p - U^*\right\| \leq \lambda^n \left\|U^0 - U^*\right\|,\ \lambda = \sqrt{1 - 2\mu\alpha + \mu^2 c^2}.$$

D'autre part, on a :

$$0 < \mu < 2\alpha/c^2 \Rightarrow 0 < \lambda < 1,$$

donc, $U^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} U^*$. □

3.5 Description de algorithme de projection

Algorithme
étape1 : On fixe $u^{(1)} \in K_h$
étape2 : On cherche $u^{(m+1)} = u_{ij}^{(m+1)} \in \mathbb{R}^{N\times M}$ solution de :

Pour tout $i = \overline{2, M-1}$

$$u_{11}^{(m+1)} = \max\left(g_{11}, (1-w)\,u_{11}^{(m)} + w\left(f_{11} + 0.5\left(u_{12}^{(m)} + u_{21}^{(m)}\right)\right)\right)$$

$$u_{1i}^{(m+1)} = \max\left(g_{1i}, (1-w)\,u_{1i}^{(m)} + \frac{w}{2}\left(f_{1i} + 0.5\left(u_{1i+1}^{(m)} + u_{1i-1}^{(m)}\right) + u_{2i}^{(m+1)}\right)\right)$$

Pour tout $i = \overline{2, N-1}$

$$u_{1M}^{(m+1)} = \max\left(g_{1M}, (1-w)\,u_{1M}^{(m)} + w\left(f_{1M} + 0.5\left(u_{1M-1}^{(m+1)} + u_{2M}^{(m)}\right)\right)\right)$$

$$u_{i1}^{(m+1)} = \max\left(g_{i1}, (1-w)\,u_{i1}^{(m)} + \frac{w}{2}\left(f_{i1} + 0.5\left(u_{i1}^{(m+1)} + u_{i-11}^{(m+1)}\right) + u_{i+11}^{(m)}\right)\right)$$

Pour tout $i = \overline{2, N-1}$

$$u_{iM}^{(m+1)} = \max\left(g_{iM}, (1-w)\, u_{iM}^{(m)} + \frac{w}{2}\left(f_{iM} + 0.5\left(u_{i+1M}^{(m)} + u_{i-1M}^{(m+1)}\right) + u_{iM-1}^{(m+1)}\right)\right)$$

Pour tout $i = \overline{2, M-1}$

$$u_{N1}^{(m+1)} = \max\left(g_{N1}, (1-w)\, u_{N1}^{(m)} + w\left(f_{N1} + 0.5\left(u_{N2}^{(m+1)} + u_{N-11}^{(m+1)}\right)\right)\right)$$

$$u_{Ni}^{(m+1)} = \max\left(g_{Ni}, (1-w)\, u_{iM}^{(m)} + \frac{w}{2}\left(f_{Ni} + 0.5\left(u_{Ni-1}^{(m+1)} + u_{Ni+1}^{(m)}\right) + u_{N-1i}^{(m+1)}\right)\right)$$

Pour tout $i = \overline{2, N-1}$ et Pour tout $i = \overline{2, M-1}$

$$u_{NM}^{(m+1)} = \max\left(g_{NM}, (1-w)\, u_{NM}^{(m)} + w\left(f_{NM} + 0.5\left(u_{NM-1}^{(m)} + u_{N-1M}^{(m+1)}\right)\right)\right)$$

$$u_{ij}^{(m+1)} = (1-w)\, u_{ij}^{(m)} + \frac{w}{4}\left(f_{ij} + u_{i+1j}^{(m)} + u_{i-1j}^{(m+1)} + u_{ij-1}^{(m+1)} + u_{ij+1}^{(m)}\right).$$

étape3 : On donne un critère d'arrêt défini par $\frac{\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|}{\|u^{(m+1)}\|} < 5 \times 10^{-3}$. Si $u^{(m)}$ satisfait le critère d'arrêt, on arrête. Sinon on pose $M = m+1$ et on retourne à l'étape 3.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté une étude théorique et numérique d'un problème plan de contact unilatéral entre une membrane élastique et une fondation rigide.

Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Problème élastique linéaire :** on s'intéresse sur les inéquations variationnelles en dimension fini et leurs relations à de nombreux problèmes généraux d'analyse non linéaire, telles que le problème de complémentarité, problème de point fixe et problème d'optimisation. Ensuite, nous présentons des méthodes pour la résolution numérique.
- ✓ **Problème de contact unilatéral :** nous avons présenté une étude théorique et numérique d'un problème plan de contact unilatéral entre une membrane élastique et une fondation rigide. Ensuite, nous avons montré par le théorème de *Stampaschia* un résultat d'existence et d'unicité. Ensuite, nous présentons un problème approché par la méthode des éléments finis. Enfin, nous avons présenté la méthode de projection pour résoudre ce problème approché.

Comme perspectives, nous avons prévu les projets de recherches suivants :

- ☞ Étude théorique et numérique d'un problème de contact sans frottement en deux corps déformables.
- ☞ Analyse mathématique du problème de Signorini parabolique.

Bibliographie

[1] A.Captina. *Inéquation variationnelle et problème de contact avec frottement.* Bucuresti, ISSN 0250 3638, 10/2011.

[2] Henka Ahmed. *Analyse Mathématique du problème de Signorini : cas dynamique.* PhD thesis, Faculté Des science et de la technologie et des sciences de la matière, université "Amar Telidji ", Alger, OUARGLA, 2013.

[3] F.B. Belgacem. Méthodes d'élements finis pour les inéquations variationnelles de contact unilatéral. *Acad.Sci..t*, 328(série1) :811–816, 1999.

[4] G.Stampacchia D.Kinderlehrer. *An introduction to variational inequalities and thier application.* Académie preess, 1980.

[5] J.L.Lions G. Duvaut. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, 1972.

[6] G.Allaire. *Analyse numérique et optimisation.* Édition de l'école polytechnique, 2005.

[7] G.Fichera. *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali :il problemi di Signorini con ambigue condizioni al contorno.* Atti.Accad.Naz.Lincei(8) ,91-140, 1964.

[8] FT.Suttmeier H.Blum. An adaptive finite element discretisation for a simplified signorini problem. *Calcolo*, 37(2) :65–77, 2000.

[9] H.Brezis. *Optimal Control From Theory To Computer Programs.* Problems Unlatrux.J.de Math Pures et Appliques, 1972.

[10] M. SOFONEA I. R. IONESCU. *Functional and numercal methods in viscoplasticity.* Oxford Univ. Press, 1993.

[11] J.Necas J.Haslinger, L.Hlavâcek. *Numerical methods for unilatéral problemns in solid mechanics, in Hand book of Numerical Analysis, Volume IV.* Part 2, Eds. P.G. Clarlet and J.-L. Lions, North Holland, 1996.

[12] Jarusek et Haslinger Nécas. *On the solution of the variational inequality to the signorini problem with small friction.* Boll. U.M.I. 5(17B), 796-811, 1980.

[13] N.Kikuchi. and Oden J.T. *Contact problems in elasticity : a stydy of variational inéqualities and finite élément methods.* SIAM, Philadelphia, 1998.

[14] P.G.Ciarlet. *Mathematical Elasticity, vol II, Theory of plates.* North-Holland, Amsterdam, 1997.

[15] LAGRAF Samira. *Méthodes variationnelles pour les problèmes avec contraintes de type inégalité.* PhD thesis, Faculté Des science, université "BADJI MOKHTAR ", Alger, ANNABA, 2013.

[16] Fabien Mesmin Youbissi. *Résolution par élément finis du problème de contact unilatéral par des méthodes d'optimusation convexe.* Thèse ph.D, université Laval, Québec, Canada, 2006.