



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées et Discrète

Par

Khadraoui Yamina

Sujet

**Solution auto-similaire de l'équation du Film
Liquide le long d'une surface solide**

Dirigé par :

Pr : N.Ben Hamidouche.

Promotion: 2011/2012

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 3 |
| 1 Principe de la Similarité et l'équation du Film Mince | 5 |
| 1.1 L'auto-similarité | 5 |
| 1.1.1 Notion d'auto-similarité | 6 |
| 1.1.2 Théorème (d'invariance d'échelle) | 8 |
| 1.1.3 Exemple d'un EDP (équation de la chaleur) | 9 |
| 1.2 Equation du Film Mince (Couche mince) | 12 |
| 1.2.1 Définition d'une couche mince | 12 |
| 1.2.2 Quelques aspects sur l'équation de Film Mince : | 12 |
| 1.2.3 Equation de Film liquide le long d'une surface solide | 13 |
| 1.2.4 Les applications des Films liquides | 13 |
| 2 Solution auto similaire de l'équation de film liquide le long d'une sur- face solide | 17 |
| 2.1 Solution auto-similaire | 17 |
| 2.1.1 Règle de dérivation : | 18 |
| 2.1.2 Choix d'échelle : | 19 |
| 2.2 Type de source de solution : | 22 |
| 2.3 Solutions asymptotiques par la méthode des arguments d'équilibrage | 23 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Solution auto_ similaire généralisée | 26 |
| 3.1 | Forme bilinéaire | 26 |
| 3.1.1 | Théorème(forme bilinéaire) : | 26 |
| 3.2 | La similarité générale : | 29 |
| 3.2.1 | Remarque : | 37 |
| | Conclusion | 38 |

transformations de similarité. Les systèmes différentiels peuvent être résolus par les calculatrices à la main. Le simulateur peut être chargé de façon spectaculaire. Les systèmes non linéaires avec EDP se prêtent à une construction aux limites peuvent maintenant être résolus efficacement par les méthodes sophistiquées de méthodes numériques et les ordinateurs, avec toute l'efficacité connue à la présente des solutions. La recherche de solutions exactes est désormais motivée par le désir de comprendre la structure mathématique des solutions et, par conséquent, une meilleure compréhension des phénomènes physiques décrits par eux. Les solutions de similitude dans les premières années ont été trouvées par des moyens physiques directs et arguments dimensionnels. Les deux exemples les plus célèbres sont les problèmes d'explosion et implosion (Taylor (1950), Sedov (1959), Guderley (1942)). Des arguments d'échelle simples pour obtenir des solutions de similitude illustrent aussi la nature auto-similaire ou invariant des solutions à l'échelle, ce qui a incidemment donné par Zel'dovich et Baizer (1967). Leur travail a été considérablement amplifié par Barenblatt (1966), qui a clairement expliqué la nature de solutions auto-similaires de première et seconde espèce [17].

La méthode de similitude est une des méthodes standard pour obtenir des solutions exactes de certains nombre EDPs. L'EDP est réduite. Les variables dimensionnelles peuvent être aux mêmes identités en utilisant les propriétés d'invariance d'EDP lorsqu'ils sont soumis à des transformations fines ou minimes[3].

À l'heure actuelle, le domaine d'application des couches minces est très vaste. Celui-ci englobe une grande diversité de matériaux solides ayant pour objet de répondre aux problèmes technologiques de l'heure; la qualité des fibres minces obtenues repose sur la

Introduction

Une grande majorité des problèmes non-linéaires sont décrits par des systèmes des équations aux dérivées partielles non linéaires en association avec des conditions initiales appropriées /ou limites ; ces modèles décrivent certains phénomènes physiques. Dans les premiers jours de la science non linéaire, puisque les ordinateurs n'étaient pas disponibles, des tentatives ont été faites pour réduire les systèmes d'EDP à EDO par les soi-disant «transformations de similarité». Les équations différentielles pourraient être résolues par les calculatrices à la main. Le scénario depuis changé de façon spectaculaire. Les systèmes non linéaires avec EDP initiale appropriée conditions aux limites peuvent maintenant être résolus efficacement par des moyens sophistiqués de méthodes numériques et les ordinateurs, avec toute l'attention voulue à la précision des solutions. La recherche de solutions exactes est désormais motivée par le désir de comprendre la structure mathématique des solutions et, par conséquent, une meilleure compréhension des phénomènes physiques décrits par eux. Les solutions de similitude dans les premières années ont été trouvées par des moyens physiques directs et arguments dimensionnels. Les deux exemples les plus célèbres sont les problèmes d'explosion et implosion (Taylor (1950), Sedov (1959), Guderley (1942)). Des arguments d'échelle simples pour obtenir des solutions de similitude, illustrant aussi la nature auto-similaire ou invariante des solutions à l'échelle, étaient lucidement données par Zel'dovich et Raizer (1967). Leur travail a été considérablement amplifiée par Barenblatt (1996), qui a clairement expliqué la nature de solutions auto-similaires de première et seconde espèce [17]

La méthode de similarité est une des méthodes standard pour obtenir des solutions exactes de certains nombre EDPs. l'EDP est réduite. Les variables de similarité peuvent être eux-mêmes identifiés en utilisant les propriétés d'invariance d'EDP lorsqu'ils sont soumis à des transformations finies ou infinies[3]

A L'heure actuelle, le domaine d'application des couches minces est très vaste. Celui-ci englobe une grande diversité de matériaux solides ayant pour objectif de répondre aux problèmes technologiques de l'heure. La qualité des films minces obtenus repose sur la

source, le processus d'élaboration, le type des substrats sur lesquels la couche est formée et les conditions expérimentales choisies.

Le but de ce mémoire est d'étudier les solutions auto-similaires de l'équation du film mince, dans le cas du film liquide le long d'une surface solide. c-à-d on cherche l'auto similarité classique pour cette équation, ensuite on essaye de généraliser à d'autres formes d'auto similarité[15]

Le mémoire est organisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente le principe de l'auto-similarité et quelques aspects sur l'équation du Film Mince(Couche Mince) et en particulier l'équation du Film Liquide le long d'une surface solide avec quelque exemple d'illustration.

Le deuxième chapitre est une étude de la solution auto-similaire de l'équation du Film Liquide le long d'une surface solide On va étudier la solution classique d'auto-similarité dans un cas particulier dans le choix des exposants de similarité.

Dans le dernier chapitre on étudie la forme générale de la solution auto-similaire pour l'équation du Film liquide, en cherchant des solutions auto similaires dans le cas général.

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié les solutions auto-similaires de l'équation du film mince, dans le cas du film liquide le long d'une surface solide. c-à-d qu'on a cherché l'auto similarité classique pour cette équation, ensuite on a essayé de généraliser à d'autres formes d'auto similarité.

Après avoir présenté le principe de l'auto-similarité et quelques aspects sur l'équation du Film Mince (Couche Mince) et en particulier l'équation du Film Liquide le long d'une surface solide avec quelque exemple d'illustration, nous avons essayé de chercher des solutions auto-similaires classiques pour l'équation du Film Liquide le long d'une surface solide en cherchant en particulier les exposants de similarité.

Enfin on a étudié la forme générale de l'auto-similaire pour l'équation du Film liquide, en cherchant des solutions auto-similaires générales, le problème consiste alors à chercher les paramètres dépendants du temps t et les profils correspondants. Notre étude est très intéressante dans la mesure où elle nous permet de trouver des solutions exactes, elle ouvre également des perspectives futures concernant le choix des exposants de similarité.

Bibliographie

- [1] G. I. BARENBLATT, *Similarity, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*, Consultants Bureau, New York. (1979)
- [2] G. I. BARENBLATT. *SCALING, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Cambridge University Press, [1996]
- [3] G I BARENBLATT , BERETTA E AND M BERTSCH *The problem of the spreading of a liquid film along a solid surface : A new mathematical formulation* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 94 10024–10030 [1997]
- [4] G.I. BARENBLATT, *Scaling, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics, 2nd ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, [1996]G.I. BARENBLATT, *Scaling, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics, 2nd ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, [1996]
- [5] N. BEN HAMIDOUCHE. *Analyse asymptotique et numérique pour EDP*, Cour du Master (S3) Université du M'sila [2011-2012]
- [6] M. BENHAMOU. *GROUPE DE RENORMALISATION APPLIQUE AUX EQUATIONS DE REACTION-DIFFUSION.*, Laboratoire de Physique des Polymères et Phénomènes Critiques
Faculté des Sciences Ben M'sik, B.P. 9755, Casablanca, Maroc [2006 - 2007]
- [7] A. L. BERTOZZI AND M. PUGH, *The lubrication approximation for thin viscous films : Regularity and long time behavior of weak solutions*, Comm. Pure Appl. Math. 49 (2) 85–123.[1996]]

- [8] A L BERTOZZI , *The mathematics of moving contact lines in thin liquid films* Notices Amer. Math. Soc. 45 689–697, .[1998]
- [9] E. BERETTA, *Selfsimilar source solutions of a fourth order degenerate parabolic equation*, *Nonlinear Anal.* 29 (1997), no. 7, 741{760.}
- [10] F. CHAUVET. ,*Effet des films liquides en évaporation*. Thèse Doctorat. Université de Toulouse [2009]
- [11] J. HELSHOF. ,*Some Aspects of The Thin Film Equation*.Faculty of Sciences,Mathematics and Computer Science division,Free University Amsterdam,De Boelelaan 10811081 HV Amsterdam, The Netherlands E-mail address : jhulshof@cs.vu.nl
- [12] J .HULSHOF , *A local analysis of similarity solutions of the thin film equation*, *Non-linear analysis and applications* Warsaw 1994, (GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 7) (Tokyo : Gakkotosho) pp 179–192.[1996]
- [13] V.A. GALAKTIONOV. *VERY SINGULAR SOLUTIONS FOR THIN FILM EQUATIONS WITH ABSORPTION*, Department of Math. Sci., University of Bath, Bath, BA2 7AY
- [14] E-mail address : vag@maths.bath.ac.uk, [2009]
- [15] K. LUST AND C. W. ROWLEY AND I. G. KEVREKIDIS. *On the computation and stability analysis of self-similar solutions. In preparation.*
- [16] M. KHAMMAR. *Etude d'un jet en spray d'une solution chimique sur un substrat chaud destiné à l'élaboration des couches minces*, Thèse de Magister en physique ,UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE FACULTE DES SCIENCES EXACTES DEPARTEMENT DE PHYSIQUE [2010]
- [17] C. W ROWLE , I G KEVREKIDIS , J E MARSDEN§ AND K LUST, *Reduction and reconstruction for self-similar dynamical systems* , Departement Computerwetenschappen, K.U.Leuven, Celestijnenlaan 200A, B-3001 Heverlee, BELGIUM [2003]

- [18] P.L.SACHDEV. *Self-similarity and Beyond* Boca Raton Landon New York Washington, D.C (113)
- [19] XU. XIANGMIN. *A Moving Collocation Scheme for Fourth Order Evolutionary Partial Différential Equations* , B.Sc.,Xin Yang Normal University;[1995]