REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Les relations linéaires sur les espaces normés

Présenté par :
LAMICHE Abir

Devant le jury composé de :

M^r *HERAIZ* Rabeh	MCA,	Université de M'sila	**Président**.
M^r *TALLAB* Abdelhamid	MCA,	Université de M'sila	**Encadreur**.
M^r *MAZOUZ* Ahmed	MAA,	Université de M'sila	**Co-Encadreur**.
M^r *HAMIDI* Khaled	MCB,	Université de BBA	**Examinateur**.

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

*Avant tout, je remercie **Allah** le tout puissant qui m'a donné la force, le courage, la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail durant toutes les longues années d'études afin que je puisses arriver là.*

*Mes plus vifs remerciement à mon encadreur : **TALLAB Abdelhamid** Qui m'a proposé le sujet et accepté de me diriger avec beaucoup de rigueur et de patience, aussi bien pour ses conseils précieux, ses encouragements que pour les corrections et les relectures de ce manuscrit. C'est un honneur pour moi d'avoir travaillé avec lui. Merci .*

*A **Mr MAZOUZ Ahmed**, je lui exprime ma profonde gratitude pour avoir accepté de présider ce jury, qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect .*

*A **Mr HAMIDI Khaled** ayant accepté d'examiner et juger mon travail, je lui exprime mon sincère remerciements .*

Je remerciement également toute ma famille qui se sont consacrée à leur tâche avec dévouement et patience et ceci tout le long de mon étude.

Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

Mes sincère remerciement vont également tous ceux qui ont participé de loin ou de prés à la réalisation de ce travail. Que tous, trouvent ici mes parfaites salutations. Merci

Lamiche. Abir,

Dédicace

Un rêve qui se réalise grâce à Dieu le tout puissant, ce mémoire est enfin achevé, je le dédie aux personnes qui me sont très chères :

A l'homme de ma vie, l'origine de ce qui je suis, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi l'âme pure et pure de mon père.

Ce travail est le tien.

Aux lumières de mes jours, les sources de mes efforts, Les flammes de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman et deuxième mère que j'adore et dieu la protège.

Chères mères, ce travail est le fruit de tes efforts.

A mes très chers frères : Ramdan, Aazzedine, Mourad, Ishak, Ramzi, Yakoub et Abdellhak.

Ce travail est également leur travail pour leurs encouragements, assistances et disponibilités pour moi à n'importe quel moment.

A mes très chères sœurs : Ghaniya, Samra, Hakima, Karima, Rahma, Naziha, Houda et Nihal en leurs souhaitant le bonheur, la santé et toute la réussite dans la vie.

A mes chères amies surtout Yousra, Hayat, Bouchra, Nada et Fatima.

Table des matières

Introduction

L'analyse fonctionnelle est une discipline dans la science mathématiques destinée au l'étude sur les espaces fonctionnels, structures (espaces normés, Hilbert, Banach,...etc), et propriétés des opérateurs (opérateur borné, compact, fermé, continue,...etc)

L'objectif de ce mémoire est de faire une étude sur La théorie des opérateurs linéaires à valeurs multiples ou des relations linéaires qui est une branche de mathématique qui a été développée de manière intensive dans les dernières années. Les relations linéaires sont apparues dans l'analyse fonctionnelle par J.V. Neumann [19] motivée par la nécessité de considérer l'adjoint des opérateurs que sont utilisés dans des applications à la théorie des équations généralisées, et aussi par la nécessité de considérer les inverses de certains opérateurs.Dans ce contexte, nous citons notamment un traité sur les relations linéaires écrit par R. W. Cross [7].

Dans le premier, on aborde les définitions classiques sur les espaces linéaires normés et les opérateurs Linéaires, relations semi-Continues, continuité et la norme des opérateurs Linéaires, classification des Espaces linéaires,fonctions linéaires et espaces conjuguées, Les théorèmes d'extension et de séparation de Hahn-Banach ,quotients, sous-espaces et projections .

Dans le deuxième chapitre, nous essayons d'appliquer les relations linéaires qui déjà vue dans les espaces linéaires normés de sorte que on présente la difficulté de cette étude particulièrement sur l'algèbre de relations linéaires, continuité et fonction de norme pour les relations linéaires, relations ouvertes et modules minimaux, sélections linéaires, relations linéaires fermées e, l'adjoint d'une relation linéaire.

Dans le troisième chapitre, nous concentrons sur quelques théorèmes fondamentaux sur

Les Relations Linéaires.

Notations

Certainses notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous lisons ci-dessous :

$B(X, Y)$: Espace des opérateurs linéaires et bornés de X vers Y

$B(X)$: Algèbre des opérateurs linéaires et bornés de l'espace X

B_X : La boule unité fermée de l'espace métrique X

$\mathbb{C}$: Les nombres complexes

$\mathbb{R}$: Les nombres réels

$\mathbb{N}$: Les nombres naturels

$\mathbb{Z}$: Les nombres entiers

Ker : Noyau

dim : Dimension

$d(.,.)$: Application de distance

$\mathbb{F}$: Corps étant soit $\mathbb{C}$, soit $\mathbb{R}$

$LR(X, Y)$: Ensemble des relations linéaires de l'espace X dans l'espace Y

I_E : Application identité de l'ensemble E

$\mathbb{K}$: Corps quelconque

$\mathbb{N}_n\{1, 2, 3, :, n\}$

$(X, \|.\|_X)$: Espace normé

x_n ...Suite

$|.|$: Module complexe / valeur absolue

X/M : Le quotient de l'espace X par le sous-espace M

$\oplus$: La somme directe

$\sum$: Symbole de sommation

$\times$: Le produit cartésien

$\cap$: L'intersection

$\cup$: L'union

$\neq$: La non égalité

$\forall$: Symbole universel "pour tout"

$\exists$: Symbole universel "il existe"

$\subset$: L'inclusion

X^{-} : inverse

X^{T} : transposée

$\Rightarrow$: signe d'implication

$\Leftrightarrow$: signe d'équivalence

∞ : infini

$x \to a$: x tend vers a

$\mathcal{P}(Y)$: L'ensemble des parties

$i.e$: C'est à dire

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1.1. *Un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *avec une topologie telle que l'application* $(x, y) \ \to x + y$ *est continue de* $X \times X \to X$ *et l'application* $(\alpha, y) \to \alpha x$ *est continue de* $\mathbb{K} \times X \to X$

Un ***espace normé*** *sur* X $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ *est un espace vectoriel topologique avec topologie donnée par de valeur réelle, t.q la* ***norme****, est notée* $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ *satisfait :*

$$\begin{array}{lcl} (1) \ \|x+y\| & \leq & \|x\| + \|y\|, \\ (2) \ \|\alpha x\| & = & |\alpha| \, \|x\|, \\ (3) \ \|x\| \geq 0, & et & \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array}$$

pour $x, y \in X$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$. *La norme définit une métrique naturelle* $d(x, y) : \ = \|x - y\|$. *Si* X *est complet sous cette topologie, on l'appelle alors un espace de Banach.*

Exemple 1.1.1. *On a*

1. *Les espaces* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{C}^n$ *sont des espaces normés avec des normes définies par :*

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. *Les espaces* $l_p, 1 \leq p < +\infty$ *sont des espaces normés avec les normes définies par :*

$$\|x\|_p : \ = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

3. *Les espaces $C(K)$ et $B(K)$ constituées de fonctions continues et bornés, respectivement sur un ensemble compact K, avec normes définies par :*

$$\|f\| := \sup |f(x)|$$

aussi sont des espaces normés.

Définition 1.1.2. *Un ensemble de vecteurs $\{e_i\}_{i\in I}$ est appelé une base* ***Hamel*** *ou une* ***base algébrique*** *si $\forall x \in X$ il existe une décomposition unique $x = \sum_i a_i e_i$ en combinaison linéaire finie de e_i .*

Théorème 1.1.1. *Tout espace vectoriel X a une base de Hamel. De plus, si X est un espace de Banach, en plus le cardinale de la base est finie ou indénombrable.*

Définition 1.1.3. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des points sur un espace de Banach X . Alors*

(a) *la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge au point x, écrit $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ si*

$$\lim_{p\to\infty} \left\| x - \sum_{n\leq p} x_n \right\| = 0.$$

(b) *la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$* ***converge un-conditionnellement*** *au point x si pour toutes les permutations π de $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)}$ converge vers x.*

(c) *la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$* ***converge absolument*** *ou normalement au point x si il converge sur $\mathbb{X}$ et la série de nombres positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ est convergent.*

(d) *une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée une suite de base si pour tout $x \in \overline{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ il existe une suite unique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des scalaires telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ converge à x.*

(e) *une suite $(x_n)_{n\in N}$ est appelée une base de Schauder de X si c'est une suite de base et si $\overline{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = X$.*

Proposition 1.1.1. *Si une suite converge absolument, alors il converge un-conditionnellement.*

Théorème 1.1.2. *Si X est un espace normé, alors X est complet si et seulement si chaque série converge absolument dans X .*

*Si un espace normé X a une base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors chaque point a une décomposition unique $x = \sum_n a_n x_n$. Les scalaires $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelés les **co-ordonnées** de x sur la base, qui est généralement supposé être normalisé. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est basique et normalisée, on peut définir **co-ordonnées fonctionnelles** $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par*

$$f_k(x) = a_k \quad \textit{quand} \quad x = \sum_n a_n x_n$$

Il existe des espaces sans bases de Schauder, et de plus, il n'y a pas propriété qui caractérise l'existence d'une base de Schauder dans un espace normé. Cependant, ce qui suit y lieu.

Théorème 1.1.3. *Chaque espace de Banach de dimension infinie contient une suite de base.*

Exemple 1.1.2. *On a*

1. *c_0 et l_p, $(1 \leq p < +\infty)$ la base naturelle pour les espaces de suites comme des bases Schauder.*
2. *$L_p([0,1])$, $(1 \leq p < +\infty)$ le système Haar comme des bases Schauder.*

Définition 1.1.4. *Un espace normé est dite **séparable** s'il contient un sous-ensemble dense dénombrable.*

Exemple 1.1.3. *On a*

1. *Les suites finies avec des coefficients rationnels forment un sous-ensemble dénombrable dense dans l_p, $(1 \leq p < +\infty)$.*
2. *$C([0,1])$ est séparable.*
3. *l_∞ n'est pas séparable (par exemple les suites composées de $+1$ et -1)*

Théorème 1.1.4. *Si X est séparable et de dimension infinie, alors il y a une suite dense indépendante linéaire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$.*

Théorème 1.1.5. *Soit X un espace normé. Les éléments suivants sont équivalents :*

(i) *X est séparable.*

(ii) *La boule unité B_X est séparable.*

(iii) *La sphère de l'unité $S_X = \{x \in X |\, \|x\| = 1\}$ est séparable.*

Théorème 1.1.6. *Si X est séparable, alors tous ses-espaces le sont.*

1.2 Opérateurs linéaires et relations linéaires

La plus part des préliminaires dans cette section se trouvent dans Cross [7] ou [23].

Définition 1.2.1. *Soient X, Y des ensembles non-vides. Une **relation** T de X dans Y est une application définie sur un sous-ensemble non-vide $\mathcal{D}(T)$ de X, appelé le **domaine** de T, qui prend des valeurs dans $\mathcal{P}(Y) \setminus \emptyset$. Nous notons la classe des relations de X dans Y par $R(X, Y)$.*

Définition 1.2.2. *(**Graphe**) Pour $T \in R(X, Y)$ nous définissons formellement son **graphe** $G(T)$, un sous-ensemble $X \times Y$, comme suit :*

$$G(T) := \{(x, y) \in X \times Y : \ x \in \mathcal{D}(T), y \in T(x)\}.$$

Remarque 1. *Si T envoie les points de son domaine à des singletons, alors T est dite une relation univoque ou une **fonction**.*

Définition 1.2.3. *(**Rang**) Le **rang** $R(T)$ de T est défini*

$$R(T) := \bigcup_{x \in \mathcal{D}(T)} Tx$$

Remarque 2. *Si $R(T) = Y$, alors nous disons T est **surjectif**, et si $A \subset X$ alors l'image de A sous T est*

$$T(A) := \bigcup_{a \in A \cap \mathcal{D}(T)} Ta.$$

Définition 1.2.4. *(**L'inverse**) L'**inverse** de la relation T^{-1} donné par le graphe*

$$G\left(T^{-1}\right) := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in G(T)\}.$$

Proposition 1.2.1. *Une relation est dite* ***injectif*** *si T^{-1} est une univoque.*

Définition 1.2.5. *(**L'image inverse**) Si $B \subset Y$, alors l'**image inverse** de B sous T est défini comme l'ensemble*

$$T^{-1}(B) := \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \cap B \neq \emptyset\}.$$

Définition 1.2.6. *(**Noyau**) le **noyau** de B sous T est défini comme l'ensemble*

$$T^{+1}(B) : = \{x \in \mathcal{D}(T) : T(x) \subset B\}.$$

Définition 1.2.7. *(**Composition**) Soient $S, T \in R(X, Z)$. La **composition** ou **produit** $ST \in R(X, Z)$ de T et S est défini par*

$$ST(x) := S(Tx), x \in X.$$

Définition 1.2.8. *(**Restriction**) Si $A \subset X$, alors la **restriction** de T à A, noté par $T|_A$ est défini par*

$$G(T|_A) := \{(x, y) \in G(T) : x \in A\} = G((x, y) \cap (x \times Y)).$$

Définition 1.2.9. *(**Extension**) Supposons $S \in R(X, Y)$. Alors R est dite une **extension** de T si*

$$S|_{\mathcal{D}(T)} = T.$$

Notation 1. *On désigne par $LR(X, Y)$ l'ensemble des relations linéaires de X dans Y. Si $X = Y$ on note $LR(X, X) = LR(X)$.*

Proposition 1.2.2. *Soit $T \in R(X, Y)$. Alors*

(a) *$T^{-1}y = \{x \in \mathcal{D}(T) : y \in Tx\}$ pour $y \in R(T)$, et donc,*
$\mathcal{D}(T^{-1}) = R(T)$ et $R(T^{-1}) = \mathcal{D}(T)$.

(b) *Si T est injectif alors $Tx_1 = Tx_2$ implique $x_1 = x_2$ pour $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$.*

(c) *Si T est une univoque, alors $T^{-1}(B) = T^{+1}(B)$ pour $B \subset Y$.*

(d) *Pour* $B \in R(Y,Z)$, *la domaine et le graphe de* ST *sont donnés par*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(ST) &= \{x \in X : STx \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X : Tx \cap \mathcal{D}(S) \neq \emptyset\} \\ &= T^{-1}(\mathcal{D}(S)), \\ G(ST) &= \{(x,y) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x,y) \in G(S)\}. \end{aligned}$$

(e) *Pour les sous-ensembles non vides* A_1 *et* A_2 *de* X *on a*

$$\begin{aligned} T(A_1 \cup A_2) &= T(A_1) \cup T(A_2), \\ T(A_1 \cap A_2) &= T(A_1) \cap T(A_2), \\ T(X \setminus A_1) &\supset R(T) \setminus T(A_1), \text{ et} \\ A_1 \subset A_2 &\Rightarrow T(A_1) \subset T(A_2). \end{aligned}$$

Définition 1.2.10. *Soient* X *et* Y *des espaces vectoriel sur un champ* $\mathbb{K}$, *et soient* $x_1, x_2 \in X$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$.

*L'**opérateur linéaire*** $T : X \to Y$ *est une application univoque de* X *dans* Y *telle que*

$$\begin{cases} T(x_1 + x_2) = Tx_1 + x_2, \text{ et} \\ \alpha Tx_1 = T(\alpha x_1). \end{cases}$$

Nous désignons la classe des opérateurs linéaires de l'espace X *dans* Y *par* $L(X,Y)$.

*Un **opérateur linéaire multivoques** ou **relation linéaire*** $T : X \to Y$ *est une relation dont le graphe est sous-espace vectoriel de* $X \times Y$. *La classe des relations linéaires de* X *dans* Y *noté par* $LR(X,Y)$.

Remarque 3. T *est une relation linéaire si et seulement si* T^{-1} *est une relation linéaire.*

Corollaire 1.2.1. *Soit* $T \in R(X,Y)$. *Alors* T *est une relation linéaire si et seulement si*

$$\alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$.

Proposition 1.2.3. *Soit* $T \in R(X,Y)$ *on a l'équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) T *est une relation linéaire.*

(ii) $G(T)$ *est un sous espace vectoriel de* $X \times Y$.

(iii) T^{-1} *est une relation linéaire.*

(iv) $G(T^{-1})$ *est un sous espace vectoriel de* $X \times Y$*.*

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ On a $(0,0) \in G(T)$ car on a $\mathcal{D}(T)$ est un sous espace vectoriel donc $0 \in \mathcal{D}(T)$ et pour tout $x, y \in \mathcal{D}(T)$ on a $0 \in 0Tx + 0Ty \subset T(0x + 0y) = T(0)$. Soient maintenant $(x, y) \in G(T), (a, b) \in G(T), \alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$(x, y) + \alpha(a, b) = (x + \alpha a, y + \alpha b).$$

D'une part, on a $x + \alpha a \in \mathcal{D}(T)$ (car $x, a \in \mathcal{D}(T)$). D'autre part, si $\alpha \neq 0$ on a

$$T(x + \alpha a) = Tx + \alpha Ta.$$

Or $y \in Tx$ et $b \in Ta$, donc

$$y + \alpha b \in Tx + \alpha Ta = T(x + \alpha a)$$

et par suit $(x + \alpha a, y + \alpha b) \in G(T)$. Si $\alpha = 0$ évident.

$(ii) \Rightarrow (i)$ En première partie on montre que $\mathcal{D}(T)$ est un sous espace vectoriel. Soit

$$\begin{array}{rcl} P : X \times Y & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$$

on a $\mathcal{D}(T) = P(G(T))$ avec $G(T)$ est un sous espace vectoriel et P linéaire. Donc $\mathcal{D}(T)$ est un sous espace vectoriel. En deuxième partie soit $x, y \in \mathcal{D}(T)$, montrons que

$$T(x + y) = Tx + Ty.$$

Soit $z \in T(x+y)$, alors $(x+y, z) \in G(T)$ et on a $x, y \in \mathcal{D}(T)$ donc $Tx \neq \emptyset$ et $Ty \neq \emptyset$. Soient $a \in Tx, b \in Ty$, donc $(x+y, a+b) \in G(T)$ et on a $(x+y, z) \in G(T)$, d'où $(0, z-a-b) \in G(T)$. Donc $z - a - b \in T(0)$ et par suit $z \in a + b + T(0)$. D'où $z \in Tx + Ty + T(0)$ et on a $Ty + T(0) = Ty$ (car $(0,0) \in G(T)$) donc $0 \in T(0)$ et $Ty \subset Ty + T(0)$, soit $z \in Ty + T(0)$ donc

$$z = a + b,\ a \in Ty,\ b \in T(0) \text{ et } (y, a),\ (0, b) \in G(T)$$

et par suit $(y, a + b) \in G(T)$, donc $(y, z) \in G(T)$ et $z \in Ty$). Inversement soit $z \in Tx + Ty$, donc

$$z = a + b,\ a \in Tx,\ b \in Ty$$

et par suit $(x, a), (y, b) \in G(T)$. Alors,

$$(x + y, a + b) \in G(T) \text{ et } (x + y, z) \in G(T),$$

donc $z \in T(x + y)$. Finalement soit $x \in \mathcal{D}(T), \alpha \in \mathbb{K}$ montrons que $T(\alpha x) = \alpha Tx$. On a

$$\begin{aligned} z \in T(\alpha x) &\iff (\alpha x, z) \in G(T) \\ &\iff \alpha \left(x, \left(\frac{1}{\alpha} \right) z \right) \in G(T) \\ &\iff \left(x, \left(\frac{1}{\alpha} \right) z \right) \in G(T) \\ &\iff \left(\frac{1}{\alpha} \right) z \in Tx \\ &\iff z \in \alpha Tx \end{aligned}$$

donc T est linéaire.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ il suffit d'appliquer $(i) \Rightarrow (ii)$ à T^{-1}.
$(ii) \Rightarrow (iv)$ par symétrie. □

Corollaire 1.2.2. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors $T(0)$ et $T^{-1}(0)$ sont des sous-espaces vectoriels de Y et X, respectivement.*

Corollaire 1.2.3. *Soit $T \in LR(X, Y)$ et soit M un sous-espace vectoriel de X. Alors $T|_M \in LR(X, Y)$.*

Définition 1.2.11. *Le sous-espace $T^{-1}(0)$ est appelée l'**espace nul** ou **Noyau** de T et est noté $N(T)$.*

Proposition 1.2.4. *Soit $T \in LR(X, Y)$,*

(a) *Soit $x \in \mathcal{D}(T)$. On a l'équivalence suivante :*

$$y \in Tx \Leftrightarrow Tx = y + T(0).$$

En particulier,

$$0 \in Tx \Leftrightarrow Tx = T(0).$$

(b) *Pour $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ on a l'équivalence suivante :*

$$Tx_1 \cap Tx_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow Tx_1 = Tx_2.$$

Corollaire 1.2.4. *Soit* $T \in LR(X,Y)$*, on a*

(a) $TT^{-1}(0) = T(0)$.

(b) $T^{-1}T(0) = T^{-1}(0)$.

Démonstration. On a T relation linéaire. Alors $T(0)$ et $T^{-1}(0)$ sont des sous-espaces vectoriels, donc $0 \in TT^{-1}(0)$. D'où $T(0) = TT^{-1}(0)$. Substituant T^{-1} par T nous donne la deuxième égalité. □

Corollaire 1.2.5. *Soit* $T \in LR(X,Y)$*, on a*

(a) *Si* $y \in R(T)$*, alors* $TT^{-1}y = y + T(0)$.

(b) *Si* $x \in \mathcal{D}(T)$*, alors* $TT^{-1}x = x + T^{-1}(0)$.

Corollaire 1.2.6. *Supposons* $T, S \in LR(X,Y)$ *et* $G(S) \subset G(T)$*. Alors* T *est une extension de* S *si et seulement si* $S(0) = T(0)$.

Proposition 1.2.5. *Soient* $\alpha \in \mathbb{K}^*$*, et* $A, B \subset X$*,* $C \subset Y$*, soit* $T \in LR(X,Y)$*, alors*

(a) $T(\alpha A) = \alpha T(A)$.

(b) $T(A) + T(B) \subset T(A+B)$.

(c) *Si* $A \subset \mathcal{D}(T)$ *ou* $B \subset \mathcal{D}(T)$*, alors* $T(A+B) = T(A) + T(B)$.

(d) *Si* $A \subset \mathcal{D}(T)$ *ou* $B \subset \mathcal{D}(T)$ *et* $A \cap B = \{0\}$*,*
alors $T(A+B) = T(A) + T(B)$ *et* $T(A) \cap T(B) = T(0)$.

(e) $TT^{-1}C = C \cap R(T) + T(0)$.

(f) $T^{-1}T(A) = A \cap \mathcal{D}(T) + T^{-1}(0)$.

(g) $T^{-1}(0) \times \{0\} = G(T) \cap (X \times \{0\})$.

(h) $\{0\} \times T(0) = G(T) \cap (\{0\} \times Y)$.

(i) $X \times R(T) = G(T) + (X \times \{0\})$.

(j) $\mathcal{D}(T) \times Y = G(T) + (\{0\} \times Y)$

L'égalité ne tient pas nécessairement dans (b) - on peut considérer le cas $A = \{a\}, B = \{b\}$ *telle que* $a + b \in \mathcal{D}(T)$ *alors que* $a \notin \mathcal{D}(T)$ *et* $b \notin \mathcal{D}(T)$.

Démonstration. Soit $T \in LR(X,Y)$,

(a)

$$\begin{aligned} T(\alpha a) &= \cup \{(T(\alpha A)) : a \in A \cap D(T)\} \\ &= \cup \{\alpha (Ta) : a \in A \cap D(T)\} \\ &= \alpha \cup \{Ta : a \in A \cap D(T)\} \\ &= \alpha T(a). \end{aligned}$$

(c) Soit $a \in A$, $b \in B \subset \mathcal{D}(T)$. Si $a+b \notin \mathcal{D}(T)$, alors $\emptyset = T(a+b) \subset Ta+Tb$ trivialement. On d'autre parte si $a+b \in \mathcal{D}(T)$, alors $a \in \mathcal{D}(T)$ et $T(a+b) = Ta+Tb \subset TA+TB$.

(d) Immédiate.

(e), (f) suivre immédiatement dans le Corollaire (1.2.5).

(j), (g) sont des conséquences simples de la définition.

□

1.3 Relations semi-continues, continuité et la norme des relations linéaires

Dans cette section, X et Y désignent des espaces normés.

Définition 1.3.1. *Soit $\epsilon > 0$, et $M \subset X$. Alors les ensembles $B(M,\epsilon), B_X, U(M,\epsilon), U_X$ et S_X sont définis par :*

$$\begin{aligned} B(M,\epsilon) &:= \{x \in X \mid d(x,M) \leq \epsilon\}, \\ B_X &:= \{x \in X \mid d(x,0) \leq 1\}, \\ U(M,\epsilon) &:= \{x \in X \mid d(x,M) < \epsilon\}, \\ U_X &:= \{x \in X \mid d(x,0) < 1\}, \\ S_X &:= \{x \in X \mid d(x,0) = 1\}. \end{aligned}$$

Définition 1.3.2. *Un sous-ensemble U de X est un ensemble au **voisinage** de point $x \in X$ si U contient un ensemble ouvert contenant x.*

Définition 1.3.3. *Une relation $T \in R(X,Y)$ est dite* ***semi-continue supérieur (s.c.s)*** *au point $x \in \mathcal{D}(T)$ si pour tout voisinage U de $T(x)$ il existe $\epsilon > 0$ telle que pour tout $z \in B(x,\epsilon)$ on a $T(z) \subset U$. T est dite* ***semi-continue supérieur*** *si il est semi-continue supérieur à chaque x dans son domaine $\mathcal{D}(T)$.*

Il résulte de la Définition précédente que T est s.c.s à $x \in \mathcal{D}(T)$ si et seulement si le noyau de tout ensemble ouvert est ouverte.

Définition 1.3.4. *Une relation $T \in R(X,Y)$ est dite un* ***semi-continue inférieur (s.c.i)*** *au point $x \in \mathcal{D}(T)$ si pour tout $y \in T(x)$ et pour tout suite $x_n \subset \mathcal{D}(T)$ telle que $x_n \to x$ il existe $y_n \in T(x_n)$ telle que $y_n \to y$. T est dite un* ***semi-continue inférieur*** *si il est semi-continue inférieur à chaque x dans son domaine $\mathcal{D}(T)$.*

Il résulte que T est s.c.i à $x \in \mathcal{D}(T)$ si et seulement si l'image inverse de tout ensemble ouvert qui intersecte $T(x)$ est un voisinage de x. Ainsi T est s.c.i si et seulement si l'image inverse de tout ensemble ouvert est ouverte.

Exemple 1.3.1. *On a*

(a) *L'application $T_1 \in R(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par :*

$$T_1(x) = \begin{cases} [-1,1] & si \quad x \neq 0 \\ \{0\} & si \quad x = 0 \end{cases}$$

est s.c.i à zéro mais pas s.c.s à zéro.

(b) *L'application $T_2 \in R(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par :*

$$T_2(x) = \begin{cases} \{0\} & si \quad x \neq 0 \\ [-1,1] & si \quad x = 0 \end{cases}$$

est s.c.s à zéro mais pas s.c.i à zéro.

Remarque 4. *Les définitions de la semi-continuité supérieure et inférieure sont ééquivalentes pour les applications univoques. De plus, il est bien connu que la continuité d'un (univoque) opérateur linéaire peut caractériser en terme de l'opérateur normé.*

Définition 1.3.5. *Soient X et Y des espaces normés, et $T \in L(X,Y)$. La **norme** de T est définie comme suit :*

$$\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Théorème 1.3.1. *Soit $T \in L(X,Y)$. Alors les éléments suivants sont équivalents :*

(i) *T est continue au point,*

(ii) *T est uniformément continu sur son domaine,*

(iii) *Il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $\|Tx\| \leq M \|x\|$ pour tout x dans la domaine de T,*

(iv) $\|T\| < \infty$.

Remarque 5. *La définition de la continuité d'opérateur entre des espaces normés peut être étendue aux relations linéaires. En outre, il peut montrer que la propriété de semi-continuité inférieure d'opérateurs multivoques est équivalente à la propriété d'une norme finie .*
Pour cette raison nous choisissons la notion de semi-continuité inférieure pour servir à la définition de la continuité d'un opérateur linéaire multivoques. Nous fournissons des définitions dans le chapitre suivant. Le terme "est continue" aussi plus pratique à utiliser fréquemment, l'expression plus précise semi-continuité inférieure. Notez que dans la littérature de l'analyse convexe, l'application est dite continue si et seulement si elle est à la fois semi-continue supérieure et inférieure .

Notation 2. *Soit $B(X,Y)$ désigne la classe d'opérateurs linéaires continues au univoques de l'espace normé X dans Y et $B(X)$ indique cette classe pour le cas $X = Y$.*

Définition 1.3.6. *Soit $T \in LR(X,Y)$. Si T et l'application inverse T^{-1} sont univoques, continues et partout définie, alors T est dite un **isomorphisme**. Ainsi T est dite un **isométrie** si $\|Tx\| = \|x\|$.*

Théorème 1.3.2. *Soit $T \in L(X,Y)$. Alors T^{-1} est continue et univoque si et seulement si il existe $m > 0$ telle que*

$$\|Tx\| \geq m \|x\|, \ x \in D(T).$$

1.4 Clasification des espaces vectoriels

Cette section sert à introduire les propriétés qui sont utilisées dans la suit.

Définition 1.4.1. *Une paire d'espaces normés sont dite isomorphes (isométrique) s'il existe une isomorphisme (isométrie) qui applique un espace sur l'autre.*
Un espace normé peut être classé en termes de isomorphismes et isométries de l'espace dans lui-même, ou de son sous-ensemble, dans un sous-ensemble des espaces classique. Caractérisation des propriétés d'espace normés peuvent être topologiques, par exemple, faible compacité de la boule unité, ou giométrique. Les espaces sont également étudiés via leurs propriétés locales, i.e. construite à partir de sous-espaces de dimension fini. Plus généralement nous avons les identifications suivantes.

Théorème 1.4.1. *Si K et H sont des espaces métriques compacts, alors K est homémorphe à H si et seulement si $C(K)$ est isométrie à $C(H)$.*

Théorème 1.4.2. *Si K et H sont des espaces métriques compacts non dénombrables, alors $C(K)$ est isomorphe à $C(H)$.*

Le Théorème (1.4.1) au départ, a été prolongé par M.H.Stone aux espaces de Hausdorff compacts. Cependant, $C(K)$ peut être isomorphe à $C(H)$ sans K est un espace métrique compact non dénombrable, il suffit de considérer $K = [0, 1]$. D'autre part que K varie sur des espaces métriques compacts dénombrables, il existe un nombre non dénombrable de classes pour $C(K)$.

Théorème 1.4.3. *Si X est un espace normé de dimension n sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$), alors X est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ (respectivement, $\mathbb{C}^n$).*

Lemme 1.4.1. *Si X est isomorphe à un espace de Banach, alors X est aussi un espace de Banach.*

Corollaire 1.4.1. *Si X est un espace normé de dimension fini, alors X est complet.*

Corollaire 1.4.2. *Si B est un ensemble fermé borné dans un espace normé de dimension finie X, alors B est compact.*

L'inverse est aussi vrai, *i.e.* la propriété de la boule unité donnée dans le Corollaire (1.4.2) caractérise les espaces vectoriels de dimension finie. Le lemme de Riesz est généralement utilisé pour prouver cela.

Théorème 1.4.4. ***(Lemme de Riesz)*** *Soit M un sous-ensemble de l'espace normé X, telle que M n'est pas dense. Alors il existe une suite $\{x_n\} \subset S_X$ telle que $d(x_n, M) \to 1$.*

Théorème 1.4.5. *Si X est un espace normé telle que B_X est totalement borné, alors X est de dimension finie.*

1.5 Fonctions linéaires et espaces conjugués

Définition 1.5.1. *Soit X un espace vectoriel topologique. La* ***conjugué algébrique*** *de X, noté $X^{\#}$, est l'ensemble de toutes les fonctionnelles définies sur X .i.e.,*

$$X^{\#} := \{f : X \to R \mid f(x+y) = f(x) + f(y);\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

$$\textit{pour tout } x, y \in X \textit{ et } \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Si X est un espace normé, alors le ***conjugué topologique*** *de X noté X', est le sous-ensemble de $X^{\#}$ constitué des fonctionnelles linéaires qui satisfaite*

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

On note généralement x' un élément dans X', nous notons X' simplement comme le conjugué ou l'adjoint de X, quand il n'y a pas d'ambiguïté. On note que X' est un espace de Banach avec la norme donnée ci-dessus.

Définition 1.5.2. *Soit $x'_0 \in X'$. Les ensembles*

$$U_{\epsilon, x_1, \ldots, x_n}(x'_0) := \{x' \in X' :\ |x'(x_i) - x'_0(x_i)| < \epsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

$\epsilon > 0, \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X, n \geq 1$ former une base voisinage pour $x'_0 \in X'$. La topologie donné par ces ensembles est appelé la ***topologie $*$-faible*** *sur X', et il noté par $\sigma(X', X)$.*

Théorème 1.5.1. *La boule unité $B_{X'}$ est $\sigma(X', X)$-compact.*

Définition 1.5.3. *Les élémentes de l'espace normé X détermine les fonctionnelles linéaires sur X' par la formule $x''(x') := x'(x)$ pour $x \in X$. Nous disons X* ***réflexif*** *si tout les fonctionnelles linéaires détermine sur X' sont déterminés de cette manière, i.e., si $X'' = X$ sous cette identification. La topologie $\sigma(X'', X')$ sur X, où X est considéré comme un sous-espace de X'', est appelé comme la* ***topologie - faible*** *sur X.*

Théorème 1.5.2. *Si X est un espace de Banach, alors X est réflexif si et seulement si X' est réflexif.*

Théorème 1.5.3. *Si X est réflexif, alors tout les sous-espaces fermés le sont.*

Théorème 1.5.4. *X est réflexif si et seulement si la boule unité B_X est $\sigma(X'', X')$ -compact.*

Exemple 1.5.1. *On a*

1. *C_0 n'est pas réflexif puisque $C_0'' = l_\infty$.*
2. *$l_p, 1 < p < +\infty$ et $L_p, 1 < p < +\infty$ sont réflexifs.*
3. *l_0 n'est pas réflexif, et donc il s'ensuit que les espaces $L_1, C([0,1])$, et L_∞ ne sont pas aussi réflexif puisque ils ont des sous-espaces isomorphes à l_1.*

Théorème 1.5.5. *Si X' est séparable, alors X est séparable .*

Théorème 1.5.6. *Si X est séparable, alors la topologie $\sigma(X', X)$ de X' est métrisable.*

En général, pour les espaces topologique séparables, on utilise les suites dans la continuité et convergence. Les suites suffisent également lorsque l'espace est métrisable. Cependant, lorsque les topologies faibles (les espaces de dimension infinie) X et X', il n'est pas généralement le cas que les topologies sont métrisables.

Théorème 1.5.7. ***(Théorème d'Extension de Hahn-Banach)*** *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Supposons que p est fonction à valeur réel définit sur X satisfait*

$$\begin{cases} p(x+y) & \leq & p(x) + p(y), \text{ et} \\ p(\alpha x) & = & |\alpha| \, p(x). \end{cases}$$

Si M est un sous-espace de X et f une fonction linéaire définit sur M qui satisfaire $|f(m)| \leq p(m)$ pour $m \in M$, alors il existe une fonction linéaire F qui étend f pour X et satisfaire $|F(x)| \leq p(x)$ pour $x \in X$.

Définition 1.5.4. *Un sous-ensemble K d'un espace vectoriel X est dite convexe si* $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in K$ *quelque soit* $x, y \in K$ *et* $\lambda \in [0,1]$.

Théorème 1.5.8. *Soit K est fermé, sous espace convexe de l'espace normé X. Si $x \in X$ et $x \notin K$ alors il existe $x' \neq 0, x' \in X'$ telle que*

$$Re\ x'x \quad \geq \quad Re\ x'k, \quad k \in K.$$

1.6 Quotients, sous-espaces et projections

Définition 1.6.1. *Soit M un sous-espace vectoriel de X, dénote par $[x]$ l'ensemble de tous les éléments équivalente à x sous la relation d'équivalente*

$$yRx \Leftrightarrow y - x \in M.$$

L'espace quotient X/M est défini par :

$$X/M := \{[x]\, | x \in X\}.$$

Si M est le sous espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$, alors X/M est un espace normé de norme $\|.\|$ défini par :

$$\|[x]\| := d\,(x, M) = \inf_{m \in M} \|x - m\|.$$

Remarque 6. *Le fait que la norme sur X/M est bien définie résulte du fait que si yRx alors*

$$\begin{aligned} \|[y]\| &= \inf_{m \in M} \|y - m\| \\ &= \inf_{m \in M} \|x - ((y - x) + m)\| \\ &= \inf_{m \in M} \|x - m\| \\ &= \|[x]\|. \end{aligned}$$

Il s'ensuit ainsi que

$$\|[x]\| = \inf_{y \in [x]} \|y\|.$$

Définition 1.6.2. *L'opérateur $Q_M^X : X \to X/M$ Défini par $Q_M^X x = [x]$ est appelé l'application quotient naturel avec domaine X et espace nul M .*

Théorème 1.6.1. *Soit X un espace de Banach. Si M est un sous-espace fermé de X alors X/M est l'espace de Banach .*

Proposition 1.6.1. *Soit M est un sous-espace fermé de X, et soit $N \subset X$ est un sous-espace telle que $M \subset N$. Alors N est fermé si et seulement si N/M est fermé dans X/M.*

Démonstration. Supposons que N/M est fermé, et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N$ et une suite convergent vers $x \in X$, alors $\{[x_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N/M$, et

$$\begin{aligned} & \lim_{n\in\mathbb{N}} \inf\nolimits_{m\in M} \|(x_n - x) - m\| = 0 \\ \Rightarrow \quad & \lim_{n\in\mathbb{N}} \|[x_n - x]\| = 0 \\ \Rightarrow \quad & \lim_{n\in\mathbb{N}} \|[x_n] - [x]\| = 0 \end{aligned}$$

Puisque N/M est fermé, $[x] \in N/M$ et $\exists\ y \in N$ telle que $[y] = [x]$. Puisque $y - x \in M$ il suit que $x \in N$.
L'implication inverse est similaire. □

Proposition 1.6.2. *Soit $T \in LR(X, Y)$, et soit $M \subset X$. Alors*

$$\dim R(T)/T(M) \leq \dim \mathcal{D}(T)/\mathcal{D}(T) \cap M \leq X/M.$$

En particulier, si M est codimensionnel fini de $R(T)$.

Démonstration. Voir Cross (7) □

Définition 1.6.3. *Soit X un espace vectoriel, et soit $M \subset X$. Alors, nous définissons ce que l'on appelle parfois annilateur $M^\perp$ de M par :*

$$M^\perp := \{x' \in X' \quad | \quad x'x = 0 \forall \quad x \in M\}$$

De même, si $N \in X'$ alors $N^\top$ est définie par :

$$N^\top := \{x \in X \quad | \quad x'x = 0 \quad \forall x' \in N\}$$

Remarque 7. *$M^\perp$ et $N^\top$ sont des sous-espaces fermés de X' et X respectivement. De plus, $M^{\perp\top} = \overline{M}$, et $N^{\top\perp}$ est la fermeture $*$-faible de N.*

Proposition 1.6.3. *Soit M un sous-espace d'un espace normé X. Alors*

(a) $X'/M^{\perp}$ *est isomorphe isométriquement à M' sous l'application U définie par :*

$$U\left[x'\right] := x'_M$$

où $[x'] \in X/M'$ et x'_M est la restriction de x' à M.

(b) *Si M est fermé, alors $(X/M)'$ est isomorphe isométriquement à $M^{\perp}$ sous l'application V définie par :*

$$\left(Vz'\right)x := z'\left[x\right],$$

où $z' \in (X/M)'$.

Définition 1.6.4. *Soit M est un sous-espace d'un espace vectoriel X, alors un (univoque)* ***projection linéaire*** *de X sur M est un (univoque) opérateur linéaire qui satisfait à la condition $P^2 = P$.*

Si M et N sont des sous-ensemble d'un espace vectoriel X, alors la somme $M + N$ disigne l'ensemble

$$\{m + n : m \in M \text{ et } n \in N\}.$$

Si M et N sont des sous-espaces vectoriels de X qui satisfait $X = M + N$ et $M \cap N = \{0\}$, alors N est appelé un ***complément*** *de M. Si en autre, il y a une projection linéaire continue de X sur M, alors N est appelé* ***complément topologique*** *de M. Dans ce cas nous écrivons $X = M \oplus N$.*

Proposition 1.6.4. *Soient M et N sont des sous-espaces linéaires de X. Si N est un complément de M, alors N est isomorphe à l'espace quotient X/M.*

Théorème 1.6.2. *Soit M sous-espace fermé de l'espace de Banach X. Il y a une projection linéaire continue de X sur M si et seulement si il existe un sous-espace fermé N telle que $X = M + N$ et $M \cap N = \{0\}$.*

Théorème 1.6.3. *Si M un sous-espace de dimension finie de l'espace linéaire normé, alors M est complété topologiquement.*

Définition 1.6.5. *Un sous-espace fermé M d'un espace de Banach X est dite quasi-complétions s'il existe un sous-espace fermé N telle que $M \cap N = \{0\}$ et $M + N$ est dense dans X.*

Théorème 1.6.4. *Chaque sous-espace fermé d'un espace de Banach séparable ou réflexif est quasi-complété.*

Chapitre 2

Relations linéaires entre des espaces normés

2.1 Algèbre des relations linéaires

Dans cette section nous discutons des opérations d'addition et multiplication par un scalaire dans $LR(X,Y)$.

Proposition 2.1.1. *Soit $T \in LR(X,Y)$ et soit $S \in LR(Y,Z)$. Alors $ST \in LR(X,Z)$.*

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(ST)$ et soient α, β scalaires non-nuls. Alors les égalités suivantes de la Proposition (1.2.5), nous donne,

$$\begin{aligned} \alpha(STx_1) + \beta(STx_2) &= \alpha S(Tx_1) + \beta S(Tx_2) \\ &= S(\alpha Tx_1) + S(\beta Tx_2) \\ &= S(T(\alpha x_1)) + S(T(\beta x_2)) \\ &= ST(\alpha x_1 + \beta x_2). \end{aligned}$$

$\square$

Définition 2.1.1. *Soient $S, T \in LR(X,Y)$, et $\alpha \in \mathbb{K}$.* ***L'addition*** *et* ***multiplication par un scalaire*** *des relations linéaires sont définies par,*

$$\begin{cases} (S+T)x := Sx + Tx & x \in X \text{ et} \\ (\alpha T)x := \alpha(Tx) & x \in X. \end{cases}$$

Remarque 8. *Les propriétés suivantes pour $R, S, T \in LR(X, Y)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ suivent facilement la définition :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(S+T) &= \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T) \\
G(S+T) &= \{(x,y) \in X \times Y | y = s+t, s \in Tx, t \in Sx\} \\
S+T &= T+S \\
R+(S+T) &= (R+S)+T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\alpha T) &= \mathcal{D}(T) \\
G(\alpha T) &= \{(x, \alpha y) \in X \times Y : (x,y) \in G(T)\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y : (x, \alpha^{-1} y) \in G(T)\} \\
&= \{(\alpha^{-1} x, \alpha y) \in X \times Y : (x,y) \in G(T)\} \\
\alpha(\beta T) &= (\alpha\beta) T.
\end{aligned}$$

Il s'ensuite que $S+T$ et αT sont relations linéaires, i.e., $LR(X, Y)$ est fermé sous addition et multiplication scalaire.

Proposition 2.1.2. *Soient $T, T_2 \in LR(X, Y)$ et $R, S \in LR(Y, Z)$. Alors*

- **(a)** $TT^{-1} = I_{R(T)} + (TT^{-1} - TT^{-1})$.
- **(b)** $\alpha(ST) = (\alpha S)T = S(\alpha T), 0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$.
- **(c)** *Si $G(S) \subset G(R)$, alors $G(ST) \subset G(RT)$.*
- **(d)** $G((R+S)T) \subset G(RT) + G(RT)$.
- **(e)** *$S(T+T_2)$ est une extension de $ST + ST_2$, et on a l'égalité si $\mathcal{D}(S)$ contient les deux $R(T)$ et $R(T_2)$.*

Démonstration. Pour la preuve de cette Proposition voir Cross [7] . □

Exemple 2.1.1. *Soit $R \in LR(Y, Z)$ est une univoque non-nul, soit $S = -R$, soit $G(T) = X \times Y$ où $Y \neq \{0\}$. Alors*

$$(R+S)T(0) = (R-R)Y = \cup y \in \mathcal{D}(R)(R-R)y = \{0\}.$$

Tandis que

$$(RT+ST)(0) = (RT+RT)(0) = RT(0) - RT(0) = R(Y) - R(Y) = R(Y) \neq \{0\}.$$

Donc, le Corollaire (1.2.6), *nous donne* $RT + ST$ *n'est pas toujours une extension de* $(R + S)T$.

2.2 Continuité et la norme des relations linéaires

Soient X, Y deux espaces de Banach, $T \in LR(X, Y)$. Soit Q_T la surjection canonique :

$$\begin{array}{rcl} Q_T : Y & \longrightarrow & Y/\overline{T(0)} \\ x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

avec $[x]$ c'est la classe de x. Q_T est un opérateur linéaire (c'est une relation linéaire).
On considère la relation linéaire :

$$\begin{array}{rcl} Q_T T : \mathcal{D}(T) & \longrightarrow & Y/\overline{T(0)} \\ x & \longmapsto & Q_T T x. \end{array}$$

Soient U, V deux partie de X.

$$d(U, V) = \inf \{\|y - z\| : y \in U, z \in V\}.$$

Si $U = \{a\}$, alors $d(a, V) = \inf \{\|a - z\| : z \in V\}$.

Remarque 9. (*i*) $Y/\overline{T(0)}$ *est munie d'une structure d'espace de Banach, avec pour* $\overline{y} \in Y/\overline{T(0)}$, *on a* $\|\overline{y}\| = d(y, \overline{T(0)}) = \inf \left\{\|y - \alpha\| : \alpha \in \overline{T(0)}\right\}$.
(*ii*) *Pour tout* $y \in Y$ *on a* $d(y, T(0)) = d(y, \overline{T(0)})$. *En effet* $T(0) \subset \overline{T(0)}$, *donc*

$$d(y, \overline{T(0)}) \leq d(y, T(0)).$$

Inversement on a $d(y, \overline{T(0)}) = \inf \left\{\|y - z\| : z \in \overline{T(0)}\right\}$. *Si* $z \in \overline{T(0)}$, *alors il existe* $z_n \in T(0)$ *telle que* $z_n \underset{n \to +\infty}{\to} z$. *Or* $\|y - z\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|y - z_n\|$ *et* $z_n \in T(0)$, *donc*

$$d(y, T(0)) \leq \|y - z_n\|.$$

Donc,

$$d(y, T(0)) \leq \|y - z\| \;\; \forall\, z \in \overline{T(0)}.$$

D'où,

$$d(y, T(0)) \leq \inf\{\|y - z\| : z \in \overline{T(0)}\} = d(y, \overline{T(0)}).$$

Proposition 2.2.1. *QT est une univoque.*

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{D}(T)$, et soient $y_1, y_2 \in QTx$. Alors $y_1 - y_2 \in QTx - QTx = QT(0) \subset Q\overline{T(0)} = 0$. $\square$

Proposition 2.2.2. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors*

$$N(T) \subset N(QT).$$

avec égalité si $T(0)$ est relativement fermé dans $R(T)$.

Démonstration. Nous appliquons Proposition (1.2.4) :

$$\begin{aligned} N(T) = \{x \in X : Tx = T(0)\} &\subset \{x \in X : Tx \subset \overline{T(0)}\} \\ &= \{x \in X : QTx = 0\} = N(QT). \end{aligned}$$

Si $T(0)$ est relativement fermé dans $R(T)$, alors l'égalité tient.
L'exemple suivant montre que l'égalité ne tient généralement pas dans la Proposition (2.2.2). $\square$

Exemple 2.2.1. *Soit X un espace normé de dimension infinie et soit $f \in LR(X, \mathbb{K})$ une fonctionnelle linéaire discontinue définie partout. Si $T = f^{-1}$, alors $T(0)$ est un hyperplan dense dans X et $Q_T = 0$. Donc*

$$N(T) = 0 \neq \mathbb{K} = N(QT).$$

Proposition 2.2.3. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Si $R(T)$ est fermé, alors $R(QT)$ est fermé. Inversement, si $R(QT)$ est fermé et $\overline{T(0)} \subset R(T)$, alors $R(QT)$ est fermé.*

Démonstration. C'est un cas particulier de la Proposition (1.6.1). $\square$

Définition 2.2.1. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors T est dite* ***continue en un point*** *$x \in \mathcal{D}(T)$ si l'image inverse de tout voisinages de Tx est un voisinage de x. T est dite continue s'il est* ***continue*** *en tout point de son domaine.*
Pour $x \in \mathcal{D}(T)$ nous définissons $\|Tx\|$ par

$$\|Tx\| := \|QTx\|$$

*et la quantité $\|T\|$, qui est appelé la **norme** de T, est définie par*

$$\|T\| := \|QT\|.$$

On note que $\|T\|$ n'est pas une vraie fonction "norme" puisque $\|T\| = 0$ n'implique pas $T = 0$. i.e., $x \in T(0)$

Proposition 2.2.4. *Soit $T \in LR(X, Y)$.*

(a) *Pour $x \in \mathcal{D}(T)$*

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= d(y, T(0)) \text{ pour tout } y \in Tx \\ &= \inf_{y \in Tx} \|y\| \\ &= d(y + T(0), 0) \text{ pour tout } y \in Tx \\ &= d(Tx, 0) = d(Tx, T(0)). \end{aligned}$$

(b) $\|T\| = \sup_{x \in B_{\mathcal{D}(T)}} \|Tx\|.$

Démonstration. Voir Cross [7] . □

Proposition 2.2.5. *On a*

(a) *Pour $S, T \in LR(X, Y)$ et $x \in \mathcal{D}(S + T)$, on a*

$$\|Sx + Tx\| \leq \|Sx\| + \|Tx\|.$$

Si de plus $S(0) \in \overline{T(0)}$ alors

$$\|Tx\| - \|Sx\| \leq \|Tx - Sx\|.$$

(b) *Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathcal{D}(T)$ on a*

$$\|\alpha Tx\| = |\alpha| \|Tx\|.$$

Démonstration. **(a)** Soit $s \in Sx$ et $t \in Tx$. Alors $s + t \in Sx + Tx = (S + T)x$. Donc,

$$\begin{aligned} \|Sx + Tx\| &= d(s + t, (S + T)(0)) \\ &\leq d(s, S(0) + T(0)) + d(t, S(0) + T(0)) \\ &\leq d(s, S(0)) + d(t, T(0)) \\ &= \|Sx\| + \|Tx\|. \end{aligned}$$

Si $S(0) \in \overline{T(0)}$, alors par ce que nous venons de montrer,

$$\|Tx\| = \|Tx + Sx - Sx\| \leq \|Tx - Sx\| + \|Sx\|$$

.

(b) On a $\|\alpha Tx\| = \|Q(\alpha T)(x)\| = \|\alpha QTx\| = |\alpha|\|QTx\| = |\alpha|\|Tx\|$.

□

L'exemple suivant montre qu'il n'est pas vrai en général que $\|Tx\| - \|Sx\| \leq \|Tx - Sx\|$ pour les relations linéaires.

Exemple 2.2.2. *Soit X un espace normé non-nul, soit $G(S) = X \times X$ et soit $T = I_X$. Alors pour $x \neq 0$ on a*

$$\|Tx - Sx\| = 0$$

Tandis que

$$\|Tx\| - \|Sx\| = \|x\| \neq 0$$

Donc $\|Tx\| - \|Sx\| \nleq \|Tx - Sx\|$.

Corollaire 2.2.1. *Soient $S, T \in LR(X, Y)$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors*

(a) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

(b) *Si $S(0) \in \overline{T(0)}$ alors $\|T\| - \|S\| \leq \|T - S\|$.*

(c) $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$.

Proposition 2.2.6. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors*

(a) *$\|T\| < \infty \Leftrightarrow$ il existe $\lambda > 0$ telle que*

$$TB_{\mathcal{D}(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0). \tag{2.1}$$

(b) *Si $\|T\| < \infty$ alors*

$$\|T\| = \inf_{\lambda > 0}\{\lambda | TB_{\mathcal{D}(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0)\}. \tag{2.2}$$

Démonstration. **(a)** supposons que $\|T\| < \infty$. On applique la Proposition (2.2.4) pour $x \in B_{\mathcal{D}(T)}$ et$y \in Tx$ il existe $k \in T(0)$ telle que étant donné $\epsilon > 0$,

$$\|y - k\| < \|T\| + \epsilon,$$

i.e., $y - k \in (\|T\| + \epsilon)B_{R(T)}$. Donc

$$y \in (\|T\| + \epsilon)B_{R(T)} + T(0). \tag{2.3}$$

Inversement, supposons que (2.1) est vérifie. Soit $x \in B_{\mathcal{D}(T)}$ et choisir $y \in Tx$. Alors $y = \lambda y_1 + k$ où $\|y_1\| \leq 1$ et $k \in T(0)$. Ainsi $\|y - k\| \leq \lambda$, en particulier, $d(y, T(0)) \leq \lambda$. Il découle de la Proposition 2.2.7 que $\|T\| \leq \lambda < \infty$.

(b) Supposons que $\|T\| < \infty$. Si $\|T\| = 0$, alors $TB_{D(T)} \subset \overline{T(0)}$ et (2.2) est vérifie. Supposons que $\|T\| > 0$. Ensuite, il découle de (2.3) que

$$\|T\| \geq \inf_{\lambda > 0}\{\lambda | TB_{\mathcal{D}(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0)\}$$

Soit α telle que $0 < \alpha < \|T\|$, et choisir $x \in B_{\mathcal{D}(T)}, y \in Tx$ telle que

$$\alpha < d(y, T(0)) \tag{2.4}$$

Si $TB_{\mathcal{D}(T)} \subset \alpha B_{R(T)} + T(0)$, alors il existe $y_1 \in B_{R(T)}$, et $K \in T(0)$ telle que $y = \alpha y_1 + k$. Mais alors

$$\|y - k\| \leq \alpha.$$

Ce qui contredit (2.4). Ainsi,

$$\alpha < \inf_{\lambda > 0}\{\lambda | TB_{\mathcal{D}(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0)\}.$$

□

Proposition 2.2.7. *Soit $T \in LR(X, Y)$*

(a) *T est continue si seulement si $\|T\| < \infty$.*

(b) *Si $\dim \mathcal{D}(T) < \infty$, alors T est continue.*

Démonstration. **(a)** Supposons que T est continue. Puisque $T(0) + B_Y$ est un voisinage de $T(0)$, s'ensuite que $T^{-1}(T(0) + B_Y) = T^{-1}B_{R(T)}$ est un voisinage de 0. Ainsi $\exists\lambda > 0$ t.q.

$$\lambda B_{\mathcal{D}(T)} \subset T^{-1}B_{R(T)}$$

et, par conséquent,

$$\lambda T B_{\mathcal{D}(T)} \subset B_{R(T)} + T(0) \subset TT^{-1}B_{R(T)}.$$

D'après la Proposition (2.2.6), cela implique que $\|T\| < \infty$.
Inversement, supposons que $\|T\| < \infty$. Soit $x \in \mathcal{D}(T)$, et soit V une boule fermé non trivial dans $R(T)$ de centre y où $y \in Tx$. Alors $V_0 = V - \{y\} = \alpha B_{R(T)}$ pour certains $\alpha > 0$. En appliquant la Proposition (2.2.6), il existe $\lambda > 0$ telle que

$$TB_{\mathcal{D}(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0).$$

Il s'ensuite que

$$B_{\mathcal{D}(T)} + T^{-1}(0) \subset \lambda T^{-1}B_{R(T)} = \alpha^{-1}\lambda T^{-1}V_0$$

Ou, équivalent,

$$\lambda^{-1}\alpha B_{D(T)} + T^{-1}(0) \subset T^{-1}V_0 = T^{-1}(V - y).$$

Par conséquent,

$$\lambda^{-1}\alpha B_{\mathcal{D}(T)} + T^{-1}y \subset T^{-1}V - T^{-1}y + T^{-1}y = T^{-1}V,$$

et $\lambda^{-1}\alpha B_{\mathcal{D}(T)} + T^{-1}y$ est un voisinage de x dans $\mathcal{D}(T)$. Supposons maintenant que W soit un voisinage de Tx, soit $U \subset W$ un ensemble ouvert contenant $y \in Tx$, et soit $V \subset U$ une boule fermé non triviale de centre y. De ce qui a déjà été montré, il s'ensuite que $T^{-1}W$ est voisinage de x. Donc T est continue.

(b) si $\dim \mathcal{D}(T) < \infty$. Alors QT est un opérateur continue univoque, *i.e.*, $\|QT\| < \infty$. Puisque $\|T\| = \|QT\|$, le résultat découle de (a) .

$\square$

2.3 Relations ouvertes et module minimale

Définition 2.3.1. *Une relation linéaire $T \in LR(X,Y)$ est dite* **ouverte** *si son inverse T^{-1} est une relation linéaire continue.*

Définition 2.3.2. *Soit $T \in LR\,(X,Y)$.*

$$\gamma(T) = \begin{cases} \infty \quad si \quad \mathcal{D}(T) \subset \overline{N(T)} \\ \inf\left\{ \dfrac{\|Tx\|}{d(x,N(T))} | x \in \mathcal{D}(T) \backslash \overline{N(T)} \right\} \; sinon \end{cases} \tag{2.5}$$

Proposition 2.3.1.

$$\gamma(T) = \sup\{\lambda : TB_{\mathcal{D}(T)} \supset \lambda B_{R(T)}\} \tag{2.6}$$

Démonstration. Voir Cross [7]. □

Proposition 2.3.2. *Soit $T \in LR(X,Y)$.*

(i) $Q_T T$ *est univoque.*

(ii) $\|Tx\| = d(y, T(0))$ *pour tout* $x \in \mathcal{D}(T),\ y \in Tx$.

(iii) $\|Tx\| = d(Tx, T(0)) = d(Tx, 0)(x \in \mathcal{D}(T))$.

(iv) $\|T\| = \sup\limits_{x \in B_X \cap \mathcal{D}(T)} \|Tx\|$.

(v) $\gamma(T) = \|T^{-1}\|^{-1}$.

Démonstration. **(i)** On a $Q_T T(0) = \{0\}$ car $T(0) \subset \overline{T(0)}$.

(ii) Soient $x \in \mathcal{D}(T), y \in Tx$. Donc, $Tx = y + T(0)$ et par suite

$$\|Tx\| = \|Q_T Tx\| = \|Q_T(y + T(0))\| = \|Q_T y\| = d(y, \overline{T(0)}) = d(y, T(0)).$$

(iii) On a $d(Tx, T(0)) = \inf\{d(y, T(0)) : y \in Tx\} = \inf\{\|Tx\| : y \in Tx\} = \|Tx\|$ (car d'après (ii), on a $\|Tx\| = d(y, T(0))$). Montrons l'autre égalité, on a

$$d(Tx, T(0)) \leq d(0, Tx) \text{ car } 0 \in T(0).$$

Pour l'autre inégalité, on a

$$\{\|y - z\| : y \in Tx, z \in T(0)\} \subset \{\|z\| : z \in Tx\}$$

(car $y - z \in Tx$). Donc,

$$\inf\{\|z\| : z \in Tx\} \leq \inf\{\|y - z\| : y \in Tx, z \in T(0)\}.$$

D'où, $d(0, Tx) \leq d(Tx, T(0))$.

(iv) On a $\|T\| = \|Q_T T\| = \sup\limits_{x \in B_X \cap \mathcal{D}(T)} \|Q_T Tx\| = \sup\limits_{x \in B_X \cap \mathcal{D}(T)} \|Tx\|$.

(v) Soit $\lambda > 0$, on a les implications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} T^{-1} \supset \lambda B_{\mathcal{D}(T)} & \Rightarrow & B_{R(T)} + T(0) \supset \lambda T B_{\mathcal{D}(T)} \\ & \Rightarrow & T^{-1}(B_{R(T)} + T(0)) \supset \lambda B_{\mathcal{D}(T)} + T^{-1}(0) \\ & \Rightarrow & T^{-1} B_{R(T)} + T^{-1}(0) \supset \lambda B_{\mathcal{D}(T)} + T^{-1}(0) \\ & \Rightarrow & T^{-1} B_{R(T)} \supset \lambda B_{\mathcal{D}(T)}. \end{array}$$

Par conséquent, $T^{-1} B_{R(T)} \supset \lambda B_{\mathcal{D}(T)} \Longleftrightarrow B_{R(T)} + T(0) \supset \lambda T B_{\mathcal{D}(T)}$. Donc, on a deux cas à traiter :

<u>Cas 1</u> : $\|T\| < \infty$.

$$\begin{array}{rcl} \|T\| & = & \inf\{\lambda > 0 : \lambda^{-1} T B_{\mathcal{D}(T)} \subset B_{R(T)} + T(0)\} \\ & = & (\sup\{\lambda T B_{\mathcal{D}(T)} \subset B_{R(T)} + T(0)\})^{-1} \\ & = & (\sup\{T^{-1} B_{R(T)} \supset \lambda B_{\mathcal{D}(T)}\})^{-1} \\ & = & (\gamma(T^{-1}))^{-1}. \end{array}$$

<u>Cas 2</u> : $\|T\| = \infty$.

$$\begin{array}{lcl} T B_{\mathcal{D}(T)} & \nsubseteq & \lambda B_{R(T)} + T(0) \ \forall \ \lambda > 0 \\ \lambda T B_{\mathcal{D}(T)} & \nsubseteq & B_{R(T)} + T(0) \ \forall \ \lambda > 0 \\ T^{-1} B_{R(T)} & \nsupseteq & \lambda B_{\mathcal{D}(T)} \ \forall \ \lambda > 0. \end{array}$$

Par conséquent, on a $\gamma(T^{-1}) = 0$. Donc $\|T\| = \gamma(T^{-1})$.

Dans les deux cas on remplace T par T^{-1}, on trouve le résultat.

□

Proposition 2.3.3. *Soit $T \in LR(X, Y)$.*

(a) *T est ouvert si et seulement si $\gamma(T) > 0$.*

(b) *Si* $\dim R(T) < \infty$, *alors* T *est ouvert.*

Proposition 2.3.4. *Soit* $T \in LR\,(X, Y)$. *Alors*

$$\gamma(T) \leq \gamma(QT)$$

avec l'égalité si $T(0)$ *est relativement fermé dans* $R(T)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &= \sup\{\lambda : \|Tx\| \geq \lambda d(x, N(T))\ \forall x \in D(T)\} \\
&\leq \sup\{\lambda : \|Tx\| \geq \lambda d(x, N(QT))\ \forall x \in D(T)\} \\
&= \sup\{\lambda : \|QTx\| \geq \lambda d(x, N(T))\ \forall x \in D(T)\} \\
&= \gamma(QT).
\end{aligned}$$

Par la Proposition (2.2.2), l'égalité est tient quand $T(0)$ est fermé dans $R(T)$. Proposition (2.3.4) preuve que T est ouvert, alors QT l'est aussi. La réciproque est fausse et l'égalité ne doit pas contenir. Ceci est illustré dans l'exemple suivant. □

Exemple 2.3.1. *Soit* X *un espace linéaire normé de dimension-infinie, soit* f *une fonctionnelle linéaire discontinue avec la domaine* $\mathcal{D}(T) = X$ *et soit* $T := f^{-1}$ *est un hyperplan dense et* $N(T) = \{0\}$, *tandis que* $N(QT) = \mathbb{K}$ *et* $\gamma(QT) = \infty$. *Cependant, puisque* T *n'est pas ouvert,* $\gamma(T) = 0$.

Corollaire 2.3.1. *Si* $T \in LR(X, Y)$ *est ouvert et* $N(T)$ *est fermé, alors*

(a) $N(T) = N(QT)$.

(b) $\gamma(T) = \gamma(QT)$.

Démonstration. **(a)** Puisque $T^{-1}(0)$ est fermé, $R(T) \cap \overline{T(0)} = T(0)$. Le résultat suit de la Proposition (2.2.2).

(b) Comme dans (a), Le résultat suit de la Proposition (2.3.4).

□

Proposition 2.3.5. *Soit* M *sous ensemble non-vide de* $R(T)$, *et soit* $\gamma(T) < \infty$. *Alors pour* $N \subset D(T)$ *on a*

$$d(TN, M) \geq \gamma(T) d(N, T^{-1}M).$$

Démonstration. Si $TN \cap M \neq \emptyset$, alors $\emptyset \neq T^{-1}(TN \cap M) = (N + N(T)) \cap (T^{-1}M)$, donc, $d(N, T^{-1}M) = 0$.

Supposons que $TN \cap M = \emptyset$, soit $\epsilon > 0$, et choisir $m \in M$ et $n \in N$ telle que

$$d(TN, M) > d(Tn - m, 0) - \epsilon. \tag{2.7}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
d(Tn - m, 0) &= d(Tn - m - T(0), 0) = d(Tn, m + T(0)) \quad = \quad d(Tn, TT^{-1}m) \\
&= \inf_{h \in T^{-1}m} d(Tn, Th) = \inf_{h \in T^{-1}m} d(T(n-h), 0) = \inf_{h \in T^{-1}m} \|T(n-h)\| \\
&\geq \gamma(T) \inf_{h \in T^{-1}m} d(n - h, T^{-1}(0)) = \gamma(T) \inf_{h \in T^{-1}m} d(n, h + T^{-1}(0)) \\
&= \gamma(T) d(n, T^{-1}m) \geq \gamma(T) d(n, T^{-1}M) \geq \gamma(T) d(N, T^{-1}M).
\end{aligned}$$

Puisque ϵ a été choisi arbitrairement, il découle de (2.7) que

$$d(TN, M) \geq \gamma(T) d(N, T^{-1}M).$$

□

Proposition 2.3.6. *Soient $T \in LR(X, Y)$ et $S \in LR(Y, Z)$. Alors*

$$\gamma(ST) \geq \gamma(S|_{R(T)})\gamma(T) \quad (\infty.0 \textit{ exclure}). \tag{2.8}$$

avec $\gamma(ST) = \infty$ quand $\gamma(T) = \infty$ (pair si $\gamma(S|_{R(T)}) = 0$). En autre

$$S^{-1}(0) \subset R(T) \Rightarrow \gamma(ST) \geq \gamma(S)\gamma(T). \tag{2.9}$$

Remarque 10. *Si $\gamma(S) = \infty$ et $\gamma(T) = 0$, alors l'inégalité* (2.8) *peut manquer de tenir envisager $S := f$ et $T := f^{-1}$ où f est une fonction linéaire discontinue sur un espace de dimension infinie. Alors $\gamma(ST) = \gamma(ff^{-1}) = \gamma(I) = 1$ tandis que $\gamma(S) = \infty$ (puisque $\overline{N(f)} = X$) , et $\gamma(T) = \|f\|^{-1} = 0$.*

Corollaire 2.3.2. *Soient $T \in LR(X, Y)$ et $S \in LR(Y, Z)$. Alors*

$$\|ST\| \leq \|S\| \|I_{d(S)} T\| \quad (\infty.0 \quad \textit{exclue}). \tag{2.10}$$

avec $\|ST\| = 0$ quand $\|S\| = 0$ (pair si $I_{d(T)} = \infty$) . En outre,

$$T(0) \subset \mathcal{D}(S) \Rightarrow \|ST\| \leq \|S\| \|T\|. \tag{2.11}$$

Démonstration. Appliquant la Proposition (2.3.2), l'inégalité (2.10) découle de (2.8) du Proposition (2.3.6).
Si $T(0) \subset \mathcal{D}(S)$, alors pour $x \in \mathcal{D}(ST)$ et $y \in Tx$ ont que $Tx \subset \mathcal{D}(S) + T(0) = \mathcal{D}(S)$ (puisque $x \in T^{-1}(\mathcal{D}(S)))$. Donc $I_{d(S)}Tx = Tx \cap \mathcal{D}(S) = Tx$, et

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T|_{\mathcal{D}(ST)}\|,$$

à partir duquel (2.11) suivante. □

Proposition 2.3.7. *Supposons que $T \in LR(X, Y)$, et $S \in LR(Y, Z)$ est continue avec $\mathcal{D}(S) \supset \overline{T(0)}$. Alors*

$$Q_{ST}ST = Q_{ST}SQ_T^{-1}Q_TT.$$

2.4 Sélections linéaires

Définition 2.4.1. *Un opérateur linéaire univoque A est appelé* ***sélection linéaire*** *(ou* ***partie d'opérateur****) d'une relation linéaire T si*

$$T = A + T - T. \tag{2.12}$$

Si A est une sélection de T alors pour tout $x \in \mathcal{D}(T)$ on a

$$Tx = Ax + T(0). \tag{2.13}$$

Il résulte de (2.13) que $R(T) = R(A) + T(0)$. Cependant, cette somme peut ne pas toujours directe. Le résultat suivant fournit une méthode pour construire des sélections.

Proposition 2.4.1. *Si P est une projection linéaire univoque avec la domaine $R(T)$ et le noyau $T(0)$, alors PT est une sélection de T. Inversement, si A est une sélection de T et $R(A) \cap T(0) = \{0\}$, alors la projection univoque définie sur $R(T)$ avec l'intervalle $R(A)$ et le noyau $T(0)$ satisfait $A = PT$.*

Proposition 2.4.2. *Soit $T \in LR(X, Y)$.*

(a) *Si T a une sélection continue A, alors T est continue et*

$$\|T\| \leq \|A\|.$$

(b) *Si $T(0)$ est complet dans $R(T)$, alors T est continue si et seulement si T a une sélection continue.*

2.5 Relations linéaires fermées et fermables

Définition 2.5.1. *Soit $T \in LR(X,Y)$. On applle* ***fermeture*** *de T la relation définie par son graphe $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.*

Définition 2.5.2. *Soit $T \in LR(X,Y)$. On dite que T est* ***fermé*** *si $G(T)$ est fermé. Autrement dite $T = \overline{T}$.*

Notation 3. *On note l'ensemble des relations linéaires sur X par : $CR(X)$.*

Proposition 2.5.1. *Soit $T \in LR(X,Y)$. On a $\overline{Q_T T} = Q_T \overline{T}$.*

Démonstration. " $\subset$ " Soit $(x,\overline{y}) \in G(\overline{Q_T T}) = \overline{G(Q_T T)}$, donc $\exists\ (x_n, \overline{y_n}) \in G(Q_T T)$: $(x_n, \overline{y_n}) \underset{n\to+\infty}{\to} (x,\overline{y})$. Alors,

$$\exists\ z_n : (x_n, z_n) \in G(T), (z_n, y_n) \in G(Q_T).$$

On a, $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ et $\overline{y_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \overline{y}$, alors

$$Q_T\overline{y_n} \underset{n\to+\infty}{\to} Q_T y.$$

On a aussi, $Q_T z_n = \overline{y_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \overline{y}$. Donc,

$$(x_n, Q_T z_n) \in G(Q_T T) \underset{n\to+\infty}{\to} (x,\overline{y}).$$

D'où,

$$(x,\overline{y}) \in G(Q_T\overline{T}).$$

Alors, $\exists\ z : (x,z) \in G(\overline{T}) = \overline{G(T)}, (z,\overline{y}) \in G(Q_T)$. Donc,

$$Q_T z_n \underset{n\to+\infty}{\to} \overline{y} = Q_T\overline{y}.$$

D'où,

$$Q_T(z_n - \overline{y}) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et par suit, $d(z_n - \overline{y}, T(0)) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Alors, $\exists\ \alpha_n \in T(0) : z_n - \overline{y} - \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc,

$$z_n - \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} y.$$

Par conséquent, $(x_n, z_n - \alpha_n) \in G(T)$. On fait tendre n vers l'infini on obtient, $(x, y) \in \overline{G(T)} = G(\overline{T})$. Donc, on a $(x, y) \in G(\overline{T}), (y, \overline{y}) \in G(Q_T)$, alors

$$(x, \overline{y}) \in G(Q_T\overline{T}).$$

" $\supset$ " Soit $(x, \overline{y}) \in G(Q_T\overline{T})$, alors

$$\exists\ z : (x, z) \in G(\overline{T}) = \overline{G(T)}, (z, \overline{y}) \in G(Q_T).$$

Alors,

$$\exists\ (x_n, z_n) \in G(T) : (x_n, z_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (x, z).$$

Donc, $(x_n, Q_Tz_n) \in G(Q_TT)$ et $(x_n, Q_Tz_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (x, Q_Tz) = (x, \overline{y})$. D'où, $(x, \overline{y}) \in \overline{G(Q_TT)} = G(\overline{Q_TT})$. □

Proposition 2.5.2. *Les propriétés suivantes sont équivalente :*

(i) *T est fermé.*

(ii) *Q_T fermé et $T(0)$ est fermé.*

Démonstration. **"(i)⇒(ii)"** D'une part on a si T est fermé, alors $G(T)$ est fermé et on a $(\{0\} \times Y)$ est fermé. Donc, $\{0\} \times T(0) = G(T) \cap (\{0\} \times Y)$ est fermé. D'où, $T(0)$ est fermé. D'autre part $\overline{Q_TT} = Q_T\overline{T} = Q_TT$ (car T est fermé). Donc, Q_TT est fermé.

"(ii)⇒(i)" Pour montrer que T fermé il suffit de montrer que $G(T)$ fermé. Soit

$$(x_n, y_n) \in G(T) : (x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (x, y),$$

donc on a $y_n \in Tx_n$, d'où

$$Q_Ty_n \in Q_TTx_n.$$

Donc, $(x_n, Q_Ty_n) \in G(Q_TT)$ et on a

$$(x_n, Q_Ty_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (x, Q_Ty).$$

Or $Q_T T$ est fermé, donc $(x, Q_T y) \in G(Q_T T)$. Alors,

$$\exists \;\; z \; : (x, z) \in G(T), \;\; (z, Q_T y) \in G(Q_T).$$

Donc, $Q_T z = Q_T y$ ce qui donne que $-z + y \in N(Q_T) = \overline{T(0)} = T(0)$ (car $T(0)$ fermé). Alors,

$$y \in z + T(0) \in Tx + T(0) = Tx \text{ (car } z \in Tx).$$

Donc, $(x, y) \in G(T)$.

$\square$

Proposition 2.5.3. *Soient T une relation linéaire fermé et $F \subset Y$ de dimension finie. Alors, $Q_F T$ est fermé.*

Définition 2.5.3. *On dit q'une relation linéaire T est fermable si $\overline{T}$ est une extension de T, i.e.,*

$$Tx = \overline{T}x \;\; \forall \; x \in \mathcal{D}(T).$$

2.6 L'adjoint d'une relation linéaire

Définition 2.6.1. *Soient X, Y deux espaces de Banach, $D \subset X \times Y$. On désigne par $X^{'}$: l'espace dual topologique de X, et $D^{\perp}$ l'orthogonal de D définie par,*

$$D^{\perp} = \{(a, b) \in X^{'} \times Y^{'} : ax + by = 0 \;\; \forall \; (x, y) \in D\}.$$

Définition 2.6.2. *Soit $T \in LR(X, Y)$. On appelle **adjoint** ou **conjugué** de T la relation linéaire $T^{'} \in LR(Y^{'}, X^{'})$ définie par :*

$$G(T') := G(-T^{-1})^{\perp} \subset Y' \times X'.$$

Où

$$[(y, x), (y', x')] := [x, x'] + [y, y'] = x'x + y'y.$$

Remarque 11. *Nous notons que les termes adjoint et conjugué sont utilisés de manière interchangeable partout.*
Si $(y', x') \in G(T')$ *alors* $y'y = x'x$ *pour tout* $y \in Tx, x \in \mathcal{D}(T)$*, i.e.,* $x' \in T'y' \Leftrightarrow x'x = y'Tx$ *pour tout* $x \in \mathcal{D}(T)$*, i.e.,*

$$x'|_{D(T)} = y'T.$$

Si T *est densément défini, alors* $y'T$*, qu'est univoque, a une unique extension de* X*, rendant* T' *univoque. Ainsi, nous pouvons faire les affirmations suivantes.*

Proposition 2.6.1. $T' \in LR(Y', X')$ *est une relation fermé avec*

$$\mathcal{D}(T') = \{y' \in Y' | y'T \textit{est continue et univoque}\}$$

et $T'y'x = y'Tx \in \mathbb{K}$ *pour* $x \in \mathcal{D}(T)$ *et* $y' \in \mathcal{D}(T')$*.*

Proposition 2.6.2. *Soit* $T \in LR(X, Y)$*. Alors*

- **(a)** $(\overline{T})' = T'$.
- **(b)** $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.
- **(c)** $(\lambda T)' = \lambda T'$.

Démonstration. Il suffit de vérifier (c), soit $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} G((\lambda T)') &= \{(y', x') | y'y = x'x \text{ pour } (x, y) \in G(\lambda T)\} \\ &= \{(y', \lambda x') | y'(\lambda y) = (\lambda x')x \text{ pour } (x, y) \in G(T)\} \\ &= G(\lambda T'). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.6.3. *Soit* $T \in LR(X, Y)$*. Alors*

- **(a)** $N(T') = R(T)^{\perp}$.
- **(b)** $T'(0) = \mathcal{D}(T)^{\perp}$.
- **(c)** $N(\overline{T}) = R(T')^{\top}$.
- **(d)** $\overline{T}(0) = \mathcal{D}(T')^{\top}$.

Proposition 2.6.4. *Soient* $S, T \in LR(X, Y)$*. Alors*

(a) $G(S'+T') \subset G((S+T)')$.

(b) $(S+T)'$ *est Une extension de* $S'+T'$ *si et seulement si* $(\mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T))^{\perp} = \mathcal{D}(S)^{\perp} + \mathcal{D}(T)^{\perp}$.

(c) *Si* $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ *et* S *est continue, alors* $s'+T' = (S+T)'$.

Proposition 2.6.5. *Soient* $T \in LR(X,Y)$ *et* $S \in LR(Y,Z)$. *Alors*

(a) $G(T'S') \subset G((ST)')$.

(b) *Si*

$$\begin{array}{rl} & (1) \quad R(T') = X' \quad et \quad \mathcal{D}(S) \subset R(T) \\ ou & (2) \quad \mathcal{D}(S') = Z' \quad et \quad R(T) \subset \mathcal{D}(S) \end{array}$$

alors $(ST)' = T'S'$.

Notation 4. *Soit* E *un sous-espace d'un espace linéaire normé* X. *Soit on note* J_E^X *l'application d'**injection naturelle** de* E *dans* X, *i.e., pour* $x \in E$, $J_E^X x = x \in X$.

Proposition 2.6.6. *Soit* E *un sous-espace de* X. *Alors*

(a) $(J_E^X)' = Q_{E^{\perp}}^{X'}$.

(b) *Si* E *est fermé, alors* $(Q_E^X)' = J_{E^{\perp}}^{X'}$.

Démonstration. **(a)** En appliquant la Proposition (1.6.3), $Q_{E^{\perp}}^{X'} : X' \to E'$ avec

$$(Q_{E^{\perp}}^{X'} x')(e) = x'e \tag{2.14}$$

pour $x' \in X'$ et $e \in E$.

De même $(J_E^X)' : X' \to E'$ et

$$((J_E^X)'x')(e) = x'(J_E^X)e = x'e \tag{2.15}$$

Pour $x' \in X'$ et $e \in E$. L'égalité s'ensuite en combinant (2.14) et (2.15).

(b) En appliquant la Proposition (1.6.3), $(Q_E^X)' : E^{\perp} \to X'$ avec

$$((Q_E^X)'e')(x) = e'(Q_E^X)x = e'x \tag{2.16}$$

pour $x \in X$ et $e' \in E^{\perp}$.

De même $J_{E^{\perp}}^{X'} : E^{\perp} \to X'$ avec

$$(J_{E^{\perp}}^{X'} e')(x) = e'x \tag{2.17}$$

pour $x \in X$ e $e' \in E^{\perp}$. L'égalité s'ensuite en combinant (2.16) et (2.17).

□

Proposition 2.6.7. *Soit $T \in LR(X,Y)$. Alors*

(a) $(Q_T T)' = T' J_{T(0)^{\perp}}^{Y'}$.

(b) $(T J_{D(T)})' = Q_{T'} T'$.

(c) $(Q_T T J_{D(T)})' = Q_{T'} T' J_{T(0)^{\perp}}$.

Démonstration. Ces égalités découlent des applications directes de Propositions (2.6.5) et (2.6.6). □

Corollaire 2.6.1. *Soit $T \in LR(X,Y)$, alors $\mathcal{D}(T') = \mathcal{D}((QT)')$. De plus, $T'y' = (QT)'y'$ pour $y \in \mathcal{D}(T')$.*

Proposition 2.6.8. *Soit $T \in LR(X,Y)$. Alors*

$$\|T'\| \leq \|T\|.$$

Proposition 2.6.9. *Soit $T \in LR(X,Y)$. Alors*

$$\gamma(T') \geq \gamma(T).$$

Démonstration. Cela découle de la Proposition (2.6.8) combinée à la Proposition (2.3.2). □

Proposition 2.6.10. *Soit $T \in LR(X,Y)$. Alors*

(a) *Si T est continue, alors $\mathcal{D}(T') = T(0)^{\perp}$.*

(b) *Si T est ouverte, alors $R(T') = N(T)^{\perp}$.*

(c) *Si T est continue, alors $\|T'\| = \|T\|$.*

(d) *Si T est ouverte, alors $\gamma(T') = \gamma(T) > 0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que (a) et (c) sont valables.

(a) Supposons que T est continue. Alors d'après la Proposition (2.6.8), $(QTJ)'$ est continue, et par Proposition (2.6.1), son domaine est l'espace entier *i.e.*, $T(0)^{\perp}$. Ainsi, d'après la Proposition (2.6.7), l'égalité souhaitée est vraie.

(c)

$$\begin{aligned}
\|T'\| &= \sup_{y' \in B_{\mathcal{D}(T')}} \|(QTJ)'y'\| \\
&= \sup_{y' \in B_{\mathcal{D}(T')}} \sup_{x \in B_{\mathcal{D}(T)}} \|y'(QTJ)x\| \\
&= \sup_{y' \in B_{T(0)^{\perp}}} \sup_{x \in B_{\mathcal{D}(T)}} \|y'(QTJ)x\| \\
&= \sup_{x \in B_{\mathcal{D}(T)}} \|(QTJ)x\| \\
&= \|QTJ\| = \|T\|.
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 3

Quelques théorèmes fondamentaux

3.1 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 3.1.1. ***(Banach-Steinhaus pour les opérateurs linéaires)***.
Soient X un espace de Banach et Y un espace normé. Supposons que $\{T_n\}$ est une suite d'opérateur linéaire borné dans $\mathcal{L}(X,Y)$, qu'est borné pour chaque point de X, i.e.,

$$\forall x \in X,\ \exists C_x > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \|T_n(x)\| \leq C_x. \tag{3.1}$$

Alors la suite $\{T_n\}$ est borné, i.e., il existe un constante C indépendante de x telle que

$$\|T_n\| \leq C,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème 3.1.2. ***(Banach-Steinhaus pour les relations)***.
Soit $\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ une famille d'espaces normés, X un espace de Banach, et $\{T_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ une famille de relations linéaires bornés telle que $T_\alpha \in LR(X, Y_\alpha)$ Pour chaque $\alpha \in \Lambda$. Supposons que

$$\sup\{\|T_\alpha x\| : \alpha \in \Lambda\} < \infty \quad \textit{pour chaque} \quad x \in X.$$

Alors

$$\sup\{\|T_\alpha\| : \alpha \in \Lambda\} < \infty.$$

Démonstration. Considérons la suite d'ensembles fermés

$$A_n = \{x \in X : \|T_\alpha x\| \leq n \quad \text{pour} \quad \alpha \in \Lambda\}.$$

Puisque $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, d'après le Théorème de Baire, A_n contient un ensemble ouvert non vide pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit B une boule, de centre z et de rayon r, contenue dans A_n. Pour $x \in rB_X$ nous avons $x + Z \in B$ et

$$\|T_\alpha x\| = \|T_\alpha(x + z - z)\| \leq \|T_\alpha(x + z)\| + \|T_\alpha z\| \leq 2n.$$

D'où $\|T_\alpha\| \leq 2n/r$ pour tout $\alpha \in \Lambda$. □

Corollaire 3.1.1. *Soit (T_n) une suite de relations linéaires bornées dans $LR(X, Y)$, et soit X complet. Si T est une relation définie partout dans $LR(X, Y)$ telle que $\overline{T(0)} \supset T_n(0)(n \in \mathbb{N})$ et $\lim_n \|T_n x - Tx\| = 0$ pour tout $x \in X$, alors T est borné.*

Corollaire 3.1.2. *Soit X un espace normé et soit W un sous-ensemble de X telle que*

$$\sup_{w \in W} |x'w| < \infty \qquad (x' \in X').$$

Alors W est borné.

Démonstration. Considérons W comme un sous-ensemble de X'' et appliquez le Théorème (3.1.2). □

Proposition 3.1.1. *Si $X = M + N$ où $M \cap N = \{0\}$ et M est fermé de codimension finie, alors la projection définie sur X avec intervalle M et le noyau N est borné.*

Démonstration. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une base pour N et soit $N_i := sp\{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$. Puisque chaque $M + N_i$ est fermé, il existe par le Théorème de Hahn Banach un $f_i \in X'$ telle que $f_i(x_i) = 1$ et $f_i(x) = 0$ pour $x \in M + N_i$. Définissez $Qx = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i \quad (x \in X)$. Alors Q est une projection borné avec un intervalle N et un espace nul M, et $P = I - Q$ est la projection requise. □

Corollaire 3.1.3. *Si M est un sous-espace codimension fini de $\mathcal{D}(T)$, fermé dans $\mathcal{D}(T)$, et si $T|_M$ est continue, alors T est continue.*

Démonstration. Soit P comme dans la proposition (3.1.1). On a

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq \|TPx\| + \|T(I - P)x\| \\ &\leq (\|T|_M\|\|P\| + \|T|_N\|\|I - P\|)\|x\| \end{aligned}$$

Où $\|T|_N\| < \infty$. □

Proposition 3.1.2. *Soit T ouverte et injective et soit $S \in LR(X,Y)$. Un opérateur linéaire satisfaisant $\|S\| < \gamma(T)$. Alors $T+S$ est ouvert et injectif.*

Démonstration. On a pour $x \in \mathcal{D}(T+S)$,

$$\begin{aligned} \|(T+S)x\| &\geq \|Tx\| - \|Sx\| \quad (\text{puisque} \quad S(0) = \{0\}) \\ &\geq \gamma(T)\|x\| - \|S\|\|x\| = (\gamma(T) - \|S\|)\|x\|. \end{aligned}$$

□

3.2 Théorème des graphes fermés

Théorème 3.2.1. ***(Théorème des graphes fermés).***
Soit $T \in LR(X,Y)$, on suppose que T est fermé, alors

(i) *T est continue $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{D}(T)$ fermé.*

(ii) *T est ouverte $\Longleftrightarrow$ $R(T)$ fermé.*

Conclusion

Le sujet de "les relations linéaires sur des espaces normés" a une importance capitale.

Afin d'enrichir les connaissances mathématiques, nous avons essayé dans ce mémoire de connaitre certains des preuves, des théorèmes et des caractéristiques des espaces normés, plus précisément l'algèbre des relations linéaires, en tenant compte de la précision et la simplicité en conformité avec les connaissances de nos collègues étudiants.

Enfin, nous espérons que nous avons réussi, bien que dans la simple mesure de l'accomplissement de cet humble travail, et nous sommes prêts à fermer ce sujet, que peu importe combien d'efforts dans la préparation de ce travail, certaines idées sont encore bloquées et l'autre sombre.

Nous tenons à dire que nous sommes très favorables à toute critique constructive concernant ce travail car il reste qu'une goutte dans une vaste mer, et nous souhaitons aller plus loin dans l'avenir. Nous demandons à tous ceux qui lisent ce mémoire de prier pour nous et pour notre superviseur afin qu'Allah nous ouvert la porte de la réussite.

Bibliographie

[1] J.P. Aubin, and A. Cellina, *Differential Inclusions,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 264, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] J.P. Aubin and H. Frankowska, *Setvalued Analysis,* Birkhauser, Boston, 1990.

[3] S.Banach, *Théorie des opérationes linéaires,* Warsaw, 1932.

[4] S. Banach and S. Mazur, *Zur theorie der lineare Dimension,* Studia Math., 4, 100-112(1933).

[5] B. Beauzamy, *Introduction to Banach spaces and their geometry,* North-Holland, Amsterdam, 1982.

[6] C. Bessaga and A *Pelczyński, Spaces of Continuous functions (IV),* Studia Math., 19, 53-62 (1960).

[7] R.W. Cross, *Multivalued Linear Operators,* Marcel-Dekker, New York, 1998.

[8] S. Goldberg, *Unbounded Linear Operators,* McGraw-Hill, New York, 1966.

[9] W.T. Gowers and B. Maurey, *The Unconditional Basic Sequence problem,* Trans. Amer. Math. Soc. 6, 851-874 (1993).

[10] M.J. Kascic, *Polynomials in linear relations I, II,* Pacific J. Math. 24, 291-295 (1968) ; 29, 593-607 (1969).

[11] J. Lindenstrauss, *On a theorem of Murray and Mackey,* Anais de Acad. Brasileira Cien. 39, 1-5 (1967).

[12] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces, vol. I and vol. II,* Springer-Verlag, Berlin, 1977 and 1979.

[13] Lindenstrauss and L. Tzafriri, *On the complemented subspace problem,* Israel J. Math., 9, 263-269(1971).

[14] G. Mackey, *Note on the theorem of Murray,* Bull. Amer. Soc. 52, 322-325, 1946.

[15] E. Michael, *Continuous Selections I, II, III,* Annals of Math., 63 361-381 ; 64 562-580 ; 65 375-390.

[16] A.A. Milutin, *Isomorphism of spaces of continuous functions on compacta of cardinality continuum,* Teoria Funktsii, Funkts. Anal. i. Priloz, 2, 150-156 (1966) [Russian].

[17] H. Minkowski, *Geomtrie der Zahlen,* Leipzig, Teubner, 1896.

[18] F.J. Murray, *Quasicomplements and closed projections in reflexive Banach spaces,* Trans. Amer. Math.Sco. 58 77-95 (1945).

[19] J. V. Neumann, Functional operators, vol.2, the Geometry of Orthogonal Spaces, Ann. of Math. Stud., Princeton University Press, Princeton, (1950).

[20] B.S. Tsirelson, *Not every Banach space contains l_p or c_0,* Funct. Anal. Appl., 8, 138-141 (1974).

[21] A. Wilansky, *Functional Analysis,* Blaisdell, New York, 1964.

[22] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts,* Cambridge studies in advanced mathematics, 1991.

[23] Dian Wilox, Multivalued semi-Fredholm operators in normed linear spaces, PHD thesis, July 2002.

Abstract:

In this memory we will present and study the set of linear relations between normed linear spaces, in particular we cite a treatise on it by R.W. Cross. Also, we have just studied the continuity, the norm and some fundamental theorems concerning this class.

Keywords: Normed linear spaces, linear relations, linear selections, graph of a relation.

Résumé:

Dans ce mémoire on va présenter et étudier l’ensemble des relations linéaires entre des espaces normes notamment on cite sur elle un traité par R.W. Cross. Aussi, on vient d'étudier la continuité, la norme et quelques théorèmes fondamentaux concernant cette classe.

Mots clés: Espaces normés, relations linéaires, sélections linéaires, graphe d’une relation.

ملخص:

في هذه المذكرة سوف نقدم وندرس مجموعة العلاقات الخطية بين الفضاءات النظيمية ، ولا سيما أننا نستشهد بأطروحة كتبها R.W. Cross. أيضًا، سوف ندرس الاستمرارية و النظيم وبعض النظريات الأساسية المتعلقة بهذه المجموعة.

الكلمات المفتاحية:

الفضاءات النظيمية ، العلاقات الخطية ، التحديدات الخطية ، بيان علاقة.