UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF- M'SILA
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de MASTER 2

Spécialité:

Mathématiques

Option:

Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Par:

HADJAB Hemza

Sujet

Convolution des distributions et applications à la résolutions des équations différentielles

Soutenu publiquement le :29/05/2017,
devant le jury :

SAADI Abderachid	MC/A	Président	Univ de M'sila
LAKHEL Aissa	MA/A	Encadreur	Univ de M'sila
KEHALI Salima	MA/B	Examinateur	Univ de M'sila

Promotion 2016/2017.

Remerciements

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à :

Dieu tout puissant, pour la volonté, et la santé et la patience qu'il nous donnait durant toutes ces années d'études afin que nous puissions en arriver là.

Comme nous tenons à remercier notre

Encadreur :**M**r.**A**.**LAKHEL**

Merci à tous les enseignants et les étudiants

De département **mathématique**

Pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'ils ont

Met à notre disposition pour réaliser ce travail.

Enfin à toute personne qui a collaborée à la réalisation

Du présent mémoire.

Mérci .

Table des matières

Résumé

Dans ce travail, nous avons eu affaire avec des équations différentielles classiques qui peuvent être résolus dans l'espace de distributions prêtes à effectuer des transactions. L'objectif de ce travail est de mettre en évidence comment utiliser la convolution résoudre ces équations.

Mots clés: Fonctions test, Distributions, supports des distributions, produit de convolutions.

Introduction

La théorie des distributions fut formalisée par le mathématicien français Laurent Schwartz entre 1944 et 1950 et lui valut la médaille Fields en 1950. Comme la plupart de grandes découvertes scientifiques.

En analyse mathématique, une distribution (également appelée fonction généralisée) est un objet qui généralise la notion de fonction. La théorie des distributions étend la notion de dérivée à toutes les fonctions localement intégrables et au-delà, et est utilisée pour formuler des solutions à certaines équations aux dérivées partielles. Elles sont importantes en physique et en ingénierie où beaucoup de problèmes discontinus conduisent naturellement à des équations différentielles dont les solutions sont des distributions plutôt que des fonctions ordinaires.

L'objective de cette étude est résolution des équations différentielles linéaires à coeffcients constants, sous le titre " Convolution des distributions et applications à résolutions des équations différentielles ".Ce travail est construisait de trois chapitres.

Nous offrons le premier chapitre dans le concept des distributions, et nous apporter beaucoup de détails sur les propriétés les plus importantes. Nous allons discuter des opérations effectuées sur les distributions axées sur le processus de dérivation, qui joue un rôle très important dans la résolution des équations différentielles.

Au deuxième chapitre on va étudier la notion de convolutions d'une fonctions et distribution, deux distributions. Et on va rappeler quelques propsitions.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude la résolution des problémes $P(D) = f$.

Partout dans ce mémoire, Ω désigne un ouvert dans $\mathbb{R}^n$

Chapitre 1

La théorie des distributions

1.1 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions test

Définition 1.1.1 (Support d'une fonction) *Soit φ une fonction à valeurs complexes sur $\mathbb{R}^n$. On appélle* ***support*** *de φ (notation supp(φ))* ***l'adhérence*** *de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\varphi(x) \neq 0$:*

$$supp\ \varphi = adh\left\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\right\}$$

Exemple 1.1.1 *Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. On pose*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-r^2}} & si\ r < 1 \\ 0 & si\ r \geq 1 \end{cases}$$

On a supp $(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ la boule de centre 0 et de rayon 1.

Définition 1.1.2 (l'espace $\mathcal{D}$) *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}(ou\mathbb{R})$ infiniment dérivables dans Ω et à support compact et inclus dans Ω.*

$$\mathcal{D} = \left\{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}(ou\mathbb{R}) :\ \varphi \in C^{\infty},\ supp(\varphi)\ compact \subset \Omega\right\}.$$

Exemple 1.1.2 *La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ \ x > 0 \\ 0 & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe C^{∞}. Si $x < 0$, toutes les dérivées de φ sont nulles. Si $x = 0$, les dérivées à gauche de φ sont nulles. Si $x > 0$, on a

$$\varphi^{'}(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\ ,\ \varphi^{''}(x) = \frac{4-6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}\ ,\ ...,\ \varphi^{(k)}(x) = \frac{P(x)}{x^{3k}}e^{-\frac{1}{x^2}}\ .$$

où $P(x)$ est un polynôme. Dès lors,

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi^{(k)}(x) = P(0)\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k}} = P(0)\lim_{u\to 0}\frac{u^{\frac{x^{3k}}{2}}}{e^u} = 0.$$

il suffit d'appliquer plusieure fois la régle de l'Hospital. Enfin, si $x = 0$, les dérivées à droite de φ sont nulles : $\varphi^{(k)}(x) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.En effet, procédons par récurrence sur k. Pour $k = 0$, c'est évident. Supposons que $\varphi^{(k)}(0) = 0$ et montrons que : $\varphi^{(k+1)}(0) = 0$. On a

$$\varphi^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}P(x)\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k+1}} = P(0)\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k+1}} = 0.$$

Ainsi $\varphi(x)$ est infiniment dérivable.

1.2 La notion de distributions

Définition 1.2.1 *On appelle distrbution T sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ toute forme* ***linéaire*** *et* ***continue*** *de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}(ou\mathbb{R})$, i.e elle satisfait les deux conditions suivantes :*

1. *T* ***linéaire*** *: pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a*

$$\langle T, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle + \beta \langle T, \psi \rangle .$$

2. *T* ***continue*** *: pour toute compact $K \subset \Omega$ et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec supp$(\varphi) \subset K$,il existe une constante $C > 0$ et un entire m tels que:*

$$|\langle T \ , \ \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| .$$

Notation 1.2.1 *On notera dans la suite par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble de toutes les distributions sur Ω. On dit aussi que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le* ***dual*** *de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Définition 1.2.2 (ordre d'une distribution) *Si l'entier m de difinition peut être choisi indépendamment du compact K, on dit que la distribution T est d'ordre fini. Le plus petit m possible est appelé ordre de la distribution.*

Exemple 1.2.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose*

$$\begin{array}{rcl} \delta_a & : & \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \left\langle \delta_{(a)} \ ,\varphi \right\rangle = \varphi(a) \end{array}$$

Alors δ_a est une distribution sur $\mathbb{R}^n$ (appelée distribution de Dirac) d'ordre 0.

1.3 Exemples de distributions

1.3.1 Fonctions localement intégrable

Définition 1.3.1 *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\,(ou\ \mathbb{R})$ est dit localement intégrable si pour tout ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$ on a :*

$$\int_K |f(x)|\, dx < +\infty.$$

Proposition 1.3.1 *Toute fonction $f(x)$ localement intégrable définit une distribution T_f par*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D} : \langle T_f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

*La distribution T_f s'appelle **réguliéres** associée a f.*

Remarque 1.3.1 *Toutes les distributions qui ne s'écrivent pas de cette maniére dites **singuliéres.***

Proposition 1.3.2 *Deux fonctions localement intégrables f et g définissent la même distribution si et seulement si elles sont presque partout égales.*

$$T_f = T_g \Leftrightarrow f = g \quad p.p.$$

1.3.2 Distribution de Dirac

Définition 1.3.2 *La distribution de Dirac à l'origine est une fonctionnelle notée δ, définie par*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0).$$

*et la **distribution de Dirac** $\delta_{(a)}$ au point $a \in \mathbb{R}^n$ par*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \left\langle \delta_{(a)}, \varphi\right\rangle = \varphi(a).$$

1.3.3 Distribution valeur principale de $1/x$

Définition 1.3.3 *La fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit la distribution valeur principale de Couchy* $\mathbf{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ *par*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \left\langle \mathbf{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

1.4 Dérivation des distributions

1.4.1 Dérivée d'une distribution

Soit f une fonction de classe C^1. En faisant une intégration par parties, on obtient immédiatement

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \left\langle f' \ , \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = - \langle f, \varphi' \rangle \, .$$

car $\varphi(\pm\infty) = 0$. On est donc conduit à la définition générale suivante :

Définition 1.4.1 *On appelle dérivée T' d'une distribution T, la fonnctionnelle définie par la relation*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \, .$$

Proposition 1.4.1 *Toute distribution admet des dérivées et pour tout entire n, la dérivée $n^{iéme}$ de T est définie par*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \left\langle T^{(n)}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \varphi^{(n)} \right\rangle .$$

a) Dérivée de la fonction d'Heaviside

Rappelons que la fonction d'Heaviside (dite échelon unité) est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & si \ x < 0 \\ 1 & si \ x > 0 \end{cases}$$

et détermine une distribution notée H. Au sens des fonction, la dérivée de $H(x)$ n'exist pas au point $x = 0$. Mais au sens des distributions, on a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= - \langle H, \varphi' \rangle \\ &= - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle \, . \end{aligned}$$

car $\varphi(+\infty) = 0$. Par conséquent, $H' = \delta$, c'est-à-dire la distribution H a pour dérivée la distribution de Dirac.

b) Dérivée de la distribution de Dirac

On a

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$$

En général, on a

$$\left\langle \delta^{(m)}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(0). \quad m \in \mathbb{N}$$

1.4.2 Extension au cas de plusieurs variables

Dans le cas de plusieurs variables, on définit la dérivée $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ d'une distribution T, par

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \ i = 1, 2, ..., m.$$

On a

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle,$$

où $\varphi(x_1, x_2, ..., x_m) \in C^\infty$, donc $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}$, et par conséquuent

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Plus généralement, on a

$$\left\langle D^k T, \varphi \right\rangle = (-1)^{|k|} \left\langle T, D^k \varphi \right\rangle.$$

où $k = (k_1, k_2, ..., k_m) \in \mathbb{N}^m$ avec $|k| = k_1 + k_2 + ... + k_m$ et D^k désigne l'opérateur

$$D^k = \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} . \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^{k_2}} ... \frac{\partial^{k_m}}{\partial x_m^{k_m}} = \frac{\partial^{k_1 + k_2 + ... + k_m}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_m^{k_m}}.$$

1.5 Convergence dans $\mathbf{D}'(\Omega)$

On définira une convergence des suite dans $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$

Définition 1.5.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$une suit de distributions sur Ω et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T quand $n \to +\infty$ en sens des distributions si et selement si*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle T_n, \varphi\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi\rangle$$

Cette notion de convergence est donc une **convergence simple.** On écrira dans cette situation

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = T \quad \text{ ou } \quad T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exemple 1.5.1 *Montrons que : $\delta_n \longrightarrow 0$. En effet, on a*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle \delta_n, \varphi\rangle = \varphi(n).$$

et puisque φ est à support compact, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \delta_n, \varphi\rangle = \varphi(n) = 0.$$

Théorème 1.5.1 *Si $(T_n)_{n>0}$ est une suite de distribution sur Ω telle que :*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle \, \textit{existe}.$$

alors la forme linéaire T sur Ω définie par

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \langle T, \varphi\rangle \quad = \lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle\,.$$

est une distribution sur Ω et $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ quand $n \to +\infty$.

1.6 Produit entre une fonction C^∞ et une distribution

On définira le produit entre une fonction C^∞ et une distribution de telle manére que si la distribution est une fonction localement intégrable, le résultat soit le produit habituel des fonction.

Définition 1.6.1 *Le produit d'une distribution quelconque T par une fonction g de classe C^∞ est une distribution définit par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle .$$

Exemple 1.6.1 *Si δ est la distribution de Dirac à l'origine et $g \in C^1$, alors*

$$g\delta = g(0)\delta.$$

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \langle g\delta, \varphi \rangle &= \langle \delta, g\varphi \rangle \\ &= g(0)\varphi(0) \\ &= g(0) \langle \delta, \varphi \rangle \\ &= g(0)\delta. \end{aligned}$$

Remarque 1.6.1 *Si dans l'exemple précédent, on choisit $g(x) = x$, alors on aura en particulier $g(0) = 0$ et donc $x\delta = 0$. On en déduit que le produit $gT = 0$ peut être nul sans que g ou T soit nulle.*

Exemple 1.6.2 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \left\langle x \cdot vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle &= \left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi \right\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{x\varphi(x) + x\varphi(-x)}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (\varphi(x) + \varphi(-x)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \varphi(x) dx \\ &= \langle 1, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

où 1 désigne la distribution réguliére associée à la fonction constante $x \longrightarrow 1$.

1.7 Supports des distributions

Définition 1.7.1 *Nous donnons définitions de la supports comme suit :*

1. *On dit qu'un distribution T est nulle sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ si $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dont le support est contenu dans U.*
2. *On appelle support d'une distribution T le plus petit fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que T soit nul dans son complémentaire.*

Notation 1.7.1 *On noté par $\xi(\Omega)$ à l'espace $C^\infty(\Omega)$, et par $\xi^{'}(\Omega)$ à l'espace de distribution a support compact.*

Proposition 1.7.1 *Soit f fonction localement intégrable. Soit T_f sa distributon associée. Le support de T_f coincile avec celui de f .*

$$supp(T_f) = supp(f).$$

Exemple 1.7.1 *On considére la fonction de Heaviside H. ainsi que sa distribution T_H associée. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a*

$$\langle T_H, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

On a donc $Supp(T_H) = \mathbb{R}_+$.

Exemple 1.7.2 *Montrons que $Supp(\delta_a) = \{a\}$.*

Soit $\omega = \mathbb{R}/\{a\}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $Supp(\varphi) \subset \mathbb{R}/\{a\}$. On a donc $\varphi(a) = 0$, donc $\langle \delta_a, \varphi\rangle = 0$. Donc δ_a est nulle sur $\mathbb{R}/\{a\}$.

De plus, δ_a n'est pas nulle sur $\mathbb{R}$ car il existe des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $\langle \delta_a, \varphi\rangle \neq 0$.

Donc $\mathbb{R}/\{a\}$ est le plus grond ouvert sur lequel δ_a est nulle. Donc $Supp(\delta_a) = \{a\}$, et δ_a a support compact.

Chapitre 2

Produit de convolutions

2.1 Convolution des fonctions

Définition 2.1.1 *Soient φ et ψ deux fonctions C^∞ à supports compacts. On pose :*

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(y)\psi(x-y)dy = \int \varphi(x-y)\psi(y)dy. \tag{2.1}$$

La fonction $(\varphi * \psi)$ ainsi définie est C^∞ à support compact vérifiant :

$$supp(\varphi * \psi) \subset \ supp(\varphi) + \ supp(\psi). \tag{2.2}$$

*On l'appelle la **convolée** des deux fonctions φ et ψ.*

On peut bien sur définir la convolée de fonctions moins réguliéres.

L'extension la plus naturelle concerne les fonctions intégrables : si φ et ψ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\varphi * \psi$ définie par (2.1) appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\int |\varphi * \psi(x)|\, dx \leq \int |\varphi(x)|\, dx \cdot \int |\psi(x)|\, dx.$$

Néanmoins, ce n'est pas cette extension que nous utiliserons le plus fréquemment, mais plutot celle décrite dans les définitions (2.3.1) et (2.4.1) ci dessous, qui concernent les cas où $T \in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, puis où $T \in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $S \in \xi^{'}(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Convolution des distributions

Définition 2.2.1 *Soient $T \in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, la formule*

$$T * \varphi(x) = \langle T, \varphi_x \rangle\,, \ avec\ \varphi_x(y) = \varphi(x-y).$$

définit sur $\mathbb{R}^n$ une fonction $T * \varphi$ de calsse C^∞. Cette fonction vérifie en outre :

$$\partial^\alpha(T * \varphi) = \partial^\alpha T * \varphi = T * \partial^\alpha \varphi \tag{2.3}$$

$$supp(T * \varphi) = supp(T) + supp(\varphi). \tag{2.4}$$

Remarque 2.2.1 *La convolution est à l'origine du très utile procédé de régularisation, que nous décrivons maintenant,*

Définition 2.2.2 *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, positive ou nulle d'intégrale égale à 1, et soit $\epsilon > 0$; on pose $\varphi_\epsilon(x) = e^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Alors, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la formule de fonctions C^∞ $T_\epsilon = T * \varphi_\epsilon$ converge vers T lorsque ϵ tend vers 0, au sens où :*

$$\forall \psi \in C_0^\infty, \quad \int T_\epsilon(x)\psi(x)dx \longrightarrow \langle T, \psi \rangle . \tag{2.5}$$

L'intérêt de ce pocédé d'approximation par des fonctions réguliéres est que le mode de convergence de T_ϵ vers T est essentiellement décrit par la régularité de T. Ainsi, si $T \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, T_ϵ converge vers T au sens des semi-normes $\sup\limits_{x\in K}\sup\limits_{|\alpha|\leq k}|\partial^\alpha\varphi(x)|$; où K parcourt les compacts de $\mathbb{R}^n$, si $T \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < +\infty)$, espace des fonctions de puissance p-iéme intégrable, T_ϵ tend vers T dans L^p.

De plus, la relation (2.4) montre que le support de T_ϵ est arbitrairement proche de celui de T lorsque ϵ tend vers 0. A l'aide d'une ‹‹ troncature ››, on étend ainsi le procédé de régularisation aux distributions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, montrant par exemple que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ si $p \in [a, +\infty[$ et dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour la ‹‹ topologie faible ››, i.e. au sens de (2.5).

Définition 2.2.3 *Pour définir la convolution de deux distributions, on constate d'abord que, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,*

$$\int T * \varphi(x)\psi(x)dx = \left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} * \psi \right\rangle .$$

où l'on a posé $\overset{\vee}{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Aprés avoir étendu l'opérateur $S \longmapsto \overset{\vee}{S}$ aux distributions par :

$$\left\langle \overset{\vee}{S}, \varphi \right\rangle = \left\langle S, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle .$$

on pose, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), S \in \xi'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \left\langle T, \overset{\vee}{S} * \varphi \right\rangle .$$

On définit ainsi une distribution $T * S$ sur $\mathbb{R}^n$, qui vérifie encore (2.3) et (2.4), auxquelles on peut ajouter :

$$\text{supp sign}(T * S) \subset \text{supp sign}(T) + \text{supp sign}(S) \tag{2.6}$$

Par exemple, si $\delta = \delta_0$ désigne la masse de Dirac à l'origine, on a, pour toute distribution T sur $\mathbb{R}^n$, $T * \delta = T$. La convolution des distributions est fondamentale dans l'étude des opérateurs à coefficients constants.

2.3 Propositions

Proposition 2.3.1 (Commutativité) *Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $T * S$ existe, alors*

$$T * S = S * T.$$

Proposition 2.3.2 (Distribution par rapport à l'addition) *Soit $T, S_1, S_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $T * S_1$ et $T * S_2$ existent, alors*

$$T * (S_1 + S_2) = T * S_1 + T * S_2.$$

Proposition 2.3.3 (Associativité) *Soit $T, S, R \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On a*

$$(T * S) * R = T * (S * R).$$

si deux au moins de ces distributions sont à supports compacts ou si toutes ces distributions ont leurs supports compacts d'un même côté.

Proposition 2.3.4 (Dérivation d'une convolution) *Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $T * S$ existe, alors*

$$(T * S)^{'} = T^{'} * S = T * S^{'}.$$

et plus généralement

$$D^{\alpha}(T * S) = D^{\alpha}T * S = T * D^{\alpha}S.$$

où D^{α} désigne une dérivation d'ordre α.

Proposition 2.3.5 (Régularisation des distributions) *Soient T une distribution et φ une fonction de classe C^{∞}. Si $T * \varphi$ existe, alors c'est une fonction de classe C^{∞}, donnée par*

$$T * \varphi(y) = \langle T_x, \varphi(y - x) \rangle = \psi(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

Remarque 2.3.1 *Dans la proposition précédente, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors le produit de convolution $T * \varphi$ existe car supp(φ) est compact. De même, si $\varphi \in \xi(\Omega) = C^{\infty}(\Omega)$ et $T \in \xi^{'}(\Omega)$ alors supp(T) est compact et $T * \varphi$ existe.*

Chapitre 3

Applications à la résolution des équations différentielles linéaires a coeffcients constants

3.1 Généralités

Soit P un **pôlynome** de degré au plus $m \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}^n$

$$P(y) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha y^\alpha \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $y^\alpha = \ y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} ... y_n^{\alpha_n}$.

Au polynome P on associe un opérateur différentiel linéaire d'ordre au plus m et à coefficients constants, noté $P(D)$, définit par

$$P(D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u. \tag{3.1}$$

Remarque 3.1.1 *On peut voir $P(D)$ comme une application de $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n)$.*

Exemple 3.1.1 *En dimension 1 ($n = 1$) un opérateur differentiel linéaire à coefficients constants est de la forme*

$$P(D)u = a_0 u + a_1 u^{'} + a_2 u^{''} + ... a_m u^{(m)}.$$

Exemple 3.1.2 *L'opérateur de **Laplace** (ou le **laplacien**) donné par*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

est un cas particulier (trés étudié !) d'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, d'ordre 2. Cet opérateur est associé au polynome

$$P(y) = y_1^2 + y_2^2 + ... y_n^2 = |y|^2$$

($|y|$ désigne la norme **euclidienne** du vecteur y).

Dans la suite on va considérer le probléme suivant : soit $P(D)$ comme dans (3.1), on se donne $f \in \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n)$ et on cherche $u \in \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$P(D)u = f \qquad \text{au sens desdistributions } \ \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n) \tag{3.2}$$

Définition 3.1.1 *On dit que la distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est une* ***solution fondamentale*** *de l'opérateur $P(D)$ si E satisfait l'égalité*

$$P(D)E = \delta \qquad \text{au sens des distributions } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Remarque 3.1.2 *En général il n'y a pas d'unicité de la solution fondamentale.*

Exemple 3.1.3 *Les solutions fondamentales de l'opérateur u'sont $E = H + M$ avec M constantes arbitraires.*

Exemple 3.1.4 *Les solutions fondamentales de l'opérateur $u' + au$ avec $a \in \mathbb{C}$ sont*

$$E(x) = e^{-ax}\left[H(x) + M\right]$$

avec M constantes arbitraires.

Théorème 3.1.1 *Soit $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ solution fondamentale de $P(D)$ et soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tel qu' au moins l'une des deux distributions E ou f soit à support compact. Alors $u = E * f$ est une solution de (3.2).*

Preuve. On a le calcul suivant :

$$P(D)(E * f) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha (E * f) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (D^\alpha E) * f = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha E \right) * f$$

Comme E est solution fondamentale on a

$$P(D)(E * f) = \delta * f = f$$

ce qui montre le résultat. ■

Remarque 3.1.3 *Ce résultat ne permet pas de donner* ***toutes*** *les solutions de (3.2), il permet seulement d'en construire une solution.*

Exemple 3.1.5 *On se donne* $a \in \mathbb{C}$ *et* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *avec* $supp(f)$ *compacte. On se propose de donner une solution* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *de l'équation différentielle ordinaire :*

$$u' + au = f. \tag{3.3}$$

Comme $E(x) = e^{-ax}H(x)$ *est une solution fondamentale de l'opérateur* $u' + au$ *alors une solution de (3.3) est donnée par* $u = E * f$ *. Comme* E *et* f *sont des fonctions alors* u *est aussi une fonction donnée par*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} e^{-a(x-t)}f(t)dt.$$

(car $H(x-t) = 0$ *si* $t > x$ *).*

3.2 Résolution des problémes

Problème 3.2.1 *Soit l'équation*

$$P(D)u = f \tag{P}$$

1. *Soit l'opérateur différentiel*

$$P(D) = \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2, \omega \in \mathbb{R}$$

on a

$$E = H(t)\frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside. Soit $E = H(t)Z(t)$ solution fondamentale, où $Z(t)$ est solution de l'équation $P(D)Z = 0$ avec $Z(0) = 0$ et $Z^{'}(0) = 1$. On a

$$P(D)Z = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) Z = Z^{"} + \omega^2 Z = 0.$$

Cette équation posséde la solution $Z(t) = C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t}$. Comme

$$Z(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad Z^{'}(0) = -C_1 i\omega + C_2 i\omega = 1.$$

alors $C_1 = \frac{i}{2\omega}$ et $C_2 = -\frac{i}{2\omega}$. Donc

$$Z(t) = \frac{i}{2\omega}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) = \frac{\sin \omega t}{\omega},$$

et par conséquent $E = H(t)\frac{\sin \omega t}{\omega}$.

2. *On montre que*

$$P(D)E = \delta \quad \text{au sens des distributions } \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n)$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *On a*

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \frac{H(t)\sin \omega t}{\omega}, \varphi \right\rangle \\
=& \left\langle \frac{H(t)\sin \omega t}{\omega}, \varphi^{"} \right\rangle + \omega \left\langle H(t)\sin \omega t, \varphi \right\rangle \\
=& \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} \varphi^{"}(t)dt + \omega \int_0^{+\infty} \sin \omega t \varphi(t)dt \\
=& \left[\frac{\sin \omega t}{\omega} \varphi^{'}(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \cos \omega t \varphi^{'}(t)dt + \omega \int_0^{+\infty} \sin \omega t \varphi(t)dt \\
=& -\int_0^{+\infty} \cos \omega t \varphi^{'}(t)dt + \omega \int_0^{+\infty} \sin \omega t \varphi(t)dt \\
=& -\left[\cos \omega t \varphi(t) \right]_0^{+\infty} - \omega \int_0^{+\infty} \sin \omega t \varphi(t)dt + \omega \int_0^{+\infty} \sin \omega t \varphi(t)dt \\
=& \varphi(0) \\
=& \langle \delta, \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

d'où $\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \frac{H(t)\sin \omega t}{\omega} = \delta$. *On peut retrouver le même résultat, en procédaant comme suit:*

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \frac{H(t)\sin \omega t}{\omega} \\
=& \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{H(t)\sin \omega t}{\omega} \right) + \omega H(t)\sin \omega t \\
=& \frac{d}{dt} \left(\frac{H^{'}(t)\sin \omega t}{\omega} + H(t)\cos \omega t \right) + \omega H(t)\sin \omega t \\
=& \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \sin \omega t}{\omega} + H(t)\cos \omega t \right) + \omega H(t)\sin \omega t \\
=& \frac{d}{dt} \left(H(t)\cos \omega t \right) + \omega H(t)\sin \omega t \\
=& H^{'}(t)\cos \omega t - \omega H(t)\sin \omega t + \omega H(t)\sin \omega t \\
=& \delta \cos \omega t \\
=& \delta.
\end{aligned}$$

3. *Donc la solution générale de probléme* (P) *est*

$$u = E * f$$

Problème 3.2.2 *Considérons l'équation différentielle*

$$\frac{d^m y}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + ... + a_{m-1} \frac{dy}{dt} + a_m y = f(t).$$

où $f(t)$ est une fonction connue. On vent déterminer la solution $y(t)$ sur $[0, +\infty[$ satisfaisant aux conditions initiales suivantes :

$$y(0) = y_0, \ y^{'}(0) = y_0^{'}, ..., y^{(m-1)}(0) = y_0^{(m-1)}.$$

L'équation ci-dessus s'écrit $P(D)y = f$, où

$$P(D) = \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + ... + a_{m-1} \frac{d}{dt} + a_m$$

On pose $u = Hy$ et on calcule, comme dans la démonstration de le probléme (3.1.1) les dérivées $u^{'}, u^{''}, ..., u^{(m)}$. On obtient

$$P(D)u = H \ P(D)y + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}$$

où

$$c_k = y_0^{(m-k-1)} + a_1 y_0^{(m-k-2)} + ... + a_{m-k-1} y_0.$$

En posant $E = H(t)Z(t)$, la solution cherchée s'écrit

$$u = H \ Z * \left(H \ P(D)y + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)} \right) = H \ Z * \left(H \ f + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)} \right),$$

d'où, pour $t \geq 0$,

$$y(t) = Z * \ f + \sum_{k=0}^{m-1} c_k Z * \delta^{(k)} = \int_0^t Z(t) \ f(t-x) dx + \sum_{k=0}^{m-1} c_k Z^{(k)}(t).$$

Exemple 3.2.1 *Soit l'équation*

$$P(D)y = t^2 e^{-2t}$$

où

$$P(D) = \frac{d^2}{dt^2} + 4 \frac{d}{dt} + 4.$$

Déterminons la solution de cette équation avec

$$y(0) = y_0 = \frac{1}{12}, \quad y^{'}(0) = y_0^{'} = -\frac{1}{12}.$$

Solution 3.2.1 *D'aprés ce qui précède, on a pour* $t \geq 0$,

$$y(t) = \int_0^t Z(x)f(t-x)dx + \sum_{k=0}^{m-1} c_k Z^{(k)}(t).$$

Ici $f(t-x) = (t-x)^2 e^{-2(t-x)}$, $m = 2$, $c_0 = y^{'}(0) + a_1 y_0 = -\frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ *et* $c_1 = y_0 = \frac{1}{12}$. *Déterminons* $Z(t)$. *L'équation caractéristique*

$$r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2.$$

possède une racine double $r_1 = r_2 = 2$. *D'où*

$$\begin{aligned} E &= H\ Z \\ &= H(t)e^{-2t} * H(t)e^{-2t} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)e^{-2x} H(t-x)e^{-2(t-x)}dx \\ &= H(t)\int_0^t e^{-2t}dx \\ &= H(t)te^{-2t}. \end{aligned}$$

et dès lors $Z(t) = te^{-2t}$. *Donc, pour* $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t xe^{-2x}(t-x)^2 e^{-2(t-x)}dx + c_0 Z(t) + c_1 Z^{'}(t) \\ y(t) &= e^{-2t}\int_0^t (x^3 - 2tx^2 + t^2 x)dx + \frac{1}{4}te^{-2t} + \frac{1}{12}e^{-2t}(1-2t) \\ &= (t^4 + t + 1)\frac{e^{-2t}}{12}. \end{aligned}$$

Conclusion

Dans ce travail, pour la résolution les équations différentielles ordinaires linéaires dans les cas de la deuxiéme momber pa localement intégrable.

Donc, nous demondons chercher à résoudre ces équation en utilisant les distributions, opérateur différentiel et la convolution.

A la fin du résultat de rcherche atteint un très satisfaisant pour résoudre des équations différentielles ordinaires linéaires par la convolutions.

Cette recherche sera de lancer une étude des équations aux dérivées partielles à l'avenir de la recherche scientifique.

Bibliographie

[1] Ahmed LESFARI, Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace, France,2012.

[2] Demengel. G, Distributions et Applications, Paris, 1996.

[3] François BAYEN, Christian MARGARIA, Distributions analyse de Fourier et transformation de Laplace, Tome 3, Paris, 1988.

[4] Amara HITTA, Espaces vectoriels topologiques, Distributions et EDP, Cours Master, Université Guelma, 2008/2009.

[5] Wafa BOUGUERNE, Amina BRAHMIA, Distributions et Espaces de Sobolev, Mémoire de Master II, Université Guelma, 2013.