



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de L'informatique  
Département de Mathématiques



# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière**: Mathématiques

**Option** : Analyse fonctionnelle

**Par**

**Haffaf Aida**

**Sujet**

## *Inégalités de Hardy dans les espaces de Besov*

Date de soutenance : **29/05/2017**

**Devant le jury :**

Mr. <b>Drihem Douadi</b>	Prof. Univ. de M'sila	Président
Mr. <b>Moussai Madani</b>	Prof. Univ. de M'sila	Rapporteur
Mr. <b>Bissar Samira</b>	MAA. Univ. de M'sila	Examinatrice

**Promotion : 2016 / 2017**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي  
خَلَقَ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ  
وَالَّذِي يُضَوِّبُ الْمَوْتَى  
إِنَّ رَبَّهُ لَسَدِيدٌ  
إِلَىٰ عَرْشِهِ الرَّحِيمُ  
الَّذِي يُخْرِجُ الْحَيَّ مِنَ الْمَوْتِ  
وَيُخَوِّضُ الْمَوْتَىٰ مِنَ الْحَيِّ  
وَهُوَ السَّمِيعُ الْعَلِيمُ  
الَّذِي يُنَزِّلُ الْمَطَرَ  
وَهُوَ السَّمِيعُ الْعَلِيمُ  
الَّذِي يُنَزِّلُ الْمَطَرَ  
وَهُوَ السَّمِيعُ الْعَلِيمُ

## *Dédicaces*

*A mes très chers parents **Cherif** et **Mebarka** . Que Dieu les protèges.*

*A mes sœurs.*

*A toute la famille **HAFFAF**.*

*A tous les jeunes enfants.*

*Et à tous mes amis.*

*À Tous ceux qui me sont chers.*

*AIDA*

## ***Remerciement***

*Je remercie en premier lieu Dieu qui ma donné ce bien pour que nous venons ce jour et la force et la patience pour terminer ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes remerciements à mon encadreur **Moussai Madani** qui a proposé et a dirigé ce travail.*

*Je remercie les membres de jury de ce mémoire.*

*Enfin, je remercie tous les personnes qui m'ont aidé.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Notations</b>	<b>3</b>
<b>1 <i>Rappel sur les espaces de Besov homogènes et non homogènes</i></b>	<b>5</b>
1.1 Séries de Littlewood-Paley . . . . .	6
1.2 Inégalités principales . . . . .	7
1.3 Espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	8
1.3.1 Quelques propriétés . . . . .	9
1.4 Espaces de Besov homogènes $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	14
1.4.1 Quelques propriétés . . . . .	14
1.5 Espaces de Besov non homogènes . . . . .	15
1.6 Exemples des fonctions dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	17
1.7 Inégalité de Gagliardo-Nirenberg . . . . .	19
<b>2 <i>Quelques inégalités de Hardy dans <math>L_p</math></i></b>	<b>22</b>
2.1 Inégalité de Hardy . . . . .	23
2.1.1 Inégalité de Hardy à fonctions poids, le cas $p = 2$ . . . . .	23
2.2 Extensions . . . . .	26
2.3 Généralisation de l'inégalité intégrale du type de Hardy . . . . .	26
<b>3 <i>Quelques inégalités de Hardy des espaces de Besov dans <math>L_p</math></i></b>	<b>28</b>
3.1 Extension de l'inégalité de Hardy . . . . .	29
3.2 Inégalité de type Gagliardo-Nirenberg . . . . .	30

3.3 Réalisations et inégalité de Hardy . . . . .	31
<b>Conclusion</b>	<b>33</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>34</b>

# *Introduction*

Le point de départ de notre travail est l'inégalité de Hardy suivante:

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{\infty} f^p(x) dx, \quad p > 1, \quad (0.0.1)$$

où  $f$  est une fonction positive, intégrable et la constante  $\left( \frac{p}{p-1} \right)^p$  est la meilleure possible.

Nous avons une généralisation sous la forme: pour  $p \geq 1, k \neq 1$  et  $F(x)$  est défini par

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t) dt, & k > 1 \\ \int_x^{\infty} f(t) dt, & k < 1 \end{cases}$$

alors

$$\int_0^{\infty} x^{-k} F^p(x) dx \leq \left( \frac{p}{|k-1|} \right)^p \int_0^{\infty} x^{p-k} f^p(x) dx. \quad (0.0.2)$$

Avec la constante  $\left( \frac{p}{|k-1|} \right)^p$  est la meilleure possible.

Le but de ce travail est de donner un petit aperçu sur les inégalité de Hardy dans les espaces de Besov, d'après certains travaux, comme dans [8], [9] et [11].

Il est construit de trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous allons faire un rappel sur les espaces de Besov homogènes et non homogènes. On va citer une collection formée de quelques définitions, propriétés et formules de bases qui nous sera utiles à la suite notre travail, par exemple la série de Littlewood-Paley joue un rôle important dans la définition des espaces Besov homogènes et non homogènes, quelque standard inégalité (inégalité de Bernstein, inégalité de Young...).

Dans le deuxième chapitre, on va mentionner quelques concepts de l'espace Lebesgue, résultats fondamentaux que nous utilisons dans les preuves des théorèmes principaux. On présente la preuve de l'inégalité classique, nous tirons quelques nouvelles extensions de la célèbre inégalité intégrale de Hardy. Les résultats présentent une généralisation directe de l'inégalité originale de Hardy en deux et trois dimensions . . .

Enfin, dans le troisième chapitre que nous consacrons à l'étude de quelques inégalités de Hardy des espaces de Besov dans  $L_p(\mathbb{R}^n)$ .

# *Notations*

- $C^s(\mathbb{R}^n)$  : est l'espace de Hölder.
- $H_2^s(\mathbb{R}^n)$  : l'espace de Potentiel de Bessel.
- $H_p^m = W_p^m(\mathbb{R}^n)$  : l'espace de Sobolev telle que:  $\forall f \in S'(\mathbb{R}^n), \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  alors
 
$$\|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$
- $S'(\mathbb{R}^n)$  : l'espace de distributions tempérées.
- $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  : l'espace des distributions tempérées modulo les polynômes  $P_\infty$ .
- $\dot{H}_2^s(\mathbb{R}^n)$  : l'espace de potentiel de Bessel homogène.
- $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$  : est l'espace de Sobolev homogène.
- $[f]$  : la classe d'équivalence d'une distribution  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  modulo  $P_\infty(\mathbb{R}^n)$ .
- $\|f\|_p$  : désigne la norme de  $f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , ( $1 \leq p \leq \infty$ ).
- $p'$  : désigne l'exposant conjugué de  $p, p' = \frac{p}{p-1}$ .
- $\alpha \in \mathbb{N}^n$  :  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .
- $\dot{C}^s(\mathbb{R}^n)$  : est l'espace de Hölder homogène.
- $C, c, c', c''$  : désigneront des constantes strictement positives.
- $l^r$  : est l'espace des suites  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  telle que:  $\|\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}\|_r = \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} |a_j|^r \right) < \infty$
- $D(\mathbb{R}^n)$  : l'espace des fonctions de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support compact.
- $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  : est l'ensemble des toutes les fonctions  $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , mais  $f \notin P_m(\mathbb{R}^n)$ .
- $\tilde{C}_0$  : l'ensemble des distributions  $f \in D'(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\partial_\lambda f$  tend vers 0 dans  $D'(\mathbb{R}^n)$  si  $\lambda$  tend vers 0.

- 
- $D'(\mathbb{R}^n)$  : l'espace des distributions sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $h_\lambda f(x)$  : est défini par  $h_\lambda f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad \forall \lambda > 0$ .
- $\tau_a f$  : est défini par  $\tau_a f(x) = f(x - a)$ .
- $\hookrightarrow$  : Inclusion: par exemple  $E \hookrightarrow F$     1)  $E \subset F, x \in E \implies x \in F$   
2)  $id : E \longrightarrow F$  continue telle que:  $\|id(x)\|_F = \|x\|_F \leq C \|x\|_E$ .
- $\hat{f}$  : la transformée de Fourier de  $f$ .

# Chapitre 1

## *Rappel sur les espaces de Besov homogènes et non homogènes*

Dans ce chapitre, on va faire un rappel de quelques notions: les espaces de Besov homogènes et non homogènes et quelques résultats principaux concernant les inégalités de Hölder, de Young et de Bernstein.

## 1.1 Séries de Littlewood-Paley

Nous rappelons la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée, elle joue un rôle important dans la définition des espaces de Besov homogènes et non homogènes.

**Définition 1.1.1 (Fonction Cut-off)** Une fonction  $\rho$  est dite (Cut-off) si elle est :  $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , positive et radiale sur  $\mathbb{R}^n$ , telle que:

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\xi| \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

On définit la fonction  $\gamma$  par le lemme suivant

**Lemme 1.1.1** Il existe une fonction  $\gamma \in D(\mathbb{R}^n)$ , positive et radiale à support compact dans  $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  telle que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^j \xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (1.1.1)$$

**Preuve.** On pose

$$\gamma(\xi) = \rho(\xi) - \rho(2\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Alors  $\gamma$  est radiale, positive et portée par la couronne  $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}$ ,

on note ensuite que, pour tout entier  $M, N$ , on a:

$$\sum_{j=N}^M \gamma(2^j \xi) = \rho(2^N \xi) - \rho(2^{M+1} \xi),$$

quand  $M$  tend vers  $+\infty$  et  $N$  tend vers  $-\infty$  on obtient (1.1.1).

Donc: soit  $\gamma$  une fonction auxiliaire introduite dans le Lemme 1.1.1, alors on définit la suite des opérateurs  $(Q_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  sur  $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  par:

$$\mathcal{F}(Q_j f) = \gamma(2^{-j} \cdot) \widehat{f}.$$

Si  $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f$  s'appelle la série Littlewood-Paley homogène de  $f$ .

On définit également la suite des opérateurs  $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  sur  $S'(\mathbb{R}^n)$  par:

$$\mathcal{F}(S_k f) = \rho(2^{-k} \cdot) \widehat{f}.$$

Si  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  la série  $S_0 f + \sum_{j \geq 1} Q_j f$  s'appelle la série Littlewood-Paley inhomogène de  $f$ ,  
de sorte qu'on a :

$$S_0 f + \sum_{j \geq 1} Q_j f = f, \quad \forall f \in S'(\mathbb{R}^n).$$

■

**Proposition 1.1.1** *On a*

1. Pour tout  $f \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$ , (resp  $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ ) nous avons  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f$  dans  $S_\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  
(resp  $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ ).
2. Pour tout  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ , (resp  $S'(\mathbb{R}^n)$ ) et  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , nous avons  $f = S_k f + \sum_{j > k} Q_j f$  dans  
 $S(\mathbb{R}^n)$ , (resp  $S'(\mathbb{R}^n)$ ).

## 1.2 Inégalités principales

Quelques inégalités classiques, dans les espaces  $L^p(\mathbb{R}^n)$  qui nous utilisons de ce chapitre, sont nécessaires pour la suite de ce mémoire.

**Théorème 1.2.1 (Inégalité de Hölder)** Soient  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 \leq p, q \leq \infty$  telle que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ , alors :

$$fg \in L^r \quad \text{et} \quad \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Théorème 1.2.2 (Inégalité de Young)** Soient  $p, q, r \in [1, +\infty]$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ , avec  $r \geq p$  et  $r \geq q$  alors pour toute  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Théorème 1.2.3 (Inégalité de Bernstein)** Soient  $1 \leq p \leq r \leq \infty$  et  $R > 0$ , il existe  $c > 0$ , telle que pour toute  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  avec  $\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < R\}$ , on a :

$$\|f\|_r \leq cR^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|f\|_p.$$

**Preuve.** Soit  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\varphi(\xi) = 1$  si  $|\xi| \leq 1$ .

On pose  $\varphi_R(\zeta) = \varphi\left(\frac{\zeta}{R}\right)$ , telle que  $\varphi_R(\zeta) \geq 1$  si  $|\zeta| \leq R$ , on a :

$$\varphi_R(\zeta) \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

alors

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi_R * f) = f.$$

D'après l'inégalité de Young, on obtient

$$\|f\|_r \leq \|\mathcal{F}^{-1}\varphi_R\|_q \|f\|_p, \quad \text{avec } \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

comme pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)(x) = R^n (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(Rx),$$

donc

$$\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)\|_q = R^{n-\frac{n}{q}} \|\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_q, \quad \text{telle que } (\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_q = c),$$

alors

$$\begin{aligned} \|f\|_r &\leq cR^{n-\frac{n}{q}} \|f\|_p \\ \|f\|_r &\leq cR^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \|f\|_p, \quad \text{avec } \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r} = 1-\frac{1}{q}\right) \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.2.1** Soient  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  telle que  $r \geq p, r > q$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , il existe  $c > 0$ , telle que pour tout  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , avec  $\text{supp } \widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < R\}$ , on a

$$\|f^{(\alpha)}\|_r \leq cR^{|\alpha|+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \|f\|_p.$$

## 1.3 Espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

On définit les espaces de Besov  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , et nous donnons les propriétés principales des ces espaces. On note d'abord, que  $Q_0 := S_0$ .

**Définition 1.3.1** Soient  $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$  et  $1 \leq q < \infty$ , alors l'espace de Besov noté  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des toutes les fonctions  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  telle que :

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

**Remarque 1.3.1** Soit  $s \in \mathbb{R}$ , Si  $1 \leq p \leq \infty, q = \infty$ , on a

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} := \sup_{j \in \mathbb{N}} 2^{js} \|Q_j f\|_p < \infty.$$

### 1.3.1 Quelques propriétés

La majorité des assertions suivantes sont prouvés dans le livre de Triebel [6].

- $(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{B_{p,q}^s})$  est un espace de Banach.
- $B_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = C^s(\mathbb{R}^n)$ , si  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ .
- $B_{2,2}^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ .
- $B_{p,2}^s(\mathbb{R}^n) = H_p^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$  et  $1 < p < \infty$

**Proposition 1.3.1** Soient  $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$  et  $1 \leq q \leq \infty$ , alors:

$$S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n).$$

**Proposition 1.3.2** On a:

1. Soient  $s, t \in \mathbb{R}$ , telle que  $s > t$  et  $1 \leq p, q \leq \infty$ , alors:

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^t(\mathbb{R}^n).$$

2. Soient  $s \in \mathbb{R}, 1 \leq q \leq \infty$  et  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ , telle que  $s - \frac{n}{p_1} = t - \frac{n}{p_2}$ , alors:

$$B_{p_1,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p_2,q}^t(\mathbb{R}^n).$$

3. Soient  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ , telle que  $s_1 < s_2$ ,  $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$  et  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$  et  $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$ , alors:

$$B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n).$$

4. Soient  $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, r, q \leq \infty$ , si  $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$  ou  $s = \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$  et  $q = 1$ , alors:

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n).$$

**Preuve.** On a

$$1. \text{ Soit } f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), \text{ alors: } \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

On a  $s > t$ , alors  $2^{tj} < 2^{sj}$ , donc:

$$\left( \sum_{j \geq 0} 2^{j t q} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j s q} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

d'où:

$$\|f\|_{B_{p,q}^t(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

ce qui donne  $f \in B_{p,q}^t(\mathbb{R}^n)$ .

2. D'après l'inégalité de Bernstein, on obtient

$$\|Q_j f\|_r \leq c R^{\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{r}\right)} \|Q_j f\|_p, \quad r > p$$

telle que  $\widehat{\text{supp} Q_j f} \subset \{\xi : |\xi| \leq c 2^j = R\}$ .

On pose:  $r = p_2$ ,  $p = p_1$  donc

$$\|Q_j f\|_{p_2} \leq c 2^{j \left(\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2}\right)} \|Q_j f\|_{p_1},$$

d'après la simplification, nous avons

$$2^{jt} \|Q_j f\|_{p_2} \leq c 2^{j \left(t + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s\right)} 2^{js} \|Q_j f\|_{p_1},$$

pour  $1 \leq q \leq \infty$  et par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left( \sum_{j \geq 0} 2^{qjt} \|Q_j f\|_{p_2}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c 2^{j \left(t + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s\right)} \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_{p_1}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par conséquent

$$\|f\|_{B_{p_2,q}^t(\mathbb{R}^n)} \leq c 2^{j \left(t + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s\right)} \|f\|_{B_{p_1,q}^s(\mathbb{R}^n)},$$

car  $2^{j \left(t + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s\right)}$  converge si  $t + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s = 0$  implique  $t - \frac{n}{p_2} = s - \frac{n}{p_1}$ .

Donc

$$\|f\|_{B_{p_2,q}^t(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{B_{p_1,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

3. D'après l'inégalité de Bernstein, nous avons

$$\|Q_j f\|_r \leq cR^{\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{r}\right)} \|Q_j f\|_p, \quad r > p$$

telle que  $\text{supp}\widehat{Q_j f} \subset \{\xi : |\xi| \leq c2^j = R\}$ .

On pose:  $r = p_2, p = p_1$ , nous avons

$$\|Q_j f\|_{p_2} \leq c2^{j\left(\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2}\right)} \|Q_j f\|_{p_1},$$

d'après la simplification, nous avons

$$2^{js_2} \|Q_j f\|_{p_2} \leq c2^{j\left(s_2 + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s_1\right)} 2^{js_1} \|Q_j f\|_{p_1}.$$

Pour  $1 \leq q_1 \leq \infty$ , par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$2^{js_2} \|Q_j f\|_{p_2} \leq c2^{j\left(s_2 + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s_1\right)} \left( \sum_{j \geq 0} 2^{js_1 q_1} \|Q_j f\|_{p_1}^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

par conséquent

$$2^{js_2} \|Q_j f\|_{p_2} \leq c2^{j\left(s_2 + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s_1\right)} \|f\|_{B(\mathbb{R}^n)_{p_1,q_1}^{s_1}},$$

pour  $1 \leq q_2 \leq \infty$ , encor par l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\left( \sum_{j \geq 0} 2^{js_2 q_2} \|Q_j f\|_{p_2}^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j\left(s_2 + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s_1\right) q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \|f\|_{B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc

$$\|f\|_{B_{p_1,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j\left(s_2 + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s_1\right) q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \|f\|_{B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)},$$

car  $\left( \sum_{j \geq 0} 2^{j\left(s_2 + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s_1\right) q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}$  converger si:

$s_2 + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s_1 = 0$  implique  $s_2 - \frac{n}{p_2} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ , par conséquent

$$\|f\|_{B_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}.$$

4. On a  $L_r(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ ,

pour  $f \in L_r(\mathbb{R}^n)$  alors  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ , donc

$$f = \sum_{j \geq 0} Q_j f,$$

nous avons

$$\|f\|_r = \left\| \sum_{j \geq 0} Q_j f \right\|_r \leq \sum_{j \geq 0} \|Q_j f\|_r, \quad \text{pour } r \geq 1.$$

par l'inégalité de Bernstein, on obtient

$$\sum_{j \geq 0} \|Q_j f\|_r \leq c \sum_{j \geq 0} 2^{j(\frac{n}{p} - \frac{n}{r})} \|Q_j f\|_p,$$

d'après la simplification, nous avons

$$c \sum_{j \geq 0} 2^{j(\frac{n}{p} - \frac{n}{r})} \|Q_j f\|_p \leq c \sum_{j \geq 0} 2^{j(\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s)} 2^{js} \|Q_j f\|_p.$$

Pour  $1 \leq q \leq \infty$ , telle que  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ , on utilisant l'inégalité de Hölder:

$$c \sum_{j \geq 0} 2^{j(\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s)} 2^{js} \|Q_j f\|_p \leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par conséquent

$$\|f\|_r \leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)},$$

car  $c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s)q'} \right)^{\frac{1}{q'}}$  converge si

- $\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s < 0$  implique  $\frac{n}{p} - \frac{n}{r} < s$  donc:  $\|f\|_r \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$ ,

ou

- $\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s = 0$  implique  $\frac{n}{p} - \frac{n}{r} = s$  et  $q = 1$  donc:  $\|f\|_r \leq c \|f\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)}$ .

■

**Théorème 1.3.1** Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , on a

$$\text{Si } f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}) \implies \partial f \in B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}),$$

avec

$$\|\partial f\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}.$$

**Preuve.** D'après l'inégalité de Bernstein, on a

$$\|g^{(\alpha)}\|_r \leq cR^{|\alpha|+(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|g\|_p, \quad r > p$$

telle que  $\text{supp } g \subset \{\xi : |\xi| \leq R\}$ .

On pose:  $g = \widehat{Q_j f}$ , donc  $\text{supp } \widehat{Q_j f} \subset \{\xi : |\xi| \leq c2^j\}$ , alors

$$\|\partial(Q_j f)\|_r \leq c2^{j(1+(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}))} \|Q_j f\|_p.$$

Si  $r = p$ , on obtient

$$\|\partial(Q_j f)\|_p \leq c2^j \|Q_j f\|_p,$$

d'après la simplification, nous avons

$$2^{j(s-1)} \|\partial(Q_j f)\|_p \leq c2^{js} \|Q_j f\|_p,$$

pour  $1 \leq q \leq \infty$ , on a

$$\left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(s-1)q} \|\partial(Q_j f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par conséquent

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}.$$

■

**Corollaire 1.3.1** Soient  $s \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{N}^n, 1 \leq q \leq \infty$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , alors:

$$\text{Si } f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \implies \partial^\alpha f \in B_{p,q}^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$\|\partial^\alpha f\|_{B_{p,q}^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

**Théorème 1.3.2** [6] Soient  $s \in \mathbb{R}, 1 \leq q < \infty$  et  $1 \leq p < \infty$ , alors:

$$\overline{S}(\mathbb{R}^n) = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

## 1.4 Espaces de Besov homogènes $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

On va définir l'espace de Besov homogène et nous allons donner quelques caractéristiques principales de cet espace.

**Définition 1.4.1** Soient  $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty$ , l'espace de Besov homogène noté  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des toutes les fonctions  $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que:

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

**Remarque 1.4.1** Si  $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$  et  $q = \infty$  on a

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} := \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|Q_j f\|_p < \infty.$$

### 1.4.1 Quelques propriétés

Les propriétés suivantes sont vérifiées:

- $(\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s})$  est un espace de Banach.
- $\dot{B}_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = \dot{C}^s(\mathbb{R}^n)$ , si  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ .
- $\dot{B}_{2,2}^m(\mathbb{R}^n) = \dot{W}^m(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 1.4.1** Soient  $s \in \mathbb{R}, 1 \leq q \leq \infty$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , alors:

$$S_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'_\infty(\mathbb{R}^n).$$

**Proposition 1.4.2** *On a :*

1. Soient  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ , telle que  $s_1 < s_2, 1 \leq q \leq \infty$  et  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ , pour  $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$ , on a :

$$\dot{B}_{p_1, q}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{p_2, q}^{s_2}(\mathbb{R}^n).$$

2. Soient  $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$  et  $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$ , alors :

$$\dot{B}_{p, q_1}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{p, q_2}^s(\mathbb{R}^n).$$

**Preuve.** Pour la preuve voir [1]. ■

**Proposition 1.4.3** *Pour  $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$  et  $1 \leq q \leq \infty$ , il existe deux constantes  $0 < c_1 < c_2$ , telles que pour tout  $f \in \dot{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$  et tout  $\lambda > 0$ , On a*

$$c_1 \|f\|_{\dot{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{\frac{n}{p} - s} \|f(\lambda \cdot)\|_{\dot{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \|f\|_{\dot{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

## 1.5 Espaces de Besov non homogènes

L'objectif de ce paragraphe, est faire présenté la définition de l'espace de Besov non homogène par la résultat de la proposition suivant :

**Proposition 1.5.1** *Pour  $s > 0$ , l'espace de Besov non homogène  $B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des fonctions  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , telles que  $[f] \in \dot{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$ , avec*

$$\|f\|_{B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

**Preuve.** Soit  $f \in B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$ , donc

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)} &= \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{\dot{B}_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

alors

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\| + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.5.1)$$

Soit  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ , telle que  $\|f\| + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty$ .

On a  $f = \sum_{j \geq 0} Q_j f$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left\| \sum_{j \geq 0} Q_j f \right\|_p \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \|Q_j f\|_p \\ &\leq \sum_{j \geq 0} 2^{js} \|Q_j f\|_p 2^{-js}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\sum_{j \geq 0} 2^{js} \|Q_j f\|_p 2^{-js} \leq \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{j \geq 0} 2^{-jsq'} \right)^{\frac{1}{q'}},$$

par conséquent

$$\|f\|_p \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.5.2)$$

car  $\left( \sum_{j \geq 0} 2^{-jsq'} \right)^{\frac{1}{q'}}$  converge si  $s > 0$ .

Pour  $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  nous avons

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} &= \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{j \leq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité  $\|Q_j f\|_p \leq c_1 \|f\|_p$ , on obtient

$$\left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{j \leq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} + c \|f\|_p \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \right)^{\frac{1}{q}},$$

par l'inégalité (1.5.2), nous avons

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} + c \|f\|_p \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} + c_2 c_1 c \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)},$$

puisque  $\left(\sum_{j \geq 0} 2^{jsq}\right)^{\frac{1}{q}}$  converge, si  $s > 0$ .

Par conséquent

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c' \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.5.3)$$

En addition l'inégalité (1.5.2) avec l'inégalité (1.5.3), nous trouvons

$$\|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c'' \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.5.4)$$

Et par l'inégalité (1.5.1) et l'inégalité (1.5.4), on obtient

$$\frac{1}{c''} \left( \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \right) \leq \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Alors

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \simeq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

■

**Remarque 1.5.1** Si  $s > 0$ , alors  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est un espace de Banach de distribution tempérées pour la norme

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

## 1.6 Exemples des fonctions dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

Dans cette section, on va présent des exemples des fonctions dans l'espace de Besov.

**Exemple 1.6.1** Soit  $f = \delta$  (mesure de Dirac)  $\in S'(\mathbb{R}^n)$ ,

On a

$$\begin{aligned} Q_j f(x) &= 2^j \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j(x-y)) f(y) dy \\ &= \langle f, 2^j \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j(x- \cdot)) \rangle, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} Q_j \delta(x) &= \langle \delta, 2^j \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j(x- \cdot)) \rangle \\ &= 2^j \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j x), \end{aligned}$$

donc

$$\|Q_j \delta\|_p = c 2^{nj(1-\frac{1}{p})},$$

d'après la simplification, nous avons

$$2^{js} \|Q_j \delta\|_p = c 2^{nj(1-\frac{1}{p})+js},$$

pour  $1 \leq q \leq \infty$ , on a

$$\left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j \delta\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} = c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(n-\frac{n}{p}+s)q} \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(n-\frac{n}{p}+s)q} \right)^{\frac{1}{q}} \text{ converge si}$$

- $n - \frac{n}{p} + s < 0$  implique  $s > \frac{n}{p} - n$ , alors:  $\delta \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ .
- $n - \frac{n}{p} + s = 0$  implique  $s = \frac{n}{p} - n$ , alors:

$$\begin{aligned} 2^{js} \|Q_j \delta\|_p &= c && \text{pour } j \in \mathbb{N} \\ \sup_{j \in \mathbb{N}} 2^{js} \|Q_j \delta\|_p &= c \\ &= \|\delta\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \delta \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) & \text{si } s < \frac{n}{p} - n & \text{pour } s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty \text{ et } 1 \leq q \leq \infty \\ \delta \in B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n) & \text{si } s = \frac{n}{p} - n & \text{pour } s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty \text{ et } q = \infty \end{cases}$$

**Exemple 1.6.2** Si  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  alors  $\|Q_j f\|_p \leq c 2^{-jN}$ , pour  $j \geq 0$ .

Soit  $f(x) = e^{-x^2}$ , alors

$$\|Q_j e^{-x^2}\|_p \leq c 2^{-jN}, \quad \text{pour } N \in \mathbb{N},$$

et

$$2^{sj} \|Q_j e^{-x^2}\|_p \leq c 2^{j(s-N)}.$$

Pour  $1 \leq q \leq \infty$ , on obtient

$$\left( \sum_{j \geq 0} \left( 2^{sj} \|Q_j e^{-x^2}\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(s-N)q} \right)^{\frac{1}{q}},$$

d'après la simplification, nous avons

$$\|e^{-x^2}\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(s-N)q} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

car  $\left( \sum_{j \geq 0} 2^{j(s-N)q} \right)^{\frac{1}{q}}$  converge si  $s - N > 0$  implique  $s > N$ .

Ce qui donne  $e^{-x^2} \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ .

## 1.7 Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Dans cette section, on va offrir quelques résultats de l'inégalité de type Gagliardo-Nirenberg dans l'espace de Besov.

**Proposition 1.7.1** Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , alors:

$$L_{\theta p} \cap L_{\infty} \hookrightarrow L_p,$$

avec

$$\|f\|_p \leq c \|f\|_{\infty}^{1-\theta} \|f\|_{p\theta}^{\theta}.$$

**Preuve.** Soit  $f \in L_p$ , donc

$$\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |f(x)|^{-\theta p} |f(x)|^{\theta p} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

D'après la simplification, nous avons

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p(1-\theta)} |f(x)|^{\theta p} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ici, en utilisant l'hypothèse  $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ , on a

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p(1-\theta)} |f(x)|^{\theta p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|^{p(1-\theta)} |f(x)|^{\theta p} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

alors

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{\infty}^{1-\theta} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p\theta} dx \right)^{\frac{\theta}{p\theta}}$$

Par conséquent

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{\infty}^{1-\theta} \|f\|_{p\theta}^{\theta}. \quad (1.7.1)$$

■

**Théorème 1.7.1** Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$  et  $0 < \theta < 1$ , alors:

$$B_{p\theta, q\theta}^{\frac{s}{\theta}}(\mathbb{R}^n) \cap L_{\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$\|f\|_{B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{\infty}^{1-\theta} \|f\|_{B_{p\theta, q\theta}^{\frac{s}{\theta}}(\mathbb{R}^n)}^{\theta}.$$

**Preuve.** Soit  $f \in B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$\|f\|_{B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.7.2)$$

D'après la Proposition (1.7.1), on a

$$\|Q_j f\|_p \leq c \|Q_j f\|_{\infty}^{1-\theta} \|Q_j f\|_{p\theta}^{\theta},$$

par l'hypothèse  $\|Q_j f\|_{\infty} \leq c \|f\|_{\infty}$ , on obtient

$$\|Q_j f\|_p \leq c \|f\|_{\infty}^{1-\theta} \|Q_j f\|_{p\theta}^{\theta}. \quad (1.7.3)$$

En remplacement  $\|Q_j f\|_p$  par  $c \|f\|_{\infty}^{1-\theta} \|Q_j f\|_{p\theta}^{\theta}$  dans l'inégalité (1.7.2), alors

$$\|f\|_{B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \left( \sum_{j \geq 0} c 2^{jsq} \|f\|_{\infty}^{1-\theta q} \|Q_j f\|_{p\theta}^{q\theta} \right)^{\frac{1}{q}},$$

d'après la simplification, nous avons

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j \geq 0} c 2^{jsq} \|f\|_{\infty}^{(1-\theta)q} \|Q_j f\|_{p\theta}^{q\theta} \right)^{\frac{1}{q}} &\leq c \|f\|_{\infty}^{1-\theta} \left( \sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_{p\theta}^{q\theta} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \|f\|_{\infty}^{1-\theta} \left( \sum_{j \geq 0} \left( 2^{j\frac{s}{\theta}} \|Q_j f\|_{p\theta} \right)^{q\theta} \right)^{\frac{\theta}{q\theta}}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{\infty}^{1-\theta} \|f\|_{B_{\theta p, \theta q}^{\frac{s}{\theta}}(\mathbb{R}^n)}^{\theta}.$$

■

**Théorème 1.7.2** Pour  $s \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$  et  $0 < \theta < 1$ , on a:

$$B_{p\theta, q\theta}^{\frac{s}{\theta}}(\mathbb{R}^n) \cap B_{\infty, \infty}^0(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{B_{\infty, \infty}^0(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta} \|f\|_{B_{\theta p, \theta q}^{\frac{s}{\theta}}(\mathbb{R}^n)}^{\theta}.$$

**Preuve.** La même démonstration que celle du Théorème (1.7.1). ■

## Chapitre 2

### *Quelques inégalités de Hardy dans $L_p$*

L'objectif de ce chapitre est l'étude de quelques inégalités de Hardy dans l'espace de Lebesgue. Cela se fait en rappelant sur l'espace de Lebesgue et quelques notions essentielles dans un espace que nous utilisons dans ce chapitre. Ensuite nous présentons la preuve de l'inégalité classique de Hardy intégrale et nous allons donner quelques généralisations.

## 2.1 Inégalité de Hardy

Dans ce paragraphe nous présentons la preuve de l'inégalité classique de Hardy intégrale à fonction poids.

### i) L'inégalité de Hardy discrète

Soit  $\{a_k\}_1^\infty$  une suite de nombres réels positifs, alors:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p \leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

### ii) L'inégalité de Hardy continue

Soit  $f$  une fonction intégrable et positive dans  $]0, \infty[$ , alors  $f$  est intégrable sur l'intervalle  $]0, x[$ , pour tout  $x > 0$  on a

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq C \int_0^{\infty} f^p(t) dx.$$

#### 2.1.1 Inégalité de Hardy à fonctions poids, le cas $p = 2$

**Théorème 2.1.1** Soit  $f$  une fonction positive, intégrable sur  $]0, \infty[$  et  $W$  est une fonction intégrable et croissante sur  $]0, \infty[$  avec  $W'(x) = w(x)$ ,  $W(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ , alors

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{W(x)} \int_0^x f(t) w(t) dt \right)^2 w(x) dx \leq C \int_0^{\infty} f^2(x) w(x) dx.$$

**Remarque 2.1.1** On définit  $F(x) := \frac{1}{W(x)} \int_0^x f(t) w(t) dt$ , ce théorème est équivalent à

$$\int_0^{\infty} F^2(x) w(x) dx \leq C \int_0^{\infty} f^2(x) w(x) dx.$$

avec

$$\|F\|_2^2 \leq C \|f\|_2^2,$$

**Preuve.** L'intégration par partie et l'inégalité de Cauchy-Schwartz sont essentiellement appliquées ici.

Soit  $f$  une fonction continue, positive à support compact dans  $]0, \infty[$ ,  $F$  est positive, différentiable  $]0, \infty[$ .

On considère  $[a, b]$  telle que:  $0 < a < b < \infty$ , avec  $\text{supp} f \subset [a, b]$ .

L'intégration par partie de  $\int_a^b F^2(x) w(x) dx$ , nous donne

$$\int_a^b F^2(x) w(x) dx = F^2(x) W(x) \Big|_a^b - 2 \int_a^b F(x) F'(x) W(x) dx, \quad (2.1.1)$$

mais  $\int_0^c F^2(x) w(x) dx = \int_0^a F^2(x) w(x) dx + \int_a^b F^2(x) w(x) dx + \int_b^c F^2(x) w(x) dx$ , pour  $0 < a < b < c$

et comme  $f$  est une fonction continue et  $\text{supp} f \subset [a, b]$ , donc  $F(x) = 0$  si  $\begin{cases} 0 \leq x < a \\ \text{et} \\ b < x \leq c, \end{cases}$

alors

$$\int_0^c F^2(x) w(x) dx = \int_a^b F^2(x) w(x) dx,$$

donc l'inégalité (2.1.1) équivalent l'inégalité suivante:

$$\int_0^c F^2(x) w(x) dx = F^2(x) W(x) \Big|_0^c - 2 \int_0^c F(x) F'(x) W(x) dx,$$

donc

$$\int_0^c F^2(x) w(x) dx = F^2 c W(c) - 2 \int_0^c F(x) F'(x) W(x) dx. \quad (2.1.2)$$

On a  $F(x) = \frac{1}{W(x)} \int_0^x f(t) w(t) dt$  implique  $W(x) F(x) = \int_0^x f(t) w(t) dt$ , en dérivant par rapport à  $x$ , nous avons

$$W(x) F'(x) + F(x) w(x) = f(x) w(x) \text{ implique } W(x) F'(x) = [f(x) - F(x)] w(x),$$

donc l'inégalité (2.1.2), nous donne

$$\int_0^c F^2(x) w(x) dx = F^2(c) W(c) - 2 \int_0^c F(x) [f(x) - F(x)] w(x) dx,$$

par l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\int_0^c F^2(x) w(x) dx = F^2(c) W(c) - 2 \left( \int_0^c F(x) f(x) w(x) dx \right) + 2 \left( \int_0^c F^2(x) w(x) dx \right),$$

d'après la simplification, on a

$$\int_0^c F^2(x) w(x) dx = -F^2(c) W(c) + 2 \left( \int_0^c F(x) f(x) w(x) dx \right), \quad (2.1.3)$$

on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur  $\int_0^c F(x) f(x) w(x) dx$ , on obtient

$$\int_0^c F(x) f(x) w(x) dx \leq \left( \int_0^c F^2(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^c f^2(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit  $\int_0^c f(t) w(t) dt = K$ , alors  $F(x) = \frac{K}{W(c)}$ , donc  $W(c) F^2(c) = \frac{K^2}{W(c)} \rightarrow 0$  quand  $W(c) \rightarrow \infty$ .

Par conséquent, l'inégalité (2.1.3) implique

$$\int_0^\infty F^2(x) w(x) dx = 2 \left( \int_0^\infty F^2(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^\infty f^2(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

comme  $\left( \int_0^\infty F^2(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ , alors

$$\left( \int_0^\infty F^2(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left( \int_0^\infty f^2(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\int_0^\infty F^2(x) w(x) dx \leq 4 \int_0^\infty f^2(x) w(x) dx.$$

■

**Remarque 2.1.2** Si  $w = 1$ , est dû à [?, Them4].

## 2.2 Extensions

Maintenant, dans ce paragraphe, nous essayons de prouver certaines extensions de l'inégalité de Hardy.

**Théorème 2.2.1** [2, Thm2.1] *Supposons que  $f_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) des fonctions intégrables positives et  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), sont des nombres positifs tels qu'ils ne sont pas tous zéro et  $\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . Nous définissons*

$$F_i(x) = \int_0^x f_i(t) dt, \quad (1 \leq i \leq n),$$

alors

$$\int_0^\infty \left( \frac{F_1^{\alpha_1}(x) \dots F_n^{\alpha_n}(x)}{x^\lambda} \right)^{\frac{p}{\lambda}} dx \leq C \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) \right)^p dx.$$

**Théorème 2.2.2** [5, Thm1] *Soit  $1 \leq p, q \leq \infty, \lambda > 1$  telle que  $\alpha = p(\lambda - 1) + 1$  et  $\beta = q(\lambda - 1) + 1$ , soit  $f, g$  deux fonctions intégrables, positives sur  $]0, \infty[$ , on définit*

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt \text{ et } G(y) := \int_0^y g(t) dt, \text{ alors il existe } C > 0, \text{ telle que}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F^{\frac{\alpha}{p}}(x) G^{\frac{\beta}{q}}(y)}{(x+y)^{2\lambda}} dx dy \leq C \left( \int_0^\infty f^\alpha(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^\infty g^\beta(t) dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

## 2.3 Généralisation de l'inégalité intégrale du type de Hardy

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques la généralisations de l'inégalité intégrale de type Hardy, en utilisant certaines méthodes d'analyse.

**Théorème 2.3.1** [3, Them 2.1] *Soit  $0 < a < b \leq \infty, p > 1, r > 1$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{r}$  et  $f$  une fonction positive intégrable sur  $]0, \infty[$ , alors*

$$\int_a^b \left( \frac{1}{x^{(1-\frac{1}{r})}} \int_a^x f(t) dt \right)^p dx \leq C \int_a^b f^p(x) dx. \quad (2.3.1)$$

**Remarque 2.3.1** Dans les limites  $a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty$  et  $r \rightarrow \infty$  (2.3.1) réduit à l'inégalité classique de Hardy.

**Théorème 2.3.2** Soit  $1 \leq p \leq \infty, 0 < \lambda < 1$  telle que  $m > p - \lambda(p - 1)$  et  $f$  une fonction intégrable, positive sur  $]0, \infty[$ , on définit  $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ , alors

$$\int_0^{\infty} \frac{F^p(x)}{x^m} dx \leq C \int_0^{\infty} \frac{f^p(x)}{x^{m-p}} dx. \quad (2.3.2)$$

**Preuve.** Pour la preuve voir [4, Them 2.1], si en prenant  $g(x) = x$ . ■

## Chapitre 3

### *Quelques inégalités de Hardy des espaces de Besov dans $L_p$*

Dans ce chapitre, on montrera quelques résultats de l'inégalité des espaces Besov homogènes et non homogènes du type de celle de Hardy.

### 3.1 Extension de l'inégalité de Hardy

**Lemme 3.1.1** Soit  $s \in ]0, n[$ , alors pour tout  $p \in [1, \infty]$ ,  $\frac{1}{|x|^s} \in \dot{B}_{p,\infty}^{\frac{n}{p}-s}(\mathbb{R}^n)$ .

**Preuve.** Soit  $f$  telle que  $\widehat{f}(\xi) = |\xi|^{-s}$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on pose  $|\alpha| = s$  on obtient

$$|\xi|^s \widehat{f}(\xi) = 1 = \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(x)$$

on a  $\partial^\alpha f = \delta \in \dot{B}_{p,q}^{-\frac{n}{p}}$ , par conséquent  $f \in \dot{B}_{p,q}^{s-\frac{n}{p}}$  alors  $f \in \dot{B}_{p,q}^{\frac{n}{p}-s}$ .

Par conséquent  $\frac{1}{|x|^s} \in \dot{B}_{p,\infty}^{\frac{n}{p}-s}(\mathbb{R}^n)$ . ■

**Lemme 3.1.2** Soit  $1 \leq p < \infty$ , si  $0 \leq s < \frac{n}{p}$ ,

alors  $f^p \in \dot{B}_{q',1}^0(\mathbb{R}^n)$  pour chaque  $f \in \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)$ , telle que  $q' = \frac{q}{q-1}$  et  $q = \frac{n}{sp}$ , avec

$$\|f^p\|_{\dot{B}_{q',1}^0(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)}^p.$$

**Preuve.** Pour la preuve voir [11]. ■

**Théorème 3.1.1** Soit  $1 \leq p < \infty$ , si  $0 \leq s < \frac{n}{p}$ , il existe à constant  $c$  telle que pour tout  $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{sp}} dx \leq c \|f\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)}^p. \quad (3.1.1)$$

**Preuve.** Pour la preuve voir [11], mais si  $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \setminus P_m(\mathbb{R}^n)$ . ■

**Remarque 3.1.1** Le Théorème (3.1.1) dans [11], a été donné dans l'espace  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ . Mais, si  $f \in P_m(\mathbb{R}^n)$  l'inégalité (3.1.1) n'est pas vérifiée. Par exemple si  $f = 1$ , le côté gauche de l'inégalité (3.1.1) diverge et le côté droit égal zéro.

**Corollaire 3.1.1** Soit  $0 < s < 1$ , il existe une constante  $c$  telle que pour tout  $f \in \dot{B}_{1,1}^s(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{|x|^{-s}} dx \leq c \|f\|_{\dot{B}_{1,1}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

## 3.2 Inégalité de type Gagliardo-Nirenberg

Dans cette section, on offre l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg de type Hardy dans l'espace de Besov.

**Proposition 3.2.1** [7] *Soit  $0 < p < \infty, q > 1$ , pour tout  $p \leq r < \infty$ , il existe à constant  $c > 0$  telle que:*

$$\|f\|_r \leq cr^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{B_{p,q}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \quad f \in B_{p,q}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n).$$

**Preuve.** Soit  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  alors  $f = \sum_{j \geq 0} Q_j f$ .

Donc

$$\|f\|_r = \left\| \sum_{j \geq 0} Q_j f \right\|_r \leq \sum_{j \geq 0} \|Q_j f\|_r,$$

d'après l'inégalité de Bernstein, nous avons

$$\sum_{j \geq 0} \|Q_j f\|_r \leq \sum_{j \geq 0} 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|Q_j f\|_p$$

pour  $1 \leq q \leq \infty$  et d'après la simplification, on a

$$\sum_{j \geq 0} 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|Q_j f\|_p \leq \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j\frac{nq}{v(q-1)}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j\frac{nq}{p}} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

donc

$$\|f\|_r \leq \left( \sum_{j \geq 0} 2^{j\frac{nq}{v(q-1)}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{B_{p,q}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)},$$

supposons que  $r = \sum_{j \geq 0} 2^{j\frac{nq}{v(q-1)}}$ , par conséquent

$$\|f\|_r \leq cr^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{B_{p,q}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)}.$$

■

**Théorème 3.2.1** [7, Thm4.1] *Soit  $0 < p < \infty, 1 \leq t \leq \infty$ , alors:*

i) *Si  $0 < q \leq 1$ , il existe à constant  $c > 0$ , telle que pour tout  $t \leq r \leq \infty$  et tout  $f \in B_{p,q}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) \cap L_t(\mathbb{R}^n)$ , avec*

$$\|f\|_r \leq c \|f\|_t^{\frac{t}{r}} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{t}{r}}.$$

ii) Si  $1 < q \leq \infty$ , il existe à constant  $c > 0$ , telle que pour tout  $t \leq r \leq \infty$  et tout  $f \in \dot{B}_{p,q}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) \cap L_t(\mathbb{R}^n)$ , avec

$$\|f\|_r \leq cr^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_t^{\frac{t}{r}} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{t}{r}}.$$

### 3.3 Réalisations et inégalité de Hardy

L'objectif de ce paragraphe, est faire un rappel de la définition de la réalisation des espaces de Besov homogènes.

**Définition 3.3.1** (Réalisation de l'espace Besov homogène) Une réalisation de  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  modulo  $P_m(\mathbb{R}^n)$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$  est une application linéaire continue

$$\sigma : \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)/P_m(\mathbb{R}^n).$$

telle que  $[\sigma(f)]_m = f$  pour tout  $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposition 3.3.1** [8] Soit  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  on a:

1. Si  $s < \frac{n}{p}$ , la réalisation de  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est l'espace

$$\dot{B}_{p,q}^{s,\text{real}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \tilde{C}_0^s, [f] \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

2. Si  $s < \frac{n}{p}$ ,  $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ , la réalisation de  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est donnée par le choix du représentant  $f \in \dot{C}^{s-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$  vérifiant  $\partial^\alpha f(0) = 0$  pour  $|\alpha| \leq s - \frac{n}{p}$ .

**Proposition 3.3.2** [8] Si  $s - \frac{n}{p} > 0$ , alors:

$$\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{C}^{s-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n).$$

**Proposition 3.3.3** Soit  $f \in \dot{B}_{p,q}^{s,\text{real}}(\mathbb{R}^n)$ , pour  $p \geq q$  et  $s > 0$ , telle que  $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ , on a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{sp}} dx \leq c \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^p.$$

**Preuve.** Pour la preuve voir les travaux de Youssfi [10]. ■

On peut remplacer  $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  par  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  dans la proposition (3.3.1), (voir les travaux de Youssfi [10]), donc l'inégalité de Hardy est aussi valable pour  $f \in \dot{F}_{p,q}^{s,\text{real}}(\mathbb{R}^n)$ , où elle fait apparaître dans le résultat suivant:

**Proposition 3.3.4** [10] *Pour  $0 < s < \frac{n}{p}$  ou  $s - \frac{n}{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{N}$ , on a*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{sp}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Avec l'espace de Lizorkin-Triebel homogène  $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est défini par:

**Définition 3.3.2** *Soit  $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$  et  $1 \leq q \leq \infty$ , l'espace de Lizorkin-Triebel homogène noté  $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des toutes les fonctions  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ , telle que*

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{sjq} |Q_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < \infty.$$

**Définition 3.3.3** (*Localisation de espace Besov homogène*) *Soit  $s \in \mathbb{R}, p, q$  et  $r$  dans  $[1, \infty]$ , pour  $\gamma$  une fonction positive, on définit  $(\dot{B}_{p,q}^s)_{l^r(\mathbb{Z})}$  comme l'ensemble de fonction  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ , alors*

$$\|f\|_{(\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))_{l^r}} = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\gamma_j(x) f(x)\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^r \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

**Proposition 3.3.5** *Il existe  $c > 0$ , telle que pour tout  $f \in (\dot{B}_{p,q}^s)_{l^p(\mathbb{Z})}$  on a  $f \in L^p(|x|^{-n+sp} dx)$ , alors*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{n-sp}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_{(\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))_{l^p(\mathbb{Z})}}.$$

**Preuve.** Pour la preuve voir les travaux de Youssfi [9], où  $E = \dot{B}_{p,q}^s$ . ■

# *Conclusion*

Ce travail nous a permis de mieux comprendre les relations d'inclusion entre les espaces de Besov homogènes et non homogènes et les espaces de Lebesgue. De comprendre aussi l'inégalité de Hardy

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{\infty} f^p(x) dx,$$

pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f$  est une fonction positive, intégrable sur  $]0, \infty[$ .

Nous avons aussi étudié l'inégalité on a

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{sp}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s},$$

pour des fonctions dans l'espace réalisé.

# Bibliographie

- [1] B.JAWERTH. *Some observations on Besov and Triebel-Lizorkin spaces*. Math. Scand. 40(1977), pp. 94 – 104.
- [2] A.MOAZZEN, R.LASHKARIPOUR. *Some new extensions of Hardy's inequality*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 5. No. 1. (2014) pp. 107 – 108.
- [3] J.A.OGUNTUASE, C.O.IMORU. *New generalizations of Hardy's integral inequality*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 241 (2000) . pp. 76 – 77.
- [4] B.SROYSANG. *More on some Hardy type integral inequalities*, Journal Mathematical Inequalities, Volume 8, No 3, (2014) pp. 498 – 499.
- [5] W.T.SULAIMAN. *On two new inequalities similar to Hardy-Hilbert's integral inequality*, Soochow Journal of Mathematics, Volume33, No 3, (2007) pp. 498 – 499.
- [6] H.TRIEBEL. *Theorey of Function spaces*, Bassel, 1983.
- [7] H.TRIEBEL. *Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, (2014), Vol (284) , pp. 276 – 277.
- [8] B.VEDEL. *Régalement de la rivergence infra- Rouge dans des bases D'ondelettes adaptées*, Thèse de doctorat, Université de Picardie Jules verne, (2004) . pp..108 – 109.
- [9] A. YOUSSEFI. *Localisation des espaces de Besov homogènes*, Indian University Mathematics Journal, Vol.37, No.3 (1988) . pp. 585 – 586.
- [10] A. YOUSSEFI. *Localisation des espaces de Lizorkin-Triebel homogènes*, Math. Nachr, 147 (1990) . pp. 119.

- [11] J.ZHANG. *Extensions of Hardy inequality*, Journal of Inequalities and applications, Hindawi, ID69379 (2006), pp. 1 – 5.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي  
خَلَقَ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ  
وَالَّذِي جَعَلَ الْمَوْتَ  
وَالْحَيَاةَ وَالَّذِي  
يُحْيِي الْمَوْتَى  
وَالَّذِي يُخْرِجُ  
الْحَبَّ وَالذُّرْءَ  
وَالَّذِي يُصَوِّرُ  
الْبَشَرَةَ فِي أَحْسَنِ  
تَقْوِيمٍ  
سُبْحَانَ اللَّهِ عَمَّا يُشْرِكُونَ  
اللَّهُ أَكْبَرُ  
عَمَّا يُشْرِكُونَ

---

**Résumé:** Notre travail s'intéresse à l'étude des relations d'inclusion entre les espaces de Besov homogènes et non homogènes et les espaces de Lebesgue "**les inégalité de Hardy**", tout d'abord nous avons fourni un rappel sur les espaces de Besov homogènes et non homogènes. En plus nous avons donné quelques inégalités de Hardy dans  $L_p(\mathbb{R}^n)$ . Enfin, nous avons étudié quelques inégalités de Hardy des espaces de Besov dans  $L_p(\mathbb{R}^n)$ .

**Mots clés:** L'espace de Besov, l'espace de Besov homogène, l'inégalité de Hardy, l'inégalité intégral de Hardy...

**Abstract:** Our research is interested in the study of the inclusive relation between the homogenous and non-homogenous spaces of Besov and Lebesgue spaces "**Inequality of Hardy**".

First, we present one aspect of homogenous and non-homogenous spaces of Besov. Secondly, we investigate Hardy's inequality in the Lebesgue space giving the standard forms of inequality of Hardy. Also we present some new developed generalization and extension in that space. Finally, we introduce and study some inequalities of Hardy of Besov's spaces in  $L_p(\mathbb{R}^n)$ . In addition, we present some theories and properties which express and explain Hardy's inequality in that space.

**Key words:** Besov spaces, Homogenous Besov spaces, Hardy's inequality, inequality of Hardy's integral...

**المخلص:** عملنا هذا يركز على دراسة علاقة الاحتواء بين فضاءات بيزوف المتجانسة وغير المتجانسة وتظهر بانتظام في تفاوت هاردي الشهير.

أولاً: نذكر بعض التعاريف لفضاءات بيزوف المتجانسة وغير المتجانسة وبعض الخصائص الأساسية.

ثانياً: ندرس بعض تفاوت هاردي في فضاءات ليبسيغ بعرض الشكل العام لتفاوت هاردي وبعض التطورات لتعميم وتمديد تفاوت هاردي في الفضاء.

وأخيراً: ندرس بعض تفاوت هاردي في فضاءات بيزوف.

**الكلمات المفتاحية:** فضاء بيزوف، فضاء بيزوف متجانس، تفاوت هاردي، تفاوت هاردي المستمر...