REPUBLIQUEALGERIENNEDEMOCRATIQUEETPOPULAIRE
MINISTEREDEL'ENSEIGNEMENTSUPERIEURETDELARECHERCH ESCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématiques et numérique

Thème

Mesure de non compacité appliquée aux équations différentielles

---

Présentée par :
Guelmine Sabah

Soutenu publiquement le: xx/xx/2022.

Devant le jury composé de:

Président:	*NADIR Mostefa*	Prof,	Université de M'sila
Encadreur:	*GAGUI Bachir*	M.C.A,	Université de M'sila
Examinateur:	*GASMI Abdelkader*	Prof,	Université de M'sila

Année universitaire 2021/2022

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Abstract

The fixed point principle is very important in the resolution of nonlinear fractional order differential equations, in the sense of nonlinear Caputo, especially in the study of existence and uniqueness.

In this note, In this review, we will approach the study of non-compact scaling on linear operators applied in the form of ordinary, ordinary and talking differential equations by proving the existence of solutions using Mönch fixed point theorem combined with Kuratouviski scaling

Keywords :

differential equations, fractional order, existence and uniqueness, noncomactness measure, Kuratouviski measure, fixed point theorem.

Résumé

Le principe de point fixe est très important dans la résolution d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo non linéaires, en particulier, dans l'étude de l'existence et de l'unicité.

Dans ce mémoire, nous aborderons l'étude de la mise à l'échelle non compacte sur les opérateurs linéaires appliqués sous la forme d'équations différentielles ordinaires, ordinaires et parlantes en prouvant l'existence de solutions utilisant le théorème du point fixe de Mönch combiné à la mise à l'échelle de Kuratouviski

Mots-clés :

Equations différentielles, ordre fractionaire, existence et unicité, mesure de non compacité, mesure de Kuratouviski, théorème du point fixe.

Acknowledgements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail. Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur le Dr. Gagui Bachir qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et de m'a voir guidé. Leurs critiques et Leurs conseils m'ont été très précieux. De même je

remercie : le professeur Nadir Mostefa et le professeur Gasmi Abdelkader.

Qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail Merci à tous les enseignants et les étudiants De département mathématique Pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'ils ont Met à notre disposition pour réaliser ce travail. Enfin à toute personne qui a collaborée à la réalisation Du présent mémoire

Merci

Dedication

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents,

-A mon frère,

-A mes soeures,

-A mes amies,

-A toute la famille

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Introduction

La mesure de non compacité est une outils très utilisé dans un espace de Banach il sont largement utilisés sur le théorème de point fixe ,équation différentielle ,équation intégrale ,et intégro- différentielle dans ce dernière années plusieures travaux on fait la mise au point sur l'étude des équation différentielles fractionnaires

Dans ce mémoire on va étudier la mesure de non compacité cette étude dans le cadre théorique ayant plusieurs applications dans topologie l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs Elle est apparue la première fois par mathématicien Kuratowski en 1930 et après Hausdorff 1957 Notre objectif dans ce sujet comment utilisé la notion de mesure de non compacité pour prouver l'existence d'un problème différentielle d'ordre fractionnaire (équation différentielle d'ordre fractionnaire)

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{r}y\left(t\right) &= f\left(t,y\right) \\ \text{avec les condition} &: \\ y\left(0\right) &= y_0, y\left(T\right) = y_T \end{aligned}$$

à l'aide d'une théorie importante i e ;la théorie du point fixe notamment le théorème du point fixe de Darbo , Mönch ...etc

Ce mémoire est composé en trois chapitres :

Le premier chapitre :consacré sur les définition d'une équation différentielle ordinaire et d'ordre fractionnaire et la théorie de l'existence et l'unicité ,ainsi les définition des fonction spéciales et leurs propriétés

Le deuxième chapitre :étude détaille sur la notion de la mesure de non compacité (mesure de Kuratowski et hausdorff) et leurs propriétés ainsi la relation entre les ensembles compactes ,relativement compacts au sens topologique et au sens mesure et finir par les propriétés des opérateurs compacts par la vision de la mesure de non compacité

Dans le dernier chapitre :on va essayer d'appliquer la notion de la mesure de non compacité sur les problèmes différentiels précisément sur les équations différentielles d'ordre fractionnaires

Enfin ,le mémoire sera clôturé par une Bibliographie.

Chapitre 1

équations différentielles ordinaires et fractionnaires

Dans ce chapitre nous introduisons les notations, les définitions

1.1 Equation différentielle ordinaire

On appelle l'équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante t et la fonction inconnue $x = \varphi(t)$ et ses dérivées $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n)}$ symbolique une équation différentielle est représente comme suit :([?])([6])

$$F\left(t, x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Si la fonction $x = \varphi(t)$ est d'une seule variable indépendante ,l'équation différentielle (1.1) est dit ordinaire est appelle ordinaire car la fonction a déterminer est une fonction d'une variable.

1.1.1 Ordre de l'équation différentielle

Definition 1.1. *On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre le plus élevé de la dérivée dans cette équation :*

Equation différentielle de premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est la forme.

$$F\left(t, x, \dot{x}\right) = 0 \tag{1.2}$$

Example 1.2. *Equation différentielle de premier ordre :*

$$\dot{x} = \cos(x + t)$$

1.1.2 Equation différentielle de seconde ordre

Equation différentielle de seconde ordre est de la forme :

$$F\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}\right) = 0 \tag{1.3}$$

Example 1.3. *Equation différentielle de seconde ordre c constant :*

$$\ddot{x} - t^2 x + c = 0$$

Forme normale d'un équation différentielle

On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme :

$$\dot{x} = f\left(t, x\right) \tag{1.4}$$

1.1.3 Equation différentielle autonome

On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme :

$$x^{(n)} = f\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n-1)}\right)$$

Autrement dit , f ne dépendant pas explicitement de t.

1.1.4 Equation différentielle linéaire

Une EDO de type (1) d'ordre n est linéaire si elle est de la forme :

$$a_0\left(t\right) x\left(t\right) + a_1\left(t\right) \dot{x}\left(t\right) + a_2\left(t\right) \ddot{x}\left(t\right) + ... + a_n\left(t\right) x^{(n-1)}\left(t\right) = g\left(t\right)$$

Avec tous degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t

1.1.5 Solution d'une équation différentielle

On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle tout fonction $x = \varphi\left(t\right)$ de la variable indépendante t, défini sur un intervalle $I = \left]t_1, t_2\right[$ et vérifiant identiquement cette équation en tout points de cet intervalle l'intervalle $\left]t_1, t_2\right[$ est dit intervalle de définition de la solution $x = \varphi\left(t\right)$ (les cas $t_1 = -\infty, t_2 = +\infty$ ne sont pas exclus)

Solution maximales et globales

Definition 1.4. *Soit (x, I) et $\left(\widetilde{x}, \widetilde{I}\right)$ deux solution d'une même équation différentielle ordinaire on dire que $\left(x, \widetilde{I}\right)$ est une prolongement de (x, I) et $I \subset \widetilde{I}$ et $\widetilde{x}\mid_I = x$*

Definition 1.5. *Soient I_1 et I_2 deux intervalle sur $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \subset I_2$ on dit que une solution (x, I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si n'admet pas la prolongement de $\left(\widetilde{x}, \widetilde{I}\right)$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneqq \widetilde{I} \subset I_2$ on verra que même plus tard que I_1 est nécessairement ouvert*

Definition 1.6. *Soit I intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ une solution (x, I) est dit globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier*

Problème de Cauchy général

On appelle problème initial ou problème de Cauchy pour l'équation différentielle (1.4) le problème suivant parmi tout les solutions de l'équation (1.4) la solution satisfaite à la condition initial (1.5) et on écrire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \quad t = t_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

1.1.6 Existence et l'unicité pour le problème de cauchy

Proposition 1.7. *Si la fonction f est continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ tout solution de problème de cauchy est une solution de problème suivant et réciproquement $x \in \mathbb{C}^0(I \times \mathbb{R}^n)$ et*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \tag{1.6}$$

Existence et l'unicité locale

Definition 1.8. *La fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est Lipchitzienne en X s'il existe une constante L appelée la constante de Lipschitz de f ,telle que*

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \| \; \forall t \in I \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Theorem 1.9 (cauchy-Lipshiz-f Lipshizienne). *Soit la fonction f a valeur dans $\mathbb{R}^n$,continue sur $[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ et Lipchitzienne par rapport à x alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ alors il existe une unique fonction $x \in C^1([t_0, t_0 + a], \forall x, y \in \mathbb{R}^n)$ qui vérifie :*

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + a] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Corollary 1.10 (f Lipshizienne sur tout compact). *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ bornée ou non borné et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et Lipchitzienne sur tout compact $k \subset I$ (c'est à dire qu'il existe $L(k)$ telle que $\forall t \in k$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$)*

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L(k) \| x - y \|$$

Donc pour tout $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique fonction $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ solution de problème (1.7)

Definition 1.11. *Soit la fonction* $f : A \to \mathbb{R}^n$ *continue et Lipchitzienne par rapport à* x *sur le cylindre* A :

$$A = \{(t, x), \mid t - t_0 \mid \leq a \parallel x - x_0 \parallel \leq b\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Alors l'équation :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

a une unique solution sur $[t_0 + \alpha t_0, -\alpha]$ *avec* $\alpha = \min(\alpha, \frac{b}{m})$ *où* $m = \sup_{(t,x) \in A} \parallel f(t, x) \parallel$

Existence et l'unicité global

Definition 1.12. *On suppose* $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continue et globalement Lipchitzienne par rapport à* X *alors* $\forall t_0 \in I$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *il existe un unique* $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *solution de problème* (1.7)

1.2 Equations différentielles fractionnaires

Ce section sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : les fonctions spéciales (Gamma, Beta,Mittag-Leffler), l'intégration fractionnaire de Riemann Liouville et de Katugampola, la dérivation fractionnaire au sens Riemann-Liouville, Caputo, Katugampola,qui sont les plus utilisées.([9])

1.2.1 Fonctions spéciales :

Nous présentons les fonctions Gamma , Béta et Mittag-Leffler Ces des fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces application.

La fonction Gamma d'Euler :

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (excepté en certains points)

Definition 1.13.
On appelle fonction Gamma la fonction définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0), \; t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$$

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \; = 1$

2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\tau^2}d\tau = \sqrt{\pi}$ (posant le changement de variable $t =$

Lemma 1.14. *La fonction Gamma est une fonction de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp holomorphe sur le demi plant)et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{R}_+^* \,(resp\ z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0)\,; \Gamma^{(k)}\,(z) = \int (\ln t)^k\, t^{(z-1)}e^{-t}dt$$

Proposition 1.15.
La propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(x)$ est la relation de récurrence suivante :$\forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0, n \in \mathbb{N}$,

1. $\Gamma\,(z+1) = z\Gamma\,(z)$
2. $\Gamma(n) = (n-1)!$
3. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$

La fonction Bêta :

Definition 1.16.
La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler(qui est un type d'intégrale ,au même titre que la fonction Gamma)est une fonction définie par :

$$\beta(p,q) = \int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}dx, (p,q \in \mathbb{C}\,\mathrm{Re}(p) > 0, \mathrm{Re}(q) > 0)$$

La fonction Gamma et la fonction Bêta sont liées par la relation suivante :

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Fonction de Mittage-Leffter

Definition 1.17. *La fonction de Mittage-Leffter est définie par*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \ \alpha > 0.$$

Et la fonction de Mittage-Leffter généralisée est définie par : $E_{\alpha,\ \beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad \alpha,\ \beta > 0.\mathbb{R}$

Theorem 1.18. *Pour tout $\alpha = n \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\begin{aligned}(\frac{d}{dx})^n E_n(\lambda x^n) &= \lambda E_n(\lambda x^n).\\ (\frac{d}{dx})^n x^{\beta-1}E_{n,\beta}(\lambda x^n) &= \lambda x^{\beta-n-1}E_n(\lambda x^n).\end{aligned}$$

Example 1.19. *1.*

$$E_1 = E_{1,1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

2.

$$E_2 = E_{2,1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \cosh \sqrt{x}.$$

3.

$$E_{1,2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x}(e^x - 1).$$

4.

$$E_{1,3} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x).$$

1.2.2 Eléments de calcul fractionnaire

Intégrale de Rimann-Liouville

Fonctions définies sur $[a;b]$ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur$[a,b]$: Notons par$\left(I_{a^+}^1 f\right)$ la primitive de f qui s'annule on a :([9])

$$\forall t \in [a,b]\, ; \left(I_{a^+}^1 f\right)(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau$$

L'intégration de $\left(I_{a^+}^1 f\right)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a : De plus, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \left(I_{a^+}^1 f\right)^2 &= \left(I_{a^+}^1 f\right) \circ \left(I_{a^+}^1 f\right) = \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau)\, d\tau\right) du \\ &= \int_a^t \left(\int_\tau^t du\right) f(\tau)\, d\tau \\ &= \int_a^t (t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on notant $\left(I_{a^+}^1 f\right)$ la n-ième itération de $\left(I_{a^+}^1 f\right)$ une récurrence directe montre que

$$\left(I_{a^+}^1 f\right)^n (t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau$$

Si on note $g = \left(I_{a^+}^1 f\right)^n$,g est donc l'unique fonction vérifiant

$$\forall 0 \le k \le n-1 \ , \ g^k(a) = 0 \ , \ g^{(n)} = f$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante :

Definition 1.20. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *L'intégrale à gauche d'ordre* n *de* f *; que l'on note est définie par*

$$\left(I_{a^+}^1 f\right)^n (t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment. C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, *qui permet de généraliser la définition de la manière suivante*

Definition 1.21. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre* $\alpha > 0$,*est définie par :*

$$\forall t \in [a,b], \left(I_{a^+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre$\alpha > 0$ *par :*

$$\forall t \in [a,b], \left(I_{b^-}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau$$

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$ Il est naturel d'étendre la définition aux axes $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$. Notons ces opérateurs $\left(I_{0^+}^\alpha f\right)$ et $\left(I_{+}^1 f\right)$:

$$\begin{aligned}
\forall t &\in \mathbb{R}^+ : \left(I_{a^+}^1 f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \\
\forall t &\in \mathbb{R} : \left(I_{+}^1 f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

Proposition 1.22. *pour* $\alpha > 0, \beta > 0$ *an a :*

1. $\left(I_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-\alpha)^{\alpha+\beta-1}$
2. $\left(I_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}$

Theorem 1.23. *Si* $f \in L^1([a,b])$ *alors* $\left(I_{a^+}^\alpha f\right)$ *existe pour tout* $\alpha > 0$ *et* $\left(I_{a^+}^\alpha f\right) \in L^1([a,b])$

Proposition 1.24. *Soit* $\alpha, \beta > 0$ *et* $f \in L^1([a,b])$ *alors :*

$$I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta f = I_{0^+ a^+}^{\alpha+\beta} f$$

Intégrale de Katugampola

Nous présentons une généralisation récente introduite par Udita Katugampola qui généralise l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et l'intégrale fractionnaire de Hadamard. l' intégral est maintenant aussi connue sous le nom d'intégrale fractionnaire de Katugampola et donnée par :

Definition 1.25 (Katugampola).
Les intégrales fractionnaires d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $y \in X_c^p [0, T]$ est défini par

$$\left({}^\rho I_{0+}^\alpha y\right)(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t \frac{s^{\rho-1} y(s)}{(t^\rho - s^\rho)^{1-\alpha}}, t \in [0, T]$$

Pour $\rho > 0$. Cette intégrale est appelée l'intégrale du côté gauche. De même façons on peut définie l'intégrale du côté droit,

Remark 1.26. *Considérons l'espace $X_c^p[0, T]$ $(c \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty)$ des fonctions mesurables ysur $[0; T]$ pour $\|y\|_{X_c^p} < \infty$,,oú la norme défini par :*

$$\|y\|_{X_c^p} = \left(\int_0^T |s^c y(s)|^p \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Et pour le cas $p = \infty$

$$\|y\|_{X_c^\infty} = \mathbf{ess} \sup_{0 \leq t \leq T} [t^c |y(t)|].$$

Theorem 1.27. *Soient $\alpha > 0$ et $\rho > 0$. $t \in [0, T]$ Alors*

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \to 1} \left({}^\rho I_{0+}^\alpha y\right)(t) &= \left({}^\rho I_{0+}^\alpha y\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) \, ds \\ \lim_{\rho \to 0} \left({}^\rho I_{0+}^\alpha y\right)(t) &= \left(J_{\alpha+}^\alpha y\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{y(s)}{s} ds \end{aligned}$$

1.2.3 Dérivées fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, on va commencer par introduire les trois plus importantes approches de calcul fractionnaire : au sens de Riemann-Liouville , au sens de Caputo et au sens de Katugampola . On présentera quelques une de leurs propriétés .

Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$ on note $[\alpha]$la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant$[\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha] + 1$soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ I_t^1$ on peut définir une dérivée Fractionnaire d'ordre $0 < \alpha < 1$ par ([9])

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ I_t^{1-\alpha}$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ I_t^{n-\alpha}$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Definition 1.28. *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire de Riemanne-Liouville à gauche d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned}\forall t \in [a,b],\ D_{a^+}^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{a^+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)dx.\end{aligned}$$

De plus, on a vu que le définition dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'intégrale à droite était associée à $(-d/dt)$. le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Definition 1.29. *Soit $\alpha > 0$, et $n = [a] + 1$. la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned}\forall t \in [a,b], D_{b^-}^{\alpha} f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{b^-}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (x-t)^{n-\alpha-1} f(x)dx\end{aligned}$$

Soit maintenant f : les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Definition 1.30. *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ D_{+}^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)dx\end{aligned}$$

De plus, on a vu que le définition (1.3.3)d'intégrale à droit était associée à $(-d/dt)$. le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Definition 1.31. *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. la dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ D_{-}^{\alpha} f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{-}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (x-t)^{n-\alpha-1} f(x)dx.\end{aligned}$$

1. Pour $\alpha = 0,\ n = 1$, on a $D_{a^+}^0 f(t) = \frac{d}{dt}(I_{a^+}^1 f) = f(t)$
2. Toutes ces dérivées coincident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} D_{a^+}^n f(t) = D_{+}^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ D_{b^-}^n f(t) = D_{-}^{\alpha} f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}$$

Proposition 1.32. *Pour $\alpha \geq 0,\ \beta > 0$, on a :*

1.
$$\left(D^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

2.
$$\left(D^{\alpha}_{b^-}(b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}.$$

Remark 1.33. *Pour $\lambda = \beta - 1,\ a = 0$ on a :*

$$\begin{aligned}
\left(D^{\alpha}_{0^+}t^{\lambda}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)....(\lambda+1-\alpha)t^{\lambda-\alpha}\\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda))....(1-(\alpha-\lambda))t^{\lambda-\alpha},
\end{aligned}$$

$$(D^{\alpha}_{0^+}t^{\lambda})(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}, & si \quad \alpha-\lambda \notin \{1,2,......,n\} \\ & \lambda > -1 \\ 0, & si \quad \alpha-\lambda \in \{1,2,........,n\} \end{cases}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1,2,\cdots,n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m,\ m \in \{1,2,...,n\}$ C-à-d

$$(D^{\alpha}_{0^+}t^{\alpha-m})(t) = 0,\ m \in \{1,2,....,n\}.$$

Proposition 1.34. *Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n = [\alpha]+1$, on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $f(t) \in L_p([a,b]),\ (1 \leq p < \infty)$, alors*
$$(D^{\alpha}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}f)(t) = f(t),\ et(D^{\alpha}_{b^-}I^{\alpha}_{b^-}f) = f(t),$$

2. *Si $\alpha > \beta$, et $f(t) \in L_p([a,b]),\ (1 \leq \alpha < \infty)$ alors :*
$$(D^{\beta}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}f)(t) = (I^{\alpha-\beta}_{a^+}f)(t),\ et(D^{\beta}_{b^-}I^{\alpha}_{b^-}f)(t) = (I^{\alpha-\beta}_{b^-}f)(t),$$

3. *Si $f(t) \in C^q([a,b]),\ q = [\alpha+\beta]+1$, alors :*
$$\left(D^{\alpha}_{a^+}D^{\beta}_{a^+}f\right)(t) = \left(D^{\alpha+\beta}_{a^+}f\right)(t),\ et\left(D^{\alpha}_{b^-}D^{\beta}_{b^-}f\right)(t) = \left(D^{\alpha+\beta}_{b^-}f\right)(t),$$

4. *Si $f(t) \in L_1([a,b]),\ (I^{n-\alpha}_{a^+}f) \in AC^n([a,b])$, alors :*
$$\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha}_{a^+}f)(t) &= f(t) - \sum_{K=1}^{n}\frac{(I^{n-\alpha}_{a^+}f)^{(n-K)}(a)}{\Gamma(\alpha-K+1)}(t-a)^{K}\\
(I^{\alpha}_{b^-}D^{\alpha}_{b^-}f)(t) &= f(t) - \sum_{K=1}^{n}\frac{(-1)^{n-K}(I^{n-\alpha}_{b^-}f)^{(n-K)}(b)}{\Gamma(\alpha-K+1)}(b-t)^{K}.
\end{aligned}$$

Dérivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des compositions dans la formule de définition1.28 semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo ([9]).

Definition 1.35. *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], \quad {}^C D_{a^+}^{\alpha} f(t) &= I_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx, \end{aligned}$$

Définition aussi son analogue à droite.

Definition 1.36. *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$ la dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], {}^C D_{b^-}^{\alpha} f(t) &= I_{b^-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx. \end{aligned}$$

Remark 1.37. *Par contre, de telles définition ne recollent pas correctement aux dérivées classique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}^C D_{a^+}^{n} f(t) = f^n(t) - f^n(a) \\ {}^C D_{b^-}^{n} f(t) = (-1)^n \left(f^n(t) - f^n(b)\right) \end{cases}$$

Heureusement, le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

1. On note $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$; $f \in AC([a,b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b])$ telle que $f = c + \int_a^x \varphi(t) dt$.
2. On note $AC^n([a,\dot{b}])$,$n \in \mathbb{N}^*$, l'espace des fonctions f définies sur$[a;b]$ a valeurs dans C qui ont des dérivèes continues sur $[a;b]$ jusqu'a l'ordre $n-1$ donc :

$$AC^n([a,b]) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : f^k \in C([a,b]), k = 0...n-1, f^{n-1} \in AC([a,b]) \right\}$$

Lemma 1.38. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+/\mathbb{N}, n = [\alpha] + 1$ si $f \in AC^n([a,b])$ alors presque partout :*

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to n^-} {}^c D_{a^+}^{\alpha} f(t) &= f^n(t) \\ \lim_{\alpha \to n^-} {}^c D_{b^-}^{\alpha} f(t) &= (-1)^n f^n(t) \end{aligned}$$

Proposition 1.39. *Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, on a :*

1.
$$\left({}^C D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1},\ \beta > n$$

2.
$$\left({}^C D_{b^-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1},\ \beta > n$$

Remark 1.40. *Pour $\lambda = \beta - 1,\ a = 0$ on a :*

$$\begin{aligned} {}^C D_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda} &= \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha} \\ \left({}^C D_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & si,\ \lambda \notin \{0,1,2,......n-1\} \\ \\ 0 & si,\ \lambda \in \{0,1,2,......n-1\} \end{cases} ,\lambda > -1 \end{aligned}$$

C-à-d
$$\left({}^C D_{0^+}^{\alpha} t^m\right)(t) = 0, \quad m \in \{0,1,2,.......,n-1\}$$

Theorem 1.41. *Soit $\alpha \geq 0$, et $n = [\alpha]+1$ Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*

Theorem 1.42. *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha]+1$ si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,possède $(n-1)$ dérivées en (a) et $(D_{a^+}^{\alpha} f)$ existe. Alors*

$$\left({}^C D_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = D_{a^+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]$$

persique pour tout $t \in [a,b]$.

Corollary 1.43. *Soit $\alpha \geq 0,\ n = [\alpha]+1$ et $(D_{a^+}^{\alpha} f),\ ({}^C D_{a^+}^{\alpha} f)(t)$ sont existent, on suppose que $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0,1,2,..,n-1$. Alors*

$$({}^C D_{a^+}^{\alpha} f)(t) = (D_{a^+}^{\alpha} f)(t).$$

Proposition 1.44. *Soit $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ n = [\alpha]+1$, on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $f(t) \in C^q([a,b])$, $q = [\alpha+\beta]+1$, alors :*
$$\left({}^C D_{a^+}^{\alpha}\ {}^C D_{a^+}^{\beta} f\right)(t) = \left({}^C D_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(t),$$
et
$$\left({}^C D_{b^-}^{\alpha}\ {}^C D_{b^-}^{\beta} f\right)(t) = \left({}^C D_{b^-}^{\alpha+\beta} f\right)(t),$$

2. *Si $f(t) \in C^n([a,b])$, ou $f(t) \in AC^n([a,b])$, alors :*

$$\begin{aligned} \left(I_{a^+}^{\alpha}\ {}^C D_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \\ \left(I_{b^-}^{\alpha}\ {}^C D_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k. \end{aligned}$$

Dérivées fractionnaires de Katugampola

Definition 1.45 (*Katugampola* fractionnaire dérivés). *Soit$\alpha, \rho \in \mathbb{R}$tell que $\alpha > 0$, $\rho > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. on a Katugampola dérivés fractionnaires, pour $0 \leq t \leq T \leq \infty$, est défini par :*

$$ {}^{\rho}D_{0+}^{\alpha} y(t) = \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n} \circ \left({}^{\rho}I_{0+}^{n-\alpha} y\right)(t) = \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_{0}^{t} \frac{s^{\rho-1} y(s)}{(t^{\rho}-s^{\rho})^{\alpha-n+1}} ds, \quad (1.8) $$

si les intégrales existent.

Remark 1.46. *En tant que base exemple, nous citons pour $\alpha, \rho > 0$, et $\mu > -\rho$, alors :*

$$ {}^{\rho}D_{0+}^{\alpha} t^{\mu} = \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(1+\frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right)} t^{\mu-\alpha\rho}. \quad (1.9) $$

Donne en particulier ${}^{\rho}D_{0+}^{\alpha} t^{\rho(\alpha-m)} = 0; \forall m = 1, 2, ..., n$
En fait, pour $\alpha, \rho > 0$, et $\mu > -\rho$, nous avons :

$$ \begin{aligned} {}^{\rho}D_{0+}^{\alpha} t^{\mu} &= \frac{\rho\alpha-n+1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n} \int s^{\rho+\mu-1} (t^{\rho}-s^{\rho})^{n-\alpha-1} ds \quad (1.10) \\ &= \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(1+\frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right)} \left[n-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right] \left[n-\alpha+\frac{\mu}{\rho}-1\right] ... \left[1-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right] t^{\mu-\alpha\rho} \\ &= \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(1+\frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right)} t^{\mu-\alpha\rho} \end{aligned} $$

Si on met $m = \alpha - \frac{\mu}{\rho}$, on obtient de **??**

$$ {}^{\rho}D_{0+}^{\alpha} t^{\rho(\alpha-m)} = \rho^{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha-m+1)}{\Gamma(n-m+1)} (n-m)(n-m-1)\cdots(1-m)\, t^{-\rho m}. \quad (1.11) $$

Donc, pour $m = 1, 2, \ldots, n$, nous avons ${}^{\rho}D_{0+}^{\alpha} t^{\rho(\alpha-m)} = 0$, $\forall \alpha, \rho > 0$.
Par $C[0, T]$ nous désignons l'espace Banach de tous les espaces continus fonctions de $[0, T]$ en $\mathbb{R}$

$$ \|y\|_{\infty} = \sup\{|y(t)| : 0 \leq t \leq T\}. \quad (1.12) $$

Remark 1.47. *soit $p, c, T \in \mathbb{R}_{+}^{*}$tel que $p \geq 1$, $c > 0$, et $T \leq (pc)^{\frac{1}{pc}}$. il est clair que, $\forall y \in C[0, T]$*

$$ \|y\|_{X_c^p} = \left(\int_0^T |s^c y(s)|^p \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{T^c}{(pc)^{\frac{1}{p}}} \|y\|_{\infty}, \quad (1.13) $$

et

$$ \|y\|_{X_c^{\infty}} = \mathbf{ess} \sup_{0 \leq t \leq T} [t^c |y(t)|] \leq T^c \|y\|_{\infty}. \quad (1.14) $$

Ce qui implique que $C[0,T] \hookrightarrow X_c^p[0,T]$, *et :*

$$\|y\|_{X_c^p} \leq \|y\|_\infty \ \ \forall \ \ T \leq (pc)^{\frac{1}{pc}}. \tag{1.15}$$

Theorem 1.48. *soit*$\alpha, \rho \in \mathbb{R}$ *tell que* $\alpha \in (0,1)$, *et* $\rho > 0$. *alors pour* $f, g \in X_c^p[0,T]$ *où*$1 \leq p \leq \infty$ *on a :*
- Propriété Inverse :

$$^\rho D_{0^+}^\alpha \ ^\rho I_{0^+}^\alpha f(t) = f(t) \tag{1.16}$$

- Propriété linéarité :

$$\begin{aligned} ^\rho D_{0+}^\alpha (f+g)(t) &= {}^\rho D_{0+}^\alpha f(t) + {}^\rho D_{0+}^\alpha g(t) \\ ^\rho I_{0+}^\alpha (f+g)(t) &= {}^\rho I_{0+}^\alpha f(t) + {}^\rho I_{0+}^\alpha g(t) \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.2.4 Equation différentielle de type Caputo

On commence par l'équation homogène de type Caputo

Existence de solution

([9])

Lemma 1.49. *Soit* $r > 0$ *si nous supposons que* $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$ *Alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo :*

$$^c D^r u(t) = 0, 0 < t < 1$$

Admet une solution unique

$$\begin{aligned} u(t) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + ... + c_{n-1} t^{n-1} \\ \text{où} &: \\ C_m &\in \mathbb{R} \quad \text{avec} : \ m = 0, 1, 2, ..., n-1. \end{aligned}$$

Lemma 1.50. *Supposons que* $u \in C^m([0,1])$,*alors :*

$$\begin{aligned} I^{rc} D^r u(t) &= u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + ... + c_{n-1} t^{n-1} \\ \text{où} &: \\ C_m &\in \mathbb{R} \quad \text{avec} : \ m = 0, 1, 2, ..., n-1. \end{aligned}$$

Lemma 1.51. *Soit* $1 < r \leq 2$ *et* $y \in C(0,1)$,*alors l'unique solution du problème au limites*

$$\begin{cases} ^c D^r u(t) = y(t), 0 < y < 1 \\ u(0) + u'(0) = 0 \\ u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}$$

Est donné par :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds$$

Tel que :

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(1-t)(1-s)^{r-1}+(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} + \frac{(1-t)(1-s)^{r-2}}{\Gamma(r-1)}, 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{(1-t)(1-s)^{r-1}+(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} + \frac{(1-t)(1-s)^{r-2}}{\Gamma(r-1)}, 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Problème de Cauchy pour les équations différentielles lineaires

Corollary 1.52. *Soit $r = n, n \in \mathbb{N}$ ou $r \in \mathbb{C}$ tel que $n-1 < r < n$ et $g(t) \in L([a,b])$,si $a(t) \in L^{\infty}([a,b])$ et borné dans $[a,b]$ alors le problème de Cauchy pour les équations différentielles lineaires suivant d'ordre r et $b_k \in \mathbb{C}$:*

$$\begin{aligned} D^r y(t) &= a(t)\, y(t) + g(t) \\ D_{+a}^{r-k} y(a+) &= b_k \end{aligned}$$

Admet une unique solution $y(t)$ dans l'espace $L^r(a,b)$,
On pratique ,il existe une unique solution $y(t)$dans l'espace $L^r(a,b)$ pour le problème

$$\begin{aligned} D^r y(t) &= \lambda (t-a)^{\beta}\, y(t) + g(t) \\ D_{+a}^{r-k} y(a+) &= b_k \qquad \lambda, \beta \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Corollary 1.53. *Soit $r = 1$, $r \in \mathbb{C}$ tel que $0 < r < 1, b_0 \in \mathbb{C}$: et $g(t) \in L([a,b])$,si $a(t) \in L^{\infty}([a,b])$ et borné dans $[a,b]$ alors le problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} D^r y(t) &= a(t)\, y(t) + g(t) \\ D_{+a}^{1-r} y(a+) &= b_0 \end{aligned}$$

Et le problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} D^r y(t) &= a(t)\, y(t) + g(t) \\ \lim_{t \to a} \left[(t-a)^{1-r}\, y(t)\right] &= c \end{aligned}$$

Admet une unique solution $y(t)$ dans l'espace $L^r(a,b)$

Chapitre 2

Mesure de non compacité

Dans cette chapitre, nous rappelons brièvement la notion de compacité dans un espace métrique puis introduisons les opérateurs compacts entre les espaces de Banach. Nous donnons en suite un résultat fondamental de compacité pour les fonctions continues : le théorème (d'Ascoli) et quelques définitions sur la mesure de non compacité,et pour résoudre des équations différentielle d'ordre fractinnaire où le deuxiéme membre est non linéaire nous besoin des théorie du point fixe .

2.1 Notation et définition :

Dans cette section,nous ressemblons quelques définitions et notations que nous utilisons par la suite soit $(X, \| \, . \, \|)$ un espace de banach,notons par A un sous-ensemble de X,et ∂A la frontière de A,
De plus,rappelons le diamètre de A

$$\begin{aligned} diam\,(A) &= \sup\{\|x-y\|; x, y \in A\} \\ dist\,(x, A) &= \inf\{\|x-y\|; x, y \in A\} \end{aligned}$$

Si A est sous-ensemble de X, alors $\bar{A}$ est $\overline{convA}$ sont la fermeture et l'adhérence de l'enveloppe convexe de A respectivement notons par

$$B_r\,(X, A) = B_r = \{x \in X; \|x-a\| \leq r\}\,, B_1\,(X) = B\,(X) = B_X$$

La boule fermé dans X de centre a et de rayon r et

$$B_r\,(X) = \partial B_r = \{x \in X, \|x\| = r\}\,, S_1\,(X) = S\,(X) = S_X$$

La sphère dans X.

Soient X et Y deux espaces de banach de dimension infini et on noté l'ensemble des opérateur linéaire de X dans Y par $L(X,Y)$,nous mettons $L\,(X) = B\,(X,X)$ un operateur liéaire T défini sur X vers Y

2.2 Notion sur les opérateurs

2.2.1 compacité(Reppel) :

Definition 2.1.
Une classe de sous-ensemble de E,s'appelle une couverture d'un ensemble G de E ,si nous avons

$$G \subset \bigcup_j U_j$$

Definition 2.2 (Compacité).
Soit U un ensemble d'un espace normé X, U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extraire un sous-recouvrement fini, ***i.e.****,*

$$\forall V_j,\ j \in J\ (ouverts)\ tels\ que\ U \subset \bigcup_{j\in J} V_{j(k)}\ \exists V_{j(k)},\quad j(k) = 1, 2, ..., n$$

$$tel\ que\ U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j(k)}$$

Definition 2.3.
Un ensemble U est dit séquentiellement compact si pour toute suite d'éléments dansU contient une sous-suite converge vers un élément dans U.

Definition 2.4.
Un sous-ensemble d'un espace normé est compact si et seulement si il est séquentiellement compact .

Definition 2.5.
Un sous-ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compact.

Definition 2.6.
Un sous-ensemble G d'un espace normé est totalement borné si il éxiste une suite finie i,e :

$$\forall \epsilon > 0 : G \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(\varphi_j, \epsilon)$$

Theorem 2.7.
Tout ensemble borné de dimension finie d'un espace norme est relativement compact.

Definition 2.8 (Opérateur linéaire).
Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans Fest dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :
Condition additive :

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, onaA(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$$

Condition homogène :

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \mathbb{k} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi)$$

Definition 2.9 (Opérateur borné).
Un opérateur linéaire A définie sur Edans Fest dit borné s'il existe une constante positive $C \succ 0$, tel que :

$$\|A(x)\|_F \preceq C \|x\|_E, \forall x \in E$$

Definition 2.10 (Opérateur Compact).
Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé Xdans un espace normé Y, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un ensemble relativement compact dans Y

2.2.2 compacité dans C(G)

Definition 2.11 (Compacité Dans $C(G)$).
Dans cette partie, l'espace des fonctions continues définies dans C(G) est muni de la norme maximum :

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in G} |\varphi(x)|$$

Theorem 2.12 (de Bolzano-Weierstrass).
Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si toute suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente.

Theorem 2.13 (Arzela-Ascoli).
Un ensemble $U \subset C(G)$ est relativement compact si et seulement si les condition suivants sont vérifie i,e :

1. *L'ensemble U est borné telle que :*

$$\forall \varphi \in U : \forall x \in k, \exists M > 0 : \mid \varphi(x) \mid \leq M$$

2. *L'ensemble U est équicontinu :*

$$\forall \epsilon > 0 : \forall \varphi \in U : \forall x, y \in k : \exists \delta > 0 \ \textit{telleque} \ : \mid x - y \mid < \delta \rightarrow \mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid \leq \epsilon$$

Definition 2.14.
SoitA un opérateur linéaire d'un espace norme X dans un espace norme Y,on dit que Aest un opérateur compact d'il envoie tout ensemble borné G dansX unensemble relativement compact $A(G)$dansY .

Definition 2.15.
Un opérateur A de X dans Y est compact si et seulement si pour toute suite bornée$\{\varphi_n\}$ de X,la suite $\{A\varphi_n\}$contient une sous suite convergente dans Y

Theorem 2.16.
Autrement dit ,la fermeture $\overline{A(G)}$*est compact.*

Definition 2.17.
Un ensemble $G \subset X$ *est relativement compact si pour toute suite*$\{\varphi_n\}$ *il existe une sous suite* $\{\varphi_{n(k)}\}$ *qui converge dans* Y*.*

2.3 Mesure de non compacité :

La mesure de non compacité est un outil trés utile dans les espaces de banach ,ils sont largement utilisé dans la théorie du point fixe ,les équations différentielles,les équations fonctinnelles ,les intégrales et équations integro-différentielles,....etc ([7])

2.3.1 Mesure de non compacité en général :

Avant de rappeler la mesure de non compacité,on note par $(X, \|\cdot\|)$ un espace de banach , nous désignous par M_X la famille des sous-ensembles bornée non vide de X,et par N_X la famille des sous-ensemble relativement compact de X ,et lenveloppent convexe d'un ensemble $A \subset X$ notons par $conv(A)$.

Definition 2.18.
Une applicaion $\mu : M_X \to [0, +\infty[$ *est appellée la mesure de non compacité dans l'espace* X*,qui satisfait les condition suivantes :*

$$\textit{La famille } \ker(\mu) := \{D \in M_X \textit{ telle que :} \mu(D) = 0\} \neq \phi, \textit{ et } \ker(\mu) \subset N_X$$

(est appelé le noyau de MNC)

Theorem 2.19.
Soit $A, B \in M_X$ *alors :*

1. *Si* $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
2. $\mu\left(\overline{A}\right) = \mu(A)$
3. $\mu\left(\overline{conv\ A}\right) = \mu(A)$
4. $\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda\mu(A) + (1-\lambda)\mu(B), \lambda \in [0,1]$
5. μ*est dit semi-norme si* $\left\{\begin{array}{c} \mu(\lambda A) = |\lambda|\, \mu(A) \ (\mu \textit{ est dit homogéne }) \\ \mu(A+B) \leq \mu(A) + \mu(B) \ (\mu \textit{ est dit subadditif}) \end{array}\right\}$
6. *Si* (A_n)*ensemble de suite de* M_X *telle que* $A_{n+1} \subset A_n$ *(*$n = 1, ..., n$*) et* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ *,alors* $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *et* $A_\infty \in \ker(\mu)$

Definition 2.20.
Une mesure de non compacité est appelée une mesure avec propréte maximale si $\max(\mu(A), \mu(B)) = \mu(A \cup B)$.

Definition 2.21.
Une mesure de non compacité est dit régulière si $\ker(\mu) = N_X$*,subline et possède une propriété maximale .*

Definition 2.22.
Une mesure de non compacité est lipschitzienne si elle satisfait la condition de lipschitz

$$\mid \mu(A) - \mu(B) \mid \leq \mu(B(X))\, d_H(A, B)$$

Avec :

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup d_{x\in A}(x, A), \sup_{y\in B} d(y, B)\right\}$$

Et :
$B(X)$ *la boule fermée dans* X *et de centre* X *et de rayon* 1.

2.4 Mesure de non-compacité de Kuratowskii :

Kuratowski fut le premier(1930) a introduire et étudier la notion de la mesure de non-compacité ([16])

Definition 2.23.
La mesure de non-compacit e de Kuratowski d'un ensemble borné
'$A \in M_X$*, notée* $\alpha(A)$*, est définie par :*

$$\alpha(A) = \inf\left\{\forall\epsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i, B_i \subset X, diam(B_i) < \epsilon, i = 1, .., n\right\}$$

où :diamB_i *désigne le diamètre de l'ensemble* B_i.

$$\alpha(A) = \inf\{\epsilon > 0 : admet\ une\ recouverment\ fini\ par\ des\ ensemble\ de\ diamètre < \epsilon\}.$$

avec :
B *est sous ensemble de* X *et* $B \in M_X$
On notera que, dans cette difinition, l'expression $diamB_i < \epsilon$ *peut etre remplacée par*$diamB_i < \epsilon$.
il est clair que $\alpha(A) \leq diamA$ *pour tout ensemble borné* A*dans* M_X *et que* $\alpha(A) = 0$ *si* A *est fini. Les propriétés essentielles de la mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné sont résumées dans le théorème suivant :*

Theorem 2.24.

Soit (X, d) *un espace métrique et* $A, A_1, A_2 \in M_X$ *, alors*

1. $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{A}$*est compact.*
2. $A \subset A_1 \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(A_1)$
3. $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$
4. $\alpha(A_1 \cup A_2) = \max\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$
5. $\alpha(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$
6. *Si* X *est complet,*$(F_n)_n$ *une suite décroissante d'ensembles non vides, fermés et bornés telle que :*$\lim_n \alpha(F_n) = 0$ *alors* $F_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *est un sous-ensemble non vide et compact*

Démonstration.

□

1. Par définition meme de la mesure de non-compacité.
2. Soit $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$,$\{B_i\}_{i=1}^n$ un recouvrement fini de l'ensemble A avec $diam B_i \leq \epsilon_1$; $i = 1, ..., n$ et $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$un recouvrement fini de l'ensemble A_1 avec $diam \varphi_j \leq \epsilon_2$; $j = 1, ..., m$ Puisque $A \subset A_1$on peut toujours choisir les $\varphi_j$telle que :
$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i \subset \bigcup_{j=1}^m \varphi_j$$
Ceci implique $\alpha(A) < \epsilon_2$,Par conséquent ,$\alpha(A) \leq \alpha(A_1)$.
3. Puisque $A \subset \overline{A}$ alors $\alpha(A) \leq \alpha(\overline{A})$ d'aprés l'assertion 2,il suffit de démontrer l'inégalité dans l'autre sens :$\alpha(\overline{A}) \leq \alpha(A)$ Soit $\epsilon > 0$ Avec $diam B_i \leq \epsilon$; Pour $i = 1, ..., n$,on a
$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n B_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{B_i}$$
Comme $diam B_i = diam \overline{B_i}$,on déduit que $\alpha(\overline{A}) < \epsilon$,par conséquent $\alpha(\overline{A}) \leq \alpha(A)$.
4. D'aprés l'assertion 2 on a :
$$\begin{aligned} A_1 &\subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow \alpha(A_1) \leq \alpha(A_1 \cup A_2) \\ A_2 &\subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow \alpha(A_2) \leq \alpha(A_1 \cup A_2) \\ &\text{Donc :} \\ \max(\alpha(A_1), \alpha(A_2)) &\leq \alpha(A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$
Montrons l'inégalité dans l'autre sens ,soit $\epsilon, \epsilon_{1,}\epsilon_2 > 0, r = \max(\alpha(A_1), \alpha(A_2))$ et consédérons $\{B_i\}_{i=1}^n, \{\varphi_j\}_{j=1}^m$ des recouvrements finis des ensembles A_1, A_2 respectivement avec $diam B_i < \epsilon_1$pour $i = 1, ..., n$ et $diam \varphi_j \leq \epsilon_2$pour $j = 1, ..., m$ on

a $diamB_i < r+\epsilon$ et $diam\varphi_j < r+\epsilon$ pour $i=1,...,n$ et $diam\varphi_j \leq \epsilon_2$pour $j=1,...,m$ par conséqent,

$$A_1 \cup A_2 \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \varphi_j\right) \Rightarrow A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{l} G_k < r+\epsilon.$$

D'où :

$$\alpha\left(A_1 \cup A_2\right) \leq \max\left(\alpha\left(A_1\right), \alpha\left(A_2\right)\right).$$

5. utilisons l'assertion 2 on obtient :

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &\subset A_1 \Rightarrow \alpha\left(A_1 \cap A_2\right) \leq \alpha\left(A_1\right) \\ A_1 \cap A_2 &\subset A_2 \Rightarrow \alpha\left(A_1 \cap A_2\right) \leq \alpha\left(A_2\right) \\ \text{D'où} &: \\ \alpha\left(A_1 \cap A_2\right) &\leq \min\left\{\alpha\left(A_1\right), \alpha\left(A_2\right)\right\} \end{aligned}$$

6. Montrons que F_∞est non vide ,Choisissons, pour chaque n, un élément $x_n \in F_n$.Posons $X_n = \{x_i, i \geq n\}$. Puisque $X_n \subset F_n$ alors $\alpha\left(X_n\right) \leq \alpha\left(F_n\right); \forall n$. Par passage a la limite, on obtient $\alpha\left(X_1\right) = 0$. C'est a dire X_1 est relativement compact. Donc la suite$(Xn)_n$contient une sous-suite $\left(X_{n_k}\right)_k$ convergente dans X. Soit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Comme F_∞ est un sous-ensemble fermé de X alors $x \in F_n$; $\forall n$. Ceci implique que $F_\infty \neq \emptyset$.

   Montrons maintenant que F_∞ est compact. Comme $F_\infty \subset F_n; \forall n$ alors $\alpha\left(F_\infty\right) \leq \alpha\left(F_n\right)$et par passage a la limite quand $n \to \infty$, on obtient $\alpha\left(F_\infty\right) = 0$. C'est a dire F_∞ est relativement compact et donc compact puisqu'il est fermé.

Si X est un espace normé alors la mesure de non-compacité de Kuratowski vérifie, en outre, les propriétés citées dans la proposition suivante

Proposition 2.25.
soit (X,d) un espace normé et $A, A_1, A_2 \in M_X$, alors :

1. $\alpha\left(A_1 + A_2\right) \leq \alpha\left(A_1\right) + \alpha(A_2)$
2. $\alpha(A+x) = \alpha(A), \forall x \in X.$
3. $\alpha\left(\lambda A\right) = \mid \lambda \mid \alpha\left(A\right), \forall x \in \mathbb{k},$
4. $\alpha(A) = \alpha(con(A))$ *où $conA$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble A.*

Démonstration.

□

1. Soit $\epsilon_1\epsilon_2 > 0, A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i, A_2 \subset \bigcup_{j=1}^{m} \varphi_j$ avec $diamB_i < \epsilon_1$pour $i=1,...,n$ et $diam\varphi_j < \epsilon_2$ pour $j=1,...,m$.

   Alors :

$$A_1 + A_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\left(B_i + \varphi_j\right)$$

Avec :

$$diam\left(B_i + \varphi_j\right) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$$

c'est à dire :

$$\alpha\left(A_1 + A_2\right) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$$

Ceci implique que

$$\alpha\left(A_1 + A_2\right) \leq \alpha\left(A_1\right) + \alpha(A_2).$$

2. D'une part, en utilisant le point précédent on aboutit à

$$\alpha(A + x) \leq \alpha(A) + \alpha(\{x\}) = \alpha(A)$$

Et d'une part,

$$\alpha(A) = \alpha(A + x - x) \leq \alpha(A + x) + \alpha(\{-x\}$$

D'où

$$\alpha(A + x) = \alpha(A), \forall x \in X$$

3. Considérons $\epsilon > 0, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ avec $diam B_i < \epsilon$ Pour $i = 1, ..., n$ Alors :pour tout $\lambda \in \Bbbk, \lambda A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \lambda B_i$ et $diam \lambda B_i =\mid \lambda \mid diam B_i <\mid \lambda \mid \epsilon$
C'est à dire :

$$\alpha(\lambda A) \leq\mid \lambda \mid \alpha(A)$$

L'autre inégalité est évidente puisque :

$$\alpha(A) = \alpha(\lambda^{-1}\lambda A) \leq\mid \lambda^{-1} \mid \alpha(\lambda A)$$

4. L'énégalité $\alpha(A) = \alpha(con(A))$ est toujours satisfaite puisque $A \subset con(A)$
Pour démontrer l'autre inégalité,$\alpha(con(A)) \leq \alpha(A)$
Pour $A_i$sous suite borné de X $diam A_i < d$ pour tout $i = 1, ..., n$ et $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ on a :

$$con(A) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_i \in con(A_i)\,(i1, ..., n)\right\}$$

pour $\epsilon > 0$ et

$$A = \left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, (i = 1, ..., n)\right\}$$

Puis A sous suit compact de$(\mathbb{R}^n, \parallel . \parallel_\infty)$ où $\parallel \lambda_1, ..., \lambda_n \parallel = \max_{1 \leq i \leq n} \mid \lambda_i \mid$.([15]) ([4])

2.5 Mesure de non-compacité de Hausdorff :

En 1957 ,Goldenstein, Goh'berg et Markus ont introduit une autre mesure de non-compacité appelée mesure de non-compacité de Hausdorff .

Definition 2.26.
La mesure de non-compacit e de Hausdorff d'un ensemble borné $A \in M_X$*, notée* $\chi(A)$*, est définie par :*

$$\chi(A) = \inf \left\{ \epsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon, i = 1, .., n \right\}$$

Où : $B(x_i, r_i)$ *désigne la boule de centre* x_i *et de rayon* r_i*.*
où :

$$\chi(A) = \inf \{\epsilon > 0 \ ,B \ admet\ un\ recouverement\ fini\ des\ boule\ de\ rayons\ < \epsilon\}$$

avec B *est la famille des sous espace bornés de* X *et* $B \in M_X$ *Dans cette définition, l'inégalité* $r_i < \epsilon$*, peut etre remplacée par* $r_i < \epsilon$*, De plus, les centres* x_i *des boules qui recouvrent l'ensemble* A *ne sont pas forcement dans l'ensemble* A *(*$x_i \in X$*, en général). Alors une autre définition (équivalente) de la mesure de non-compacité de Hausdorff est donnée par :*

$$\chi(A) = \inf \{\epsilon > 0 : A \ admet\ un\ \epsilon\text{-réseau fini dans } X\}$$

Les propriétés fondamentales de la mesure de non-compacité de Hausdorff sont citées dans le théorème suivant :

Theorem 2.27.
Soit (X, d) *un espace métrique et* $A, A_1, A_2 \in M_X$ *, alors*

1. *Si* A *est fini alors :*$\chi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ *totalement bornée* $\Leftrightarrow \overline{A}$*est compact.*
2. *Si* A *est fini,alors* $\chi(A) = 0$.
3. $A \subset A_1 \Rightarrow \chi(A) \leq \chi(A_1)$
4. $\chi(A) = \chi\left(\overline{A}\right) = \chi(con(A))$
5. $\chi(A_1 \cup A_2) = \max\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$
6. $\chi(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$
7. *Si* X*est complet,*$(F_n)_n$*une suite décroissante d'ensembles non vides, fermés et bornés telle que :* $\lim_n \chi(F_n) = 0$ *alors* $F_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *est un sous-ensemble non vide et compact.*

Démonstration.

□

1 et 2 Les assertion 1et 2 sont évidentes d'aprés la définition de la mesure de non-compacité

3. Soit $A \subset A_1, B$ un ϵ-réseau fini de A_1,alors B est aussi fini un ε-réseau fini de A_1,et d'aprés définition de la mesure de non-compacité χ,on obtient : $\chi(A) \leq \chi(A_1)$

4. D'aprés le point précédent on a :

$$A \subset \overline{A} \Rightarrow \chi(A) \leq \chi\left(\overline{A}\right).$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens. soit $\epsilon > 0, B(x_i, r_i)$ des boules de centre x_i et de rayon r_i tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), r_i < \epsilon$,Pour $i = 1, ..., n$ Alors an a :

$$\overline{A} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(x_i, r_i)$$

Ceci implique que,$\chi\left(\overline{A}\right) < \epsilon$,Par conséquent,$\chi\left(\overline{A}\right) \leq \chi(A)$.

5. Soit $\{x_1, ..., x_n\}$un ϵ-réseau fini de $A_1, \{y_1, ..., y_m\}$ un μ-réseau fini de A_2
Alors $\{x_1, ..., x_n\} \cup \{y_1, ..., y_m\}$ est un ϵ_1-réseau fini de $(A_1 \cup A_2)$ où $\epsilon_1 = \max\{\epsilon, \mu\}$

6. C'est évident, puisque

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &\subset A_1 \Rightarrow \chi(A_1 \cap A_2) \leq \chi(A_1) \\ A_1 \cap A_2 &\subset A_2 \Rightarrow \chi(A_1 \cap A_2) \leq \chi(A_2) \end{aligned}$$

D'où :

$$\chi(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$$

7. On fait un raisonnement analogue à celui qui a été fait avec la mesure de non-compacité de Kuratowski.Lorsque l'espace X est normé, on démontre alors d'autres propriétés.

Proposition 2.28.
Soit (X, d) un espace normé et $A, A_1, A_2 \in M_X$, Alors :

1. $\chi(A_1 + A_2) \leq \chi(A_1) + \chi(A_2)$
2. $\chi(A + x) = \chi(A), \forall x \in X.$
3. $\chi(\lambda A) = \mid \lambda \mid \chi(A), \lambda \in \mathbb{k}$
4. $\chi(A) = \chi(con(A))$ *où conA désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble A*

Démonstration. 1. Soit $\{x_1, ..., x_n\}$un ϵ-réseau fini de A_1, $\{y_1, ..., y_m\}$ un μ-réseau fini de A_2 Alors l'ensemble $\{x_i + y_j \ i = 1, ..., n; j = 1, ..., m\}$ est un $(\epsilon + \mu)$-réseau fini de $(A_1 + A_2)$. Donc $\chi(A_1 + A_2) \leq \epsilon + \mu$.

2. Il suffit de démontrer que $\{x_1,...,x_n\}$est un ϵ-réseau fini de A si et seulement si $\{x_1+x,...,x_n+x\}$ est un ϵ-réseau fini de l'ensemble $(A+x)$ pour tout $x \in X$. En effet, soit $x \in X$ et supposons$\{x_1+x,...,x_n+x\}$ est un ϵréseau fini de $(A+x)$. Prenons $y \in (A+x)$; $y = y_1+x$ avec $y_1 \in A$ Alors il existe : $(x_i+x) \in \{x_1+x,...,x_n+x\}$ tel que $d(y_1+x; x_i+x) < \epsilon$. Mais

$$d(y_1+x; x_i+x) < d(y_1; x_i) + d(x; x) < \epsilon :$$

Par conséquent$\{x_1,...,x_n\}$ est un ϵ-réseau fini de A. supposons maintenant que $\{x_1,...,x_n\}$ soit un ϵ-réseau fini de A. Alors, pour tout $y \in A$, il existe $x_i \in \{x_1,...,x_n\}$ tel que $d(y; x_i) < \epsilon$. Comme

$$d(y_1+x; x_i+x) < d(y_1; x_i) + d(x; x) < \epsilon, \text{pour tout } x \in X$$

On déduit que $\{x_1+x,...,x_n+x\}$ est un ϵ-réseau fini de l'ensemble$(A+x)$.

3. Cette assertion est évidente , si l'ensemble $\{x_1,...,x_n\}$ est un ϵ-réseau fini de A alors$\{\lambda x_1,...,\lambda x_n\}$ est un $\shortmid \lambda \shortmid \epsilon$-réseau fini de l'ensemble (λA), pour tout $\lambda \in \Bbbk$.

4. Il suffit de démontrer l'inégalité suivante $\chi(conA) \leq \chi(A)$. Soit$\epsilon > 0, \mu > 0$ tel que $\chi(A) < \mu$. Choisissons l'ensemble $\{Z_1,...,Z_n\}$ un μ-réseau de$A$. Alors $N = con\,\{Z_1,...,Z_n\}$ est compact et vérifie $d(x; N) \leq \mu$ pour tout $x \in conA$. mais puisque N est compact on peut trouver un ensemble fini$\{W_1,...,W_n\}$qui est un ϵ-réseau de N. donc

$$d(w_i; x) \leq d(x; N) + d(N; w_i) \leq \epsilon + \mu$$

C'est à dire$\{W_1,...,W_n\}$ est un $(\epsilon + \mu$)-réseau de $conA$. L'autre inégalité est satisfaite puisque

$$A \subset conA \Rightarrow \chi(A) \leq \chi(conA)$$

La mesure de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff de la boule unité fermée (ou ouverte) sont données dans le théorème suivant :

□

Theorem 2.29.
Soit X un espace normé de dimension finie et $\overline{B}_x$ la boule unité fermée dans X. Alors

1. $\alpha\left(\overline{B}_x\right) = 2.$
2. $\chi\left(\overline{B}_x\right) = 1$

2.6 Quelques théorème de point fixe

Dans ce section on a destiné aux différents outils et résultats de l'analyse fonctionnelles utilisés par la suite : principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème de Schauder et pour résoudre des équations différentielle d'ordre fractionnaire où deuxiéme mêmbre est non linéaire nous besoin des théorie du point fixe

On note par $L^1(I,E)$ L'espace de Banach des fonctions mesurables $y : I \to E$ qui sont Bochner intégrales muni de la norme

$$\| y \|_{L^1} = \int_0^T \| y(t) \| \, dt$$

L'espace de Banach des fonctions mesurables $y : I \to E$ qui sont bornées est noté par $L^\infty(I,E)$ il est muni de la norme :

$$\| y \|_{L^\infty} = \inf \{c > 0, \| y(t) \| < c, \text{pp } t \in J\}$$

On note par $AC^1(I,E)$ l'espace de Banach des fonctions dérivables $y : I \to E$ ayant la première dérivée absolument continue

Definition 2.30. *L'application $f : I \times E \to E$ est dite de carathéodory si :*

1. *$t \to f(t,u)$ est mesurable $\forall u \in E$*
2. *$u \to f(t,u)$ est continue presque pour tout $t \in I$*

   De plus si :
3. *$\forall r > 0$, il existe une fonction $\Phi_r \in L^1(I,\mathbb{R}_+)$ tell que $\forall u \in \mathbb{R}$ avec $\| u \| < r$:*

$$\| f(t,u) \| \leq \Phi_r(t)$$

Alors L'application f est dite L^1 carathéodory

Definition 2.31. *Soit X une espace de Banach on dit que F est contractent $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ on a :*

$$| F(x_1) - F(x_2) | \leq k \, | x_1 - x_2 |, 0 < k < 1$$

Definition 2.32 (Banach). *Soit X une espace de Banach ,et soit l'opérateur $F : X \to X$ est contractent alors : F admets un point fixe unique* ***i-e :***

$$\exists y^* \in X \text{ tellque } F(y^*) = y^*$$

Definition 2.33 (Schauder). *Soit $(E;d)$ un espace métrique complet et A une partie convexe fermé de Eet soit $F : A \to A$ on a si l'ensemble $Fx : x \in A$ relativement compact dans E .Alors F possède au moins un point fixe.*

Theorem 2.34. *On dit que . A est convexe* ***i-e*** *:*

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in A$$

Theorem 2.35 (Schaefer). *Soit X une espace de Banach et l'opérateur $F : X \to X$ complément continu Alors F possède au moins un point fixe . on dit que$F$ est complètement continu si :*

i) $\forall b \in X \Rightarrow F(b)$ est relativement compacte,

ii) Si l'ensemble $P = \{y \in X, \lambda F(y) = y, \lambda \in [0,1]\}$ est borné.

Theorem 2.36 (type non linéaire de alternative de Leray-Schauder). *Soit E un espace de Banach avec $P \in E$ une espace fermé et convexe. Assumer U est une sous-ensemble relativly overte de P avec $0 \in U$ et $A : \overline{U} \to P$ est une carte compacte. Alors soit*

i) *A admet une point fixe en $\overline{U}$. ou*

ii) Il y a une point $u \in \partial\, U$ et $\mu \in (0;1)$ avec $u = \mu A(u)$

Definition 2.37. *L'application $T : C \subset E \to E$ est dit une α_E contaction s'il existe une constante $k < 1$ positive telle que :*

$$\alpha_E(T(W)) \leq k\alpha_E(W), \forall (W \text{ fermé et borné})$$

Theorem 2.38 (Mönch). *Soit D un sous espaces fermé borné et convexe d'un espace de banach E tel que $0 \in D$et soit N une application continue de D dans D si l'implication*

$$V = \overline{convN(v)} \text{ ou } V = N(v) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(v) = 0$$

est vérifiér pout tout ensemble V de D alors N admet un point fixe dans D .

Theorem 2.39 (Darbo-sadovskii). *Soit C un sous ensemble non vide ,fermé, borné et convexe d'un espace de banach E et soit l'application continue $T : C \to C$ une α_E contraction alors T admet au moins un point fixe dans C*

Theorem 2.40 (Darbo-généralisé). *Soit C un sous ensemble non vide ,fermé, borné et convexe d'un espace de banach E et soit l'application continue*

$$T : C \to C$$

satisfaisant :

$$\mu(T(W)) \leq \Phi\mu(W), \forall W \subset C$$

où μ un mesure de non compacité arbitraite et $\Phi : [0, \infty[\to [0, \infty[$,une fonction strictement croissante (non nécessairement continue)avec :

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(t) = 0, \forall t \in [0, \infty[$$

Alors T admet au moins un point fixe dans C.

Lemma 2.41. *Soit C un sous ensemble non vide , fermé , borné et convexe d'un espace de banach $C(I, E)$ et soit G une fonction continue de $I \times I$ et $f : I \times E \to E$ une fonction qui satisfait les condition de carathéodory et il existe $p \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $t \in I$ et tout sous ensemble borné $B \subset E$ an a :*

$$\lim_{h\to 0^+} \alpha(f(I_{t,h} \times B)) \leq p(t)\alpha(B); I_{t,h} = [t-h, t] \cap I$$

si V un sous ensemble équicontinue de D ,Alors

$$\alpha\left(\left\{\int_I G(t,s) f(s, y(s))\, ds : y \in V\right\}\right) \leq \int_I \parallel G(t,s) \parallel p(s)\alpha(V(s))\, ds$$

2.7 Mesure de non compacité sur les opérateurs

Definition 2.42. *Soit $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur continu et $\alpha(.)$ est la mesure de non compacité de kuratowski dans X, pour tout $k > 0$, on dit que T est une contraction si pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X et*

$$\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A)$$

pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$ alors $\alpha(A) > 0$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X et :

$$\alpha(T(A)) < \alpha(A)$$

Definition 2.43. *Soit $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur continu et $\chi(.)$ est la mesure de non compacité de Hausdroff dans X et $k > 0$, T est dit $K-$boule contraction si pour tout sous-ensemble borné A de $D(T), T(A)$ un sous-ensemble borné dans X et :*

$$\chi(T(A)) \leq k\chi(A)$$

Remark 2.44. *Il est bien connu que :*

1. Si $k < 1$, alors tous les opérateurs k-ensemble-contraction se condensation.
2. Chaque opérateur de condensation est 1-ensembel-contraction.
   Soit $T \in L(X)$, nous définissons $\alpha(T)$ par

$$\alpha(T) = \inf \{k \text{ tel que } T \text{ est } k - \text{ensembel} - \text{contraction}\}$$

   et $\chi(T)$ par

$$\chi(T) = \inf \{k \text{ tel que } T \text{ est } k - \text{boule} - \text{contraction}\} .$$

Dans le lemme suivant, nous donnons certaines propriétés importantes de $\alpha(T)$ et $\chi(T)$.

Lemma 2.45. *Soit X un espace de Banach et $T \in L(X)$ nous avons*

1. $\frac{1}{2}\ \alpha(T) \leq \chi(T) \leq 2\alpha(T)$.
2. $\alpha(T) = 0 \ \Leftrightarrow\ \chi(T) = 0 \ \Leftrightarrow\ T$ est compact.
3. Si $T,\ S \in L(X)$, donc $\alpha(TS) \leq \alpha(T)\alpha(S)$ et $\chi(TS) \leq \chi(T)\chi(S)$.
4. Si $k \in K(X)$,donc $\alpha(T + k) = \alpha(T)$ et $\chi(T + k) = \chi(T)$.
5. $\alpha(T^*) \leq \chi(T)$ *et* $\alpha(T) \leq \chi(T^*)$, où T^* désigne l'opérateur de dual de T
6. Si B est un sous- ensemble borné de X, donc $\alpha(T(B)) \leq \alpha(T)\alpha(B)$.

Chapitre 3

Mesure de non compacité et leur application sur EDF

dans ce chapitre on essaye d'applique la notion de la mesure de non compacité sur les problème de type d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire

3.1 Application de (MNC)pour l'existance de solution des EDF

ce section est consacré à l'etude de l'existance de solution pour les problèmes aux limites on consédère l'équation différentielle fractionnaire suivante :([8])

1. $$\begin{cases} {}^{c}D^{r}y\left(t\right)=f\left(t,y\right),\forall t\in I=\left[0,T\right],1<r<2 \\ y\left(0\right)=y_{0},y\left(T\right)=y_{T} \end{cases} \tag{3.2.1}$$

   Où $f:[0;T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; est une fonction continue.

2. $$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t)=f(t,y(t)), \quad t\in[0,T], \quad 0<\alpha<1 \\ ay(0)+by(T)=c \end{cases} \tag{3.1}$$

   Où $f:[0;T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue. et $a;b;c$ des constant réelles tellque $a+b\neq 0$:

dans lesquel
${}^{c}D^{r}$ est la dérivée fractionnaire de caputo :
$f:I\times E\to E$ est une fonction donné,satisfaisant quelques hypothèse qui seront spécifiées plus tard,et E est une espace de banach avec la norme $\|\ .\ \|$ cette étude est basé sur les travaux de R.P.Agarwal et la mesure de non compacité est souvent utilisée dans différentes

branches d'analyse non linéaire spécialement dans l'existence de solution de différentes types d'équation intégrales la mesure de non compacité associée au théorème de point fixe de Mönch vont nous permettre d'établir l'existence de solution de problème (3.2.1)

3.1.1 Existence de Solution de L'équations Différentielles Fractionnaires de Type Caputo

Premièrement ,on va définir ce qu'est une solution du problème aux limites (3.2.1) ([8])

Definition 3.1. *une fonction $y \in AC(I,E)$ est dite une solution du problème (3.2.1) si y satisfait l'équation*

$$\begin{cases} {}^{c}D^{r}y(t) = f(t,y)\,, \text{sur } I \\ y(0) = y_0, y(T) = y_T \end{cases}$$

Lemma 3.2. *soit $1 < r < 2$ et $h : I \to E$ une fonction continue,une fonction y est dite solution de l'équation intégrale fractionnaire :*

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) + \int_0^T G(t,s)\,h(s)\,ds \\ \text{où} &: \\ g(t) &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T \\ \text{et} &: \\ G(t,s) &= \frac{1}{\Gamma(r)} \begin{cases} (t-s)^{r-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & 0 \le s \le t \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{r-1} & , t \le s \le T \end{cases} \end{aligned}$$

si et seulement si y est une solution du problème aux limites

$$\begin{cases} {}^{c}D^{r}y(t) = h(t)\,, t \in J \\ y(0) = y_0, y(T) = y_T \end{cases}$$

Démonstration. On utilise le lemme 1.51 on réduire le problème(3.2.1) à une équation intégrale équivalente

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{r}y(t) &= h(t) \\ &\Leftrightarrow I^{rc}D^{r}y(t) = I^{r}h(t) \\ &\Leftrightarrow y(t) + c_0 + c_1 t = I^{r}h(t) \\ &\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t h(s)(t-s)^{r-1} ds + c_0' + c_1' t \\ \text{avec} &: \\ c_0' &= -c_0, c_1' = -c_1 \\ \text{on a} &: \\ y(0) &= c_0' = y_0 \end{aligned}$$

et

$$y(T)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^T h(s)(T-s)^{r-1}\,ds+c_0'+c_1'T$$

ce qui implique que

$$c_1'=\frac{y(T)}{T}-\frac{y(0)}{T}-\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^T h(s)(T-s)^{r-1}\,ds$$

donc :

$$\begin{aligned} y(T) &= \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^T h(s)(T-s)^{r-1}\,ds+y_0+\frac{y(T)\,t}{T}-\frac{y(0)\,t}{T}-\frac{1}{T\Gamma(r)}\int_0^T h(s)(T-s)^{r-1}\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(r)}\left(\int_0^t h(s)\left((t-s)^{r-1}-\frac{t}{T}(T-s)^{r-1}\right)ds-\frac{t}{T}\int_t^T (T-s)^{r-1}h(s)\,ds\right)+\left(1-\frac{t}{T}\right)y_0 \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$y(t)=\int_0^T G(t,s)\,h(s)\,ds+g(t)$$

avec :

$$g(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)y_0+\frac{t}{T}y_T$$

et :

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(r)}\left\{\begin{array}{c}(t-s)^{r-1}-\frac{t}{T}(T-s)^{r-1}\,,0<s<t\\ -\frac{t}{T}\int_t^T(T-s)^{r-1}\,,t<s<T\end{array}\right.$$

comme la fonction $G(t,s)$ est continue sur $[0\times T]\times[0\times T]$ on note par :

$$G^*=\sup\{\|\ G(t,s)\ \|\}\,(t,s)\in I\times I$$

la fonction g est continue sur I, danc il existe :

$$g^*=\sup\{\|\ g(t)\ \|\}\,t\in I$$

pour établir le résultat principal concernant l'existence des solution de(3.2.1) consédérons les hypothèse suivantes sur f :

(H_1) $f:I\times E\to E$ satisfait aux condition de carathéodory

(H_2)il existe $p\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$tel que

$$\|\ f(t,y)\ \|\leq p(t)\leq\|\ y\ \|,\forall t\in I,y\in E$$

(H_3) $\forall t\in I$ et pour tout ensemle borné $B\subset E$ on a :

$$\lim\alpha\left(f\left(I_{t,h}\times B\right)\right)\leq p(t)\,\alpha(B)\,,I_{t,h}=[t-h,t[\cap I$$

□

Theorem 3.3. *On suppose les hypothèses* (H_1) _ (H_3)*vérifiée tel que :*

$$G^* \int_0^T p(s)\,ds < 1$$

alors le problème aux limites (3.2.1) admet au mois une solution .

Démonstration. on transforme le problème (3.2.1) au problème deu point fixe ,on consédérons l'opérateur :

$$\begin{aligned} N \quad &: \quad C(I,E) \to C(I,E) \\ y \quad &\to \quad (Ny)(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)\,f(s,y(s))\,ds \end{aligned}$$

le point fixe de N est un solution du problème (3.2.1).

soit :

$$R \geq \frac{g^*}{1 - G^* \int_0^T p(s)\,ds}$$

et on consédère l'ensemble :

$$D_R = \{y \in C(I,E), \| y \|_\infty \leq R\}$$

D_R est fermé ,borné et convexe . □

BUT :

Afin de prouver l'existence de point fixe de N ,on doit montrer que N satisfait les hypothèses du théorème 2.38 la preuve se fait en trois étapes :

1. *Continuité de* N :

   Soit $\{y_n\}$ une suite telle que :

$$y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \quad \text{dans } C(I,E)$$

   Donc $\forall t \in I$,on a :

$$\begin{aligned} \| \quad (Ny_n)(t) - (Ny)(t) \| &= \| \int_0^T G(t,s)\,f(s,y_n(s))\,ds - \int_0^T G(t,s)\,f(s,y(s))\,ds \| \\ &\leq \int_0^T \| G(t,s) \| \| f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)) \|\,ds \\ &\leq G^* \int_0^T \| f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)) \|\,ds \end{aligned}$$

   Comme F est de carathéodory , on a f mesurable par rapport à y, donc on peut appliquer la théorème de la convergence dominée de lebesgue .

   Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \| \quad (Ny_n)(t) - (Ny)(t) \| \leq G^* \int_0^T \lim_{n\to\infty} \| f(s,y_n(s)) - f(s,y(s)) \|\,ds \leq 0$$

   Donc :

$$\| \quad (Ny_n)(t) - (Ny)(t) \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'où la continuité de N.

2. *N applique D_R dans D_R* :
   Soit $y \in D_R$,pour tout $t \in I$,on a :

$$\begin{aligned}
\| \quad N(T) \| &= \| g(t) + \int_0^T G(t,s) f(s, y(s))\, ds \| \\
&\leq \| g(t) \| + \int_0^T \| G(t,s) \| \| f(s, y(s))\, ds \| \\
&\leq g^* + G^* \int_0^T p(s) \| y \| \, ds, (\text{par } (H_2)) \\
&\leq g^* + RG^* \int_0^T p(s)\, ds \\
&\leq R, \left(\text{car : } R \geq \frac{g^*}{1 - G^* \int_0^T p(s)\, ds} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc} &: \\
&\| \quad N(T) \| \leq R \\
\text{C'à'd} &: \\
(Ny)(t) &\in D_R \Rightarrow N(D_R) \subset D_R
\end{aligned}$$

3. *Bornitude et équicontinuité de $N(D_R)$* :
   Par l'etape 2 on a :

$$\begin{aligned}
N(D_R) &= \{N(y) : y \in D_R\} \subset D_R \\
\text{donc } \forall y &\in D_R \text{ on a :} \\
&\| \quad N(D_R) \|_\infty \leq R
\end{aligned}$$

Donc $N(D_R)$ est borné.
Pour l'équicontinuité de $N(D_R)$,soit $t_1, t_2 \in I$ alors :

$$\| N(y)(t_2) - N(y)(t_1) \| \underset{t_1 \to t_2}{\longrightarrow} 0$$

Donc $N(D_R)$ est équicontinue .
Maintenant ,soit V un sous ensemble de D_R tel que :

$$V \subset (\overline{conv} N(V) \cup \{0\})$$

V est borné et équicontinue .
En plus ,la fonction $v \to v(t) = a(V(t))$ est continue sur I.Puisque g est continue sur I ,elle est borné sur I ,donc l'ensemble $\left\{ \overline{g(t) ; t \in I} \right\}$ est compact .

En utilisant (H_3) ,la propositin 1.15 et la propriété de la mesure α on a ,pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
v(t) &= a(V(t)) \\
&< a(N(V)(t) \cup \{0\}) \\
&\leq a(N(V)(t)) \\
\text{Car} &: \\
a(N(V)(t) \cup \{0\}) &= \max\{a(N(V)(t), \alpha(\{0\}))\} \\
\text{On a} &: \\
(N(V)(t)) &= \left\{g(t) + \int_0^T G(t,s) f(s, y(s))\, ds, y \in V\right\} \\
&= \{g(t), t \in I\} + \left\{\int_0^T G(t,s) f(s, y(s))\, ds, y \in V\right\} \\
\text{Donc} &: \\
\alpha(N(V)(t)) &= \alpha\left(\{g(t), t \in I\} + \left\{\int_0^T G(t,s) f(s, y(s))\, ds, y \in V\right\}\right) \\
&\leq \alpha(\{g(t), t \in I\}) + \alpha\left(\left\{\int_0^T G(t,s) f(s, y(s))\, ds, y \in V\right\}\right) \\
&\leq \alpha\left(\left\{\int_0^T G(t,s) f(s, y(s))\, ds, y \in V\right\}\right) \\
&\leq \int_0^T (\| G(t,s) \| p(s) v(s))\, ds \\
&\leq G^* \| v \|_\infty \int_0^T p(s)\, ds \\
\text{Car } G^* \int_0^T p(s)\, ds &< 1 \\
\text{On a alors} &: \\
&\| v \|_\infty = 1, \text{c'à'd} : v(t) = 0, \forall t \in I \\
\text{I.e} &: \\
\alpha(V(t)) &= 0 \\
\text{Donc} &: V(t) \text{ est relativement compact dans } E.
\end{aligned}$$

Par le théorème d'Arzelà_Ascoli,V est relativement compact dans $D_{\mathbb{R}}$ (car $V \subset D_{\mathbb{R}}$ est borné et équi
Puisque toutes les hopothèses du théorème **??**sont satisfaites ,l'application N admet par conséquent un point fixe qui est solution pour le problème (3.2.1).

3.1.2 Existence de Solution de L'équations Différentielles Fractionnaires de Type Katugampola

Dans ce section, nous étudions l'existence et le caractère unique de solutions pour une classe de des équations différentielles fractionnaires non linéaires implicites via l'équation de

Katugampola dérivé fractionnaire avec une condition initiale suivant :

$$^{\rho}D_{0+}^{r}u\left(x\right)=f\left(x,u\left(x\right)\right),x>0,x\in I:=\left[0,T\right],1<r<2 \tag{3.2}$$

Avec :

$$u\left(0\right)=0,u^{'}\left(0\right)=u_{1}. \tag{3.3}$$

Où $0<r\leq 2,\rho>0$,et $f:[0,T]\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

Les arguments se fondent sur l'arrêt Banach principe de contraction, théorème de Schauders à point fixe et théorème non linéaire alternative de type Leray-Schauder.

Lemmes Fondamentaux

Nous rappelons quelques définitions et résultats qui seront utilisés dans la suiteNotons par $C(I,\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues $u:I\rightarrow\mathbb{R}$, avec la norme habituelle du supremum

$$\left\|u\right\|_{\infty}=\sup\left\{\left\|u\left(x\right),x\in I\right\|\right\}$$

Soit $L^{1}(I,\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $u:I\rightarrow\mathbb{R}$ qui sont intégrables de Bochner, doté de .la norme

$$\left\|u\right\|_{L^{1}}=\int_{I}u\left(x\right)ds$$

u $C^{1}(I,\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions $u:I\rightarrow R$ dont les dérivées premières sont absolument continues.De plus, pour un ensemble donné ω de fonctions $\omega:I\rightarrow\mathbb{R}$, désignons par

$$\begin{aligned}\omega\left(x\right)&=\left\{z\left(x\right):z\in\omega\right\},x\in I\\ et&:\\ \omega\left(I\right)&=\left\{z\left(x\right):z\in\omega\right\},x\in I\end{aligned}$$

Lemma 3.4. *Soit $r,\rho>0$ Si $u\in C[0;T]$; alors :*

(i) L'équation différentielle fractionnaire $\left(^{\rho}D_{0+}^{r}y\right)\left(x\right)=0$,admet une solution unique :

$$u\left(x\right)=C_{0}+C_{1}x^{\rho}+C_{2}x^{2\rho}+...+C_{n}x^{(n-1)\rho},\text{telle que } r>0,C_{m}\in\mathbb{R},\text{et } m=1,2,...,n,n=[r]+1$$

(ii) Si $^{\rho}D_{0+}^{r}u\in C\left(I,E\right)$;et $0<r\leq 1$, alors

$$^{\rho}I_{0+}^{r\rho}D_{0+}^{r}u\left(x\right)=u\left(x\right)+C_{0}+C_{1}t^{\rho}+C_{2}t^{2\rho}+...+C_{n}t^{(n-1)\rho}, \tag{3.4}$$

pour certain constant $C_{m}\in\mathbb{R},m=0,1,2,...,n,n=[r]+1$

Theorem 3.5. *Soit S un sous-ensemble borné, fermé et convexe d'un espace de Banach tel que $0 \in S$ et soit P une application continu de S vers lui-même. une application continue de S vers lui-même. Si l'implication*

$$\omega = \overline{conv}(\omega) \;\; ou\; \omega = P(\omega) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(\omega) = 0$$

est valable pour tout sous-ensemble ω de S, alors P a un point fixe.

Lemma 3.6. *Soit S un sous-ensemble borné, fermé et convexe d'un espace de Banach $C(I, \mathbb{R})$, G une fonction continue sur $I \times I$ et f une fonction de $I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait aux conditions de Carath'éodory, et supposons qu'il existe $P \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ tel que, pour chaque $x \in I$ et chaque ensemble borné $B \subset \mathbb{R}$, on ait*

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha(f(I_{t,h} \times B)) \leq p(x)\alpha(B), I_{t,h} = [x - h, t[\cap I$$

Si ω est un sous-ensemble équicontinu de S, alors

$$\alpha\left(\left\{\int_I G(x,s) f(s, u(s))\, ds, u \in \omega\right\}\right) \leq \int_I \|G(x,s)\| p(s)\alpha(\omega(s))\, ds$$

Résultat d'existence de solution

La présente étude implique que nous définissions ce que nous présentons par une solution du problème donné (3.2) - (3.3)

Definition 3.7. *On dit qu'une fonction $u \in uC(I, \mathbb{R})$ est une solution de la PIV (3.2) - (3.3), si U satisfait l'équation${}^\rho D^r_{0^+} u(x) = f(x, u(x))$ sur I, et les conditions et $u'(0) = u_1$.*

Lemma 3.8. *Soit $1 < \omega < 2$ et que $f : I \to \mathbb{R}$ soit continue. On dit d'une fonction u qu'elle est solution de l'équation intégrale fractionnaire de Katugampola équation intégrale fractionnaire*

$$u(x) = u_0 + u_1 x^\rho + \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} f(s, u(s))\, ds \tag{3.5}$$

si et seulement si u est une solution des équations différentielles fractionnaires de Katugampola avec la condition initiale

$$\begin{aligned} {}^\rho D^r_{0^+} u(x) &= f(x, u(x)), x \in [0, T] \quad (3.6) \\ u(0) &= u_0, u'(0) = u_1 \quad (3.7) \end{aligned}$$

Démonstration. Par le lemme 3.4, nous réduisons (3.6) - (3.7) à une équation intégrale équivalente

$$u(x) = u_0 + u_1 x^\rho + \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} f(s, u(s))\, ds + C_0 + C_1 x^\rho$$

pour certaines constantes $C_0; C_1 \in R$. Les conditions (3.7)) donnent,

$$C_0 = u_0, C_1 = u_1$$

On obtient donc (3.5). Inversement, si u satisfait l'équation (3.5), les équations (3.6) - (3.7) sont vraies. Pour dériver le résultat d'existence pour le problème (3.2) - (3.3), nous donnons des conditions appropriées comme suit :

($\mathbf{H}_1$) $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaites la condition de carathéodory

($\mathbf{H}_2$)Il existe $P \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \cap C(I, \mathbb{R}_+)$ tellle que

$$\|f(x, u)\| \leq q(x) \|u(x)\|$$

pour $x \in I$ et chaque $u \in R$

($\mathbf{H}_3$)Pour chaque $x \in I$ et chaque ensemble borné $B \subset R$, nous avons.

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha(f(I_{t,h} \times B)) \leq p(x) \alpha(B), I_{t,h} = [x - h, t[\cap I$$

□

Theorem 3.9. *Supposons que* ($\mathbf{H}_1$) $-$ ($\mathbf{H}_3$) *soient vérifiés. Soit $q^* = sup_{x \in I} q(x)$. Si*

$$\frac{q^* T^{\rho r}}{\rho^r \Gamma(r+1)} < 1 \tag{3.8}$$

alors la PIV (3.2) - (3.3) a au moins une solution.

Démonstration. Convertir le problème (3.2) - (3.3) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $P : C(I, R) \to C(I, R)$défini par

$$P(u)(x) = u_0 + u_1 x^\rho + \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} f(s, u(s)) \, ds$$

Clairement, les points fixes de l'opérateur P sont des solutions du problème (3.2) - (3.3). Soit

$$r_0 \geq \frac{\|u_0\| + \|u_1\| T^\rho}{1 - \frac{q^* T^{\rho r}}{\rho^r \Gamma(r+1)}} \tag{3.9}$$

et considérer

$$S_{r_0} = \{u \in C(I, \mathbb{R}) : \|u\|_\infty \leq r_0\}$$

Clairement, le sous-ensemble S_{r_0}est fermé, borné et convexe. Nous allons montrer que P satisfait les hypothèses du théorème (3.5).

La preuve du théorème est donnée en plusieurs étapes.

Etape 1 : P est continu. Soit $\{u_n\}$ une suite telle que$u_n \to u$dans $C(I, R)$. Alors pour chaque $x \in I$,

$$\|P(u_n)(x) - P(u)(x)\| = \left\| \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} [f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))] \, ds \right\| \tag{3.10}$$

$$\leq \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\| \, ds \tag{3.11}$$

Puisque f est de type Carathéodory, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\|P(u_n)(x) - P(u)(x)\|_\infty \to 0, \text{ comme } n \to \infty$$

Etape 2 : P fait correspondre S_{r_0} à lui-même. Pour chaque $u \in S_{r_0}$ par (H_2) et (3.9), on a, pour chaque $x \in I$,

$$\begin{aligned}
\|P(u)(x)\| &\leq \|u_0 + u_1 x^\rho\| + \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} \|f(s,u(s))\| ds \\
&\leq \|u_0\| + \|u_1\| T^\rho + \frac{\rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} q(s) \|u\| ds \\
&\leq \|u_0\| + \|u_1\| T^\rho + \frac{r_0 \rho^{1-r}}{\Gamma(r)} \int_0^x (x^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} q(s) ds \\
&\leq \|u_0\| + \|u_1\| T^\rho + \frac{r_0 \rho^{1-r} q^* T^{\rho r}}{\rho^r \Gamma(r+1)} \\
\|P(u)(x)\| &\leq \|u_0\| + \|u_1\| T^\rho + \frac{r_0 \rho^{1-r} q^* T^{\rho r}}{\rho^r \Gamma(r+1)} \\
\|P(u)(x)\| &\leq r_0
\end{aligned}$$

Etape 3 : $P(S_{r_0})$est bornée et équicontinue. Par la revendication 2, il est évident que $P(S_{r_0}) \subset C(I,R)$est borné. Pour l'équicontinuité de $P(S_{r_0})$, soit $x1; x2 \in I$, $x_1 < x_2$ et $u \in P(S_{r_0})$. Alors

$$\begin{aligned}
\|P(u)(x_2) - P(u)(x_1)\| &\leq \|u\| \|x_2^\rho - x_1^\rho\| + \frac{\rho^{r-1}}{\Gamma(r)} \int_0^{x_2} (x_2^\rho - s^\rho)^{r-1} s^{\rho-1} \|f(s,u(s))\| ds - \frac{\rho^{r-1}}{\Gamma(r)} \int_0^{x_1} (\\
&\leq \|u\| \|x_2^\rho - x_1^\rho\| + \frac{\rho^{r-1}}{\Gamma(r)} \int_0^{x_1} \left[(x_2^\rho - s^\rho)^{r-1} - (x_1^\rho - s^\rho)^{r-1}\right] s^{\rho-1} \|f(s,u(s)) \\
&\leq \|u\| \|x_2^\rho - x_1^\rho\| + \frac{\rho^{r-1}}{\Gamma(r)} \int_0^{x_1} \left[(x_2^\rho - s^\rho)^{r-1} - (x_1^\rho - s^\rho)^{r-1}\right] s^{\rho-1} q(s) \|u(s)\| \\
\mathit{Donc} &: \\
\|P(u)(x_2) - P(u)(x_1)\| &\leq \|u\| \|x_2^\rho - x_1^\rho\| + \frac{r_0 \rho^{r-1}}{\Gamma(r)} \int_0^{x_1} \left[(x_2^\rho - s^\rho)^{r-1} - (x_1^\rho - s^\rho)^{r-1}\right] s^{\rho-1} q(s) ds +
\end{aligned}$$

Comme $x_1 \to x_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Maintenant, soit ω un sous-ensemble de S_{r_0} tel que $\omega \subset \overline{conv}(P(\omega) \cap \{0\})$. D'après la revendication 3, le sous-ensemble ω est borné et équicontinu et donc la fonction $z \to z(x) = \alpha(\omega(x))$ est continue sur I. Puisque la fonction $x \to u_0 + u_1 x^\rho$ est continue sur I, l'ensemble $\overline{\{U_0 + U_1 x^\rho ; x^\rho \in I\}} \subset R$ est compact. En utilisant ce fait,(H_3), le lemme (3.6) et les propriétés de la mesure α, on a, pour chaque $x \in I$

$$\begin{aligned}
z(x) &= \alpha\left(P(\omega)\cup\{0\}\right)\\
&\leq \alpha\left(P(\omega)(x)\right)\\
&\leq \frac{\rho^{r-1}}{\Gamma(r)}\int_0^x \left(x^\rho - s^\rho\right)^{r-1} s^{\rho-1} q(s)\,\alpha(\omega(s))\,ds\\
&\leq \frac{\rho^{r-1}}{\Gamma(r)}\int_0^x \left(x^\rho - s^\rho\right)^{r-1} s^{\rho-1} q(s)\,\omega(s)\,ds\\
&\leq \|z\|_\infty \frac{\rho^{r-1}}{\Gamma(r)}\int_0^x \left(x^\rho - s^\rho\right)^{r-1} s^{\rho-1} q(s)\,ds\\
&\leq \|z\|_\infty \frac{q^* T^{r\rho}}{\rho^r \Gamma(r+1)}
\end{aligned}$$

Cela donne ça

$$\|z\|_\infty \leq \frac{\|z\|_\infty q^* T^{r\rho}}{\rho^r \Gamma(r+1)}$$

Par (3.8), il s'ensuit que $\| z \|_\infty = 0$, c'est-à-dire $z(x) = 0$ pour tout $x \in I$, et alors $\omega(x)$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$. En examen du théorème d'Ascoli-Arzel'a,Wis relativement compact dans S_{r_0} . En appliquant maintenant le théorème (3.5), nous concluons que P a un point fixe qui est une solution du problème (3.2) - (3.3) □

Example 3.10. *Nous considérons le problème suivant de la PIV fractionnelle de Katugampola*

$$\begin{cases} \left({}^\rho D^r_{0+} u\right)(x) = f\left(x, u(x)\right), x \in I := [0,1] \\ u(0) = 0, u'(0) = 1 \end{cases} \tag{3.12}$$

où $\omega = \frac{3}{2}$ $\rho = 1$ *et*

$$f\left(x, u(x)\right) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{9\sqrt{\pi}}{16}\right) x^{-\frac{1}{4}} \sin x|u|}{64\left(1+\sqrt{x}\right)}, x \in I, u \in \mathbb{R} \\ 0, x = 0, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Clairement, la fonction f est continue. L'hypothèse (H_2) est satisfaite avec

$$\|f\left(x, u(x)\right)\| \leq \frac{\left(\frac{9\sqrt{\pi}}{16}\right) x^{-\frac{1}{4}} \sin x\,|u|}{64\left(1+\sqrt{x}\right)}$$

où $q(x) = \frac{\left(\frac{9\sqrt{\pi}}{16}\right) x^{-\frac{1}{4}} \sin x|u|}{64\left(1+\sqrt{x}\right)}$ *Par conséquent, la condition (3.8) est satisfaite avec*

$$\frac{q^* T^{\rho r}}{\rho^r \Gamma(r+1)} < 1$$

Par conséquent, le théorème (3.9) implique que le problème (3.12) a au moins une solution définie sur I.

Conclution

Le travaille qu'on a fait dans ce mémoire à un résultat trés important c'est l'etude sur l'existence de solution d'un équation différentielle d'ordre fractionnaire où le deuxiéme membre est non linéaire ,utilisons la théorié de point fixe et de prouverque l'opérateur différentiel est un opérateur contractant etilisons les propriétés de la mesure de non compacité au lieu les propriétés topologiques.

Bibliographie

[1] R.P.Agarwal ,M.Benchohra ,et D.Seba ,on the Application of Measure of Noncompactness to the Existence of solution for fractional Differential Equation,Birkhauser Verlag Basel/Switzerland ,vol 55(2009),221-230.

[2] R.P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani.*Boundary value problems for differential inclusions with fractional order*. Adv. Stud. Contemp. Math. 12 (2) (2008)181–196.

[3] R.P. Agarwal, M. Benchohra and S. Hamani, Boundary value problems for fractional differential equations. Georgian Math. J. (to appear).

[4] J. Bana s and M. Mursaleen. Sequence spaces and measures of noncompactness with applications to di erential and integral equations. Springer, 2014.

[5] M.Nadir ,cours sur les équations intégrales ,université de M'sila, 2016

[6] M.Nadir ,généralité sur les équations différentielles ordinaires ,université de M'sila , 2016 http :\\www.mostefanadir.com\Integral%20Equations.htm

[7] Belabbaci Chafika , Mesure de non compacité et spectre essentiel , thèse de doctorat LMD en science, 2017.

[8] BELADJOUZ.SOUAAD mesure de non compacité et applications sur les EDO mémoire 2017.

[9] Arioua.Yacine,Introdiction aux calcul fractionnaire et application,Master EDP et application premiére année (semestre 2).

[10] A. Belarbi, M. Benchohra, A. Ouahab, Existance results for functional differential equations of fractional order. Appl. Anal. 85 (2006),1459–1470.

[11] M. Benchohra, S. Hamani, S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order. Surveys Math. Appl. 3 (2008),1–12

[12] M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas, A. Ouahab, Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay. J. Math. Anal. Appl. 332 (2) (2008),1340–1350

[13] M. Benchohra, and J. E. Lazreg, *Existence results for nonlinear implicit fractional differential equations*, Surv. Math. Appl. **9**, (2014), 79–92.

[14] S.Mehdi ,équations différentielles dans un espaces de banach ,Mémoire de Master ,université de Tlemcen 2012

[15] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenski, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, and B.N.Sadovskii. Measures of noncompactness and condensing operators. In Operator theory : Advances and Applications, volume 55. Birkhauser,Verlag, Basel, 1992

[16] C. Kuratowski. Sur les espaces complets. Fund. Math., 15(1) :301-309, 1930.

[17] A.Granas and J.Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

ملخص :

يعتبر مبدأ النقطة الصامدة ذا أهمية كبيرة في مختلف المعادلات التفاضلية الغير خطية خاصة في دراسة وجود وحدانية الحلول ذات رتبة ناطقة بمفهوم كابتو.

في هذه المذكرة سنتطرق لدراسة القياس الغير المتراص حول المؤثرات الخطية المطبقة على شكل معادلات تفاضلية عادية وذات رتبة ناطقة وذلك عن طريق إثبات وجود حلول بإستعمال نظرية النقطة الثابتة لمونك مقترنة بقياس كوراتوفسكي .

Résumé :

Le principe de point fixe est très important dans la résolution d’équations différentielles d’ordre fractionnaire au sens de Caputo non linéaires, en particulier, dans l’étude de l’existence et de l’unicité.

Dans ce mémoire, nous aborderons l'étude de la mise à l'échelle non compacte sur les opérateurs linéaires appliqués sous la forme d'équations différentielles ordinaires, ordinaires et parlantes en prouvant l'existence de solutions utilisant le théorème du point fixe de Mönch combiné à la mise à l'échelle de Kuratouviski

Abstract:

The fixed point principle is very important in the resolution of nonlinear fractional order differential equations, in the sense of nonlinear Caputo, especially in the study of existence and uniqueness.

In this note, In this review, we will approach the study of non-compact scaling on linear operators applied in the form of ordinary, ordinary and talking differential equations by proving the existence of solutions using Mönch fixed point theorem combined with Kuratouviski scaling