

المسيلة في: 2024-06-04

رقم : 59 /ق.ر/ 2024

مستخلص محضر اللجنة العلمية ليوم: 2024/06/04 بخصوص اعتماد مطبوعة دروس

وافقت اللجنة العلمية على اعتماد مطبوعة الدروس الخاصة بالأستاذ
سعدي عبد الرشيد المعنونة بـ:

GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

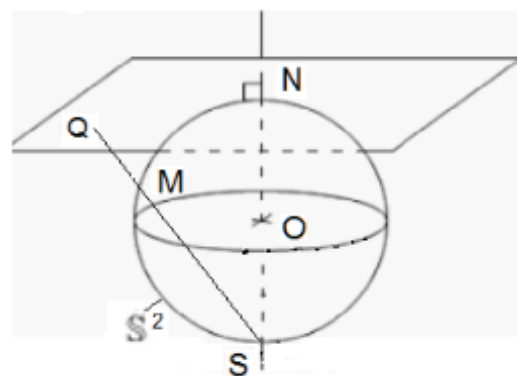
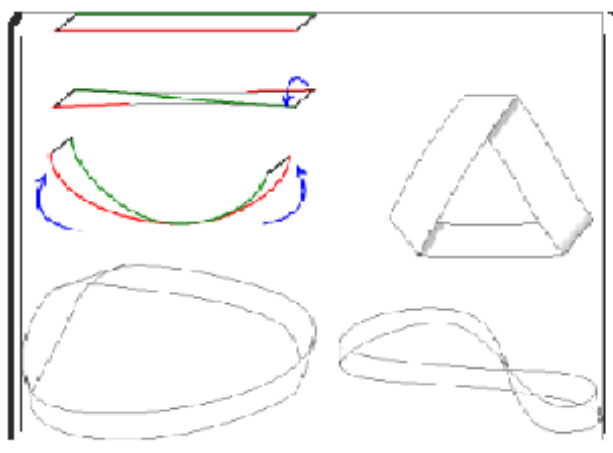
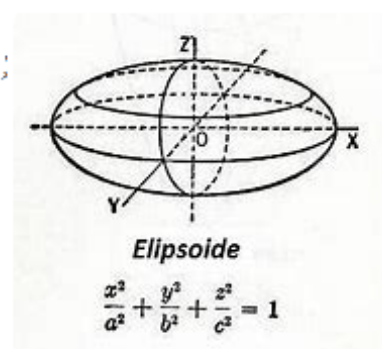
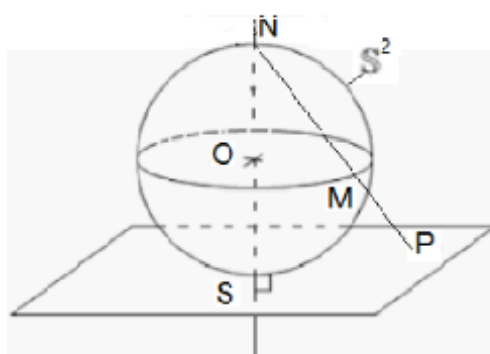
كمراجع للدروس لطلبة السنة الثالثة ليسانس رياضيات.
وهذا بعد الاطلاع على التقارير الإيجابية للأستاذ الخبير المكلف بالمطبوعة.

رئيس اللجنة العلمية



رئيس اللجنة العلمية
لقسم الرياضيات
مرزوقي عبد الكريم

GEOMETRIE DIFFERENTIELLE



Rédigé par

SAADI ABDERACHID

Destiné aux étudiants de troisième année Licence mathématiques

Contenu du programme

Chapitre 1: Un peu de calcul différentiel

1. Applications de classe C^r .
2. Quelques théorèmes.
3. Immersion et submersion.

Chapitre 2: Sous - variété de $\mathbb{R}^n$

1. La notion d'une sous - variété.
2. Exemples.
3. Espaces tangents.
4. Topologie sur une sous-variété.
5. Différentiabilité dans les sous-variété.

Chapitre 3: Formes différentielles et différentielle extérieur.

1. Forme différentielle de degré 1.
2. Forme différentielle de degré p .
3. Champs de vecteurs et formes différentielles sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
4. Formes différentielles de degré 1 sur une variété

Chapitre 4: Intégration

1. Mesure d'une sous-variété, intégral sur une sous-variété.
2. Formules de transformation.
3. Intégration des formes différentielles sur un ouvert.
4. Intégration des formes différentielles sur une sous-variété.

Chapitre 5: Variétés abstraites

1. Cartes, Atlas, et variétés.
2. Morphismes de variétés.
3. Espace tangent, fibré tangent.
4. Sous - variétés d'une variété.
5. Orientation.
6. Variétés à bord.

Table des matières

Bibliographie	4
Introduction	6
1 Un peu de calcul différentiel	7
1.1 Applications de classe C^r	7
1.2 Quelques théorèmes	8
1.3 Immersion, submersion	9
1.4 Exercices	9
1.5 Correction des exercices	10
2 Sous - variété de $\mathbb{R}^n$	14
2.1 La notion d'une sous - variété	14
2.2 Exemples	15
2.3 Espaces tangents	16
2.4 Topologie sur une sous-variété	16
2.5 Différentiabilité dans les sous-variété	17
2.6 Exercices	18
2.7 Correction des exercices	21
3 Formes différentielles et différentielle extérieure	29
3.1 Forme différentielle de degré 1	29
3.2 Forme différentielle de degré p	29
3.3 Dérivabilité et primitive	30
3.4 Champs de vecteurs et formes différentielles sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	31
3.5 Formes différentielles sur une variété	32
3.6 Exercices	33
3.7 Correction des exercices	34
4 Intégration	36
4.1 Mesure d'une sous-variété, intégral sur une sous-variété	36
4.2 Formules de transformation	37
4.3 Intégration d'une forme différentielle sur un ouvert	38
4.4 Intégration des formes différentielles sur sur une sous-variété	40
4.5 Exercices	41
4.6 Correction des exercices	43
5 Variétés abstraites	49
5.1 Cartes, Atlas, et variétés	49
5.2 Morphismes de variétés	50
5.3 Espace tangent, fibré tangent	51

5.4	Sous - variétés d'une variété	51
5.5	Orientation	52
5.6	Variétés à bord	53
5.7	Exercice	53
5.8	Correction des exercices	54

Bibliographie

- [1] **P. Aimé**, Introduction à la géométrie différentielle. *Ellipses* , Paris, 1999.
- [2] **M. A. Bahayou** Introduction à la Géométrie différentielle. *Université de Ouargla*, Juin 2004.
- [3] **M. Berger, B. Gostiaux** Géométrie différentielle. *Armand colin*, Paris, 1972.
- [4] **N. Bourbaki** Éléments de mathématiques, variétés différentielles et analytiques. *Springer*, 2007.
- [5] **H. Cartan** Formes différentielles. *Hermann*, Paris, 1967.
- [6] **J. Cresson**, Premonade vers la géométrie Différentielle. www.math.jussieu.fr/cresson.
- [7] **C. Godbillon**, Géométrie différentielle et mécanique analytique. *Hermann*, Paris, 1969.
- [8] **B. Gostiaux** Exercice de mathématiques spéciales, tome 3, géométrie et géométrie différentielle. *Presses Universitaires de France*, Paris, 1997.
- [9] **F. Hélein, P. H. Chaudouard**, Calcul différentiel et géométrie différentielle. *ENS de Cachan*, 2002.
- [10] **H. J. Kim**, Introduction to Differentiable Manifolds. *Seoul National University*, Korea, 2004.
- [11] **S. Lang**, Introduction to differentiable manifolds. *Springer*, 2002.
- [12] **J. M. Lee**, Introduction to smooth manifolds. *University of Washington*, 2000.
- [13] **P. Malliavin**, Géométrie différentielle intrinsèque. *Harmann*, Paris, 1972.
- [14] **J. R. Munkres**, Analysis of manifolds. *Addison-Wesley Publishing Company*, Amsterdam, 1991.
- [15] **F. Paulin**, Géométrie différentielle élémentaire, Cours de première année de mastère. *Ecole Normale Supérieure*, 2006-2007.
- [16] **D. Renard**, Introduction à la géométrie différentielle. *Novembre 2016*.
- [17] **H. Schlichtkrull**, Differentiable manifolds. *University of Copenhagen*.
- [18] **A. Teleman**, Géométrie Différentielle, Cours L3 MG. *Aix-Marseille Université*, Mai 2014.
- [19] **L. W. Tu**, An introduction to manifolds. *Springer*, second edition, 2011.
- [20] **C. Viterbo**, Notes de cours de Géométrie différentielle. *Juin 2013*.
- [21] ج. ديكسمي، تعريب أ. خ سعد الله: دروس فس الرياضيات . ديوان المطبوعات الجامعية، 1983.
- [22] ج شيلوف، تعريب أ. خ سعد الله: التحليل الرياضي ، التوابع ذات متغيرات متعددة، الجزء الأول. ديوان المطبوعات الجامعية، 1983 .

Introduction

Cette publication est le fruit de trois années d'enseignement en troisième année mathématiques à l'Université de M'Sila, couvrant les années académiques 2019-2020, 2020-2021 et 2021-2022. Elle a été conçue pour offrir une vue d'ensemble complète des concepts fondamentaux et avancés en géométrie différentielle, avec une structure progressive visant à faciliter l'apprentissage et la compréhension.

Le contenu de cette publication est riche et diversifié, englobant plusieurs aspects essentiels de la géométrie différentielle. Il débute par une introduction au calcul différentiel, suivie par l'exploration des notions et des propriétés des sous-variétés dans $\mathbb{R}^n$. Ensuite, l'étude se poursuit avec les formes différentielles et la différentielle extérieure, offrant une compréhension des outils nécessaires pour manipuler ces objets mathématiques complexes. Les techniques d'intégration sur les sous-variétés sont également abordées, fournissant les bases pour les calculs pratiques et théoriques en géométrie différentielle.

En outre, cette publication explore des notions plus avancées concernant les variétés abstraites, telles que les cartes, les atlas, les morphismes, les espaces tangents, et les variétés bord. Ces concepts sont cruciaux pour une compréhension approfondie des structures géométriques et topologiques des variétés, qui jouent un rôle central dans de nombreuses branches des mathématiques et de la physique théorique.

Cette publication est conçue pour fournir aux étudiants une base solide en géométrie différentielle. À mesure qu'ils progressent à travers les chapitres, les lecteurs développeront une compréhension approfondie des concepts et des techniques utilisés dans l'étude des structures géométriques et topologiques des variétés.

M'sila, le 21 septembre 2023, correspondant au 6 Ramadhan 1445 AH.
Saadi Abderachid.

Chapitre 1

Un peu de calcul différentiel

Dans ce chapitre on va considérer des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Pour des notions plus générale en réfère aux livres de calcul différentiel dans les espaces de Banach.

1.1 Applications de classe C^r

Soit une fonction $f : U \rightarrow V$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et V est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et Soit $(e_1, \dots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.1. On dit que f est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $D_a f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n; a + h \in U \Rightarrow f(a + h) - f(a) = D_a f(h) + \|h\| \epsilon(h)$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ dans F .

$$\text{ou de façon équivalente } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - D_a f(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U .

Exemple 1.1. . Une application réelle définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ est différentiable en a si elle est dérivable en a . De plus : $\forall x \in \mathbb{R} : D_a f(x) = f'(a).x$

Définition 1.2. Soit f un fonction de U dans V .

- i) On dit que f est de classe C^1 sur U si pour tout $a \in U$ l'application $D_a f$ est continues, et on écrit $U \in C^1(U, V)$.
- ii) On définit de même l'espace $U \in C^k(U, V)$ ($k > 1$) comme étant l'ensembles des fonctions k fois continuellement différentiables.

iii) On pose : $C^\infty(U, V) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U, V)$

Définition 1.3. Soit $\nu \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\nu\| = 1$. Posons $D = \{t \in \mathbb{R} : a + t\nu \in U\}$, et soit la fonction $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$, qui est définie par $\psi(t) = f(a + t\nu)$. Si la fonction ψ est dérivable au point 0 on appelle $\psi'(0)$ la dérivée au direction de ν , on le note par $\frac{\partial f}{\partial \nu}$, et on écrit $\frac{\partial f}{\partial \nu} = D_a f(\nu) =$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\nu) - f(a)}{t}.$$

En particulier $\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_a f(e_i)$.

Définition 1.4. On pose $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. On appelle matrice Jacobienne de f la matrice $\mathcal{J}f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

Théorème 1.1. On dit que f est de classe C^1 si toutes les dérivées partielles sont continues.

Remarque 1.1. On définit les dérivées partielles d'ordre supérieures : $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)$

1.2 Quelques théorèmes

Définition 1.5. Etant données deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction ψ de U et V est C^k -difféomorphisme ($k \geq 1$) si :

- i) $\psi \in C^k(U, V)$,
- ii) ψ est bijective,
- iii) $\psi^{-1} \in C^k(U, V)$.

Remarque 1.2. Si ψ est un C^k -difféomorphisme de U dans V , alors pour tout $x \in U$, $D_x \psi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et on a : $D_{\psi(x)} \psi^{-1} = (D_x \psi)^{-1}$

Définition 1.6. Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et f une application de classe $C^k(U, V)$ ($k \geq 1$). On dit que f est étale en un point $x \in U$ si $D_x f$ est un isomorphisme. Si f est étale en tout point $x \in U$, on dit que f est étale sur U .

Théorème 1.2 (inversion locale). Soit $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que $D_{x_0} \psi$ est inversible pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, ψ est un difféomorphisme local au voisinage de x_0 , c'est à dire qu'il existe des ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 et $\psi(x_0)$ tels que $\psi|_U$ est un C^1 -difféomorphisme.

Remarque 1.3. Le théorème d'inversion locale dit que, si f est de classe C^1 , au voisinage d'un point où elle est étale, c'est un C^1 -difféomorphisme local.

Théorème 1.3 (fonctions implicites). Soit F une fonction de classe C^k , définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tel que $F(a, b) = 0$. On suppose que la matrice $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b) \right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq q}$ est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert U de (a, b) dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, un voisinage V de a dans $\mathbb{R}^p$ et une fonction $g : V \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^k tels que, pour tout $(x, y) \in U$, on a $F(x, y) = 0$ si et seulement si $y = g(x)$.

Définition 1.7. Etant données un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et soit f une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}^m$. On dit qu'un point $x \in U$ est un point critique si $\text{rang } D_x f < \min\{n, m\}$. On dit que x est régulier si x est non critique. Le lieu critique C est l'ensemble des points critiques, alors $V_c = f(C)$ est appelé l'ensemble des valeurs critiques de f .

Exemple 1.2. [9] $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, définie par : $f(x, y) = (x, y^2)$. On a : $C = V_c = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Théorème 1.4. [Sard] [9] Etant données un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et soit f une fonction de classe C^k ($k \geq 1$) de U dans $\mathbb{R}^m$. Alors, si $k > \frac{m}{n} - 1$, l'ensemble des valeurs critiques de f est négligeable.

1.3 Immersion, submersion

Définition 1.8. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de U dans $\mathbb{R}^m$. On dit que f est une immersion en un point $x \in U$ si $D_x f$ est injective.

Si f est une immersion en tout point $\in U$, on dit que f est une immersion sur U .

Théorème 1.5. [3, 15] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de classe C^k de U dans $\mathbb{R}^m$, qui soit une immersion en un point $x \in U$. Alors, il existe un voisinage ouvert V de $f(x)$ et un ouvert W de $\mathbb{R}^n$, tels que $f(U) \subset V$, et il existe un C^k -difféomorphisme g de V dans $g(V)$, tel que la restriction de $g \circ f$ à W soit la restriction cannoique de $\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}$ dans $\mathbb{R}^m$.

Exemple 1.3. [3] $U =]a, b[$ un intervalle ouvert, et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrique.

Définition 1.9. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de U dans $\mathbb{R}^m$. On dit que f est une submersion en un point $x \in U$ si $D_x f$ est surjective.

Si f est une submersion en tout point $\in U$, on dit que f est une submersion sur U .

Théorème 1.6. [3, 15] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de classe C^k de U dans $\mathbb{R}^m$, qui soit une submersion en un point $x \in U$. Alors, il existe un voisinage ouvert V de $f(x)$, et un C^k -difféomorphisme g de V dans $g(V)$, tel que la restriction de f à V soit égale à $\pi \circ g$, où π est la progection cannoique de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^m$.

Théorème 1.7. [15, 16] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, et f une application de classe C^k de U dans $\mathbb{R}^m$, qui soit une application de rang constant $r \leq \min\{n, m\}$ sur un voisinage de 0 avec $f(0) = 0$. Alors, il existe un C^k -difféomorphisme locale ψ de $\mathbb{R}^m$ en 0, et C^k -difféomorphisme locale φ de $\mathbb{R}^n$ en 0, tels que au voisinage de 0 on ait : $\psi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

1.4 Exercices

Exercice 1.1. :

1. On considère l'équation : $x_1 x_2 - x_3 \ln x_2 + e^{x_1 \cdot x_2} - 1 = 0$.
Au voisinage du point $(0, 1, 2)$, Peut-on l'y résoudre pour x_1 ? pour x_2 ? pour x_3 ?
2. On considère le système d'équations : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.
Au voisinage du point $(1, 0, 0)$, quelles variables peut-on y éliminer ?

Exercice 1.2. :

1. Montrer que le système : $y_1 = x_3 \cos(x_1 x_2)$, $y_2 = x_3 \sin(x_1 x_2)$, $y_3 = x_1 + x_3$
peut être résolu pour x au voisinage de tout point x_0 tel que $x_{0,1} \cdot x_{0,3} \neq 0$.
2. Calculer les dérivées partielles au point y_0 des fonctions obtenues lorsque $x_0 = (1, 0, 1)$.

Exercice 1.3. : Soit $f(x) = (x_1, x_2^3, x_3^5)$.

1. Vérifier que f est inversible au voisinage de 0 bien que $D_0 f$ ne le soit pas.
2. Expliquer

Exercice 1.4. : Les fonctions suivantes sont-elles des immersions ? des submersions ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, 0)$,

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (y, z),$
3. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy + 2yz + 3xz,$
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t)),$
5. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2, xy),$
6. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (e^x, \cos y, \sin y).$

Exercice 1.5. :

1. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définit par : $f(x, y) = (x^2 + y^2, x + y)$ admet une inversion locale au voisinage de $(0, 1)$.
2. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définit par : $g(t) = (t^2 - 1, 2t + 3)$ est une immersion.

Exercice 1.6. : Soit la fonction f , de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z.$$

1. Calculer ∇f .
2. Donner l'ensemble des points $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(a, b, c) = 0$ et :
 - i) la relation $f(x, y, z) = 0$ détermine x en fonction de (y, z) , au voisinage de (a, b, c) .
 - ii) la relation $f(x, y, z) = 0$ détermine y en fonction de (x, z) , au voisinage de (a, b, c) .
 - iii) la relation $f(x, y, z) = 0$ détermine z en fonction de (x, y) , au voisinage de (a, b, c) .
3. Donner l'ensemble C des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pour lesquels f est submersion.

Exercice 1.7. : Soit la fonction f , de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x + \sin y, \sin x + y).$$

1. Donner $Jf(x, y)$ la matrice Jacobienne de f au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Calculer $|Jf|(x, y)$ le déterminant de $Jf(x, y)$.
3. Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{V}(\pi, 0)$ tel que f réalise un C^1 -difféomorphisme de V dans $f(V)$.
4. Calculer $Jf^{-1}(\pi, 0)$ la matrice Jacobienne de f^{-1} au point $(\pi, 0) = f(\pi, 0)$.

1.5 Correction des exercices

Solution 1.1. :

1. $x_1 x_2 - x_3 \ln x_2 + e^{x_1 \cdot x_2} - 1 = 0, a = (0, 1, 2).$
 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 - x_3 \ln x_2 + e^{x_1 \cdot x_2} - 1.$
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 + x_2 e^{x_1 \cdot x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - \frac{x_3}{x_2} + x_1 e^{x_1 \cdot x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = -\ln x_2.$ Donc :
 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = -2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) = 0.$ Alors :
 Au voisinage du point $a = (0, 1, 2)$, Peut-on résoudre l'équation pour x_1 et x_2 .

2. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $b = (1, 0, 0)$.
 Soit g la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3 - 1, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$.
 $Jg(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$. Donc : $Jg(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. On peut alors éliminer x_2 ou x_3 au voisinage du point $(1, 0, 0)$.
 Il existe une fonction h_1 tel que $(x_1, x_3) = h(x_2)$.
 Il existe une fonction h_2 tel que $(x_1, x_2) = h(x_3)$.

Solution 1.2. :

1. On a le système : $y_1 = x_3 \cos(x_1 x_2)$, $y_2 = x_3 \sin(x_1 x_2)$, $y_3 = x_1 + x_3$
 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 \cos(x_1 x_2), x_3 \sin(x_1 x_2), x_1 + x_3)$.
 $Jf(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 x_3 \sin(x_1 x_2) & -x_1 x_3 \sin(x_1 x_2) & \cos(x_1 x_2) \\ x_2 x_3 \cos(x_1 x_2) & x_1 x_3 \cos(x_1 x_2) & \sin(x_1 x_2) \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 Donc : $\det Jf(x_1, x_2, x_3) = -x_1 x_3$
 On peut alors résoudre l'équation au voisinage de tout point x_0 tel que $x_{0,1} \cdot x_{0,3} \neq 0$.
 2. $x_0 = (1, 0, 1)$, $y_0 = (1, 0, 2)$, $Jf^{-1}(y_0) = (Jf(x_0))^{-1}$.
 On a : $Jf(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc : $Jf^{-1}(y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution 1.3. : $f(x) = (x_1, x_2^3, x_3^5)$.

1. On peut facilement vérifier que f^{-1} existe et on a : $f^{-1}(x) = (x_1, x_2^{\frac{1}{3}}, x_3^{\frac{1}{5}})$.
 $Jf(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5x_3^4 \end{pmatrix}$. Donc : $Jf(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 Alors, $\det Jf(0, 0, 0) = 0$, i.e $D_0 f$ n'est pas inversible.
 2. On conclut que la condition $D_{x_0} f \neq 0$ dans le théorème d'inversion local n'est pas nécessaire.

Solution 1.4. :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, 0)$, $Jf = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 $\text{rang} Jf = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ l'ensemble de départ. Donc : f est une immersion.
 2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (y, z)$, $Jf = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 $\text{rang} Jf = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ l'ensemble de d'arrivée. Donc : f est une submersion.
 3. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy + 2yz + 3xz$, $Jf = \nabla f = \begin{pmatrix} y + 3z \\ x + 2z \\ 2y + 3z \end{pmatrix}$.
 $\nabla f = 0$ si et seulement si $x = y = 0$. Donc : f est une submersion sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t)), f'(t) = (2 \cos(2t), 3 \cos(3t)).$
 $f' \neq 0$. Donc : f est une immersion.

5. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2, xy), Jf = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$
 $\text{rang} Jf < 2$ si $(x, y, z) = (x, x, 0)$ ou $(x, y, z) = (x, -x, 0)$, i.e $(x, y, z) \in \text{vect}\{(1, 1, 0)\} \cup \text{vect}\{(1, -1, 0)\}.$
Donc : f est une submersion sur $\mathbb{R}^3 \setminus [\text{vect}\{(1, 1, 0)\} \cup \text{vect}\{(1, -1, 0)\}].$

6. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (e^x, \cos y, \sin y), Jf = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & -\sin y \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}.$
 $\text{rang} Jf = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ l'ensemble de départ. Donc : f est une immersion.

Solution 1.5. :

1. On a : $J_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $\det J_f(0, 1) \neq 0$. D'après théorème d'inversion local f admet une inversion locale au voisinage de $(0, 1)$.
2. On a : $g'(t) = (2t, 2) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $\text{rang} g'(t) = 1$ dimension de l'ensemble de départ, alors g est une immersion.

Solution 1.6. :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z.$$

1. $\nabla f(x, y, z) = (2x + 2, 2y + 2, 2z + 2).$
2. $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \nabla f(a, b, c) = (2a + 2, 2b + 2, 2c + 2).$
 - i) $\frac{\partial}{\partial x}(a, b, c) \neq 0$ si et seulement si $a \neq -1$.
Donc : la relation $f(x, y, z) = 0$ détermine x en fonction de (y, z) dans l'ensemble $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = 0, a \neq -1\}.$
 - ii) $\frac{\partial}{\partial y}(a, b, c) \neq 0$ si et seulement si $b \neq -1$.
Donc : la relation $f(x, y, z) = 0$ détermine y en fonction de (x, z) dans l'ensemble $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = 0, b \neq -1\}.$
 - iii) $\frac{\partial}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$ si et seulement si $c \neq -1$.
Donc : la relation $f(x, y, z) = 0$ détermine z en fonction de (x, y) dans l'ensemble $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = 0, c \neq -1\}.$
3. f n'est pas une submersion si et seulement si $\text{rang} \nabla f(x, y, z) < 1$,
i.e $\nabla f(x, y, z) = 0$, ce qui donne $(x, y, z) = (-1, -1, -1).$
Donc : l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pour lesquels f est submersion est
 $C = \mathbb{R}^3 \setminus \{(-1, -1, -1)\}.$

Solution 1.7. :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x + \sin y, \sin x + y).$$

1. $Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & \cos y \\ \cos x & 1 \end{pmatrix}.$

2. $|Jf|(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & \cos y \\ \cos x & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos x \cdot \cos y.$

3. f est différentiable et $|Jf|(\pi, 0) = 2 \neq 0$. D'après le théorème d'inversion local, il existe $V \in \mathcal{V}(\pi, 0)$ tel que f réalise un C^1 -difféomorphisme de V dans $f(V)$.

4. On a : $Jf(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc :

$$Jf(\pi, 0) = [Jf(\pi, 0)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 2

Sous - variété de $\mathbb{R}^n$

2.1 La notion d'une sous - variété

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n > 1$ et $0 \leq m < n$. On peut écrire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Définition 2.1. Soit V une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m , et de classe C^k si pour tout $x \in V$ il existe un ouvert U_x de $\mathbb{R}^m$, un voisinage ouvert O_x de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $\varphi_x : U_x \rightarrow O_x$ tels que :

- i) L'application φ_x est différentiable de classe C^k ,
- ii) l'application φ_x est un homéomorphisme de U_x dans $V \cap O_x$,
- iii) l'application φ_x est une immersion sur U_x .

L'application φ_x est un paramétrage local de la sous-variété V en x . Son inverse $\varphi_x^{-1} : O_x \cap V \rightarrow U_x$, est une carte ou encore un système de coordonnées (locales) de la sous-variété V en x .

$n - m$ est appelé la codimension de la sous-variété V de dimension m de $\mathbb{R}^n$.

Une sous-variété de codimension 1 est appelée hypersurface.

Une sous-variété de dimension 2 est appelée surface.

Proposition 2.1. [16] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ une fonction différentiable de classe C^k . Le graphe de φ , i.e l'ensemble $\text{Graphe}(f) = \{(x; f(x)), x \in U\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m .

Théorème 2.1. [3, 9, 15, 16] $V \subset \mathbb{R}^n$ est une sous- variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m et de classe C^k si et seulement si pour tout point $x \in V$, il existe un voisinage ouvert O_x de V dans $\mathbb{R}^n$, un isomorphisme linéaire $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ et une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^k tels que $V \cap O_x = V \cap \{A((y, f(y)); y \in U\}$.

Proposition 2.2. [9, 16] Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ une fonction différentiable définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $x \in U$ tel que f est submersion au point x . Posons $a = f(x)$. Alors il existe un voisinage ouvert U_1 de x dans U tel que $f^{-1}\{a\} \cap U_1$ est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit a une valeur régulière de f . Alors $V = f^{-1}\{a\}$ est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.2. [3, 15, 16] Soit $a \in \mathbb{R}^{n-m}$. $V \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m et de classe C^k si et seulement si pour tout point $x \in V$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans $\mathbb{R}^n$, et une fonction $\Psi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, de classe C^k , dont a est une valeur régulière tels que $V \cap U_x = \Psi^{-1}\{0\}$.

Corollaire 2.1. [3] $V \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m et de classe C^k si et seulement si pour tout point $x \in V$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans $\mathbb{R}^n$, et $n - m$ fonctions $\psi_i : U_x \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k , telles que les formes linéaires $D_x \psi_i$ sont indépendantes, et que $V \cap U_x = \bigcap_{i=1}^{n-m} \psi_i^{-1}\{0\}$.

Théorème 2.3. [3, 9, 15, 16] $V \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m et de classe C^k si et seulement si pour tout point $x \in V$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans $\mathbb{R}^n$, un ouvert O_x dans $\mathbb{R}^m$, et un C^k -difféomorphisme $\Phi : U_x \rightarrow O_x$, tels que $\Phi(V \cap U_x) = O_x$.

Définition 2.2. Soit V une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Le bord de V est $\partial V = \overline{V} \setminus V$. Une sous-variété sans bord est une sous-variété V telle que $\partial V = \emptyset$.

2.2 Exemples

Exemple 2.1. [16] Une sous-variété de dimension 0 de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble discret.

Exemple 2.2. [16] Un sous-espace vectoriel ou affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension m est une sous-variété linéaire.

Exemple 2.3. [16] Un ouvert O d'une sous-variété V de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de même classe de régularité, et de même dimension.

Exemple 2.4. [3, 16] Le cercle $C(a, r)$ de centre a et de rayon r dans $\mathbb{R}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Généralement la sphère $S^m = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = r\}$ est une sous-variété de dimension m , et de classe C^∞ .

Exemple 2.5. [16] $V = [0, +\infty[$. Tout voisinage ouvert connexe de 0 est de la forme $[0, a[$, $a > 0$, qui n'est jamais homéomorphe à $\mathbb{R}^m$.

Exemple 2.6. [16] $S = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$. Tout voisinage connexe de $(0, 0)$ dans V est encore homéomorphe à V . Or $V \setminus \{(0, 0)\}$ possède 4 composantes connexes, ce qui montre que V ne peut être homéomorphe à un $\mathbb{R}^m$.

Exemple 2.7. [16] $V = \{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}\}$. Le point $(0, 0)$ est un point de rebroussement de première espèce. On ne peut pas trouver de paramétrage local en ce point.

Exemple 2.8. [16] $V = \{(t^3 - 4t, t^2 - 4), t \in \mathbb{R}\}$. L'application $t \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ est une immersion en tout point, mais l'image n'est pas une sous-variété à cause du point multiple en $(0, 0)$.

Exemple 2.9. [Tore][3, 16] Soit $\mathbb{T}^2$ le tore d'axe $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$, dont les distances respectivement minimale et maximale à l'axe sont 1 et 3, défini par :

$$\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

Exemple 2.10. $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2z}{\sqrt{3}} = 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1 \right\}$ est une sous-

variété (calotte sphérique). Son bord est le cercle d'équation $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}, z = \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Exemple 2.11. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ n'a pas de bord.

2.3 Espaces tangents

Définition 2.3. Soit V une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$. On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur tangent de $x \in V$ s'il y a une courbe paramétrée $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, telle que $\alpha(0) = x, \alpha'(0) = v$.

On appelle espace tangent à V en x , et on le note par T_x l'ensemble des vecteurs tangents à V en x .

Théorème 2.4. [3, 16] Soit V une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$, et soit $x \in V$. Alors, T_x est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.4. Soit V une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$, T_x l'espace tangent à V en un point $x \in V$. On note $\mathcal{T}_x$ le sous-espace affine qui passe au point x , est dirigé par T_x . On appelle $\mathcal{T}_x$ l'espace affine tangent de V au point x .

Proposition 2.3. [16] Soient V une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$, $x \in V$, et $\varphi : U \rightarrow V$ un paramétrage local de V en x . Notons $u = (u_1, \dots, u_m)$ la variable d'une fonction définie sur $U \subset \mathbb{R}^m$. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Posons $\varphi_{u_i}(u) = D_u \varphi(e_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u)$. Alors pour tout $u \in U$, $(\varphi_{u_1}(u), \dots, \varphi_{u_m}(u))$ est une base de $T_{\varphi(u)}$.

Proposition 2.4. [3, 16] Si $V = \{(u, f(u))\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, définie par le graphe d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, alors l'espace tangent en $x = (u, f(u))$ est le graphe de $D_u f$.

Exemple 2.12. $V = \{(t, t^2), t \in \mathbb{R}\}$.

Proposition 2.5. [3, 16] Si VS est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ définie par $V = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$, où 0 est valeur régulière de F , alors pour tout $x \in v$, $T_x = \ker D_x F$.

Exemple 2.13. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + x^2 z^2 + y^4 + 2z^2 - 1 = 0\}$.

2.4 Topologie sur une sous-variété

On définit une topologie sur une sous-variété V on utilisant les paramétrages locaux. Toutes paramétrages locaux en un point forment une base de voisinages de ce point, et la réunion de toutes ces bases de voisinages forme une base de la topologie. On a le théorème suivant :

Théorème 2.5. [3, 16] La topologie précédant et la topologie induite de $\mathbb{R}^n$ coïncident.

Remarque 2.1. Une sous-variété de dimension m est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^m$. Elle est localement connexe par arcs, et donc connexe par arcs si elle est connexe. Elle est aussi localement compacte, séparé et séparable.

Définition 2.5. Un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ d'un espace topologique X est dit localement fini si tout point de X possède un voisinage qui n'intersecte qu'un nombre fini d'éléments du recouvrement.

Définition 2.6. Etant donné un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ d'un espace topologique X , on dit qu'un recouvrement $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ est subordonné au recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ si chaque V_j est contenu dans l'un des U_i .

Définition 2.7. Une partition de l'unité de classe C^k d'une sous-variété V de $\mathbb{R}^n$ consiste en la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de V , et d'une famille de fonctions $(\psi_i)_{i \in I}$ de classe C^k , telle que :

- i) Pour tout $i \in I : \psi_i \geq 0$,
- ii) Pour tout $i \in I$, le support $\text{Supp}(\psi_i)$ de ψ_i est inclus dans U_i ,
- iii) Le recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de V est localement fini,
- iv) Pour tout $x \in V : \sum_i \psi_i(x) = 1$.

Théorème 2.6. [3, 16] Soient V une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{W} = (W_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de V . Alors il existe une famille dénombrable de paramétrages locaux $\varphi_j : B(0, 3) \rightarrow V, j \in J$, tel que $(\varphi_j(B(0, 3)))_{j \in J}$ forme un recouvrement ouvert localement fini de V , subordonné à $\mathcal{W} = (W_i)_{i \in I}$ et telle que les ouverts $(\varphi_j(B(0, 1)))_{j \in J}$ recouvrent V .

Corollaire 2.2. [16] Soient V une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{W} = (W_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de V . Alors il existe une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{W} = (W_i)_{i \in I}$.

Proposition 2.6. [16] Soit x un point d'une sous-variété V de dimension m de $\mathbb{R}^n$, et soient $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V; \varphi_2 : U_2 \rightarrow V$ deux paramétrages de V au voisinage de x . Notons $W = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$. C'est un voisinage de x dans V , et le changement de paramétrage $\theta = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \varphi_2^{-1}(W) \rightarrow \varphi_1^{-1}(W)$ est un homéomorphisme. Si les deux paramétrages sont de classe C^k ($k \geq 1$), le changement de paramétrage est un C^k -diffeomorphisme.

2.5 Différentiabilité dans les sous-variété

Définition 2.8. Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une sous-variété V de dimension m et de classe C^k de $\mathbb{R}^n$.

- i) On dit que f est différentiable en $x \in V$ si pour tout paramétrage $\varphi : U \rightarrow V$ avec $x \in \varphi(U) \subset V$, la fonction $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $y = \varphi^{-1}(x)$.
- ii) On dit que f est différentiable sur V si elle est différentiable en tout point de V .
- iii) On dit que f est de classe C^r ($r \geq k$) sur V si pour tout paramétrage $\varphi : U \rightarrow V$ la fonction $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^r sur U .

Définition 2.9. Soit V_1 et V_2 respectivement deux sous-variétés de $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$, de classe au moins C^r ($r \geq 1$), et soit $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ une application continue entre les sous-variétés.

- i) On dit que ψ est de classe C^r si quels que soient les paramétrages $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1, \varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ de V_1 et V_2 , l'application $\varphi_2^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1$ définie sur $\varphi_1^{-1}(\psi^{-1}(\varphi_2(U_2)) \cap \varphi_1(U_1))$ à valeurs dans U_2 est de classe C^r
- ii) On dit que ψ est différentiable en $x \in V_1$ si quels que soient les paramétrages $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1, \varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ de V_1 et V_2 , l'application $\varphi_2^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1$ définie sur $\varphi_1^{-1}(\psi^{-1}(\varphi_2(U_2)) \cap \varphi_1(U_1))$ à valeurs dans U_2 est différentiable en $x \in V_1$.

Exemple 2.14. [16] Les paramétrages locaux d'une sous-variété de classe C^r sont des applications de classes C^r .

Définition 2.10. Soit $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ une application continue entre les sous-variétés V_1 et V_2 et x un point de V_1 où elle est différentiable. Alors il existe une application linéaire $D_x \psi : T_x V_1 \rightarrow T_{\varphi(x)} V_2$, caractérisée par l'une des propriétés suivantes :

- i) Si $v \in T_x V_1$ s'écrit $v = D_y \varphi(w)$, où $\varphi : U \rightarrow V_1$ est un paramétrage local en x tel que $\varphi(x) = y$ avec $w \in \mathbb{R}^m$, alors $D_x \psi(v) = D_y d(\psi \circ \varphi)(w)$.
- ii) Si $v \in T_x V_1$ s'écrit $v = \varphi'(0)$, où $\alpha : I \rightarrow V_1$ est une courbe paramétrée de classe C^1 d'un intervalle ouvert I contenant 0 dans V_1 telle que $\alpha(0) = x$, alors $D_x \psi(v) = \beta'(0)$ où $\beta = \psi \circ \alpha : I \rightarrow V_2$.

L'application linéaire $D_x \psi$ est appelée la différentielle de ψ au point x .

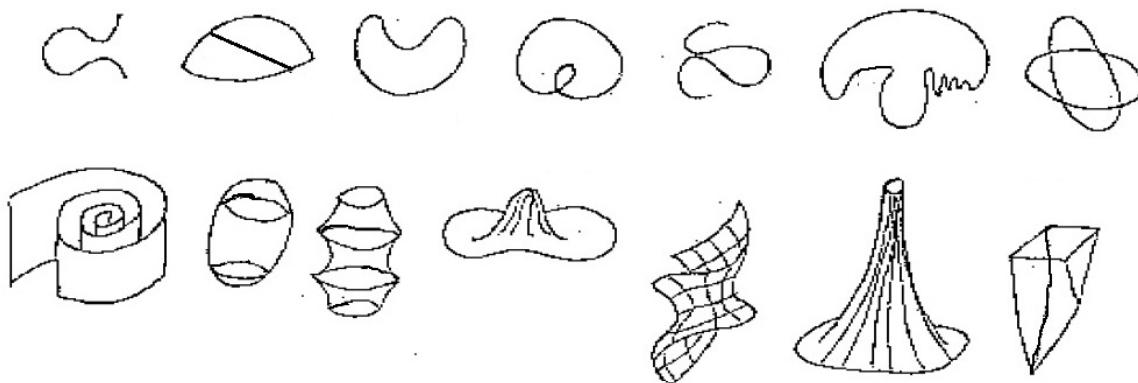
On note $C^r(W_1, V_2)$ l'espace des applications de classe C^r d'un ouvert W_1 de V_1 dans V_2 .

Définition 2.11. Soit V_1 et V_2 respectivement deux sous-variétés de $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$, de classe au moins C^k ($k \geq 1$), et soit $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ une application. On dit que ψ est un C^k -difféomorphisme si c'est un homéomorphisme et si ψ et ψ^{-1} sont de classe C^k . On dit alors que V_1 et V_2 sont C^k -difféomorphes.

Proposition 2.7. [16] Soit V_1 et V_2 respectivement deux sous-variétés de $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$, de classe au moins C^k ($k \geq 1$), et soit $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ un difféomorphisme. Alors pour tout $x \in V_1$, $D_x \psi : T_x V_1 \rightarrow T_{\psi(x)} V_2$ est un isomorphisme, d'inverse $D_{\psi(x)} \psi^{-1} : T_{\psi(x)} V_2 \rightarrow T_x V_1$. En particulier, les dimensions de V_1 et V_2 sont les mêmes.

2.6 Exercices

Exercice 2.1. : Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés :



Exercice 2.2. : Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés (si c'est le cas, on précisera la dimension) :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x - 2(x^2 + y^2)\}.$$

$$B = \{(t, t^2); t \in \mathbb{R}\}.$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}.$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \geq 0\}.$$

Exercice 2.3. : Soit $A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = \alpha\}$.

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble A_α est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.4. : Soit $a > 0$. On appelle fenêtre de Viviani L'ensemble : $V = \left\{ \left(a + a \cos t, a \sin t, 2a \sin \frac{t}{2} \right), \right.$

1. Soit $M = (0, 0, 2a)$ Montrer que $V \setminus \{M\}$ est une sous-variété de dimension 1.

2. Montrer que V est l'intersection de la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon $2a$ avec le cylindre de centre $(a,0)$, l'axe $\{x=0, y=0\}$, et de rayon a .
3. Montrer que V n'est pas une sous-variété.

Exercice 2.5. : Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xz + 2x + 2y - z = 0\}$.

1. Montrer que S est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2.
2. Déterminer le plan tangent à C en l'origine.

Exercice 2.6. : Soit $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 4xy + 2xz + 4y - z = xy + 2x - z = 0\}$.

1. Montrer que C est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 1.
2. Déterminer le plan tangent à C en l'origine.

Exercice 2.7. : Soit la fonction φ , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right).$$

On pose $C = \{\varphi(t), t \in \mathbb{R}\}$

1. Calculer $\varphi'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est une immersion.
3. Montrez que C est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ qui demande à déterminer son dimension et sa classe.
4. Trouver l'espace tangent de C au point $(1,0)$.
5. Montrer que $S = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}$.

$$\boxed{\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}}$$

Exercice 2.8. : Soit la fonction ψ , de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \psi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1.$$

On pose : $M = \psi^{-1}\{0\}$ (hyperbolöide).

1. Calculer $\nabla\psi$.
2. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de point $(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$, un voisinage ouvert V de point $(1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$, et une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ tels que : $\forall (x, y, z) \in U : \psi(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y)$.
3. Donner l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^3$ ou ψ est une submersion.
4. Montrer que 0 est une valeur régulière de ψ .
5. Conclure.
6. Ecrire l'équation de (π) l'espace tangent de M au point $(1,1,1)$.

Exercice 2.9. : Soit la fonction F , de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : F(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - 1, z^2 - t^2 - 1).$$

On pose : $M = F^{-1}\{(0, 0)\}$

1. Etudier la régularité de la fonction F .
2. Ecrire la matrice jacobienne JF de F .
3. Calculer $\text{rang } JF$
4. Montrer que F est une submersion sur M .
5. Conclure.
6. Donner T l'espace tangent de M au point $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 2.10. : Soit le fonction F , de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 8(x^2 + y^2),$$

et soit le tore $\mathbb{T}^2 = F^{-1}\{0\}$

1. Etudier la régularité de la fonction F .
2. Calculer ∇F .
3. Montrer que $\text{rang } \nabla F(x, y, z) = 0$ ssi $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ou $[z = 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 3 = 0.]$
4. Montrer que F est une submersion sur $\mathbb{T}^2$.
5. Conclure.

Exercice 2.11. : Soit $p > 0$. On considère la fonction F , de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2pz$.

On pose : $M = F^{-1}\{0\}$ (parabolöide elliptique).

1. Etudier la régularité de la fonction F .
2. Calculer ∇F .
3. Montrer que F est une submersion sur M .
4. Conclure.
5. Donner l'équation de T l'espace tangent de M au point $A = (p, p, 1)$.

Exercice 2.12. : Soit $a \neq 0, b \neq 0$. On considère la fonction F , de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z.$$

On pose : $M = F^{-1}\{1\}$ (parabolöide hyperbolique).

1. Etudier la régularité de la fonction F .
2. Calculer ∇F .

3. Montrer que F est une submersion sur M .

4. Conclure.

5. Donner l'équation de T l'espace tangent de M au point $A = (a, b, 1)$.

Exercice 2.13. : Soit $p > 0$. On considère la fonction F , de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, x^2 + z^2)$.

On pose : $M = F^{-1}\{(1, 5)\}$.

1. Etudier la régularité de la fonction F .

2. Calculer JF la matrice jacobienne de F .

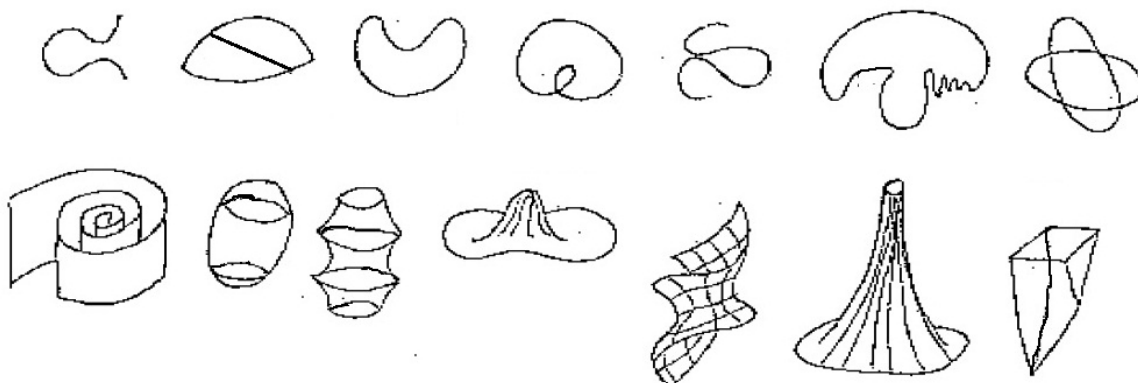
3. Montrer que F est une submersion sur M .

4. Conclure.

5. Donner l'équation de T l'espace tangent de M au point $A = (1, 2, 2)$.

2.7 Correction des exercices

Solution 2.1. : Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés :



Première ligne (de gauche à droite) :

La première, la troisième, la cinquième et la sixième sont des sous-variétés.

La deuxième, la quatrième et la septième ne sont pas des sous-variétés à cause de points doubles.

Deuxième ligne (de gauche à droite) :

La première et la septième sont des sous-variétés.

La troisième et la septième ne sont pas des sous-variétés, car elles ont des coins.

Pour les autres, si on n'inclut pas le bord, ce sont des sous-variétés, mais si on inclut le bord, ce ne sont pas des sous-variétés.

Solution 2.2. :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x - 2(x^2 + y^2)\}.$$

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y, z) = x - 2(x^2 + y^2) - z$.

f est de classe C^∞ et on a : $Jf = \nabla f = \begin{pmatrix} 1 - 4x \\ -4y \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\text{rang} Jf = 1$, dimension d'ensemble d'arrivée. Alors, l'application f est une submersion de classe C^∞ .

D'après proposition 2.2, A est une sous-variété de dimension $m = 3 - 1 = 2$, de classe C^∞ .

$$B = \{(t, t^2); t \in \mathbb{R}\}.$$

Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $g(t) = (t, t^2)$. g est de classe C^∞ et on a : $g'(t) = (1, 2t)$.

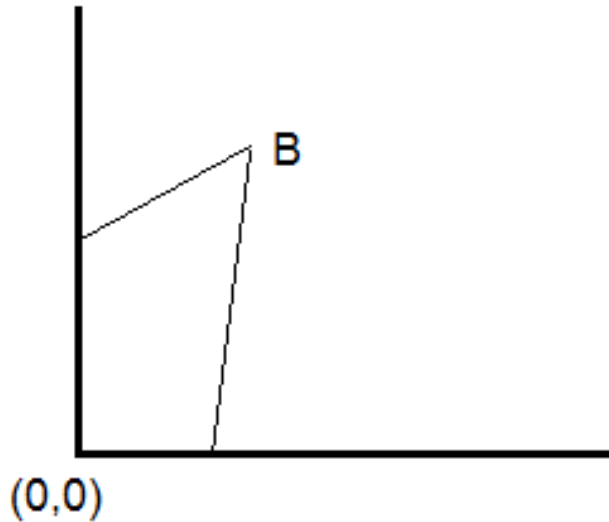
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, et $I =]t_0 - r, t_0 + r[\in \mathcal{V}(t_0)$ Soit $t, s \in \mathbb{R}$ tels que $g(t) = g(s)$. Donc : $(t, t^2) = (s, s^2)$, ce qui donne $t = s$. Donc : g_{t_0} est injective, i.e bijective de I dans $g(I) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. L'application $g_{t_0}^{-1}$ de $g(I)$ dans I est définie par : $g_{t_0}^{-1}(x, x^2) = x$ est une application continue. Donc : g_{t_0} est un homéomorphisme de $g(I)$ dans I .

$\text{rang} g'_{t_0} = 1$ dimension d'ensemble de départ. Alors, l'application g_{t_0} est une immersion de classe C^∞ .

D'après définition 2.1, B est une sous-variété de dimension 1, de classe C^∞ .

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}.$$

C n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, car $(0, 0)$ est un point double de C .



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \geq 0\}.$$

Supposons que D est une sous-variété de dimension 1. Posons $a = (1, 1) \in D$. Il existe alors U_a un voisinage (intervalle) ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$, O_a un voisinage de a dans $\mathbb{R}^2$ et φ_a de U_a dans $O_a \cap D$ une immersion, homéomorphisme de U_a sur $O_a \cap D$ vérifiant $\varphi_a(0) = a$. En particulier, φ_a^{-1} doit être continue. C'est impossible, car elle envoie l'ensemble connexe $D \cap (O_a) \setminus \{a\}$ sur l'ensemble non connexe $U_a \setminus \{0\}$.

Supposons maintenant que D soit une sous-variété de dimension 2. Alors, il existe U_b un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$, O_b un voisinage de $b = (0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et φ_b de U_b dans $O_b \cap D$ une immersion, homéomorphisme de U_b sur $O_b \cap D$ vérifiant $\varphi_b(0) = b$. Mais c'est impossible, car U_a est ouvert alors que $O_b \cap D$ ne l'est pas.

Donc D n'est pas une sous-variété.

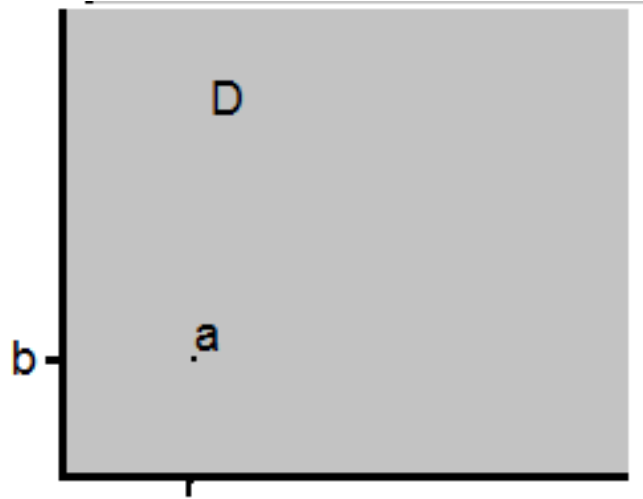
Solution 2.3. : $A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = \alpha\}$.

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y) = x^2 - y^2$. On a : $A_\alpha = f^{-1}(\{\alpha\})$

f est de classe C^∞ et on a : $Jf = \nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$.

$\nabla Jf \neq 0$ si et seulement si $(0, 0) \notin A_\alpha$, i.e $\alpha \neq 0$. Donc :

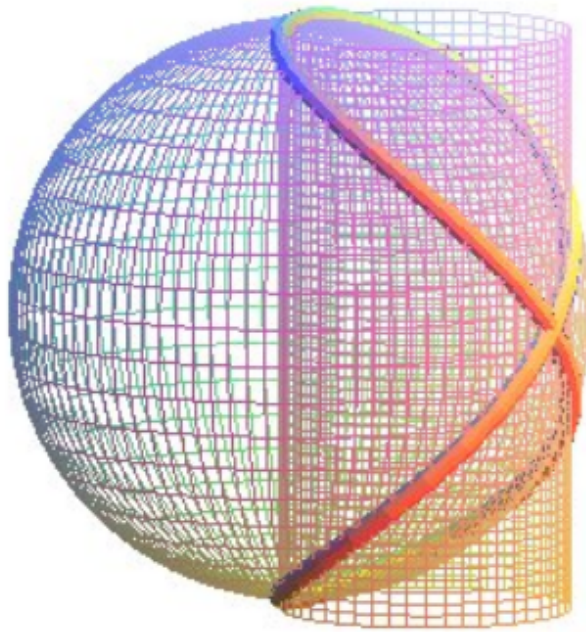
Si $\alpha \neq 0$, α est une valeur régulière de f . D'après proposition 2.2, $A_\alpha = f^{-1}(\{\alpha\})$ est une



sous-variété de dimension $m = 2 - 1 = 1$, de classe C^∞ .

Si $\alpha = 0$, $A_0 = \{x = 0\} \cap \{y = 0\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, car $(0,0)$ est un point double de A_0 .

Solution 2.4. : Fenêtre de Viviani : $V = \left\{ \left(a + a \cos t, a \sin t, 2a \sin \frac{t}{2} \right), -\pi \leq t \leq \pi \right\}$, $M = (0, 0, 2a)$.



$$1. V \setminus \{M\} = \left\{ \left(a + a \cos t, a \sin t, 2a \sin \frac{t}{2} \right), -\pi \leq t < \pi \right\}.$$

Soit la fonction f définie de $[-\pi, \pi[$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f(t) = \left(a + a \cos t, a \sin t, 2a \sin \frac{t}{2} \right)$.

f est de classe C^∞ et on a : $f'(t) = \left(-a \sin t, a \cos t, a \cos \frac{t}{2} \right)$.

Soit $t_0 \in [-\pi, \pi[$, on a $f'(t_0) \neq 0$, d'après théorème d'inversion local il existe un voisinage ouvert U_0 de t_0 dans $\mathbb{R}$, un ouvert O_0 de $\mathbb{R}^2$, une application $\varphi_0 = g_{U_0}$, différentiable de classe C^∞ , homéomorphisme de U_x dans $O_x \cap V \setminus \{M\}$. $\varphi'_0 \neq 0$, donc $\text{rang} \varphi'_0 = 1$

dimension d'ensemble de départ. Alors, l'application φ_0 est une immersion de classe C^∞ .
D'après définition 2.1, $V \setminus \{M\}$ est une sous-variété de dimension 1, de classe C^∞ .

2. $\subseteq$: Soit $(x, y, z) \in V$. Donc ; $x = a + a \cos t, y = a \sin t, z = 2a \sin \frac{t}{2}, -\pi \leq t \leq \pi$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 + 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} \\ &= 2a^2 + 2a^2 \cos(2\frac{t}{2}) + 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} \\ &= 2a^2 + 2a^2(1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}) + 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} \\ &= 4a^2 \end{aligned}$$

Donc (x, y, z) appartient au sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon $2a$.

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2.$$

Donc (x, y, z) appartient au cylindre de centre $(a, 0)$, l'axe $\{x = 0, y = 0\}$, et de rayon a .

$\supseteq$: Maintenant, soit (x, y, z) tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ et $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. Alors :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 + 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + z^2 \\ &= 2a^2 + 2a^2 \cos(2\frac{t}{2}) + z^2 \\ &= 2a^2 + 2a^2(1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}) + z^2 \\ &= 4a^2 + z^2 - 2\sin^2 \frac{t}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Comme } x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, \text{ on a : } z^2 - 2a^2 \sin^2 \frac{t}{2} = 0.$$

Tenant en compte $\frac{t}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$ On peut écrire alors $z = 2a \sin \frac{t}{2}$.

3. V n'est pas une sous-variété à cause de point double M .

Solution 2.5. : $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xz + xz + 2x + 2y - z = 0\}$.

1. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y, z) = xz + 2x + 2y - z$. On a :
 $S = f^{-1}\{0\}$

$$f \text{ est de classe } C^\infty \text{ et on a : } Jf = \nabla f = \begin{pmatrix} z + 2 \\ 2 \\ x - 1 \end{pmatrix}.$$

$\text{rang} Jf = 1$, dimension d'ensemble d'arrivée. Alors, l'application f est une submersion de classe C^∞ .

D'après proposition 2.2, S est une sous-variété de dimension 2, de classe C^∞ .

2. Plan tangent à S en l'origine :

$$\text{On a : } D_{(0,0,0)}f = (2, 2, -1) \text{ et } T_{(0,0,0)}S = \ker D_{(0,0,0)}f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y - z = 0\}.$$

Solution 2.6. : $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 4xy + 2xz + 4y - z = xy + 2x - z = 0\}$.

1. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y, z) = (4xy + 2xz + 4y - z, xy + 2x - z)$.

$$\text{On a : } C = f^{-1}\{(0, 0)\}. f \text{ est de classe } C^\infty \text{ et on a : } Jf = \begin{pmatrix} 4y + 2z & 4x + 4 & 2x - 1 \\ y + 2 & x & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rang} Jf < 2 \text{ si et seulement s'il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} 4y + 2z = \alpha(y + 2) & \dots (1) \\ 4x + 4 = \alpha x & \dots (2) \\ 2x - 1 = -\alpha & \dots (3) \end{cases}$$

De (3) on trouve $\alpha = 1 - 2x$.

Substitutions la valeur obtenue de α dans (2) on trouve $2x^2 + 3x + 4 = 0$, non résoluble dans $\mathbb{R}$.

Donc $\text{rang} Jf = 2$, dimension d'ensemble d'arrivée. Alors, l'application f est une submersion de classe C^∞ .

D'après proposition 2.2, C est une sous-variété de dimension $m = 3 - 2 = 1$, de classe C^∞ .

2. Espace tangent à C en l'origine :

$$D_{(0,0,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } T_0C = \ker D_{(0,0,0)}f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4y - z = 0, 2x - z = 0\}.$$

$$\begin{cases} 4y - z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4y \\ 2x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4y \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\text{Donc : } T_{(0,0,0)}C = \{(2y, y, 4y), y \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(2, 1, 4)\}$$

Solution 2.7. :

$$\varphi(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \quad C = \{\varphi(t), t \in \mathbb{R}\}$$

1. Calculer $\varphi'(t) = \left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right)$.

2. On a : $\varphi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Donc, le rang de $\varphi' = 1$, dimension de l'ensemble de départ. Alors : φ est une immersion.

3. Soit I_t un voisinage de t , et φ_t la restriction de φ sur I_t . φ_t est un C^∞ -difféomorphisme, et immersion.

Donc : C est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1, et de classe C^∞ .

4. On a : $(1, 0) = \varphi(0)$ et $\varphi'(0) = (0, 2)$. Donc : l'espace tangent de C au point $(1, 0)$ est la droite vectorielle engendrée par $(0, 2)$, i.e $\mathbb{R} \times \{0\}$.

5. Soit $(x, y) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \in C$. $x^2 + y^2 = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$

Il n'existe pas t tel que $\varphi(1) = (-1, 0)$.

Donc : $S = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\}$.

Solution 2.8. :

1. $\nabla\psi(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$.

2. On a : $\frac{\partial\psi}{\partial z}(1, 1, 1) = 2 \neq 0$. D'après théorème des fonctions explicites, il existe un voisinage ouvert U de point $(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$, un voisinage ouvert V de point $(1, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$, et une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ tels que : $\forall (x, y, z) \in U : \psi(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y)$.

3. $\nabla\psi(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = (0, 0, 0)$ si et seulement si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, $\text{rang } \nabla\psi(x, y, z) = 1$ dimension de l'ensemble d'arrivée. Donc : ψ est submersion sur $E = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

4. On a : $\psi(0, 0, 0) \neq 0$. Donc : $\text{rang } \nabla\psi(x, y, z) = 1$ pour tout $(x, y, z) \in M$. Alors, 0 est une valeur régulière de ψ .

5. On a : $\psi \in C^\infty$, 1 est une valeur régulière de ψ et $\psi^{-1}\{0\}$. D'après la question précédente : M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, de classe C^∞ .

6. $\pi = \ker \nabla\psi(1, 1, 1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

Solution 2.9. :

$$F(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - 1, z^2 - t^2 - 1), \quad M = F^{-1}\{(0, 0)\}.$$

1. F est un vecteur des polynômes, donc de classe C^∞ .
2. $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : JF(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 2t \end{pmatrix}$.
3. Les deux vecteurs de JF sont colinéaires si et seulement si $x = y = z = t = 0$.
Donc : $\text{rang } JF = 0$ si $x = y = z = t = 0$, et rang .
Alors : $JF = 2$ sur $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$.
4. Il n'existe pas $(x, y, z, t) \in M$ tel que $x = y = z = t = 0$.
Donc : F est une submersion sur M .
5. $(0, 0)$ est une valeur régulière de $F \in C^\infty$ et $M = F^{-1}\{(0, 0)\}$.
Donc : M est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$, de dimension 2, de classe C^∞ .
6. $T = \ker D_A F$ et $D_A F = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{7} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.
Donc : $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0, \sqrt{7}z + \sqrt{3}t = 0\}$.

Solution 2.10. :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 8(x^2 + y^2), \quad \mathbb{T}^2 = F^{-1}\{0\}$$

1. F est un polynôme, donc de classe C^∞ .
2. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$
 $\nabla F(x, y, z) = (4x(x^2 + y^2 + z^2 + 1) - 16x, 4y(x^2 + y^2 + z^2 + 1) - 16y, 4z(x^2 + y^2 + z^2 + 1)).$
3. $\text{rang } \nabla F(x, y, z) = 0$ ssi :

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2 + z^2 + 1) - 16x = 0, \\ 4y(x^2 + y^2 + z^2 + 1) - 16y = 0, \\ 4z(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

La troisième équation donne $z = 0$.

Substituons la valeur de z dans les deux équations ci-dessus, on trouve $[x = 0 \text{ et } y = 0]$, ou $[x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0]$.

Donc : $\text{rang } \nabla F(x, y, z) = 0$ ssi $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ou $[z = 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 3 = 0]$.

4. Si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ on a : $F(x, y, z) = 1 \neq 0$. Donc : $(0, 0, 0) \notin \mathbb{T}^2$.
Si $z = 0$ et $x^2 + y^2 - 3 = 0$ on a : $F(x, y, z) = -8 \neq 0$. Donc : $(0, 0, 0) \notin \mathbb{T}^2$.
Alors, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{T}^2$ on a $\text{rang } \nabla F(x, y, z) = 1$.
Donc : F est une submersion sur $\mathbb{T}^2$.

5. 0 est une valeur régulière de $F \in C^\infty$ et $\mathbb{T}^2 = F^{-1}\{(0, 0)\}$.
Donc : $\mathbb{T}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$, de dimension 2, de classe C^∞ .

Solution 2.11. :

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2pz, \quad M = F^{-1}\{0\}$$

1. F est un polynôme, donc : F est de classe C^∞ .

$$2. \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2p \end{pmatrix}.$$

3. On a : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \nabla F(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ (car $p \neq 0$).

Donc : $\text{rang } JF = 1$, dimension de l'ensemble d'arrivé.

Alors : F est une submersion sur M .

4. 0 est une valeur régulière de $F \in C^\infty$ et $M = F^{-1}\{0\}$.

Donc : M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2, de classe C^∞ .

$$5. T = \ker D_A F \text{ et } D_A F = \nabla F(A) = \begin{pmatrix} 2p \\ 2p \\ -2p \end{pmatrix}.$$

Donc : $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2px + 2py - 2pz = 0\}$, i.e : $T : x + y - z = 0$.

Solution 2.12. :

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2pz, \quad M = F^{-1}\{0\}$$

1. F est un polynôme, donc : F est de classe C^∞ .

$$2. \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2p \end{pmatrix}.$$

3. On a : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \nabla F(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Donc : $\text{rang } JF = 1$, dimension de l'ensemble d'arrivé.

Alors : F est une submersion sur M .

4. 1 est une valeur régulière de $F \in C^\infty$ et $M = F^{-1}\{1\}$.

Donc : M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2, de classe C^∞ .

$$5. T = \ker D_A F \text{ et } D_A F = \nabla F(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Donc : $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} - z = 0\}$.

Solution 2.13. :

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, x^2 + z^2), \quad M = F^{-1}\{(1, 5)\}$$

1. F est un polynôme, donc : F est de classe C^∞ .

$$2. \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : JF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

3. Les vecteurs $(2x, 2y, -2z)$ et $(2x, 0, 2z)$ sont colinéaires si et seulement si $y = z = 0$.

Puisque $(x, 0, 0) \notin M$, alors pour tout $(x, 0, 0) \in M$ on a : $\text{rang } JF = 2$, dimension de l'ensemble d'arrivé.

Alors : F est une submersion sur M .

4. 0 est une valeur régulière de $F \in C^\infty$ et $M = F^{-1}\{0\}$.

Donc : M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2, de classe C^∞ .

5. $T = \ker D_A F$ et $D_A F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Donc : $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 4y - 4z = 0 \text{ et } 2x + 4z = 0\}$,

i.e : $T : \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$.

Chapitre 3

Formes différentielles et différentielle extérieure

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Forme différentielle de degré 1

Définition 3.1. On appelle forme différentielle de degré 1 sur U toute application ω de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathbb{R}^n$ (dual topologique de $\mathbb{R}^n$).

Si l'application $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on dit que ω est de classe C^k .

Exemple 3.1. Soit f une application différentiable sur U .

1. Df la différentiabilité de f sur U est une forme différentielle de degré 1 sur U .
2. Si on désigne par dx_i la différentiabilité de la fonction $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_i$, alors dx_i est une forme différentielle de degré 1 sur U .

Proposition 3.1. Soit ω, α deux formes différentielles de degré 1 sur U , et f une fonction définie sur U . Alors,

1. $\omega + \alpha$ est une forme différentielle de degré 1 sur U .
2. $f \cdot \omega$ est une forme différentielle de degré 1 sur U .

Théorème 3.1. Si ω est une forme différentielle de degré 1 sur U , alors il existe des fonctions numériques $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in U : \omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$$

3.2 Forme différentielle de degré p

Définition 3.2. Toute application de U dans l'ensemble des formes p -linéaires alternées de $\mathbb{R}^n$ est appelée une forme différentielle de degré p sur U .

On note Ω^p l'ensemble des formes différentielles de degré p .

Remarque 3.1. Si $p = 0$, les formes différentielles sur U sont des fonctions réelles définies sur U .

Si $p > n$, toute forme différentielle sur U est nulle sur U .

Proposition 3.2. Soit ω, α deux formes différentielles de degré p sur U , et f une fonction définie sur U . Alors,

1. $\omega + \alpha$ est une forme différentielle de degré p sur U .
2. $f \cdot \omega$ est une forme différentielle de degré p sur U .

Définition 3.3. Soit ω_1, ω_2 deux formes différentielles de degré p_1, p_2 successivement. On définit le produit extérieur $\omega_1 \wedge \omega_2$ comme suivant :

$$\forall u \in U : (\omega_1 \wedge \omega_2)(u) = \omega_1(u) \wedge \omega_2(u).$$

$\omega_1 \wedge \omega_2$ est une forme différentielle de degré $p_1 + p_2$.

Théorème 3.2. Soit ω une forme différentielle de degré p sur U . Il existe une famille $\{P_{i_1, i_2, \dots, i_p}\}_{i_1 < i_2 < \dots < i_p}$ des fonctions définies d'une manière unique suivante :

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} P_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_p}$$

Exemple 3.2. .

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Toute forme différentielle de degré 2 s'écrit d'une manière unique : $f dx dy + g dx dz + h dy dz$.
2. Le produit extérieur de deux formes différentielles de degré 1 : $\omega_1 = f_1 dx + g_1 dy + h_1 dz$ et $\omega_2 = f_2 dx + g_2 dy + h_2 dz$ est :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_1 g_2 - g_1 f_2) dx dy + (f_1 h_2 - h_1 f_2) dx dz + (g_1 h_2 - h_1 g_2) dy dz$$

Définition 3.4. Soit φ une application différentiable d'un ouvert O de $\mathbb{R}^m$ dans U . Si ω est une forme différentielle de degré p sur U , la transposée par φ de la forme ω est la forme $\varphi^* \omega$ définie sur V par :

$$\forall y \in V : \varphi^* \omega(y) = \omega[\varphi(y)] \circ D_y \varphi$$

Remarque 3.2. Si $\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$, alors $\varphi^* \omega = \sum_{j=1}^m (a_j \circ \varphi_j)(y) D_{y_j} \varphi$

3.3 Dérivabilité et primitive

Définition 3.5. Soit $\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} P_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_p}$ une forme différentielle de degré p , dérivable avec continuité. La forme différentielle de degré $p + 1$:

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} dP_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_p}$$

est appelé la dérivée extérieure de ω .

Exemple 3.3. .

1. Soit f une fonction différentiable avec continuité, c'est une forme différentielle de degré 0, sa dérivée extérieure est Df .

2. La dérivée extérieure de la forme différentielle de degré 1 : $\omega = f dx + g dy + h dz$ est :

$$\begin{aligned} d\omega &= Df dx + Dg dy + Dh dz \\ &= \left(\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy} \right) dx dy + \left(\frac{dh}{dx} - \frac{df}{dz} \right) dx dz + \left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz} \right) dy dz \end{aligned}$$

Définition 3.6. On dit qu'une forme différentielle ω est fermée sur U si $d\omega = 0$.

Théorème 3.3. Soit ω une forme différentielle deux fois différentiable avec continuité sur U . Alors, $d\omega$ est fermée.

Définition 3.7. Soit α et ω deux formes différentielles de degré p et $p+1$ sur U . On dit que α est une primitive de ω si $d\alpha = \omega$.

Dans ce cas là, on dit que ω est exacte.

Remarque 3.3. Il résulte que ω est fermée.

Exemple 3.4. Soit $\omega = y dx - x dy$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

On a : $d\omega = Dy dx - Dx dy = dx dy - dy dx = 2 dx dy$.

Donc ; ω n'admet pas une primitive.

Exemple 3.5. Soit $\omega = (3x^2 + 2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy + 3y^2)dy$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

On a : $d\omega = D(3x^2 + 2xy + y^2)dx + D(x^2 + 2xy + 3y^2)dy = (2x + 2y)dx dy + (2x + 2y)dy dx = 0$.

Puisque $\mathbb{R}^2$ est étoilé ; ω admet une primitive F .

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + y^2$ implique que $F(x, y) = x^3 + x^2 y + xy^2 + f(y)$.

$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2xy + f'(y)$. Donc ; $f'(y) = 3y^2$, i.e $f(y) = y^3 + k$ ($k \in \mathbb{R}$).

Les fonction primitives de la forme différentielle ω de degré 1 sont :

$$F(x, y) = x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3 + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Définition 3.8. On dit que l'ouvert U est étoilé s'il existe $a \in U$ telle que pour tout $x \in U$ le segment $[a, x]$ inclue dans U , i.e : $\forall x \in U : \{ta + (1-t)x, t \in [0, 1]\} \subset U$.

Théorème 3.4 (Poincaré). On suppose que U est un ouvert étoilé. Alors, toute forme différentielle fermée de degré P , de classe C^1 sur U est exacte.

3.4 Champs de vecteurs et formes différentielles sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

On note $\mathcal{V}$ l'espace des champs de vecteurs, qui sont des fonctions $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pour $n = 2, 3$, qu'on peut écrire en coordonnées $V = (f(x, y), g(x, y))$, ou $V = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$. On note $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions coordonnées.

I) Supposons que $V = (f, g)$ est un champs de vecteur de $\mathbb{R}^2$, associé à la forme différentielle dérivable, de degré 1 : $\omega_V = f dx + g dy$.

$$\begin{array}{ccccc} & & V & & \\ & & \parallel & & \\ & & (f, g) & & \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathcal{F} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \\ & & f dx + g dy & & f dx \wedge dy \\ & & \parallel & & \\ & & \omega_V & & \end{array}$$

Proposition 3.3. On a :

1. $d\omega = d(fdx + gdy) = \text{rot}V dx \wedge dy$.
2. $\text{rot}V = 0$ si et seulement s'il existe f telle que $V = \text{grad}f$.
3. $d(*\omega_V) = \text{div}V dx \wedge dy$.

II) Supposons que $V = (f, g, h)$ est un champs de vecteur de $\mathbb{R}^3$, associé à la forme différentielle dérivable, de degré 1 : $\omega = fdx + gdy + hdz$. On pose : $*\omega_V = fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & V & & V & & \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathcal{F} \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\
 & & fdx+gdy+hdz & & fdy\wedge dz+gdz\wedge dx+hdz\wedge dy & & fdx\wedge dy\wedge dz \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & \omega_V & & *\omega_V & &
 \end{array}$$

Proposition 3.4. On a :

1. $d\omega_V = d(fdx + gdy) = \text{rot}V dx \wedge dy$.
2. $d(*\omega_V) = \text{div}V dx \wedge dy$.
3. $d\omega_V = *\omega_{\text{rot}V}$.
4. $\text{rot}(\text{grad } V) = 0$.
5. $\text{rot}V = 0$ si et seulement s'il existe f telle que $V = \text{grad}f$.
6. $\text{div}V = 0$ si et seulement s'il existe un champ de vecteur W telle que $V = \text{rot}W$.

3.5 Formes différentielles sur une variété

Soit X une variété différentielle, de degré n , de classe C^k ($k > 1$). Soit $p \geq 1$.

Définition 3.9. On appelle vecteur cotangent en un point x de X un élément du dual de $T_x X$. L'ensemble des vecteurs cotangents en x est l'espace vectoriel $T_x^* X$, dual de l'espace tangent $T_x X$, Sa dimension vaut n . On dit que est $T_x^* X$ l'espace cotangent de X en x .

Définition 3.10. Le fibré cotangent de X est le fibré vectoriel $T^*X = \bigcup_{x \in X} T_x^* X$.

Définition 3.11. Une forme différentielle de degré 1 sur X est une application continue ω associant à tout élément x de X un vecteur cotangent en x à X . Autrement dit : une forme différentielle de degré 1 est une section continue du fibré cotangent.

Définition 3.12. Une forme différentielle ω de degré p sur X est une application de X dans l'ensemble de formes p -linéaire alternée sur le fibré TX , noté ${}^p T^* X$

3.6 Exercices

Exercice 3.1. : Calculer la dérivée extérieure des formes différentielles suivantes :

$$\omega_1 = \cos(xy)dx \quad \omega_2 = e^x dx - \sin y dy \quad \omega_3 = xyz dx dy$$

Exercice 3.2. : On note φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ et la forme différentielle ω de degré 1 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par : $\omega = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y dx + x dy)$.

1. Calculer $\varphi^* \omega$.
2. Calculer l'intégrale de ω sur S^1 .

Exercice 3.3. : On appelle circulation d'un champs de vecteur F le long d'une courbe γ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$ l'intégrale $\int_a^b (F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) dt$.

Calculer la circulation de champs de vecteur $F(x, y) = (y, -x + 1)$ le long de γ le cercle de centre $A(1, 0)$ et de rayon 2.

Exercice 3.4. : Soit la fonction φ définie de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall t \in]0, 1[: \varphi(t) = (t - 1, t^2 + t)$$

. Soit la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \omega(x, y) = y dx + x dy$.

1. Calculer $d\omega$. Conclure.
2. Calculer $\varphi^* \omega$.
3. Calculer l'intégrale $\int_{\varphi} \omega$.

Exercice 3.5. : Soit la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \omega(x, y) = 2(x + y)dx + 2(x + y)dy.$$

1. Calculer $d\omega$.
2. Conclure.
3. Trouver la forme différentielle α telle que $d\alpha = \omega$.

Exercice 3.6. : Soit la fonction φ définie de $]0, 1[\times]0, 1[$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (s, t) \in]0, 1[\times]0, 1[: \varphi(s, t) = (st, s^2 + t^2, s^3)$$

. Soit la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \omega(x, y, z) = z dx dy + y dx dz$.

1. Calculer $d\omega$. Conclure.
2. Calculer $\varphi^* \omega$.
3. Calculer l'intégrale $\int_{\varphi} \omega$.

3.7 Correction des exercices

Solution 3.1. : Dérivée extérieure :

i) $\omega_1 = \cos(xy)dx$

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= D(\cos(xy))dx \\ &= (-y \sin(xy)dx - x \sin(xy)dy)dx \\ &= -x \sin(xy)dydx \\ &= x \sin(xy)dxdy \end{aligned}$$

ii) $\omega_2 = e^x dx - \sin y dy$

$$\begin{aligned} d\omega_2 &= D(e^x)dx - D(\sin y)dy \\ &= (e^x dx)dx - (\cos y dy)dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

iii) $\omega_3 = xyzdxdy$

$$\begin{aligned} d\omega_3 &= D(xyz)dxdy \\ &= (yzdx + xzdy + xydz)dxdy \\ &= (yzdxdxdy) + (xzdxdy) + (xydzdxdy) \\ &= xydzdxdy \\ &= -xydxdzdy \\ &= xydxdydz \end{aligned}$$

Solution 3.2. : $\varphi(t) = (\cos t, \sin t), U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy = f(x, y)dx + g(x, y)dy$.

1. Calcule de $\varphi^*\omega$.

$$\begin{aligned} d\varphi^*\omega U &= f(\cos t, \sin t)D_t(\cos t) + g(\cos t, \sin t)D_t(\sin t) \\ &= -\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t dt) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(\cos t dt) \\ &= dt \\ &= h(t)dt \end{aligned}$$

2. Intégrale de ω sur S^1 :

On sais que $\mathbb{S}^1 = \{(\cos t, \sin t), t \in]-\pi, \pi]\}$. Donc :

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)dt = 2\pi$$

Solution 3.3. : $F(x, y) = (y, -x+1), A(1, 0), \gamma = C(A, 2), \gamma(t) = (x, y) \in \mathbb{R}^2(1+\cos t), 2\sin t), t \in]-\pi, \pi]$.

La circulation de champs de vecteur le long de γ :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t))dt &= \int_{-\pi}^{\pi} (2\sin t, -2(1+\cos t) + 1) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [-4\sin^2 t + 2\cos t(1 - 2\cos t)]dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [2\cos t - 4]dt \\ &= -8\pi \end{aligned}$$

Solution 3.4. :

$$\forall t \in]0, 1[: \varphi(t) = (t-1, t^2+t) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \omega(x, y) = ydx + xdy.$$

$$1. d\omega = (D_{(x,y)}(y) \wedge dx) + (D_{(x,y)}(x) \wedge dy) = (dy \wedge dx) + (dx \wedge dy) = 0.$$

Conclusion : ω est fermée.

$$2. \varphi * \omega = (t^2 + t)D_t(t - 1) + (t - 1)D_t(t^2 + t) = (t^2 + t)dt + (2t + 1)(t - 1)dt = (3t^2 - 1)dt.$$

$$3. \int_{\varphi} \omega = \int_0^1 (3t^2 - 1)dt = 0.$$

Solution 3.5. :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \omega(x, y) = 2(x + y)dx + 2(x + y)dy.$$

$$1. d\omega = (D_{(x,y)}(y) \wedge dx) + (D_{(x,y)}(x) \wedge dy) = 2(dy \wedge dx) + 2(dx \wedge dy) = 0.$$

2. Conclusion : ω est fermée. α est une forme différentielle de degrés 0, i.e $\alpha = g(x, y)$.

$$d\alpha = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)dy.$$

$$\text{Donc : } \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2(x + y).$$

$$\text{Alors : } \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2(x + y) \text{ donne } g(x, y) = x^2 + 2xy + k(y).$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2x + k'(y) = 2(x + y) \text{ ce qui donne } k(y) = y^2 + c.$$

$$\text{Alors : } g(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + c = (x + y)^2 + c.$$

Solution 3.6. :

$$\forall (s, t) \in]0, 1[\times]0, 1[: \varphi(s, t) = (st, s^2 + t^2, s^3) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \omega(x, y) = zdx dy + ydx dz.$$

$$1. d\omega = (D_{(x,y,z)}(z) \wedge dx \wedge dy) + (D_{(x,y,z)}(x) \wedge dy \wedge dz).$$

$$\text{Alors : } d\omega = (dz \wedge dx \wedge dy) + (dy \wedge dx \wedge dz) = (dx \wedge dy \wedge dz) - (dx \wedge dy \wedge dz) = 0.$$

Conclusion : ω est fermée.

$$\begin{aligned} \varphi * \omega &= s^3 \cdot D_{(s,t)}(st) \wedge D_{(s,t)}(s^2 + t^2) + (s^2 + t^2) \cdot D_{(s,t)}(st) \wedge D_{(s,t)}(s^3) \\ &= s^3(tds + sdt) \wedge (2sds + 2tdt) + (s^2 + t^2)(tds + sdt) \wedge (3s^2ds) \\ 2. &= s^3(2t^2dsdt + 2s^2dtds) + 3s^3(s^2 + t^2)dtds \\ &= s^3(5s^2 + t^2)dtds. \end{aligned}$$

$$3. \int_{\varphi} \omega = \int_0^1 \int_0^1 s^3(5s^2 + t^2)dtds = \frac{13}{12}.$$

Chapitre 4

Intégration

4.1 Mesure d'une sous-variété, intégral sur une sous-variété

Soit V une sous-variété de dimension m , de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$, dont $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ est une paramétrisation de V , définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$.

Définition 4.1. On définit une mesure sur V comme suivant :

$$\mu(V) = dV = \int_U \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \left| \frac{D(\Phi_{j_1}, \dots, \Phi_{j_p})}{D(t_1, \dots, t_p)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt_1 dt_2 \dots dt_p$$

$$\text{ou } \left| \frac{D(\Phi_{j_1}, \dots, \Phi_{j_p})}{D(t_1, \dots, t_p)} \right| = \det \left(\frac{\partial \Phi_{j_i}}{\partial t_i} \right)_{1 \leq i \leq p, j_1 \leq j_i \leq j_p}.$$

Exemple 4.1. On va donner trois exemples importants :

1. Soit $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrique de classe C^1 , considérée comme une sous-variété de dimension 1, de classe C^1 .

La longueur de α est $\int_a^b |\alpha'(t)| dt$.

2. Soit $V = \left\{ (x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi)) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta); -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi \right\}$.

$$\frac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} -\sin \theta \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = -\cos \theta \sin \theta$$

$$\frac{D(x, z)}{D(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} -\sin \theta \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \cos^2 \theta \sin \varphi$$

$$\frac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = -\cos^2 \theta \cos \varphi$$

L'aire de V est

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \cos^4 \theta \sin^2 \varphi + \cos^4 \theta \cos^2 \varphi} d\theta d\varphi = 4\pi$$

3. La boule $B(0, 1) = \left\{ (r \cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta); 0 < r < 1, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi \right\}$.
Volume de $B(0, 1)$ est :

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J(r, \theta, \varphi) d\theta d\varphi dr = 4\pi^2$$

Remarque 4.1. Si $m = n - 1$, i.e le cas d'une hypersurface, la mesure de V est :

$$dV = \int_U |N(t_1, \dots, t_{n-1})| dt_1, \dots, dt_{n-1}$$

ou $N = \begin{vmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$, le produit vectoriel des vecteurs $\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}}$.

Remarque 4.2. Dans le cas d'un graphe $x_n = \psi(x_1, \dots, x_{n-1})$, on a : $N = (-1)^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} e_{n-1} \right)$

Donc ; $|N| = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2}$.

Exemple 4.2. $S = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

$$S = \{(x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\} = S_1 \cup S_2.$$

$$|N_1| = |N_2| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - (x^2 + y^2)} + \frac{y^2}{1 - (x^2 + y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}. \text{ Alors,}$$

$$dS = 2 \int_{\{0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr = 4\pi$$

Définition 4.2. Soit f une fonction définie sur V , à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'intégrale sur V par rapport à $\mu(V)$ comme suivant :

$$\int_V f dV = \int_U f \circ \Phi(t_1, \dots, t_p) \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \left| \frac{D(\Phi_{j_1}, \dots, \Phi_{j_p})}{D(t_1, \dots, t_p)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt_1 dt_2 \dots dt_p$$

4.2 Formules de transformation

Soit Σ une hypersurface de classe C^1 , orientable de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\nu(x)$ le vecteur normale unitaire au point x et on suppose que la fonction $x \mapsto \nu(x)$ est continue. Soit F un champ de vecteur sur Σ , i.e une application de Σ dans $\mathbb{R}^n$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on désigne par (x, y) le produit scalaire de x et y .

Définition 4.3. Si la fonction $x \mapsto \langle F(x), \nu(x) \rangle$ est intégrable par rapport à $d\Sigma$ on appelle $\int_{\Sigma} (F(x) \cdot \nu(x)) d\Sigma$ le flux du champs de vecteurs F à travers l'hypersurface orienté (Σ, ν) .

Théorème 4.1. [**Formule d'Ostragradski**] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à bord Σ de classe C^2 , et soit $\nu(x)$ le vecteur normal extérieur à Ω , au point x . Soit F un champs de vecteur continûment différentiable sur $\overline{\Omega}$ et telle que $\text{supp} F \cap \overline{\Omega}$ est compact. Alors, on a :

$$\int_{\Omega} \text{div} F(x) dx = \int_{\Sigma} (F(x) \cdot \nu(x)) d\Sigma$$

Corollaire 4.1. [**Formule de Gauss**] Soit g une fonction continûment différentiable de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\text{supp} g \cap \overline{\Omega}$ est compact. Alors, on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) dx = \int_{\Sigma} f(x) \cdot \nu_k(x) d\Sigma \quad k = 1 \cdots n$$

Théorème 4.2. [**Première formule de Green**] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à bord Σ de classe C^2 , et soit $\nu(x)$ le vecteur normal extérieur à Ω , au point x . Soit $f \in C^2(\overline{\Omega})$, $g \in C^1(\overline{\Omega})$ telles que $\text{supp}(g \nabla f) \cap \overline{\Omega}$ soit compact. Alors, on a :

$$\int_{\Omega} [(\nabla g \cdot \nabla f)(x) + g(x) \Delta f(x)] dx = \int_{\Sigma} g(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) d\Sigma$$

Pour $g = 1$, on trouve :

$$\int_{\Omega} \Delta f(x) dx = \int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) d\Sigma$$

Théorème 4.3. [**Deuxième formule de Green**] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à bord Σ de classe C^2 , et soit $\nu(x)$ le vecteur normal extérieur à Ω , au point x . Soit $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$ telles que $\text{supp} f \cap \overline{\Omega}$, $\text{supp} g \cap \overline{\Omega}$ soient compact. Alors, on a :

$$\int_{\Omega} [g(x) \Delta f(x) - f(x) \Delta g(x)] dx = \int_{\Sigma} \left(g(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) - f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) \right) d\Sigma$$

Pour $g = 1$, on trouve :

$$\int_{\Omega} \Delta f dx = \int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) d\Sigma$$

4.3 Intégration d'une forme différentielle sur un ouvert

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ω une forme différentielle de degré p , écrit sous la forme :

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} P_{i_1, i_2, \dots, i_p} dy_{i_1} dx_{i_2} \cdots dy_{i_p}$$

ou $P_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ sont des fonctions boréliennes.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et φ une fonction différentiable de O dans U . On peut écrire la transposée $\varphi^* \omega$ par φ de la forme ω sous la forme $\varphi^* \omega = f dx_1 \cdots dx_p$, ou f est une fonction borélienne sur O .

Définition 4.4. On dit que ω est intégrable par rapport à φ si f est intégrable sur O , et on écrit :

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{p \text{ fois}}_{\varphi} \omega = \underbrace{\int \cdots \int}_{p \text{ fois}}_O f(x_1, \dots, x_p) dx_1 \cdots dx_p$$

Exemple 4.3. Soit γ la courbe paramétrique définie sur $I =]-1, 1[$ comme suivant : $\gamma(t) = (t, t^2)$. Soit $\omega = xdy - ydx$ une forme différentielle de degré 1. On a : $\gamma^*w = td(t^2) - t^2dt = 2t^2dt - t^2dt = t^2dt = f(t)dt$. Donc :

$$\int_{\gamma} w = \int_I f(t)dt = \int_{-1}^1 t^2dt = \frac{2}{3}$$

Exemple 4.4. Soit S la surface paramétrique définie sur $O =]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme suivant : $S(\varphi, \theta) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$. Soit $\omega = xdydz + ydzdx + zdx dy$ une forme différentielle de degré 2.

On a : $S^*w = \cos \theta d\varphi d\theta = f(\varphi, \theta)d\varphi d\theta$. Donc :

$$\int \int_S w = \int \int_O f(\varphi, \theta)d\varphi d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\varphi d\theta = 4\pi$$

Théorème 4.4. Soient ω et α deux formes différentielles de degré p , définies sur U , et soit φ une fonction différentiable d'un ouvert O de $\mathbb{R}^p$ dans U . Si ω et α sont intégrables par rapport à φ , alors :

$$1. \omega + \alpha \text{ est intégrable par rapport à } \varphi \text{ et on a : } \underbrace{\int \int \cdots \int_{\varphi}}_{p \text{ fois}} (\omega + \alpha) = \underbrace{\int \int \cdots \int_{\varphi}}_{p \text{ fois}} \omega +$$

$$\underbrace{\int \int \cdots \int_{\varphi}}_{p \text{ fois}} \alpha.$$

$$2. \text{ Pour tout nombre réel } \lambda, \lambda\omega \text{ est intégrable par rapport à } \varphi \text{ et on a : } \underbrace{\int \int \cdots \int_{\varphi}}_{p \text{ fois}} \lambda\omega =$$

$$\lambda \underbrace{\int \int \cdots \int_{\varphi}}_{p \text{ fois}} \omega$$

Théorème 4.5. Soit ω une forme différentielles de degré p , définies sur U , et soient φ une fonction différentiable d'un ouvert O de $\mathbb{R}^p$ dans U , ψ un difféomorphisme d'un ouvert O' dans O , telle que $|j_{\psi}| > 0$. Si ω est intégrable par rapport à φ , alors ω est intégrable par rapport à ψ et on a : $\underbrace{\int \int \cdots \int_{\varphi}}_{p \text{ fois}} \omega = \underbrace{\int \int \cdots \int_{\psi}}_{p \text{ fois}} \omega$

Remarque 4.3. Soit ω une forme différentielles de degré p , définies sur U , et soit A une partie borélienne de $\mathbb{R}^p$, contient un ouvert O de $\mathbb{R}^p$ de sorte que $A \setminus O$ est négligeable par rapport à la mesure de $\mathbb{R}^p$. Soit φ une fonction définie sur A telle que la restriction φ_0 de φ sur O est continûment différentiable. Si ω est intégrable par rapport à φ_0 , on peut définir l'intégrale de ω par rapport à φ comme suivant :

$$\underbrace{\int \int \cdots \int_{\varphi}}_{p \text{ fois}} \omega = \underbrace{\int \int \cdots \int_{\varphi_0}}_{p \text{ fois}} \omega$$

Exemple 4.5. Soit γ la courbe paramétrique définie sur $I = [0, 1]$ comme suivant : $\gamma(t) = (t^2, t + 1)$. Soit $\omega = ydx + xdy$ une forme différentielle de degré 1. γ_0 la restriction de γ sur $I_0 =]0, 1[$, et $\gamma_0^* \omega = (t + 1)d(t^2) + t^2 d(t + 1) = (3t^2 + 2t)dt = f(t)dt$. Donc :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{I_0} f(t)dt = \int_0^1 (3t^2 + 2t)dt = 2$$

4.4 Intégration des formes différentielles sur une sous-variété

Soit V une sous-variété orientée, séparée, de dimension p , de classe C^1 , de $\mathbb{R}^n$, et soit ω une forme différentielle borélienne de degré p sur un ouvert U qui contient V .

Il existe un ouvert O de $\mathbb{R}^p$ et une immersion φ de O dans A , telle que $Im(O) = V$, cette immersion définie à l'aide de l'orientation de $\mathbb{R}^n$ l'orientation de V .

Théorème 4.6. L'intégrabilité de ω par rapport à φ et la valeur de $\int_{\varphi} \omega$ est indépendant de la choix de V et de φ .

Définition 4.5. Si ω est intégrable par rapport à φ , on dit que ω est intégrable sur V , et on écrit :

$$\underbrace{\int \int \cdots \int_V}_{p \text{ fois}} \omega = \underbrace{\int \int \cdots \int_{\varphi}}_{p \text{ fois}} \omega$$

Exemple 4.6. Soit $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$, et soit $\omega = xdy - ydx$. La sous-variété V peut représentée par l'immersion φ de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $\varphi(t) = (t, t^2)$. Donc :

$$\int_V \omega = \int_{\varphi} \omega = \frac{2}{3}$$

Théorème 4.7. Soient ω et α deux formes différentielles de degré p , définies sur U . Si ω et α sont intégrables sur V , alors :

$$1. \omega + \alpha \text{ est intégrable sur } V \text{ et on a : } \underbrace{\int \int \cdots \int_V}_{p \text{ fois}} (\omega + \alpha) = \underbrace{\int \int \cdots \int_V}_{p \text{ fois}} \omega + \underbrace{\int \int \cdots \int_V}_{p \text{ fois}} \alpha.$$

$$2. \text{ Pour tout nombre réel } \lambda, \lambda\omega \text{ est intégrable sur } V \text{ et on a : } \underbrace{\int \int \cdots \int_V}_{p \text{ fois}} \lambda\omega = \lambda \underbrace{\int \int \cdots \int_V}_{p \text{ fois}} \omega$$

Définition 4.6. On dit qu'une partie P de V est une pièce de V si et seulement si : pour tout $x \in P$, il existe un ouvert O de $\mathbb{R}^p$ contenant x , et une partie W de $\mathbb{R}^n$, un entier $q(x) \leq p$, et un difféomorphisme ψ de O dans W tels que :

- i) $\psi(x) = 0$,
- ii) $\psi(O \cap V) = W \cap (\mathbb{R}^p \times 0_{n-p})$,
- iii) $\psi(O \cap P) = W \cap (\mathbb{R}_+^{p-q} \times \mathbb{R}^q \times 0_{n-p})$.

On appelle l'ensemble des éléments x ou $p - q(x) = 0$ l'intérieur de P , et on la note par $\overset{\circ}{\partial}P$. On appelle l'ensemble des éléments x ou $p - q(x) = 1$ la frontière de P , et on la note par ∂P .

Exemple 4.7. Soit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$. P est une pièce de frontière $\partial P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, et d'intérieur $\overset{\circ}{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$.

Théorème 4.8. [Formule de Stokes :] Soit P une pièce compact de V a bord orienté ∂P . Soit ω une forme différentielle de degré $p-1$, différentiable sur un voisinage ouvert de P . Alors, ω est intégrable sur ∂P et $d\omega$ intégrable sur $\overset{\circ}{P}$ et on a :

$$\int_{\overset{\circ}{P}} d\omega = \int_{\partial P} \omega$$

Corollaire 4.2. [Formule de Riemann :] Soit P une pièce compact de $\mathbb{R}^2$ a bore orienté ∂P . Soit f, g deux fonctions continûment différentiables sur un voisinage ouvert de P . Alors :

$$\int_{\overset{\circ}{P}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial P} (f dx + g dy)$$

4.5 Exercices

Exercice 4.1. : Soit S la surface paramétrée par l'application : $\psi : (u, v) \in D \mapsto (u, v, uv)$, ou D est le disque d'unité de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner sous forme d'une intégrale sur D l'aire de la surface de S .
2. En utilisant les coordonnées polaires, calculer cette intégrale.

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par : $f(x, y, z) = z - x^2$. Calculer $\int \int_S f dS$.

Exercice 4.2. : Trouver le flux du champs de vecteurs $F(x, y, z) = (y, -x, z)$ à travers de la surface conique extérieure $z = \sqrt{x^2 + y^2}; 0 \leq z \leq 2$.

Exercice 4.3. : A l'aide du théorème d'Ostrogradski calculer l'intégrale $\int \int_S (F \cdot \nu_S) dS$ du champs $F(x, y, z) = (x, y, z)$; où S est une surface entourant le cylindre $x^2 + y^2 \leq a^2$ entre les deux plans $z = -1$ et $z = 1$.

Exercice 4.4. : Soit S la surface définie par :

$$S = \{(u, v, u^2 + v^2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < u < 1, -1 < v < 1\}.$$

Soit la fonction h définie sur S par $h(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$, et soit Φ la fonction définie sur $]0, 1[\times]-1, 1[$ par : $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.

1. Donner la matrice Jacobienne de la fonction Φ .
2. Ecrire sous forme intégrale double la mesure de S .
3. Calculer l'intégrale de surface $\int_S h dS$.

Exercice 4.5. : Utiliser le théorème de Stokes pour trouver l'intégrale curviligne

$$\int_C (y^3 dx - x^3 dy + z^3 dz),$$

ou la courbe C est l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = a^2$ et le plan $x + y + z = b$.

Exercice 4.6. : Soit S la partie du cône définie par :

$$S = \{(u, v, \sqrt{u^2 + v^2}, 0 < u < 1, 0 < v < 1\}.$$

Soit la fonction h définie sur S par $h(x, y, z) = 9\sqrt{2}x^2y^2$, et soit Φ la fonction définie sur $]0, 1[\times]0, 1[$ par : $\Phi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$.

1. Donner la matrice Jacobienne de la fonction Φ .
2. Calculer la mesure de S .
3. Calculer l'intégrale de surface $\int_S h dS$.

Exercice 4.7. : Soit la fonction f , de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}).$$

On pose : $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 < z < 1\}$.

1. Calculer Jf la matrice jacobienne de f .
2. Montrer que la fonction f est une immersion sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. Montrer que V est une sous variété de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa dimension et sa classe.
4. Soit ψ la fonction de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$\forall (u, v) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi] : \psi(u, v) = (e^{-u} \cos v, e^{-u} \sin v, e^{-u}).$$

- i) Montrer que ψ définit une paramétrisation de V .
- ii) Calculer $J\psi$ la matrice jacobienne de ψ .
5. Calculer la mesure de V .

Exercice 4.8. : Soit la fonction f , de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2 + 1}).$$

On pose : $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 + 1, z \geq 1\}$.

1. Calculer Jf la matrice jacobienne de f .
2. Montrer que la fonction f est une immersion.
3. Montrer que V est une sous variété de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa dimension et sa classe.
4. Soit ψ la fonction de $[0, +\infty[\times]-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$\forall (u, v) \in [0, +\infty[\times]-\pi, \pi] : \psi(u, v) = (sh u \cos v, sh u \sin v, ch u).$$

- i) Montrer que ψ définit une paramétrisation de V .
- ii) Calculer $J\psi$ la matrice jacobienne de ψ .

5. Calculer $\int_V \frac{dV}{(1+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Exercice 4.9. : Soit la fonction f , de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} \right).$$

On pose : $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, 0 < z < 1 \right\}$.

1. Calculer Jf la matrice jacobienne de f .
2. Montrer que la fonction f est une immersion sur $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1 \right\}$.
3. Montrer que V est une sous variété de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa dimension et sa classe.
4. Soit ψ la fonction de $]0, \frac{\pi}{2}[\times]-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$\forall (u, v) \in]0, \frac{\pi}{2}[\times]-\pi, \pi] : \psi(u, v) = (3 \sin u \cdot \cos v, 2 \sin u \cdot \sin v, \cos u).$$

- i) Montrer que ψ définit une paramétrisation de V .
- ii) Calculer $J\psi$ la matrice jacobienne de ψ .

5. Calculer l'intégrale $\int_V \frac{dV}{\sqrt{13 - x^2 - y^2 + 23z^2}}$.

4.6 Correction des exercices

Solution 4.1. : S la surface paramétrée par : $\psi : (u, v) \in D \mapsto (u, v, uv)$, ou $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$.

1. L'aire de la surface de S est :

$$A = \int \int_D \left(\left| \frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(\psi_1, \psi_3)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(\psi_2, \psi_3)}{D(u, v)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} du dv$$

$$\left| \frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(u, v)} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \quad \left| \frac{D(\psi_1, \psi_3)}{D(u, v)} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & v \end{pmatrix} \right| = v \quad \left| \frac{D(\psi_2, \psi_3)}{D(u, v)} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & v \end{pmatrix} \right| = -u, \text{ donc :}$$

$$A = \int \int_D \sqrt{1 + u^2 + v^2} du dv$$

2. $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta, 0 \leq r \leq 1, -\pi \leq \theta \leq \pi$, alors :

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 r \sqrt{1 + r^2} dr = \frac{2\pi(2\sqrt{2} - 1)}{3}$$

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z - x^2$.

$$\begin{aligned}
 \int \int_S f ds &= \int \int_D f(u, v) \sqrt{1 + u^2 + v^2} du dv \\
 &= \int \int_D (uv - u^2) \sqrt{1 + u^2 + v^2} du dv \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r^3 (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) \sqrt{1 + r^2} dr d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 2\theta - \cos 2\theta - 1) d\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1 + r^2} dr \\
 &= \frac{2\pi}{15} (1 + \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Solution 4.2. : $F(x, y, z) = (y, -x, z)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}; 0 \leq z \leq 2\}$.
 $S = \partial V$ ou $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq z^2; 0 \leq z \leq 2\}$.

Le flux du champs de vecteurs F à travers de S est $\int_S (F \cdot \nu_S) dS$.

D'après la formule d'Ostragradski : $\int_S F \cdot \nu_S dS = \int_V (\text{div} F) dx dy dz = \int_V dx dy dz$.

En utilisant les cordonnées cylindriques $(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, on trouve :

$$\int_S F \cdot \nu_S dS = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^2 \left(\int_0^z dr \right) dz = 2\pi \int_0^2 z dz = 4\pi$$

Solution 4.3. : $F(x, y, z) = (x, y, z)$, $\text{div} F = 3$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, -1 \leq z \leq 1\}$.
 $S = \partial C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2, -1 \leq z \leq 1\}$.

D'après la formule d'Ostrogradski : $\int_S F \cdot \nu_S dS = \int_C (\text{div} F) dx dy dz = \int_C 3 dx dy dz$.

En utilisant les cordonnées cylindriques $(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, on trouve :

$$\int_S F \cdot \nu_S dS = \int_{-1}^1 \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} 3r dz dr d\theta = 6\pi a^2.$$

Solution 4.4. :

$$S = \{(u, v, u^2 + v^2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < u < 1, -1 < v < 1\}.$$

$$1. J\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}.$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
 \mu(S) &= \int_{-1}^1 \int_0^1 \sqrt{\left| \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(\Phi_1, \Phi_3)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(\Phi_2, \Phi_3)}{D(u, v)} \right|^2} du dv \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^1 \sqrt{\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|^2 + \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \right|^2 + \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \right|^2} du dv \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^1 \sqrt{1 + u^2 + v^2} du dv
 \end{aligned}$$

3. L'intégrale de surface $\int_S h dS$:

$$\begin{aligned}
\int \int_S h dS &= \int_{-1}^1 \int_0^1 h(\Phi(u, v)) \sqrt{\left| \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(\Phi_1, \Phi_3)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(\Phi_2, \Phi_3)}{D(u, v)} \right|^2} dudv \\
&= \int_{-1}^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \cdot \sqrt{1+4u^2+4v^2} dudv \\
&= \int_{-1}^1 \int_0^1 dudv = 2
\end{aligned}$$

Solution 4.5. : $\omega = y^3 dx - x^3 dy + z^3 dz$.

$C = \partial V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = b\}$

avec $\bar{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = b\}$

V est compact car $-a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a, b-a \leq z \leq b+a$.

On peut écrire $\overset{\circ}{V} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, b - r \cos \theta - r \sin \theta); 0 < r < a, -\pi < \theta < \pi\}$.

D'après la formule de Stokes : $\int_C \omega = \int_{\overset{\circ}{V}} d\omega$.

Soit φ la fonction de $] -a, a[\times] -\pi, \pi[$ dans $\overset{\circ}{V}$ définie par : $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, b - r \cos \theta - r \sin \theta)$.

$D_{(r, \theta)} \varphi = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta, -(\cos \theta + \sin \theta) dr + r(\sin \theta - \cos \theta) d\theta)$

$d\omega = 3y^2 dy dx - 3x^2 dx dy = -3(x^2 + y^2) dx dy$

$$\begin{aligned}
\varphi^* d\omega &= \omega(r \cos \theta, r \sin \theta, b - r \cos \theta - r \sin \theta) \circ D_{(r, \theta)} \varphi \\
&= -3(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)(\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\
&= -3r^2(r \cos^2 \theta dr d\theta - r \sin^2 \theta d\theta dr) \\
&= -3r^3 dr d\theta
\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_C (y^3 dx - x^3 dy + z^3 dz) = \int_{\overset{\circ}{V}} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^a -3r^3 dr = -\frac{3\pi}{2} a^4.$$

Solution 4.6. :

$$S = \{(u, v, u^2 + v) \in \mathbb{R}^3 : 0 < u < 1, -1 < v < 1\}.$$

$$1. J\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u & v \\ \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{pmatrix}.$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\mu(S) &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\left| \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(\Phi_1, \Phi_3)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(\Phi_2, \Phi_3)}{D(u, v)} \right|^2} dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \frac{0}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{0}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{pmatrix} \right|^2} dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{u^2}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{u^2 + v^2}} dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{2} dudv = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

3. L'intégrale de surface $\int_S h dS$:

$$\begin{aligned}
\int \int_S h dS &= \int_0^1 \int_0^1 h(\Phi(u, v)) \sqrt{\left| \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(\Phi_1, \Phi_3)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(\Phi_2, \Phi_3)}{D(u, v)} \right|^2} dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 9\sqrt{2}u^2v^2 \cdot \sqrt{2} dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 18u^2v^2 dudv = 2
\end{aligned}$$

Solution 4.7. :

$$f(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 < z < 1\}$$

$$1. \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}.$$

2. Pour toute $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ les deux vecteurs $\left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ et $\left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

sont linéairement indépendants.

Donc : $\text{rang } JF = 2$, dimension de l'ensemble de départ

Alors : f est une immersion sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

3. V est une graphe de la fonction $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, qui est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (plus précisément sur $D(0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$).

Donc : V est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2, de classe C^∞ .

4. $\forall (u, v) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[: \psi(u, v) = (e^{-u} \cos v, e^{-u} \sin v, e^{-u})$.

i) Posons : $x = e^{-u} \cos v, y = e^{-u} \sin v, z = e^{-u}$.

On a : $x^2 + y^2 = z^2$, et puisque $u \in]0, +\infty[$, alors : $0 < z < 1$. Donc : $(x, y, z) \in V$.

Réciproquement, pour $u = \ln z$, on a : $z = e^{-u}$ et $u \in]0, +\infty[$,

et pour $v \in]-\pi, \pi[$ on a :

$$z^2 = e^{-2u} = e^{-2u}(\cos^2 v + \sin^2 v) = (e^{-u} \cos v)^2 + (e^{-u} \sin v)^2 = x^2 + y^2.$$

Donc : ψ définit une paramétrisation de V .

$$\text{ii) } \forall (u, v) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[: J\psi(u, v) = \begin{pmatrix} -e^{-u} \cos v & -e^{-u} \sin v \\ -e^{-u} \sin v & e^{-u} \cos v \\ -e^{-u} & 0 \end{pmatrix}.$$

5. On a :

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} -e^{-u} \cos v & -e^{-u} \sin v \\ -e^{-u} \sin v & e^{-u} \cos v \end{vmatrix} = -e^{-2u},$$

$$\frac{D(\psi_1, \psi_3)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} -e^{-u} \cos v & -e^{-u} \sin v \\ -e^{-u} & 0 \end{vmatrix} = -e^{-2u} \sin v,$$

$$\frac{D(\psi_2, \psi_3)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} -e^{-u} \sin v & e^{-u} \cos v \\ -e^{-u} & 0 \end{vmatrix} = e^{-2u} \cos v.$$

$$\text{Donc : } \sqrt{\left(\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(\psi_1, \psi_3)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(\psi_2, \psi_3)}{D(u, v)}\right)^2} = e^{-2u} \sqrt{2}.$$

$$\text{Alors : } \mu(V) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-2u} \sqrt{2} dudv = 2\pi \sqrt{2} \left[-\frac{e^{-2u}}{2} \right]_0^{+\infty} = \pi \sqrt{2}$$

Solution 4.8. :

$$f(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 < z < 1\}$$

$$1. \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \end{pmatrix}.$$

2. Pour toute $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les deux vecteurs $\left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ et $\left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ sont linéairement indépendants.

Donc : $\text{rang } Jf = 2$, dimension de l'ensemble de départ

Alors : f est une immersion.

3. V est une graphe de la fonction $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, qui est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Donc : V est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2, de classe C^∞ .

4. $\forall (u, v) \in [0, +\infty[\times]-\pi, \pi] : \psi(u, v) = (sh\,u \cdot \cos v, sh\,u \sin v, ch\,u)$.

i) Posons : $x = sh\,u \cdot \cos v, y = sh\,u \cdot \sin v, z = ch\,u$.

On a : $x^2 + y^2 + 1 = x^2 + y^2 + z^2 = sh^2 u = z^2$, et $z \geq 1$. Donc : $(x, y, z) \in V$.

Réciproquement, pour $u = \argch z$, on a : $z = ch\,u$ et $u \in [0, +\infty[$,

et pour $v \in]-\pi, \pi]$ on a :

$$z^2 = ch^2 u = sh^2 u + 1 = h^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + 1 = (sh\,u \cdot \cos v)^2 + (sh\,u \cdot \sin v)^2 + 1 = x^2 + y^2 + 1.$$

Donc : ψ définit une paramétrisation de V .

$$\text{ii) } \forall (u, v) \in [0, +\infty[\times]-\pi, \pi] : J\psi(u, v) = \begin{pmatrix} ch\,u \cdot \cos v & -sh\,u \cdot \sin v \\ ch\,u \cdot \sin v & sh\,u \cdot \cos v \\ sh\,u & 0 \end{pmatrix}.$$

5. On a :

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} ch\,u \cdot \cos v & -sh\,u \cdot \sin v \\ ch\,u \cdot \sin v & sh\,u \cdot \cos v \end{vmatrix} = sh\,u \cdot ch\,u,$$

$$\frac{D(\psi_1, \psi_3)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} ch\,u \cdot \cos v & -sh\,u \cdot \sin v \\ sh\,u & 0 \end{vmatrix} = sh^2 u \sin v,$$

$$\frac{D(\psi_2, \psi_3)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} ch\,u \cdot \sin v & sh\,u \cdot \cos v \\ sh\,u & 0 \end{vmatrix} = -sh^2 u \cdot \cos v.$$

$$\text{Donc : } \sqrt{\left(\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(\psi_1, \psi_3)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(\psi_2, \psi_3)}{D(u, v)}\right)^2} = sh\,u \sqrt{sh^2 u + ch^2 u}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_V \frac{dV}{(1 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{sh\,u \sqrt{sh^2 u + ch^2 u} \, du \, dv}{(1 + ch^2 u)\sqrt{sh^2 u + ch^2 u}} \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{sh\,u \, du}{(1 + ch^2 u)} \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Solution 4.9. :

$$f(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}\right) \quad V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, z \geq 0\right\}$$

$$1. \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -x & -y \\ 9\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} & 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ Pour toute } (x, y) \in E \text{ les deux vecteurs } \begin{pmatrix} 1, 0, \frac{-x}{9\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1, 0, \frac{-y}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}} \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

Donc : $\text{rang } JF = 2$, dimension de l'ensemble de départ

Alors : f est une immersion sur E .

$$3. V \text{ est une graphe de la fonction } h(x, y) = 9\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}, \text{ qui est une fonction de classe } C^\infty \text{ sur } E.$$

Donc : V est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2, de classe C^∞ .

$$4. \forall (u, v) \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\times] - \pi, \pi] : \psi(u, v) = (3 \sin u \cdot \cos v, 2 \sin u \cdot \sin v, \cos u).$$

$$\text{i) Posons : } x = 3 \sin u \cdot \cos v, y = 2 \sin u \cdot \sin v, z = \cos u.$$

On a : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, et puisque $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, alors : $0 < z < 1$. Donc : $(x, y, z) \in V$.

Réciproquement, pour $u = \arccos z$, on a : $z = \cos u$ et $u \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$,

et pour $v \in] - \pi, \pi]$ on a :

$$1 - z^2 = \sin^2 u = \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) = \frac{(3 \sin u \cos v)^2}{9} + \frac{(2 \sin u \sin v)^2}{4} = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}.$$

Alors, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$. Donc : ψ définit une paramétrisation de V .

$$\text{ii) } \forall (u, v) \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\times] - \pi, \pi] : J\psi(u, v) = \begin{pmatrix} 3 \cos u \cdot \cos v & -3 \sin u \cdot \sin v \\ 2 \cos u \cdot \sin v & 2 \sin u \cdot \cos v \\ -\sin u & 0 \end{pmatrix}.$$

5. On a :

$$\begin{aligned} \frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(u, v)} &= \begin{vmatrix} 3 \cos u \cdot \cos v & -3 \sin u \cdot \sin v \\ 2 \cos u \cdot \sin v & 2 \sin u \cdot \cos v \end{vmatrix} = 6 \sin u \cdot \cos u, \\ \frac{D(\psi_1, \psi_3)}{D(u, v)} &= \begin{vmatrix} 3 \cos u \cdot \cos v & -3 \sin u \cdot \sin v \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = -3 \sin^2 u \cdot \sin v, \\ \frac{D(\psi_2, \psi_3)}{D(u, v)} &= \begin{vmatrix} 2 \cos u \cdot \sin v & 2 \sin u \cdot \cos v \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = 2 \sin^2 u \cdot \cos v. \end{aligned}$$

$$\text{Posons : } K = \sqrt{\left(\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(\psi_1, \psi_3)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(\psi_2, \psi_3)}{D(u, v)} \right)^2}, \text{ alors :}$$

$$\begin{aligned} K &= \sin u \cdot \sqrt{9 \sin^2 u \cdot \sin^2 v + 4 \sin^2 u \cdot \cos^2 v + 36 \cos^2 u} \\ &= \sin u \cdot \sqrt{13 - 9 \sin^2 u \cdot \cos^2 v - 4 \sin^2 u \cdot \sin^2 v + 23 \cos^2 u}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \int_V \frac{dV}{\sqrt{13 - x^2 - y^2 + 23z^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin u \, du \, dv = 2\pi$$

Chapitre 5

Variétés abstraites

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit X un espace topologique, séparé, séparable.

5.1 Cartes, Atlas, et variétés

Définition 5.1. *Etant donnée un ouvert U de X , et un homéomorphisme φ de U dans un ouvert de $\mathbb{R}^m$. (U, φ) est appelée une carte de X , de dimension m . L'ouvert U est appelé domaine de la carte (U, φ) .*

Remarque 5.1. *Soit (U, φ) une carte de dimension m sur X , et soit $x \in U$.*

1. *La carte (U, φ) est dite une carte en x , elle est dite centrée en x si $\varphi(x) = 0$.*
2. *φ^{-1} est appelée paramétrage de l'ouvert U .*
3. *Si on pose $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$, les fonctions φ_k de U dans $\mathbb{R}$ sont appelées les coordonnées locales associées à la carte (U, φ) .*

Définition 5.2. *Soit $(U, \varphi), (V, \psi)$ deux cartes de X , de dimension m . On dit que $(U, \varphi), (V, \psi)$ sont C^k -compatibles si $\psi \circ \varphi^{-1}$ est isomorphisme de classe C^k de $\varphi(U \cap V)$ dans $\psi(U \cap V)$.*

Définition 5.3. *On appelle atlas m -dimensionnel de classe C^m sur X , un ensemble des couples $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tels que les trois axiomes suivants sont satisfaites :*

- i) $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X ,
- ii) pour toute $i \in I$, (U_i, φ_i) est une carte de dimension m sur X ,
- iii) pour tout couple (i, j) , les carets $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ sont compatibles.

Définition 5.4. *Soit $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas sur X , et $U \subset X, \varphi$ une bijection de U sur $\mathbb{R}^m$. La carte (U, φ) est dite compatible avec l'atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ si la réunion $\{(U, \varphi)\} \cup \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ est encore un atlas sur X .*

Deux atlas tous deux m -dimensionnels et de classe C^m sont compatibles si leur réunion est encore un atlas sur X .

Définition 5.5. *On dit que X est une variété de dimension m et de classe C^k si on donne une classe d'équivalence d'atlas m -dimensionnels de classe C^k sur X .*

Remarque 5.2. *Soit X une variété.*

1. Tout atlas de cartes C^k de X est contenu dans un unique atlas de cartes C^k maximal pour l'inclusion.
2. Si $k \geq 1$, on dit que X est une variété différentielle.

Exemple 5.1. [15, 12]

1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension m , et soit $\{v_1, \dots, v_m\}$ une base de E .
L'application $\varphi : (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^m$.
on munit E d'une structure d'espace métrique, dont la distance d est $d(V, W) = d(x_1 v_1 + \dots + x_m v_m, y_1 v_1 + \dots + y_m v_m) = \|((x_1 - y_1), \dots, (x_m - y_m))\|$
La collection contenant seulement φ est un atlas.
Donc, E est une variété de dimension m .
2. On note par $\mathbb{P}^n$ l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de $\mathbb{R}^{n+1}$. $\mathbb{P}^n$ est une variété de dimension n de classe C^∞ .
3. Si X_1, X_2 sont deux variétés de dimensions m_1, m_2 , le produit $X_1 \times X_2$ est une variété de dimension $m_1 + m_2$.

Théorème 5.1. [3] Soit X une variété de dimension m , de classe C^k . On peut munit X d'une topologie dite canonique, dont les ouverts sont les réunions des domaines des cartes.

Théorème 5.2. [3] Soit $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ un atlas m -dimensionnel de la variété X . Un sous-ensemble U de X est un ouvert si et seulement si pour tout carte (V_i, ψ_i) , $\psi_i(U \cap V_i)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Théorème 5.3. [3] Pour tout carte (U, φ) d'une variété X , l'application φ de U de $\varphi(U)$ est un homéomorphisme pour la topologie canonique de X .

Exemple 5.2. [3]

1. Un ouvert U d'une variété X , munie de sa topologie canonique est canoniquement une variété.
2. Les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ sont des variétés de façon canonique, et leur topologie de variété coïncide avec la topologie induite de $\mathbb{R}^n$.

5.2 Morphismes de variétés

Définition 5.6. Soit X et Y deux variétés de dimension m, n et de classe C^k, C^r . Soit $p \leq \min\{k, r\}$. On dit qu'une application continue $f : X \rightarrow Y$ est un C^p morphisme, si pour toute carte (U, φ) en x , et pour toute carte (V, ψ) en $f(x)$, l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^p de $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ dans $\mathbb{R}^n$. On notera $C^p(X, Y)$ l'ensemble des C^p morphismes de X dans Y .

Théorème 5.4. Soit X et Y deux variétés de dimension m, n et de classe supérieure ou égal à p . Soit f une application continue de X dans Y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est un C^p morphisme de X dans Y ;
2. Pour tout $x \in X$, pour toute carte (U, φ) en x , et pour toute carte (V, ψ) en $f(x)$, telles que $f(U) \subset V$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^p de $\varphi(U)$ dans $\mathbb{R}^n$;
3. Pour tout $x \in X$, il existe une carte (U, φ) de X en x , et une carte (V, ψ) en $f(x)$, telles que $f(U) \subset V$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^p(\varphi(U); \mathbb{R}^n)$.

Définition 5.7. Soit X et Y deux variétés de dimension m, n et de classe C^k, C^r . Soit $p \leq \min\{k, r\}$. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est un C^p -difféomorphisme, si elle est bijective, $f \in C^p(X, Y)$, $f^{-1} \in C^p(Y, X)$.

Exemple 5.3. [12] On considère la sphère $\mathbb{S}^n$. L'injection canonique $i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est C^∞ -difféomorphisme.

5.3 Espace tangent, fibré tangent

Soit X une variété de dimension m et de classe C^k ($k \geq 1$), x un point de X et $(U, \varphi), (V, \psi)$ deux cartes de X en X . Soit u, v deux éléments de $\mathbb{R}^m$.

Proposition 5.1. [3] La relation $\mathcal{R}$, définie par $(U, \varphi, u)\mathcal{R}(V, \psi, v)$ si et seulement si $D_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})(u) = v$ est une relation d'équivalence

Définition 5.8. On appelle vecteur tangent à X en x , une classe d'équivalence de triplets (U, φ, u) pour la relation $\mathcal{R}$.

On appelle espace tangent, et on le note par $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangent à X en x .

Remarque 5.3. Si on fixe une carte (U, φ) de x , on peut lui associer une bijection θ_x de $T_x X$ dans $\mathbb{R}^m$.

Théorème 5.5. [3] $T_x X$ possède une structure d'espace vectorielle de dimension m .

Exemple 5.4. [3] Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension m et de classe C^k . L'espace tangent en tant que X est sous-variété, et en tant que X est variété sont isomorphes.

Théorème 5.6. [3] $TX = \bigcup_{x \in X} T_x X$ peut être muni d'une structure variété de dimension $2m$ et de classe C^{k-1} .

Définition 5.9. TX est appelée le fibré tangent de X .

Définition 5.10. Un champs de vecteurs de classe C^k sur une variété de classe C^{k+1} est une section de classe C^k du fibré tangent, c'est à dire une application $\xi : X \rightarrow TX$ de classe C^k , telle que : $\forall x \in X : \xi(x) \in T_x X$.

Définition 5.11. Soit X, Y deux variétés, f un C^p morphisme de X dans Y et x un point de X . Soient (U, φ) une carte de x , (V, ψ) une carte de $f(x)$ telles que $f(U) \subset V$. On associe (U, φ) à θ_x , et (V, ψ) à $\eta_{f(x)}$ (remarque 5.3).

On appelle application tangent à f en x , l'application linéaire $T_x f$ de $T_x X$ dans $T_{f(x)} Y$, définie comme suivant :

$$T_x f = \eta_{f(x)}^{-1} \circ D_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \theta_x \quad (5.1)$$

5.4 Sous - variétés d'une variété

Définition 5.12. Soit X une variété de dimension m , et de classe C^k , Y une partie de X . On dit que Y est une sous-variété de dimension q de X si pour tout $y \in Y$, il existe une carte (U, φ) de X telle que $\varphi(U \cap Y) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^q$.

Théorème 5.7. [3] Soit X une variété de dimension m , et de classe C^p , Y une sous-variété de X . Alors, Y à une structure de variété de classe C^k .

Proposition 5.2. [3] *Soit X une variété, Y une sous-variété de X , et Z une sous-variété de Y . Alors, Z est une sous-variété de X .*

Définition 5.13. *Soit X, Y deux variétés, et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme.*

- i) *On dit que f est une immersion on $x \in X$, si $T_x f$ est injective.*
- ii) *On dit que f est une submersion on $x \in X$, si $T_x f$ est surjective.*
- iii) *On dit que f est une étale on $x \in X$, si $T_x f$ est un isomorphisme de $T_x X$ dans $T_{f(x)} Y$.*
- iv) *On dit que f est un plongement de X dans Y si f est injective, immersion, et un homéomorphisme de X sur son image $f(X)$.*

Définition 5.14. *Soit X une variété de classe C^k ($k \geq 2$), E un espace euclidien, et f une immersion de X dans E . On appelle espace normal à (X, f) en $x \in X$ l'ensemble suivant :*

$$N_x X = [\theta_{f(x)}(T_x f(T_x X))]^\perp = \{z \in E : (z, u) = 0; \forall u \in \theta_{f(x)}(T_x f(T_x X))\}$$

5.5 Orientation

Notons $GL(m; R)$ le groupe des matrices $m \times m$ à coefficient réels, et inversibles, ainsi $GL(m; R)^+$ le sous-groupe de $GL(m; R)$ des matrices ayant un déterminant strictement positif. Fixons deux bases de $\mathbb{R}^m$. Il existe un unique élément dans $GL(m; R)$ qui envoie la première sur la seconde. Introduisons sur l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^m$ la relation d'équivalence où deux bases B_1 et B_2 vérifient $B_1 \sim B_2$ si et seulement si l'unique élément de $GL(m; R)$ qui envoie B_1 sur B_2 est dans $GL(m; R)^+$.

Définition 5.15. *On appelle une orientation de $\mathbb{R}^m$ le choix d'une des deux classes d'équivalence de la relation $\sim$.*

Une base dans la classe d'équivalence de la base canonique est dite directe.

Remarque 5.4. *On dit que $GL(m; R)$ possède deux composantes connexes, distinguées par le déterminant.*

Définition 5.16. *Un homéomorphisme préserve l'orientation s'il envoie une base sur une base équivalente.*

Définition 5.17. *Soit X une variété.*

- i) *Un atlas orienté de X est un atlas dont tous les changements de cartes préservent l'orientation.*
- ii) *X est orientable si elle admet un atlas orienté.*
- iii) *X est orientée si elle est munie d'une classe d'équivalence d'atlas orientés.*

Proposition 5.3. *En chaque point d'une variété orientée X , l'espace tangent $T_x X$ est orienté.*

5.6 Variétés à bord

On pose $\mathbb{R}_-^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m); x_1 \leq 0\}$, $\partial\mathbb{R}^m = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$, et pour un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, on pose $\partial U = U \cap \mathbb{R}_-^m$.

Proposition 5.4. *Toute difféomorphisme entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^m$ envoie le bord de U sur le bord de V .*

On définit atlas de variété à bord comme un atlas de variété, seulement $\varphi_i(U_i)$ supposée comme un ouvert de $\mathbb{R}^{m-1}$.

Définition 5.18. *X est appelée variété à bord si elle est muni d'une classe d'équivalence d'atlas de variété à bord.*

Le bord ∂X de X est l'ensemble des points envoyés dans $\partial\mathbb{R}_-^m$ par n'importe quelle carte.

Définition 5.19. *Soit X une variété de classe C^k , et de dimension m . On dit que X est une variété avec bords si pour tout point x de X , il existe un voisinage ouvert U de x et un homéomorphisme de U dans un ouvert V de $\mathbb{R}_-^m = \{(a_1, a_2, \dots, a_m), a_1 \leq 0\}$.*

Proposition 5.5. *Si X est une variété à bord, alors ∂X est une sous - variété de $\mathbb{R}^m$, de dimension $m - 1$.*

5.7 Exercice

Exercice 5.1. : *Soient U_1, V_1, U_2, V_2 des sous ensembles du cercle S^1 composés de points $M = (x, y)$ pour lesquels $y > 0, y < 0, x > 0, x < 0$, respectivement. Soient $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ des applications de ces ensembles dans $\mathbb{R}$ définies par :*

$$\varphi_1(x, y) = \psi_1(x, y) = x \qquad \varphi_2(x, y) = \psi_2(x, y) = y$$

1. *Montrer que les couples $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)$ sont des cartes sur S^1 .*
2. *Quelles sont les formules qui déterminent les changements de cartes.*
3. *Montrer que les cartes mentionnées dans 1. sont compatibles.*
4. *En déduire que S^1 est une variété différentiable de classe C^∞ .*

Exercice 5.2. :

1. *Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $xy = 0$ n'est pas une variété topologique.*
2. *Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ n'est pas une variété topologique.*

Exercice 5.3. : *On considère le sphère S^2*

1. *Ecrire explicitement les projections stéréographiques φ_N de pôle nord.*
2. *Ecrire explicitement les projections stéréographiques φ_S de pôle sud.*
3. *Donner la composition $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\varphi_N^{-1}} S^2 \setminus \{N, S\} \xrightarrow{\varphi_S} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*
4. *Déduire.*

Exercice 5.4. : Dans leur livre "Géométrie différentielle", M. Berger et B. Gostiaux donner la définition suivante d'une variété abstraite :

Soit X un ensemble, et $p > 0$ un entier. On appelle atlas d - dimensionnelle de classe C^p sur X , un ensemble des couples $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tels que les trois axiomes suivants sont satisfaites :

- i) Les U_i sont des sous-ensembles de X et $\bigcup_{i \in I} U_i = X$,
- ii) chaque φ_i est une bijection de U_i dans un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et pour tout couple (i, j) , $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$,
- iii) pour tout couple (i, j) , l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un isomorphisme de classe C^p de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ dans $\varphi_j(U_i \cap U_j)$.

X est appelé une variété de dimension d de classe C^p .

Soit maintenant $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (les droites qui passent par l'origine). $\mathcal{D}_y$ l'ensemble des droites $y = \alpha x$, ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\mathcal{D}_x$ l'ensemble des droites $x = \beta y$, ($\beta \in \mathbb{R}$). On définit les fonctions :

$$\varphi_y : \mathcal{D}_y \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_x : \mathcal{D}_x \rightarrow \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\{(\mathcal{D}_x, \varphi_x), (\mathcal{D}_y, \varphi_y)\}$ est un atlas unidimensionnelle sur $\mathcal{D}$, de classe C^∞ , au sens de ci-dessus.
2. Conclure.
3. Etudier le cas des droites affines de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.5. : Soit X l'ensemble suivant (Ruban de Möbius classique) :

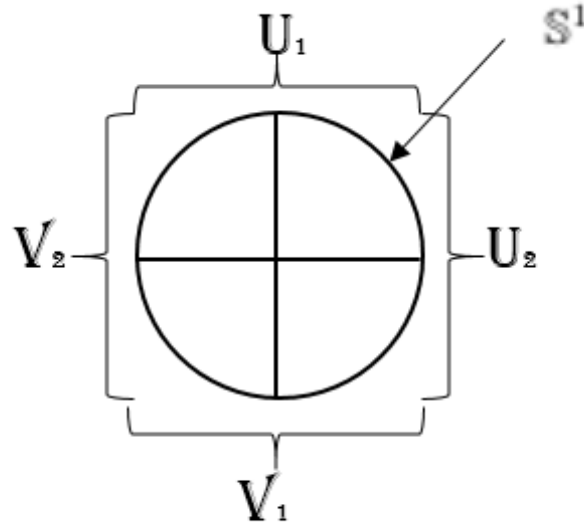
$$X = \left\{ ((1 + t \cos v) \cos(2v); (1 + t \cos v) \sin(2v); t \sin v), -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, 0 < v \leq \pi \right\}$$

1. Montrer que X est une variété de dimension 2.
2. Montrer que X n'est pas orientable.

5.8 Correction des exercices

Solution 5.1. : $\varphi_1(x, y) = \psi_1(x, y) = x$ $\varphi_2(x, y) = \psi_2(x, y) = y$.

1. Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sont des bijections de U_1, U_2, V_1, V_2 dans $] -1, 1[$, continues, ainsi que ses réciproque. Donc, $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sont des homéomorphismes de U_1, U_2, V_1, V_2 dans $] -1, 1[$.
Alors : les couples $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)$ sont des cartes sur S^1 .
2. On ait : $U_1 \cap U_2 = \{(x, y \in S^1 : x > 0, y > 0)\}$, $U_1 \cap V_2 = \{(x, y \in S^1 : x < 0, y > 0)\}$, $V_1 \cap U_2 = \{(x, y \in S^1 : x > 0, y < 0)\}$, $V_1 \cap V_2 = \{(x, y \in S^1 : x < 0, y < 0)\}$, $U_1 \cap V_2 \cap U_2 \cap V_2 = \emptyset$.



On a alors les formules de changement des cartes :

$$\begin{array}{llll}
]0, 1[& \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} & U_1 \cap U_2 & \xrightarrow{\varphi_2} &]0, 1[\\
 x & \mapsto & (x, y) & \mapsto & (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x) = y = \sqrt{1 - x^2} \\
]-1, 0[& \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} & U_1 \cap V_2 & \xrightarrow{\psi_2} &]0, 1[\\
 x & \mapsto & (x, y) & \mapsto & (\psi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x) = y = \sqrt{1 - x^2} \\
]-1, 0[& \xrightarrow{\psi_1^{-1}} & V_1 \cap U_2 & \xrightarrow{\varphi_2} &]0, 1[\\
 y & \mapsto & (x, y) & \mapsto & (\varphi_2 \circ \psi_1^{-1})(y) = x = \sqrt{1 - y^2} \\
]-1, 0[& \xrightarrow{\psi_1^{-1}} & V_1 \cap V_2 & \xrightarrow{\psi_2} &]-1, 0[\\
 y & \mapsto & (x, y) & \mapsto & (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})(y) = x = -\sqrt{1 - y^2}
 \end{array}$$

3. Les applications précédentes sont C^∞ difféomorphismes. Donc : les cartes mentionnées dans 1. sont compatibles.

4. Enfin : $S^1 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$. On a : construit un atlas unidimensionnel $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)\}$ de classe C^∞ . Alors : S^1 est une variété différentiable de dimension 1 classe C^∞ .

Solution 5.2. :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

Au voisinage ouvert U de point $(0, 0) \in A$, on ne peut pas trouver un homéomorphisme d'un segment $]a, b[\subset \mathbb{R}$ dans $U \cap A$. Donc : A n'est pas une variété topologique.

2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0 = 0\}$ (cône).

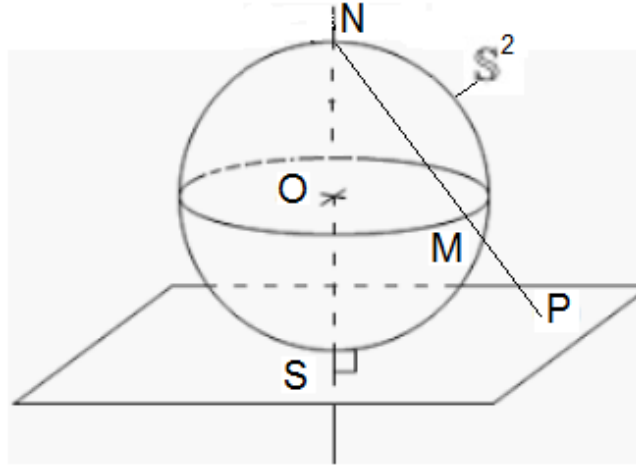
Au voisinage ouvert V de point $(0, 0, 0) \in B$, on ne peut pas trouver un homéomorphisme d'un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ dans $V \cap B$. Donc : B n'est pas une variété topologique.

Solution 5.3. : $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

1. On a :

$$\begin{array}{ll}
 \varphi_N : S^2 \setminus \{N\} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 M(x, y, z) & \longmapsto P(\alpha, \beta, -1) = (NM) \cap \{z = -1\}
 \end{array}$$

(NM) désigne la ligne qui passe aux points N et M .



Puisque $P \notin]NM[$, il existe $k \geq 1$ tel que : $P - N = k(M - N)$, ce qui donne : $(\alpha, \beta, -2) = (kx, ky, kz - k)$.

On a alors $kz = k - 2$.

Comme $M \in \mathbb{S}^2$, on a : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Donc : $(kx)^2 + (ky)^2 + (kz)^2 = k^2$.

Donc : $(x^2 + y^2)k^2 + (k - 2)^2 = k^2$, alors : $(x^2 + y^2)k^2 - 4k + 4 = 0$.

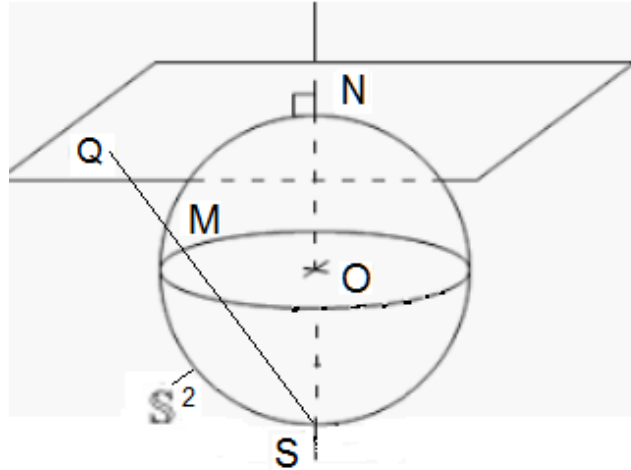
Tenant en compte $k \geq 1$, on trouve $k = \frac{1 + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}$.

Donc : $\varphi_N(x, y, z) = \left(\frac{x + x\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}, \frac{y + y\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}, -1 \right)$.

2. On a :

$$\begin{aligned} \varphi_S : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ M(x, y, z) &\longmapsto Q(\alpha, \beta, 1) = (SM) \cap \{z = 1\} \end{aligned}$$

(SM) désigne la ligne qui passe aux points S et M .



Puisque $Q \notin]SM[$, il existe $k \geq 1$ tel que : $Q - S = k(M - S)$, ce qui donne : $(\alpha, \beta, 2) = (kx, ky, kz + k)$.

On a alors $kz = 2 - k$.

Comme $M \in \mathbb{S}^2$, on a : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Donc : $(kx)^2 + (ky)^2 + (kz)^2 = k^2$.

Donc : $(x^2 + y^2)k^2 + (2 - k)^2 = k^2$, alors : $(x^2 + y^2)k^2 - 4k + 4 = 0$.

Tenant en compte $k \geq 1$, on trouve $k = \frac{1 + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}$.

Donc : $\varphi_S(x, y, z) = \left(\frac{x + x\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}, \frac{y + y\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}, 1 \right)$.

3. La composition $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \xrightarrow{\varphi_N^{-1}} \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \xrightarrow{\varphi_S} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

On a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : (\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(x, y) = (x, y)$.

4. Posons : $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, $U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$. On trouve :

*) $\mathbb{S}^2 = U_N \cup U_S$,

**) $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$ est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, i.e. (U_N, φ_N) , (U_S, φ_S) sont deux cartes compatibles, et $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ est un atlas bidimensionnel de classe C^∞ .

Solution 5.4. :

$\mathcal{D} = \{D : ax + by = 0, a, b \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}_y = \{D : y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}_x = \{D : x = \beta y, \beta \in \mathbb{R}\}$,

$\varphi_y : \mathcal{D}_y \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_x : \mathcal{D}_x \rightarrow \mathbb{R}$.

1. i) Il est clair que $\mathcal{D}_x \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_y \subset \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}_x \cup \mathcal{D}_y$.

ii) Les fonctions φ_x, φ_y sont bijectives de $\mathcal{D}_x$ dans $\mathbb{R}$, respectivement $\mathcal{D}_y$ dans $\mathbb{R}$,

iii) On a : $\mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y = \{D : y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}^*\} = \{D : x = \beta y, \beta \in \mathbb{R}^*\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^* & \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} & \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y & \xrightarrow{\varphi_y} & \mathbb{R}^* \\ a & \longmapsto & x = ay & \longmapsto & (\varphi_y \circ \varphi_x^{-1})(a) = \frac{1}{a} \end{array}$$

$\varphi_y \circ \varphi_x^{-1} \in C^\infty$, et de même $\varphi_x \circ \varphi_y^{-1}$.

Donc : $\{(\mathcal{D}_x, \varphi_x), (\mathcal{D}_y, \varphi_y)\}$ est un atlas unidimensionnelle sur $\mathcal{D}$, de classe C^∞ .

2. $\mathcal{D}$ est une variété de dimension 1, de classe C^∞ .

3. Les droites affines sont des droites $D : ax + by + c = 0$. On pose :

$\mathcal{D} = \{D : ax + by + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}_y = \{D : y = \alpha x + \gamma, \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}_x = \{D : x = \beta y + \delta, \beta \in \mathbb{R}\}$,

$\varphi_y : \mathcal{D}_y \rightarrow (\alpha, \gamma)$, $\varphi_x : \mathcal{D}_x \rightarrow (\beta, \delta)$.

Suivant les étapes précédentes, l'ensemble des droites affines de $\mathbb{R}^2$ est une variété de dimension 2, de classe C^∞ .