

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine: Mathématiques et Informatiques

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées et discrètes

Par

OUAHCHI Amina

THÈME

SUR LES L-ENSEMBLES FLOUS

Soutenu le : .. / 0. / 2016

Devant le jury composé de :

- 1).....
- 2).....
- 3).....

Dirigé par:

*Mr.*ZIANE BARAHIM

Année: **2015/2016**

Remerciements

Au terme de ce modeste travail, je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur Mr: B.LAKHALI pour sa patience, sa compétence, et son aide précieuse le long de la réalisation de ce travail.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent également à

Messieurs les membres de Jury qui auront la gentillesse de lire et juger ce modeste travail.

Je n'oublie pas mes parents, pour leur contribution, leur soutien et leur patience, et enfin j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches, mes amis et à tous ceux qui ont contribué de près et de loin à la réalisation de ce modeste travail par l'aide, la sympathie et le soutien moral.

Dédicace

Je dédie ce travail en première lieu à :

Mon cher père *Miloud*

Ma chère mère *Nassira*

Qui me sont très chers en témoignage à leur soutien, pendant
tout ma vie car aucun mot ne pourra exprimer ma haute
gratitude et profonde affection je dédie ce travail en premier

Je le dédie aussi..

A mes très chères soeurs

A mes frères.

A toute la famille.

A mes très chères amies *Kadija, Nassima*

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

NOTATION

$C(\Omega)$	L'espace des fonctions continues sur Ω
$C^n(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions n fois continues dérivables sur Ω
$L^2(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} (u(x))^2 dv < \infty\}$
$H^1(\Omega)$	$\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq 3\}$
$((u, w))$	produit scalaire
$H^2(\Omega)$	$\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) 1 \leq i, j \leq 3\}$
$u(X)$	$u(x_1, \dots, x_n)$
$\Delta u(X)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \in \mathbb{R}$

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Généralités et définitions sur les EDO et EDP	2
1.1.1 Equation différentielle ordinaire:	2
1.1.2 Equation différentielle aux dérivées partielle:	3
1.1.3 Classification des EDP linéaires du second ordre	3
1.1.4 Problème mathématique aux dérivées partielles	4
1.2 Méthodes des différences finies pour résoudre un problème d'EDP	6
1.2.1 Schéma numérique	6
1.2.2 La stabilité numérique, la convergence et la consistance	7
1.2.3 La méthode des différences finies	8
1.2.4 Principe de méthode	8
1.2.5 Maillage	8
1.3 L'existence et l'unicité de la solution pour l'EDP	8
2 Résolution numérique par différences finies d'une équation elliptique	13
2.1 Problème unidimensionnel	13
2.1.1 Discrétisation de l'équation différentielle	14
2.1.2 Approximation de l'équation différentielle	15
2.1.3 Système matriciel	15
2.2 Problème dans \mathbb{R}^2	16

2.2.1	Discrétisation de l'EDP	16
2.2.2	Approximation de l'équation différentielle partielle	17
2.2.3	Système matriciel	18
2.3	Quelques propriétés de la matrice du système linéaire	19
2.4	L'erreur du schéma numérique	20
3	Application numérique	22
	Conclusion générale	30
	Bibliographie	31

Introduction

Dans les calculs mathématiques, les idées et les approches ont pour but de construire et de rechercher des méthodes pour résoudre les problèmes de la physique mathématique

Une caractéristique de ses méthodes est que ce problème sera remplacé par un autre problème avec un nombre fini de paramètres très inconnues.

Avec la connaissance de ces paramètres il est possible de calculer une approximation de la solution.

Cette procédure est appelée : Discrétisation.

Généralement, on ne peut résoudre un problème de physique mathématique que par une méthode numérique la construction d'un algorithme pour obtenir une solution approchée d'un problème avec une précision spécifiée est l'objet de calcul mathématique.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralités et définitions sur les EDO et EDP

L'objectif de ce chapitre est de donner quelques résultats fondamentaux qui concernent des définitions sur EDO et EDP et les méthodes numériques pour la résolution numérique, on rappelle aussi quelques résultats théoriques.

1.1.1 Equation différentielle ordinaire:

On appelle équation différentielle d'ordre n est de la forme:

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \quad (1.1.1)$$

avec les conditions initiales

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (1.1.2)$$

où F est une fonction définie sur une partie de \mathbb{R}^{n+1} , $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ est vecteur fixé dans \mathbb{R}^{n+1} et l'inconnue est une fonction y de classe C^n définie sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant x_0

On appelle solution de cette équation toute fonction y de classe C^n définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et vérifiant l'équation (1.1.1) ainsi que les conditions initiales (1.1.2)

1.1.2 Equation différentielle aux dérivées partielles:

Une EDP est une équation dont les solutions sont des fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation mathématiques contenant en plus des variables indépendantes $(t, x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles et la fonction u , qu'on peut l'écrire sous la forme:

$$F\left(t, x, y, \dots, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \dots\right) = 0$$

1. L'EDP est dite linéaire si F est linéaire par rapport à ses arguments u et ses dérivées partielles, et si les coefficients qui les lient ne dépendent que de (t, x, y, \dots) ; sinon elle est non linéaire

Définition 1.1.1 *L'ordre d'une EDP est l'ordre le plus élevé parmi les dérivées partielles apparaissant dans l'EDP*

1.1.3 Classification des EDP linéaires du second ordre

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, une EDP linéaire du second ordre est donnée par:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(X) + \sum_{i=1}^n B_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i}(X) + Cu = G(X)$$

avec $A_{i,j}, B_i, C, G$ des fonctions indépendantes de u ne s'annulant pas toutes simultanément dans \mathbb{R}^n

En particulier la forme générale d'une équation aux dérivées partielles (EDP) du second ordre définit sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est donnée par:

4. Le problème de Neumann non homogène

$$\begin{cases} -\Delta u(x, t) + c(x)u(x, t) = f(x, t) & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = g(x), & x \in \Gamma \end{cases}$$

Problème bien posé

Considérons une équation aux dérivées partielles sur un domaine Ω avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution, on dit que le problème est bien posé si on a:

- Existence: d'une solution du problème.
- Unicité: de cette solution.
- Stabilité: par rapport aux données du problème.

Si la solution change beaucoup quand les données changent peu on dit que le problème est sensible aux données.

Problème mal posé

Un problème est dit mal posé si la solution de ce problème vérifie l'équation sans vérifier l'une des conditions du problème, par exemple:

$$\begin{cases} u''(x) = 0 \\ u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

La solution de ce problème est de la forme: $u(x) = Ax + B$. A partir des conditions du problème: $u'(a) = A = \alpha$ et $u'(b) = A = \beta$ ce qui est contradictoire.

Les conditions auxiliaire

Pour trouver des solutions particulières d'une équation aux dérivées partielles, à partir de la solution générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions. Les contraintes les plus fréquentes sont:

Conditions initiales

Si u est fonction de $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ on donne $u(x, t_0) = \Phi(x)$ ou $D_2^p u(x, t_0) = \Phi_p(x)$, on parle aussi de conditions de Cauchy.

Conditions au bord

Conditions aux limites d'une EDP est insuffisante pour définir u de manière unique.

Une information supplémentaire sur la frontière Γ de Ω ou sur une partie de Γ est nécessaire.

Une telle information s'appelle une condition à la limite. Elle peut s'écrire par exemple: pour tout $x \in \Gamma$, $u(x)$ est donné

aucoup quand les données changent peu on dit que le problème est sensible aux données.

1.2 Méthodes des différences finies pour résoudre un problème d'EDP

1.2.1 Schéma numérique

Une schéma numérique peut être défini comme la formulation algébrique d'un problème discret conçu à l'aide de la méthode des différences finies. La démarche comprend les étapes suivantes:

- Choisir les opérateurs discrets qui sont des approximations des opérateurs différentiels de la formulation exacte.
- Générer un maillage du domaine de définition en étant attentif aux noeuds frontières et à la manière de traduire les conditions aux limites.
- En se fondant sur les expressions issues des opérateurs discrets, établir les relations liant les valeurs des fonctions aux noeuds du maillage (les inconnues).
- S'assurer que l'ensemble des inconnues et des relations qui les relient constitue un problème numérique qui ne soit pas sur -ou sous -déterminé. Cette vérification est une condition minimale pour espérer trouver une solution, mais elle ne donne aucune garantie sur la convergence globale.

Une fois que le schéma numérique est établi et que le problème discret est formulé, il s'agit non seulement de le résoudre, mais encore de s'assurer que la solution discrète converge vers la solution exacte lorsque les pas du maillage tendent vers 0.

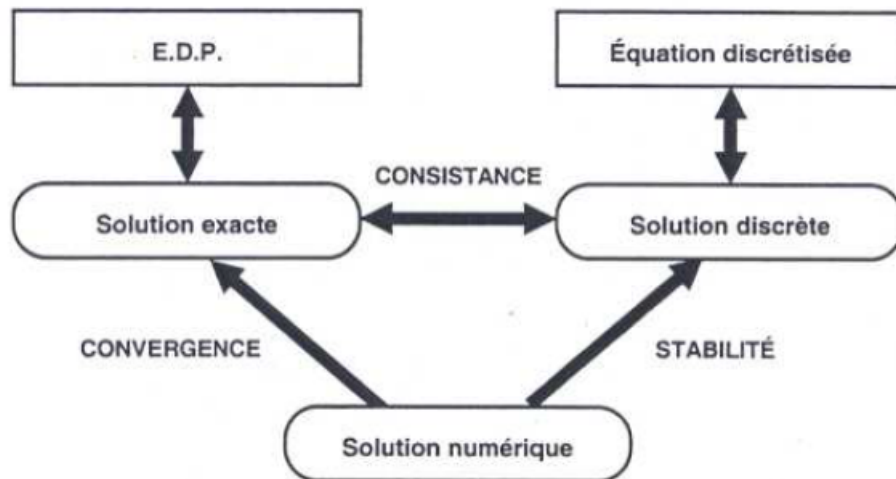
1.2.2 La stabilité numérique, la convergence et la consistance

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles(EDP) au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les trois principales sont la convergence, la stabilité et la consistance. Ces trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue.

1· La stabilité: c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.

2· La consistance: c'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque le pas de discrétisation tendent vers zéro.

3· La convergence: c'est la propriété qui assure que la solution numérique tende vers la solution exacte des équations continues



Solutions exacte, numérique et discrète

1.2.3 La méthode des différences finies

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage. Avantages: grande simplicité d'écriture et faible cout de calcul.

1.2.4 Principe de méthode

La méthode des différences finies consiste à approcher les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de la formule de Taylor.

1.2.5 Maillage

On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies. Pour une application définie sur un segment de \mathbb{R} , on ajoutera en général les deux extrémités du segment; pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir, éventuellement, des points du contours du domaine de définition. On appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage voisins. En dimension 1, cela se simplifie en différence des abscisses. Ce pas n'est pas nécessairement constant, il peut même être judicieux de ne pas le fixer comme tel. Le pas de l'approximation peut être défini comme le plus grand pas du maillage. Ainsi, si ce pas global tend vers 0, cela veut dire que la répartition des points du maillage dans l'intervalle choisi tend à se faire sur tout le domaine d'étude par densité.

1.3 L'existence et l'unicité de la solution pour l'EDP

L'espace de Hilbert et $L^2(\Omega)$

Définition 1.3.1 :

Espace de Hilbert est un espace fonctionnel linéaire muni d'un produit scalaire et qui est complet.

Définition 1.3.2 :

Espace $L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de carré sommable c-à-d

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} (u(x))^2 dv < \infty \right\}$$

- $L^2(\Omega)$ est un espace fonctionnel linéaire.
- $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

L'espace $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.3.3 :

On note $H^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel linéaire défini par:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq 3 \right\}$$

Que l'on munit du produit scalaire noté $((u, w))_{1,\Omega}$:

$$((u, w))_{1,\Omega} = \int_{\Omega} (uw + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i}) dx$$

Et par le fait même d'une norme induite:

$$\|u\|_{1,\Omega} = ((u, u))_{1,\Omega}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} (u^2 + \sum_{i=1}^3 (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2) dx \right)^{1/2}$$

Définition 1.3.4 :

On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $D(\Omega)$ pour la norme $\| \cdot \|_{1,\Omega}$. Ainsi, pour chaque $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite u_i de fonctions de $D(\Omega)$ et telle que :

$$\lim \| u - u_i \|_{1,\Omega} = 0 \quad \text{quand } i \longrightarrow \infty$$

Les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ s'annulent donc au bord et on peut écrire:

$$H_0^1(\Omega) = \{ w \in H^1(\Omega) : w = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

L'expression:

$$| u |_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

est une norme sur les espaces $H_0^1(\Omega)$

L'espace $H^2(\Omega)$ et $H_0^2(\Omega)$

Définition 1.3.5 :

On note $H^2(\Omega)$ l'espace défini par:

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq 3 \right\}$$

que l'on munit du produit scalaire noté $((u, w))_{2,\Omega}$:

$$((u, w))_{2,\Omega} = \int_{\Omega} \left(uw + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right) dx$$

et de la norme induite:

$$\| u \|_{2,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

L'espace $H_0^2(\Omega)$ est défini par:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ w \in H^2(\Omega) : w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$$

L'expression:

$$| u |_{2,\Omega} = \left(\int_{\Omega} (\nabla^2 u)^2 dx \right)^{1/2}$$

est une norme sur l'espace $H_0^2(\Omega)$.

Définition 1.3.6 :

On appelle forme linéaire une fonctionnelle linéaire sur un espace de Hilbert U . Une forme linéaire l vérifie donc les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} l(\beta u) &= \beta l(u) \quad \forall u \in U \text{ et } \forall \beta \in \mathbb{R} \\ l(u_1 + u_2) &= l(u_1) + l(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in U \end{aligned}$$

Définition 1.3.7 :

Une forme linéaire l sur l'espace de Hilbert V muni de la norme $\| \cdot \|_V$, est dite continue s'il existe une constante C telle que:

$$| l(u) | \leq C \| u \|_V \quad \forall u \in V$$

Définition 1.3.8 :

L'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert V est appelé espace dual de V et est noté V'

Définition 1.3.9 :

Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert V est une application a qui associe à un couple $(u, w) \in V \times V$ un scalaire noté $a(u, w)$ satisfaisant:

$$\begin{aligned} a(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, w) &= \beta_1 a(u_1, w) + \beta_2 a(u_2, w) \quad \forall u_1, u_2, w \in V \text{ et } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \\ a(u, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) &= \beta_1 a(u, w_1) + \beta_2 a(u, w_2) \quad \forall u, w_1, w_2 \in V \text{ et } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Une forme bilinéaire est donc linéaire en chacun de ses 2 arguments.

Définition 1.3.10 :

Une forme bilinéaire a est dite continue sur $V \times V$ s'il existe une constante C telle que:

$$| a(u, w) | \leq C \| u \|_V \| w \|_V \quad \forall u, w \in V$$

Définition 1.3.11 :

Une forme bilinéaire est dite coercive ou elliptique s'il existe une constante strictement positive α telle que:

$$a(w, w) \geq \alpha \|w\|_V^2 \quad \forall w \in V$$

Une forme bilinéaire coercive est une généralisation de la notion de matrice définie positive que nous reverrons un peu plus loin.

Théorème 1.3.1

Soit V un espace de Hilbert et soit l et a des formes linéaire et bilinéaire continues sur V et $V \times V$ respectivement ($l \in V'$). Si de plus a est coercive, alors il existe une unique solution u du problème variationnel:

trouver une fonction $u \in V$ telle que:

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V$$

Chapitre 2

Résolution numérique par différences finies d'une équation elliptique

On s'intéresse dans ce chapitre à la résolution numérique d'une équation elliptique qui consiste à donner une solution approchée à l'aide de la méthode des différences finies représentée dans la discrétisation du domaine de travail et la discrétisation de l'équation à partir du développement de Taylor. On dispose aussi deux méthodes associées aux différences finies pour la résolution associée à l'équation elliptique représentée dans l'équation Laplace.

2.1 Problème unidimensionnel

Pour introduire les techniques de différences finies, considérons le cas du problème de poisson monodimensionnel avec conditions aux limites de Dirichlet homogène.

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x), x \in]a, b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Remarque 2.1.1 *si les conditions aux limites ne sont pas homogènes, c'est-à-dire si $u = g$ (donnée) sur $\partial\Omega$, on peut se ramener au cas homogène par un simple changement de variable du type $v = u - g$.*

2.1.1 Discrétisation de l'équation différentielle

La discrétisation du problème (2.1.1) consiste à remplacer par une technique appropriée le problème continu par un système linéaire algébrique.

L'approximation s'effectue en deux étapes successives:

La première consiste à discrétiser le domaine $\Omega =]a, b[$ en $(n + 1)$ parties de longueur h , telles que $h = \frac{b-a}{n+1}$; h est le pas de discrétisation, telle que $(x_j) = x_j = a + jh$.

La seconde étape consiste à discrétiser les opérateurs, on remplace les dérivées par des quotients différentiels faisant intervenir les valeurs de la fonction inconnue u aux points du maillage, on suppose que la fonction u est quatre fois continument différentiable, on considère les développements en série de Taylor limités à l'ordre 4 de $u(x_{j+1})$ et $u(x_{j-1})$, autour du point x_j ; on a alors:

$$\begin{aligned} u(x_{j+1}) &= u(x_j) + h \frac{du(x_j)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u(x_j)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3u(x_j)}{dx^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4u(\tilde{x}_j)}{dx^4}, \quad x_j < \tilde{x}_j < x_{j+1} \\ u(x_{j-1}) &= u(x_j) - h \frac{du(x_j)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u(x_j)}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3u(x_j)}{dx^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4u(\hat{x}_j)}{dx^4}, \quad x_{j-1} < \hat{x}_j < x_j \end{aligned}$$

En additionnant les deux expressions précédentes, on obtient finalement:

$$\frac{d^2u(x_j)}{dx^2} = \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{4!} \left(\frac{d^4u(\hat{x}_j)}{dx^4} + \frac{d^4u(\tilde{x}_j)}{dx^4} \right)$$

On a alors la majoration d'erreur pour l'approximation du laplacien:

Lemme 2.1.1 :

Soit $u \in C^4([0, 1])$, une fonction quelconque et on pose:

$$M_4 = \sup \left(\left| \frac{d^4u(x)}{dx^4} \right|, 0 \leq x \leq 1 \right)$$

alors, on a:

$$\left| \frac{d^2u(x_j)}{dx^2} - \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} M_4$$

et le schéma numérique est précis à l'ordre 2.

1. Il est à noter que la matrice A est symétrique
2. La matrice A a une structure creuse tridiagonale
3. La matrice A est symétrique définie positive dans la mesure où la relation suivante est vérifiée:

$$U^t A U = u_1^2 + u_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)^2, \forall U \in \mathbb{R}^n$$

2.2 Problème dans \mathbb{R}^2

Soit à présent $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, on souhaite discrétiser le problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes dans ce domaine Ω , c'est-à-dire:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

2.2.1 Discrétisation de l'EDP

Pour discrétiser le domaine Ω , on discrétise chacun des intervalles fermés $[a, b]$ et $[c, d]$, soit n un entier naturel et h le pas de discrétisation, on prendra h_x et h_y les pas de discrétisation des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$.

1. Discrétisation de $[a, b]$

Posons $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$, telle que $X_{i,j} = (x_i, y_j)$

$$h_x = \frac{b-a}{n_x} \text{ (} n_x \text{ étant le nombre d'intervalles dans } [a, b]\text{)}$$

$$\implies x(i) = x_i = a + i \times h_x, i = 0, 1, \dots, n_x$$

2. Discrétisation de $[c, d]$

Posons $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$

$$h_y = \frac{d-c}{n_y} \text{ (} n_y \text{ étant le nombre d'intervalles dans } [c, d]\text{)}$$

$$\implies y(j) = y_j = c + j \times h_y, j = 0, 1, \dots, n_y$$

$$x_{i+1} = a + (i + 1)h_x = a + ih_x + h_x = x_i + h_x$$

$$y_{j+1} = c + (j + 1)h_y = c + jh_y + h_y = y_j + h_y$$

nous désignons $x_i + h_x$, $x_i - h_x$, $y_j + h_y$ et $y_j - h_y$ successivement par x_{i+1} , x_{i-1} , y_{j+1} et y_{j-1} .

On suppose la solution $u(x, y)$ est quatre fois continument différentiable par rapport à ses arguments. Les schémas de discrétisation en combinant les développements limités d'un part de $u_{i+1,j}$ et $u_{i-1,j}$ et d'autre part de $u_{i,j+1}$ et $u_{i,j-1}$, tous calculs effectués, on obtient les relations suivantes pour la discrétisation des dérivées secondes en x et en y :

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 \hat{u}_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_{i,j}}{\partial x^4} \right) \text{ avec } \hat{u}_{i,j} \in]u_{i,j}, u_{i+1,j}[, \tilde{u}_{i,j} \in]u_{i-1,j}, u_{i,j}[$$

et

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} - \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 \hat{u}_{i,j}}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_{i,j}}{\partial y^4} \right) \text{ avec } \hat{u}_{i,j} \in]u_{i,j}, u_{i,j+1}[, \tilde{u}_{i,j} \in]u_{i,j-1}, u_{i,j}[$$

On a alors la majoration d'erreur pour l'approximation du laplacien:

Lemme 2.2.1 :

Soit $u \in C^4(\Omega)$, une fonction quelconque et on pose:

$$M_4 = \sup \left(\left| \frac{\partial^4 u(X)}{\partial x^4} \right|, M \in \bar{\Omega} \right) + \sup \left(\left| \frac{\partial^4 u(X)}{\partial y^4} \right|, X \in \bar{\Omega} \right)$$

On a alors l'estimation suivante, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$:

$$\left| \frac{u(X_{i+1,j}) + u(X_{i,j+1}) - 4u(X_{i,j}) + u(X_{i,j-1}) + u(X_{i-1,j})}{h^2} - \Delta u(X_{i,j}) \right| \leq \frac{h^2}{12} M_4$$

2.2.2 Approximation de l'équation différentielle partielle

Le schéma d'approximation suivant pour résoudre le problème de Poisson dans le domaine Ω :

$$\begin{cases} \frac{-u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i-1,j}}{h^2} = f_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n \\ u_{0,j} = u_{i,0} = u_{n+1,j} = u_{i,n+1} = 0, 0 \leq i, j \leq n+1 \end{cases} \text{ avec } f_{i,j} = f(X_{i,j})$$

A chaque étape, nous remarquons que pour calculer la valeur de $u_{i,j}$ au point (x_i, y_j) nous avons besoin de connaître les points $u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j+1}$, $u_{i,j-1}$ comme l'indique le dessin suivant:

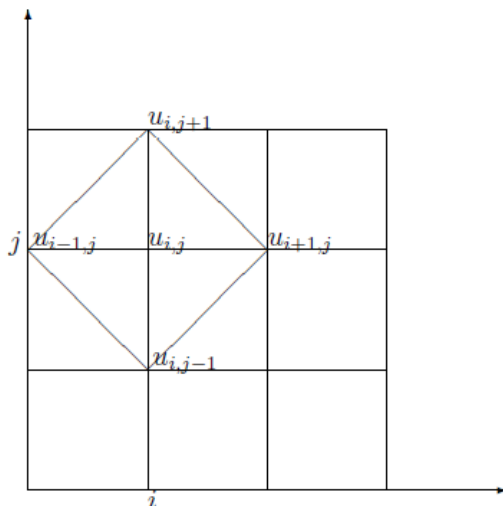


Schéma d'un point

2.2.3 Système matriciel

Comme précédemment, cet ensemble de relations définit un système linéaire:

$$AU = F$$

de dimension n^2 ; la matrice A est symétrique, possède la structure tridiagonale par blocs suivante:

$$C_2(A) = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}$$

Corollaire 2.3.1 *Si A est une matrice symétrique ou, plus généralement, hermitienne, on a:*

$$C_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

Avec $\lambda_i(A), i = 1, 2, \dots, \dim(A)$ les valeurs propres de la matrice A .

Définition 2.3.1 :

Une matrice A est diagonale dominante stricte si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \forall i \in \{1, \dots, \dim(A)\}$$

1. Une matrice A est diagonale fortement dominante si A est diagonale dominante et s'il existe au moins un indice k pour lequel l'inégalité:

$$|a_{k,k}| > \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|$$

est vérifiée

2. Une matrice à diagonale dominante stricte est inversible.

2.4 L'erreur du schéma numérique

Définition 2.4.1 :

On considère le problème de Poisson défini dans le segment unité, on appelle erreur de troncature du schéma numérique au point de discrétisation x_j la quantité E_j définie par:

$$E_i = \frac{-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h^2} - f(x_i), 1 \leq i \leq n$$

Définition 2.4.2 : Le schéma numérique est consistant si la quantité $E = \text{Max}(E_j), 1 \leq j \leq n$, tend vers zéro avec h .

*On dit que le schéma numérique est d'ordre p , s'il existe une constante C , indépendante de h , telle que $E \leq Ch^p$.

*On appelle erreur au point x_i la quantité $e_i = u(x_i) - u_i, 1 \leq i \leq n$.

Définition 2.4.3 :

On considère le problème de Poisson défini dans le carré unité, on appelle erreur de troncature du schéma numérique au point de discrétisation $M_{i,j} = (x_i, y_j)$ la quantité $E_{i,j}$ définie par :

$$E_{i,j} = \frac{-u(X_{i+1,j}) - u(X_{i,j+1}) + 4u(X_{i,j}) - u(X_{i,j-1}) - u(X_{i-1,j})}{h^2} - f(X_{i,j}), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

*Le schéma numérique est consistant si:

la quantité $E = \text{Max}(E_{i,j}), 1 \leq i, j \leq n$ tend vers zéro avec h

*On appelle erreur au point $X_{i,j} = (x_i, y_j)$ la quantité $e_{i,j}$ définie par:

$$e_{i,j} = u(x_i, y_j) - u_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Chapitre 3

Application numérique

Exemple01:

L'équation différentielle à résoudre est donc:

$$\begin{cases} -u''(x) = \sin(\pi x), & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La solution analytique au problème est $u(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$

Divisons l'intervalle $]0, 1[$ en dix segments réguliers de pas $h = 0.1$. Pour les discrétisations avec les Différences Finies, il y a $N = 9$ noeuds de calculs.

La solution discrète obtenue avec les Différences Finies est reportée dans le tableau 1

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
u_i	0.0316	0.06	0.0826	0.09716	0.10216	0.09716	0.0826	0.06	0.0316
$(u_i)_a$	0.0313	0.0595	0.082	0.09636	0.10113	0.09636	0.082	0.0595	0.0313
erreur	9.610^{-3}	8.410^{-3}	7.310^{-3}	8.310^{-3}	110^{-2}	8.310^{-3}	7.310^{-3}	8.410^{-3}	9.610^{-3}

La solution exacte, la solution approchée et erreur entre les deux

Exemple02:

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta \end{cases}$$

où f est une fonction continue.

Le maillage est construit en introduisant $N + 1$ noeuds x_i avec $i = 0, 1, \dots, N$, régulièrement espacés avec un pas Δx . La quantité u_i désignera la valeur de la fonction $u(x)$ au noeud x_i . L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque noeud x_i :

$$-\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = f(x_i) = f_i$$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

L'équation discrétisée est ainsi:

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i \quad ; \text{ pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N - 1$$

Il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaitre le vecteur des inconnues discrètes:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{\Delta x^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \frac{\beta}{\Delta x^2} \end{pmatrix}$$

Exemple02:

Employer la méthode finie de différence pour résoudre l'état de frontière mélangé suivant BVP.

$$-2\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{-0.2x}, \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \quad (3.0.1)$$

avec les conditions de frontière: $y(0) = 1$ et $\frac{dy}{dx} = -y$ pour $x = 1$

Diviser le domaine de solution en huit sous-intervalles, et employer l'approximation centrale de différence pour tous les dérivés. Comparer la solution numérique à la solution exacte:

$$y = -0.2108e^{x/(\sqrt{2})} + 0.1238e^{-x/(\sqrt{2})} + \frac{e^{-0.2x}}{0.92} \quad (3.0.2)$$

Solution

Pour employer la méthode finie de différence, le deuxième dérivé en Eq.(3.0.1) est rapproché avec la différence centrale précise de second ordre de trois-point formule:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \quad (3.0.3)$$

on obtenu:

$$-2\left(\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}\right) + y_i = e^{-0.2x_i} \quad (3.0.4)$$

En combinant comme des limites et en se multipliant à travers par h^2 , Eq.(3.04) peut être écrit comme:

$$-2y_{i-1} + (4 + h^2)y_i - 2y_{i+1} = h^2 e^{-0.2x_i} \quad (3.0.5)$$

Après, Eq.(3.0.5) est écrit pour chacun des points intérieurs (i.e. $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) :

pour $i = 2$

$$-2y_1 + (4 + h^2)y_2 - 2y_3 = h^2 e^{-0.2x_2} \quad (3.0.6)$$

ou

$$(4 + h^2)y_2 - 2y_3 = 2 + h^2 e^{-0.2x_2} \quad (3.0.7)$$

depuis $y_1 = y(0) = 1$.

for $i = 3$

$$-2y_2 + (4 + h^2)y_3 - 2y_4 = h^2 e^{-0.2x_3} \quad (3.0.8)$$

for $i = 4$

$$-2y_3 + (4 + h^2)y_4 - 2y_5 = h^2 e^{-0.2x_4} \quad (3.0.9)$$

for $i = 5$

$$-2y_4 + (4 + h^2)y_5 - 2y_6 = h^2 e^{-0.2x_5} \quad (3.0.10)$$

for $i = 6$

$$-2y_5 + (4 + h^2)y_6 - 2y_7 = h^2 e^{-0.2x_6} \quad (3.0.11)$$

for $i = 7$

$$-2y_6 + (4 + h^2)y_7 - 2y_8 = h^2 e^{-0.2x_7} \quad (3.0.12)$$

for $i = 8$

$$-2y_7 + (4 + h^2)y_8 - 2y_9 = h^2 e^{-0.2x_8} \quad (3.0.13)$$

Les équations.(3.0.6) et (3.0.12) sont un système de sept équations linéaires avec huit inconnus, y_2, \dots, y_8 et y_9 . Dans ce problème, à la différence du deux-point BVP, la valeur de la solution au bon point final n'est pas connue.

Une équation additionnelle peut etre dérivée en considérant l'état de frontière discrétisé à $x = 1$

$$\frac{dy}{dx} = -y \text{ pour } x=1 \quad (3.0.14)$$

Le dérivé en Eq (3.0.13) est rapproché par une formule finie de différence.

La forme générale de la formule en arrière de différence de trois-point est :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 3y_i}{2h} \quad (3.0.15)$$

L'utilisation d'Eq .(3.014) pour rapprocher le dérivé au dernier point (x_9, y_9) en état de frontière à $x = 1$ donne:

$$\frac{y_7 - 4y_8 + 3y_9}{2h} = -y_9 \quad (3.0.16)$$

Solution d'Eq .(3.015) rendements pour y_9 :

$$y_9 = \frac{-1}{3+2h}y_7 + \frac{4}{3+2h}y_8 \quad (3.0.17)$$

Equation (3.0.16) fournit le rapport additionnel requis pour résoudre tout l'inconnues. Substituting Eq (3.0.16) in Eq.(3.0.12) donne:

$$\left(\frac{2}{3+2h} - 2\right)y_7 + \left(4 + h^2 - \frac{8}{3+2h}\right)y_8 = h^2 e^{-0.2x_8} \quad (3.0.18)$$

Equation.(3.0.17) ainsi que la forme d'Eq (3.0.6) (3.0.11) un système de sept équations linéaires avec sept inconnues. Sous la forme de matrice, l' $ay = c$, le système peut être ex-

$$\text{primé par: } \begin{pmatrix} (4+h^2) & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & (4+h^2) & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & (4+h^2) & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & (4+h^2) & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & (4+h^2) & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & (4+h^2) & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & (4+h^2) & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{2}{3+2h} - 2\right) & \left(4 + h^2 - \frac{8}{3+2h}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + h^2 e^{-0.2x_2} \\ h^2 e^{-0.2x_3} \\ h^2 e^{-0.2x_4} \\ h^2 e^{-0.2x_5} \\ h^2 e^{-0.2x_6} \\ h^2 e^{-0.2x_7} \\ h^2 e^{-0.2x_8} \end{pmatrix}$$

Exemple03:

Soit à résoudre l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans le domaine } (x, y) \in [0, 20] \times [0, 10] \\ u(x, 0) = u(x, 10) = u(0, y) = 0 \text{ et } u(20, y) = 100 \\ h_x = h_y = h \end{cases}$$

Cas où $h = 5$

On a: $h_x = \frac{b-a}{n_x} \implies n_x = \frac{b-a}{h_x} = \frac{20-0}{5} = 4$ et $n_y = \frac{d-c}{h_y} = \frac{10-0}{5} = 2$.

La grille maillée contient alors $(n_x + 1)(n_y + 1)$ mailles vu que nous avons à rajouter les points où $x_i = 0$ et ceux où $y_j = 0$ c'est à dire les points intersection de la courbe avec les axes. Mais comme les conditions aux limites nous donnent les images sur les bords, alors les points inconnus restent seulement ceux de l'intérieur du cadrillage. Ce qui fait donc que le nombre d'inconnues est alors $(n_x - 1)(n_y - 1) = 3 \times 1 = 3$

Nous obtenons le système de trois équations à trois inconnues suivant:

$$\begin{cases} -4u_{1,1} + u_{2,1} + 0u_{3,1} = 0 \\ u_{1,1} - 4u_{2,1} + u_{3,1} = 0 \\ 0u_{1,1} + u_{2,1} - 4u_{3,1} = -100 \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à résoudre le système matriciel: $A \times U = B$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{pmatrix}$$

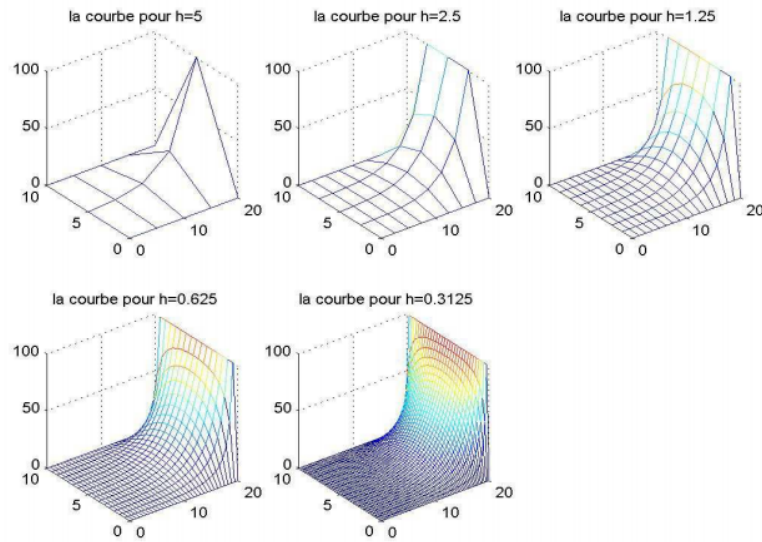
Avec une des méthodes vues en Analyse Numérique II (résolution des systèmes linéaires), nous obtenons la solution:

$$U = \begin{pmatrix} 1.786 \\ 7.143 \\ 26.786 \end{pmatrix}$$

Cas où $h = 2.5$

Nous avons aussi: $n_x = \frac{b-a}{h} = \frac{20-0}{2.5} = 8$ et $n_y = \frac{d-c}{h} = \frac{10-0}{2.5} = 4$, ce qui nous donne un système à $n = (n_x - 1)(n_y - 1) = 7 \times 3 = 21$ équations à 21 inconnues de forme:

$$\begin{cases} -4u_{1,1} + u_{2,1} + \dots + u_{1,2} + \dots = 0 \\ u_{1,1} - 4u_{2,1} + u_{3,1} + \dots + u_{2,2} + \dots = 0 \\ \vdots \\ \dots + u_{6,1} - 4u_{7,1} + \dots = -100 \\ u_{1,1} + \dots - 4u_{2,1} + u_{2,2} + \dots = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Evolution de la courbe en fonction de h

Malgré que cette méthode ait pu nous donner une solution approchée à l'EDP $\Delta u = 0$, celle-ci est obtenue par une approximation des $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ par l'utilisation de la formule de Taylor tronquée à l'ordre 2. Nous avons donc commis une erreur de l'ordre de h^2 .

Non seulement cette erreur commise est considérable mais le calcul des éléments du vecteur \vec{v} est de plus en plus coûteux en mémoire. Or, pour affiner beaucoup plus la solution numérique vers la solution analytique, nous devons faire tendre h vers zéro pour qu'il soit très proche de la limite approximée par la méthode de Taylor.

conclusion

Intérêts des méthodes de différences finies

La méthode des différences finies est une méthode de résolutions d'EDP largement utilisée, car elle est la plus facile d'accès, vu qu'elle repose sur deux notions très bien connues:

La discrétisation des opérateurs de dérivation / différentiation (assez intuitive) d'une part, la convergence du schéma numérique ainsi obtenu d'autre part.

Les avantages de cette méthode sont: la simplicité de mise en oeuvre efficacité possibilité de construire des approximations d'ordre élevé.

L'analyse locale(simple) de la précision et de la convergence mais elle possède un certain nombre de limitations domaine de calcul simple(maillage régulier)

transformation géométrique possible, mais plus complexe traitement des conditions aux limites.

Bibliographie

- [1] **Alfio Quarteronè et Fausto Saleri et Paola Gervasio:**"Calcul scientifique ",cours,exercices corrigés et illustrations en Matlab et Octave. Springer-Verlag Italia 2008.
- [2] **Amos Gilat et Vish Subramaniam:**"Numerical Methods for Engineers and scientists-An Introduction with Applications using MATLAB ", Third Edition. (2011-2014)
- [3] **André Fortin et André Garon :** cours " Les éléments finis: de la théorie à la pratique". (1997-2014)
- [4] **A.Taik :** cours d'analyse numérique "E'quations aux Dérivées Partielles Méthodes des Déffirences Finies ". 2008
- [5] **B.Lucquin:**"E'quations aux Dérivées Partielles et leurs Approximations ". Niveau M1.Ellipses E'dition Marketing S.A,2004.
- [6] **Eric Goncalvés:** cours d'analyse numérique "Résolution numerique, Discretisation des EDP et EDO ".Septembre 2005
- [7] **Eric Goncalvès de Silva:**"Méthodes et Analyse Numériques ", Institut.Polytechnique de Grenoble,2007.
- [8] **Jichun Li et Yi-Tung Chen:**"Computational Partial Differential Equations Using MATLAB ".2008
- [9] **William Ford:**"Numerical Linear Algebra with Applications Using MATLAB ".2015