



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

Sur une échelle des espaces de Sobolev

Présenté par :
HOCINI Khansa

Devant le jury composé de :

Mr. DRIHEM Douadi
Mr. MOUSSAI Madani
Mr. LAKEHAL Aissa

Université de M'sila **Président.**
Université de M'sila **Encadreur.**
Université de M'sila **Examineur.**

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Avant tous je remercie **ALLAH** qui m'a donné la force, le courage et la patience pour terminer ce mémoire .

J'adresse mes remerciements par un grand respect et gratitude à mon encadreur le professeur **Madani Moussai** qui a dirigé ce travail et de m'avoir encadré.

Je remercie également les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Mr. DRIHEM Douadi

Mr. LAKEHAL Aissa

D'autre part, j'adresse une chaleureuse pensée à toute l'équipe pédagogique du Département de Mathématiques.

Table des matières

Introduction	1
Notation	2
1 Espaces de Sobolev	4
1.1 L'espace L^p	4
1.2 Quelques théorèmes de convergences	5
1.3 Espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$	6
1.3.1 Définitions et quelques propriétés	6
1.3.2 Prolongements	10
1.3.3 Notation de trace :	10
1.3.4 Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$	12
1.3.5 L'espace de $W_0^{1,p}$	14
2 Echelle fonctionnelle	17
2.1 Les espaces de Banach des distributions	17
2.1.1 Définition et premières propriétés	17
2.1.2 Echelles de régularité	18
2.1.3 Dualité de l'échelle de Sobolev	21
2.1.4 Les $D(\mathbb{R}^n)$ -modules invariants par translation	23
2.1.5 Contre-exemple explicite	27

3	Autre échelle fonctionnelle	28
3.1	Résultats positifs en dimension un	28
3.2	Resultats négatifs en dimensions supérieures	30
3.2.1	La propriété de Mitiagin-Ornstein	30
	Conclusion générale et perspectives	31
	Bibliographie	32

Introduction

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels modélisés par des espaces de Lebesgue et munis des normes des dérivées jusqu'à un certain ordre.

Un espace de Sobolev est un espace de Banach ou un espace de Hilbert de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction. En général, les solutions des équations aux dérivées partielles, appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions dérivables.

Il est donc nécessaire d'introduire une nouvelle dérivation dite "faible" ou au sens des distributions, ce qui va étendre la notion ordinaire de dérivée. En plaçant une telle définition, toute fonction devient alors indéfiniment dérivable au sens des distributions, nous permettant ainsi de définir les espaces de Sobolev.

Le mémoire se compose de trois chapitres traitent l'échelle de Sobolev.

Dans le première chapitre, on a étudié l'espace de Sobolev à partir des définitions et les premières propriétés de cet espace, et quelques théories. En plus on citant les espaces de $W^{m,p}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$ et leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre on a étudié l'échelle fonctionnelle, qui contient l'échelle de Sobolev d'origine E , telle que tout sous-espace vectoriel $D'(\mathbb{R}^n)$. Aussi les caractéristiques et les preuves du dualité de l'échelle de Sobolev et la théorie des $D(\mathbb{R}^n) - \text{modules}$ et contre-exemple.

Pour le dernier chapitre on considère une extension du deuxième chapitre où on présente quelques définitions et théorèmes.

Notation

– $\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
– $\mathbb{R}^n$	Un espace Euclidien de dimension n .
– Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue .
– $\overline{\Omega}$	La fermeture de Ω .
– $L^p(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurable sur Ω .
– $L^{p'}(\Omega)$	Est l'espace dual de $L^p(\Omega)$.
– p'	Est l'exposant conjugué de p tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
– $p.p.$	Presque partout.
– u	Fonction mesurable définie de Ω dans $\mathbb{R}$.
– $\frac{\partial u}{\partial x_i}$	Dérivée de u par rapport x_i .
– ∇u	Gradient de u , $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.
– Δu	Laplacien de u , $\Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$.
– $C_0^\infty(\Omega)$	L'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact inclue dans Ω .
– $\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.
– $L_{loc}^1(\Omega)$	L'espace des fonctions localement intégrable sur Ω .
– $Suppf$	Support de la fonction f .
– $\ \cdot\ _E$	La norme sur l'espace vectoriel normé E .
– $W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles au sens faible d'ordre 1 sont également dans $L^p(\Omega)$, muni de la norme $\ u\ _{W^{1,p}} = \sum \ \partial_i u\ _{L^p}$.
– $W_0^{1,p}(\Omega)$	La fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
– $H^1(\Omega)$	$u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in L^2(\Omega)$.
– $W^{m,p}(\Omega), H^m(\Omega)$	L'espace de Sobolev.
– $D(\mathbb{R}^n)$	L'espace des fonctions indéfiniment dérivable à support compact dans $\mathbb{R}^n$ (dit aussi espace des fonctions test).
– $D'(\mathbb{R}^n)$	L'espace des formes linéaires continues sur $D(\mathbb{R}^n)$ ou

l'espace des distributions.

- E' Est le dual topologique de E ou l'espace des formes linéaire et continue sur E .
- E_0 La fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ en E .

Chapitre 1

Espaces de Sobolev

1.1 L'espace L^p

Dans ce qui suit, on considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1.1 Soit $1 \leq p \leq \infty$; On pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.1.2 On pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et il existe une constante } c \text{ telle que } |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

muni la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{c; \|f(x)\| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

1.2 Quelques théorèmes de convergences

Théorème 1.2.1 (*Fubini*)

Soit Ω_1 et Ω_2 des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

On suppose que $F \in (\Omega_1 \times \Omega_2)$, Alors pour presque tout $x \in \Omega_1$

$$F(x, y) \in L_y^1(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} |F(x, y) dy| \in L_x^1(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$

$$F(x, y) \in L_x^1(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} |F(x, y) dx| \in L_y^1(\Omega_2).$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

Théorème 1.2.2 (*Inégalité de Hölder*)

Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Alors $f, g \in L^1$ et on a

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Théorème 1.2.3 (*Inégalité de Young*)

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $f * g \in L^r$ avec $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Théorème 1.2.4 (*Fischer-Riesz*)

L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Notation 1.2.1 *Etant donné $x \in \mathbb{R}^n$, on écrit*

$$x = (x', x_n) \quad \text{avec } x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

1.3 Espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les Dérivées -au sens faible sont intégrables, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.

1.3.1 Définitions et quelques propriétés

Soit Ω un ouvert borné ou non de $\mathbb{R}^n$, et soit $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.3.1 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) ; \exists g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tel que : } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi_i, \forall \varphi \in c_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i \text{ et } \nabla u := (g_1, g_2, \dots, g_n);$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

Cette norme est équivalente à :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p \leq +\infty.$$

Si $p = +\infty$, la norme de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |\nabla u|.$$

Notation 1.3.1 On pose

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega).$$

- L'espace $H^1(\Omega)$ est muni par le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

- La norme associée est donnée par la formule :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$; La théorie des distributions permet de donner un sens à $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

En effet, on voit que dans $D'(\Omega)$ on a

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall T \in D', \forall \varphi \in D.$$

Comme $L^1_{loc}(\Omega)$ n'est autre que l'ensemble des distributions régulières.

On définit alors $W^{1,p}(\Omega)$ par l'ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (au sens des dérivées de distributions) appartiennent à $L^p(\Omega)$.

- Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $p = 2$, on peut aussi définir les espaces des Sobolev par la transformée de Fourier, ceci car on a l'égalité de Parseval dans $L^2(\Omega)$.

Proposition 1.3.1 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est :

- Un espace de Banach pour : $1 \leq p \leq \infty$;
- Un espace réflexif pour : $1 < p < \infty$;
- Un espace séparable pour : $1 \leq p < \infty$.

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Preuve.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $W^{1,p}(\Omega)$, alors la suite $(\nabla u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Puis que $L^p(\Omega)$ est complet, il existe des fonctions : $u, u_1, u_2 \dots u_N$ de $L^p(\Omega)$ telle que :

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow u_i \text{ dans } L^p(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Pour voir que $L^p(\Omega)$ est complet on se réfère au théorème 3.11 du livre de Rudin [7].

Comme $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$, on détermine une distribution T_{u_n} .

C'est-à-dire :

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, par l'inégalité de Hölder on a

$$|T_{u_n}(\varphi) - T_u(\varphi)| \leq \int_{\Omega} |u_n(x) - u(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^p}$$

Où p' est l'exposant conjugué de p .

Et par suite :

$$T_{u_n}(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T_u(\varphi)$$

De même façon pour $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$

$$T_{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}}(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T_{u_i}(\varphi), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, N$ on a :

$$T_{u_i}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}}(\Omega) = - \lim_{n \rightarrow \infty} T_{u_n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = -T_u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}(\varphi).$$

On conclut que : $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \forall i = 1, \dots, N.$

D'où $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} = 0,$

et par conséquent $W^{1,p}(\Omega)$ est complet.

- Pour $1 < p < \infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif. En effet l'application :

$$T : (W^{1,p}(\Omega)) \longrightarrow (L^p(\Omega))^{N+1}$$

définit comme suite : $u \rightarrow [u, \nabla u]$ est une isométrie.

Donc $T(W^{1,p}(\Omega))$ est un sous-espace fermé de $(L^p(\Omega))^{N+1}$ qui est réflexif comme produit fini d'espaces réflexifs. on en déduit que $T(W^{1,p}(\Omega))$ est réflexif et donc également $W^{1,p}(\Omega)$

- Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable. En effet, $T(W^{1,p}(\Omega))$ est séparable, et par l'isométrie de $W^{1,p}(\Omega)$ on a la séparabilité.

■

Le théorème suivant est une caractérisation des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.3.1 *Soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
2. Il existe une constante C telle que

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

3. Il existe une constante C telle que pour tout ouvert $W \subset \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ avec $|h| < \text{dist}(W, \mathbb{R}^n/\Omega)$ on a :

$$\|u(\cdot + h) - u\|_{L^p(\Omega)} \leq C |h|.$$

De plus, on peut prendre $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.

Il est important que la condition 3, n'est autre qu'une condition de Lipschitz.

Preuve. : voir[4]. ■

Remarque 1.3.1 Lorsque $p = 1$, les implications précédentes restent valables : (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Voir[4].

1.3.2 Prolongements

Il est souvent commode d'établir des propriétés des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ en commençant par le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$. Il est donc utile de savoir comment prolonger une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ en une fonction $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.3.2 On suppose que Ω est de classe C^1 avec $\partial\Omega$ borné. Alors il existe un opérateur de prolongement linéaire :

$$\begin{aligned} p: W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto pu \end{aligned}$$

tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a

1. $pu|_{\Omega} = u$;
2. $\|pu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$;
3. $\|pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Où la constante C dépende seulement de Ω .

Preuve. : voir[4] page 209. ■

1.3.3 Notation de trace :

Pour une fonction $u \in C(\overline{\Omega})$, la trace de u sur $\partial\Omega$ est défini par :

$$\begin{aligned} \gamma(u) : \partial\Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$

Théorème 1.3.3 *On suppose que Ω est borné et $\partial\Omega$ est de classe C^1 . Alors, il existe un opérateur linéaire :*

$$T: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Tel que les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $Tu = u|_{\partial\Omega}$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
- $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Où la constante C dépende seulement de p et $\partial\Omega$.

Preuve. : voir[5], page 136. ■

Théorème 1.3.4 *Soit Ω un compact de $\mathbb{R}^N$ de la classe C^1 . Alors la fonction trace γ appartient à $L^p(\partial\Omega)$.*

Preuve.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |\gamma(u)|^p dx' &= \int_{\partial\Omega} |u|^p dx' \\ &\leq \int_{\overline{\Omega}} |u|^p dx \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \end{aligned}$$

comme γ est défini sur $C^1(\partial\Omega)$.

Le noyau de l'opérateur trace est $W_0^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \gamma(u) = 0\}.$$

■

1.3.4 Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Définition-Remarque

Soient $m \geq 2$ un entier et soit p avec $1 < p \leq \infty$. On définit par récurrence

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in u \in W^{m-1,p}(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

On vérifie que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ si et seulement si $u \in L^p(\Omega)$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq m$, il existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$

tel que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

On note : $D^\alpha u := g_\alpha$.

En effet, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\langle u, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha u, \varphi \rangle,$$

C'est-à-dire

$$|\langle u, D^\alpha \varphi \rangle| \leq \|D^\alpha u\|_p \|\varphi\|_{p'}$$

Par conséquent on a l'application

$$\mathcal{L}_u : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \longmapsto \langle u, D^\alpha \varphi \rangle \quad \text{est continue.}$$

Donc $\exists \tilde{g}_\alpha \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\mathcal{L}_u(\varphi) = \langle \tilde{g}_\alpha, \varphi \rangle.$$

On pose alors $g_\alpha = (-1)^{|\alpha|} \tilde{g}_\alpha$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$, muni de norme space

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \quad ((x,x1))$$

est un espace de Banach.

Pour $p = +\infty$, on a

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sup_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

La démonstration de la complétude est classique, elle se fera comme dans le cas des $L^p(\Omega)$. Voir par exemple [6].

Théorème 1.3.5 On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ avec $m \geq 2$.

L'espace H^m muni par le produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

est un espace de Hilbert.

Preuve. : voir [7], page 86. ■

Théorème 1.3.6 On suppose que Ω est de classe C^1 .

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$, alors il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$u_n|_\Omega \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega).$$

Autrement dit, les restrictions à Ω des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ forment un sous espace dense de $W^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. : voir [4] page 217 ■

1.3.5 L'espace de $W_0^{1,p}$

Propriétés

- Soit $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
- L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif si $1 < p < \infty$.
- On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de H^1 .

Remarque 1.3.2 Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, on voit que $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et par conséquent on a :

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 1.3.7 Soient $1 \leq p < +\infty$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$, avec u à support compact dans Ω , alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. Suppose que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $\text{supp } u$ est compact sur Ω . Donc $u|_{\partial\Omega} = 0$, puisque le $\text{supp } u$ est un fermé. Ce qui implique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Théorème 1.3.8 On suppose que Ω est de classe C^1 . Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ avec $1 \leq p < +\infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u = 0$ sur $\partial\Omega$;
2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, il existe une suite (u_n) de $C(\Omega)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Donc $u_n \rightarrow u$ uniformément sur $\overline{\Omega}$ et par conséquent $u = 0$ sur $\partial\Omega$. ■

Théorème 1.3.9 *On suppose que Ω est de classe C^1 . Soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$;
2. Il existe une constante C telle que

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}} , \quad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

3. La fonction

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} .$$

Appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et dans ce cas $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Preuve. Notons que l'implication $1 \implies 2$ est toujours vraie.

- Montre cette implication. En effet, soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $(u_n) \in D(\Omega)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. On a

$$\left| \int_{\Omega} u_n(x) \partial_i \varphi(x) dx \right| = \left| - \int_{\Omega} \partial_i u_n(x) \varphi(x) dx \right| \leq \|\nabla u_n\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^{p'}} .$$

On en déduit le résultat par à la limite.

- Il est clair que $2 \implies 3$, car si $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \bar{u}, \partial_i \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \partial_i \varphi dx;$$

Et en utilisant 2, on obtient que, si $p > 1$, alors $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. ■

Théorème 1.3.10 (*Inégalité de Poincaré*) :

On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante $C = C(\Omega, P)$ telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. : voir [4].page 218. ■

Définition 1.3.2 (*L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$*) :

On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, ($1 \leq p < \infty$) avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On note par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 1.3.2 *Soit $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Alors il existe $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^{p'}(\Omega)$ telle que*

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f_0 v + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

et

$$\max_{0 \leq i \leq n} \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|F\|.$$

Si Ω est borné, on peut prendre $f_0 = 0$.

Preuve. : voir [4].Page 220. ■

Chapitre 2

Echelle fonctionnelle

2.1 Les espaces de Banach des distributions

2.1.1 Définition et premières propriétés

L'espace vectoriel des distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Présentes entre autres la propriété de rendre indéfiniment dérivable au "sens des distributions" les fonctions continues sur le même ouvert.

On dit que E est un espace de Banach de distributions (EBD). Si E un sous-espace vectoriel de $D'(\mathbb{R}^n)$, muni d'une norme complète rendant continue l'injection canonique $E \rightarrow D'(\mathbb{R}^n)$. Toute injection canonique $E \rightarrow F$ entre deux EBD est nécessairement continue. En particulier, un sous-espace donné de $D'(\mathbb{R}^n)$ possède au plus une structure d'EBD, à une équivalence de normes près.

Proposition 2.1.1 *Si E est un EBD incluant $D(\mathbb{R}^n)$ comme sous-espace dense, alors E' s'identifie à un EBD. Si E et F sont des EBD incluant $D(\mathbb{R}^n)$ comme sous-espace dense, alors $E' = F'$ si et seulement si $E = F$.*

Preuve. Si $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans E , l'application de restriction $u \mapsto u|_{D'(\mathbb{R}^n)}$ est linéaire, injective et continue de E' dans $D'(\mathbb{R}^n)$, de sorte qu'on peut identifier E' avec le sous-espace suivant de $D'(\mathbb{R}^n)$:

$$\{u \in D'(\mathbb{R}^n) : \exists C > 0, \forall g \in D(\mathbb{R}^n), |\langle u, g \rangle| \leq C \|g\|_E\}.$$

Si $E' \subset F'$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in E'$,

$$\|u\|_{F'} \leq C \|u\|_{E'};$$

puisque

$$\|g\|_E = \sup \{|\langle u, g \rangle| : u \in E', \|u\|_{E'} \leq 1\},$$

il vient $\|g\|_E \leq C \|g\|_F$ pour tout $g \in D(\mathbb{R}^n)$, par densité, entraîne $F \subset E$. ■

2.1.2 Echelles de régularité

Définition 2.1.1 Soit $(E^m)_{m \in \mathbb{Z}}$ une suite d'EBD est une échelle de régularité si elle satisfait les deux conditions :

$$\begin{aligned} (i) \quad & E^{m+1} \subset E^m, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \\ (ii) \quad & \partial_j (E^{m+1}) \subset E^m, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

E^0 est appelé l'origine de l'échelle.

Il existe au moins une échelle de régularité d'origine E , si E est un EBD donné.

On dit que l'échelle de sobolev définie par :

$$W^m(E) = \{f \in D'(\mathbb{R}^n) : f^{(\alpha)} \in E (|\alpha| \leq m)\}, \quad (1)$$

et

$$W^{-m}(E) = \left\{ f \in D'(\mathbb{R}^n) : \exists f_\alpha \in E, f = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha^{(\alpha)} \right\}. \quad (2)$$

On vérifie

$$W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E)), \quad \forall (m, k) \in \mathbb{Z}^2 \quad (3)$$

que $W^m(E)$ et $W^{-m}(E)$ sont des EBD pour les normes respectives :

$$\begin{aligned} \|f\|_{W^m(E)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E, \\ \|f\|_{W^{-m}(E)} &= \inf \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_E : f = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha^{(\alpha)} \right\}. \end{aligned}$$

Dés que l'espace E est invariant sous l'effet des automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^n$, l'espace $W^m(E)$ ($m \in \mathbb{Z}$), ne dépend pas du système de coordonnées par rapport auxquelles sont calculées les dérivées partielles.

Proposition 2.1.2 *On a $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$, quel que soit E , dès que les entiers m et k sont de même signe.*

Preuve. On montre que

$$W^m(W^k(E)) \subset W^{m+k}(E).$$

On remarquons élémentaire suivante : si $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$

et si l'entier m vérifie $0 < m < |\alpha|$, il existe $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $\beta < \alpha$ et $|\beta| = m$.

On suppose que $m, k \in \mathbb{N}$, sont positifs et même chose s'ils sont négatifs.

Soit $g \in W^m(W^k(E))$:

Donc $g^{(\alpha)} \in W^k(E)$, $\forall |\alpha| \leq m$.

C'est-à-dire que $(g^{(\alpha)})^{(\beta)} \in E$, $\forall |\beta| \leq k$.

Alors

$$\begin{aligned} (g^{(\alpha)}) (g^{(\beta)}) &= (g^{(\alpha)})^{(\beta)} \\ &= g^{(\alpha+\beta)} \in E \quad \text{tel que } |\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \leq m + k. \end{aligned}$$

Donc $g \in W^{m+k}(E)$.

Alors

$$W^m(W^k(E)) \subset W^{m+k}(E)$$

Pour démontrer que

$$W^{m+k}(E) \subset W^m(W^k(E))$$

On pose $m = k = 1$,

Soit $f \in W^{1,1}(E) = W^2(E)$, alors $\partial^2 f = \partial(\partial f) \in E$,

On prend $g = \partial f$.

Alors $\partial^2 f = \partial g \in E$, donc $g \in W^1(E)$

On a $\partial f \in W^1(E)$. On pose $W^1(E) = F \implies \partial f \in F$

Donc $\partial f \in F$ alors $f \in W^1(E)$. C'est-à-dire $f \in W^1(W^1(E))$,

Alors $W^2(E) \subset W^1(W^1(E))$. ■

Définition 2.1.2 On appelle l'échelle de sobolev d'origine E est dite invariante si elle vérifie la propriété suivant :

$$W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E)), \quad \forall (m, k) \in \mathbb{Z}^2$$

Ce qui, d'après la proposition précédente, est équivalent à

$$W^{m-k}(E) = W^m(W^{-k}(E)) = W^{-k}(W^m(E)), \quad (m > 0, k > 0). \quad (4)$$

2.1.3 Dualité de l'échelle de Sobolev

On notera E_0 et $W_0^m(E)$ les fermetures respectives de $D(\mathbb{R}^n)$ dans E et dans $W^m(E)$.

Proposition 2.1.3 *Soit E un EBD incluant $D(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

$$\begin{aligned} (i) \quad & (W_0^m(E))' = W^{-m}((E_0)'), \quad (m \geq 0), \\ (ii) \quad & (W_0^{-m}(E))' \subset W^m((E_0)'), \quad (m > 0). \end{aligned}$$

Preuve.

$$W^m((E_0)') \subset (W_0^{-m}(E))'$$

Si $g \in W^{-m}((E_0)'),$ alors

$$g = \sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha^{(\alpha)} \quad \text{avec } g_\alpha \in (E_0)'.$$

Alors, pour $f \in D'(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle g, f \rangle &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle g_\alpha^{(\alpha)}, f \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle g_\alpha, f^{(\alpha)} \rangle, \end{aligned}$$

D'où

$$|\langle g, f \rangle| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|g_\alpha\|_{E'} \|f\|_{W^m(E)},$$

Alors $g \in (W_0^m(E))'.$ ■

Proposition 2.1.4 *Soit $m > 0$. Alors, pour tous $f \in D(\mathbb{R}^n)$ et $g \in W^{-m}(E)$, on a*

$$|\langle g, f \rangle| \leq \|f\|_{W^m((E_0)')} \|g\|_{W^{-m}(E)}.$$

Preuve. Soit $f \in W^m((E_0)')$ et $g \in D(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$g = \sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha^{(\alpha)}$$

Tel que $g \in D(\mathbb{R}^n)$.

Alors

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle f, g_\alpha^{(\alpha)} \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle f^{(\alpha)}, g_\alpha \rangle \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle| &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{E'_0} \|g_\alpha\|_E \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|f\|_{W^m(E'_0)} \|g_\alpha\|_E \end{aligned}$$

Alors

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m((E_0)')} \|g\|_{W^{-m}(E)}.$$

■

Corollaire 2.1.1 Soit $m > 0$. Si $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^m((E_0)')$, alors

$$(W_0^{-m}(E))' = W^m((E_0)') . \quad (5)$$

On a, par exemple, la propriété bien connue suivante :

$$(W^{-m}(L^p(\mathbb{R}^n)))' = W^m(L^{p'}(\mathbb{R}^n)),$$

pour $1 < p < \infty$, $p' = p/p - 1$.

2.1.4 Les $D(\mathbb{R}^n)$ -modules invariants par translation

Si pour tous $g \in D(\mathbb{R}^n)$ et $f \in E$, alors $gf \in E$. On dit que E est un $D(\mathbb{R}^n)$ -module. Notons qu'alors l'opérateur linéaire $f \mapsto gf$ est borné sur E alors la fonction g admet une norme en tant que multiplicateur ponctuel de E :

$$\|g\|_{M(E)} = \sup \{ \|gf\|_E : \|f\|_E \leq 1 \}.$$

Théorème 2.1.1 *Soit E un EBD satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

1. (p_0) $D(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace dense de E ;
2. (p_1) pour tout $f \in E$ et $t \in \mathbb{R}^n$, on a $\tau_t f \in E$ et $\|\tau_t f\|_E = \|f\|_E$;
3. (p_2) E est un $D(\mathbb{R}^n)$ -module et, pour tout $g \in D(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\sup_{\lambda \geq 1} \|h_\lambda g\|_{M(E)} < +\infty.$$

Alors, pour $m \in \mathbb{Z}$,

- E' possède les propriétés (p_1) et (p_2) ;
- $W^m(E)$ possède les propriétés (p_0) , (p_1) et (p_2) ;
- $(W^m(E))' = W^{-m}(E')$.

Preuve. On a

$$E' = \{u \in D : |\langle u, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_E, \quad \forall \varphi \in D\}$$

Car $\overline{D} = E$.

$\forall u \in E', \forall \varphi \in D$ on a

$$|\langle \tau_a u, \varphi \rangle| = |\langle u, \tau_{-a} \varphi \rangle| \leq c \|\tau_{-a} \varphi\|_E = c \|\varphi\|_E.$$

En passant au sup quand $\|\varphi\|_E \leq 1$, on a (p_1) pour E' ,

Alors

$$\|\tau_a u\|_{E'} = \|u\|_{E'}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

Soient $u \in E'$ et $g \in D$. On a $\forall \varphi \in D$.

D'après les propriétés des distributions on a

$$\langle gu, \varphi \rangle = \langle u, g\varphi \rangle$$

on a

$$|\langle gu, \varphi \rangle| \leq c \|g\varphi\|_E \leq c' \|\varphi\|_E; \quad (33)$$

la deuxième inégalité car l'opérateur $\varphi \mapsto g\varphi$ est borné de E dans E .

Donc, on utilise au dans (33) lorsque $\|\varphi\|_E \leq 1$, on obtient $g \in E'$, c'est-à-dire E' est un D -mod ule .

Soit $u \in D(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|h_\lambda u\|_{M(E')} = \sup_{\|g\|_{E'} \leq 1} \|gh_\lambda u\|_{E'},$$

mais

$$\begin{aligned} |\langle gh_\lambda u, \varphi \rangle| &= |\langle g, h_\lambda u \varphi \rangle| \leq \|g\|_{E'} \|h_\lambda u \varphi\|_E \\ &\leq \|h_\lambda u\|_{M(E)} \|\varphi\|_E \leq c \|\varphi\|_E, \quad \forall \lambda \geq 1 \end{aligned}$$

Donc on a (p_2) pour E' puisque on obtient

$$\|h_\lambda u\|_{M(E')} \leq c; \quad \forall \lambda \geq 1; \quad \text{car } (\|\varphi\|_E \leq 1).$$

Nous avons, $\forall a \in \mathbb{R}^n$

$$(\tau_a f)^{(\alpha)}(x) = \tau_a f^{(\alpha)}(x)$$

Puisque

$$\partial(f(x-a)) = \partial f(x-a), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\tau_a f\|_{W^m(E)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \left\| (\tau_a f)^{(\alpha)} \right\|_E \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \left\| \tau_a f^{(\alpha)} \right\|_E = \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E \\ &= \|f\|_{W^m(E)}. \end{aligned}$$

Donc $W^m(E)$ vérifie (p_1)

Soient $u \in W^m(E)$ et $g \in D$, par la formule de Leibniz on a

$$(gu)^{(\alpha)} = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} g^{(\alpha)} u^{(\alpha-\beta)}$$

Où

$$\binom{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} = \frac{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_n! (\alpha_1 - \beta_1)! (\alpha_2 - \beta_2)! \dots (\alpha_n - \beta_n)!}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \|gu\|_{W(E)} &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} \|g^{(\alpha)} u^{(\alpha-\beta)}\|_E \\ &\leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} \|u^{(\alpha-\beta)}\|_E = c \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} \|u^{(\gamma)}\|_E \\ &\leq c \sum_{|\gamma| \leq m} \|u^{(\gamma)}\|_E \sum_{|\alpha| \leq m} 1 = c(m+1)^n \sum_{|\gamma| \leq m} \|u^{(\gamma)}\|_E \\ &= c' \|u\|_{W^m(E)}. \end{aligned}$$

Donc $W^m(E)$ est un $D(\mathbb{R}^n)$ -module.

Soit $u \in D$. On a

$$\|h_\lambda u\|_{M(W^m(E))} = \sup_{\|g\|_{W^m(E)} \leq 1} \|gh_\lambda u\|_{W^m(E)}$$

mais $h_\lambda u \in D$, donc

$$\|gh_\lambda u\|_{W^m(E)} \leq c_0 \|g\|_{W^m(E)}$$

Alors on obtien

$$\|h_\lambda u\|_{M(W^m(E))} \leq c_0 \leq +\infty.$$

Donc (p_2) pour $W^m(E)$. ■

Lemme 2.1.1 *Si E vérifie (p_0) et (p_1) , alors, pour tous $g \in D(\mathbb{R}^n)$ et $f \in E$, on a $g * f \in E$ et $\|g * f\|_E \leq \|g\|_1 \|f\|_E$; la même estimation est satisfaite dans E' et dans $W^m(E)$ ($m \in \mathbb{Z}$).*

Lemme 2.1.2 *Sous les hypothèses du théorème 2, on a, pour tous $f \in E$ et $g \in D(\mathbb{R}^n)$,*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(h_k g) = g(0) f \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} k^n (h_{1/k} g) * f = \left(\int g(x) dx \right) f$$

dans l'espace de Banach E .

A l'aide du lemme 2, on montre aisément que, pour tous $f \in W^m(E)$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{\rho k} = f \quad , \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k * f = f$$

en norme $W^m(E)$; la densité de $D(\mathbb{R}^n)$ dans $W^m(E)$ en découle aussitôt.

il reste à prouver l'inclusion $W^m(E') \subset (W^{-m}(E))'$, pour $m > 0$. Soit f une distribution à support compact appartenant à $W^m(E')$ et $g \in D(\mathbb{R}^n)$; on appliquant la proposition 4 à $f * \varphi_k$ et g , on obtient

$$|\langle f * \varphi_k, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)};$$

puisque $\widetilde{\varphi}_k * g \rightarrow g$ dans $D(\mathbb{R}^n)$, il vient

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)},$$

autrement dit $f \in W^{-m}(E)'$. Si f est un élément quelconque de $W^m(E')$, on approche f par les $f_{\rho k}$ et on conclut comme ci-dessus.

2.1.5 Contre-exemple explicite

Ce contre-exemple existe dans [], nous le retacer brièvement : Soit

$$u(x, y) = 2x - x \log(x^2 + y^2) - 2y \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

On a $u \in L_{loc}^\infty$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\log(x^2 + y^2);$$

On pose $f(x, y) = -\rho(x, y) \log(x^2 + y^2)$ alors on peut démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x} \in W^{-1}(L^\infty(\mathbb{R}^2))$ et $\frac{\partial f}{\partial y} \in W^{-1}(L^\infty(\mathbb{R}^2))$.

Donc $f \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbb{R}^2)))$. Pour voir que f est non dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, il suffit de considérer g une fonction intégrable positive telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} fg = +\infty$$

(par exemple

$$g(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{(x^2 + y^2) \log^2(x^2 + y^2)}).$$

est de former la contradiction.

Chapitre 3

Autre échelle fonctionnelle

3.1 Résultats positifs en dimension un

Théorème 3.1.1 *Soit E un EBD dans $D'(\mathbb{R}^n)$, ayant les propriétés :*

(p₀) $D(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace dense de E

Et (p₁) pour tout $f \in E$ et $t \in \mathbb{R}^n$, alors $\tau_t f \in E$ et $\|\tau_t f\|_E = \|f\|_E$.

Soit $m > 0$. Alors

$$E = W^{-m}(W^m(E)) \quad , \quad E' = W^{-m}(W^m(E')).$$

Si de plus E satisfait (p₂) tel que : (p₂) E est un $D(\mathbb{R}^n)$ – module et, pour tout $g \in D(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\sup_{\lambda \geq 1} \|h_\lambda g\|_{M(E)} < +\infty.$$

Alors les échelles de sobolev d'origines E et E' sont invariantes.

Preuve. L'opérateur défini par

$$Tf = \int_0^\infty e^{-t} \tau_t f dt$$

est borné sur E .

Soit $f \in D(\mathbb{R}^n)$, alors $(Tf)' = f - Tf$ et même propriété est vraie quel que soit $f \in E$.

Si $f \in E$ et $g \in T^m(f)$, tel que T^m est un opérateur borné de E dans $W^m(E)$. Alors

$$f = \sum_{j=0}^m C_m^j g^{(j)}; \quad \text{avec } f \in W^{-m}(W^m(E)).$$

On a aussi défini T sur E' , de la formule

$$\langle Tf, g \rangle = \int_0^\infty e^{-t} \langle f, \tau_{-t} g \rangle dt;$$

Cela nous donne $E' = W^{-m}(W^m(E'))$; on applique alors le théorème 2 et la proposition 1 pour obtenir $E = W^m(W^{-m}(E))$ et $E' = W^m(W^{-m}(E'))$. Il nous reste à vérifier la propriété 5.

Pour $m > k$, on applique la première partie de la preuve à l'espace $W^{m-k}(E)$, ainsi que la proposition 1; il vient

$$W^{m-k}(E) = W^{-k}(W^k(W^{m-k}(E))) = W^{-k}(W^m(E));$$

par ailleurs :

$$W^{m-k}(E) = W^{m-k}(W^k(W^{-k}(E))) = W^m(W^{-k}(E)).$$

Le cas $m > k$ se traite de manière analogue. le même raisonnement s'applique à E' .

■

3.2 Resultats négatifs en dimensions supérieures

3.2.1 La propriété de Mitiagin-Ornstein

Définition 3.2.1 *On dit que E possède la propriété de Mitiagin-Ornstein, si E un EBD dans $D'(\mathbb{R}^2)$.*

f est distribution, alors les conditions $\partial_j^k f \in E$ ($j = 1, 2$; $k = 0, 1, 2$) impliquent $\partial_1 \partial_2 f \in E$.

Proposition 3.2.1 *Si E est un EBD dans $D'(\mathbb{R}^2)$, alors $W^1(E)$ possède la propriété de Mitiagin-Ornstein.*

Preuve. On suppose que $\partial_j^k f \in W^1(E)$, pour $j = 1, 2$ et $k = 0, 1, 2$. On a en particulier $\partial_2 f \in W^1(E)$, d'où $\partial_1 \partial_2 f \in E$. La condition $\partial_1^2 f \in W^1(E)$ implique

$$\partial_1 (\partial_1 \partial_2 f) = \partial_2 (\partial_1^2 f) \in E;$$

Et on a en particulier $\partial_1 f \in W^1(E)$, alors $\partial_2 \partial_1 f \in E$. La condition $\partial_2^2 f \in W^1(E)$ donc

$$\partial_2 (\partial_1 \partial_2 f) = \partial_1 (\partial_2^2 f) \in E;$$

Alors $\partial_1 \partial_2 f \in W^1(E)$. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons traité quelques propriétés et avons présenté quelques des théorèmes essentiels concernant les espaces de Sobolev d'exposant entier et d'exposants fractionnaires . Ces espaces jouent un rôle très dans la résolution des équations aux dérivées partielles.

En perspectives, nous envisageons de faire une étude similaire pour d'autres espaces fonctionnels, comme les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel, en introduisant la notion de l'échelle fonctionnelle pour ces espaces, ou même ces espaces avec poids.

Bibliographie

- [1] A. Adams Sobolev Spaces. Elsevier, London, 2003.
- [2] G. Bourdaud, Analyse fonctionnelle dans l'espace euclidien .Univ. Paris 7, 1995.
- [3] G. Bourdaud, M. Wojciechowski, Echelle de Sobolev d'origine arbitraire. Enseign. Math (2) 2000.
- [4] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Universitext. Springer, New York, 2011.
- [5] F. Demengel et G. Demengel, Espaces fonctionnels. Paris, 2007.
- [6] W. Rudin, Real and complex Analysis. Mc Graw-Hill, 1987.
- [7] C. Zuily, Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus, Dunod, 2002.

Résumé :

Nous introduisons ici les notions théoriques essentielles sur les espaces de Sobolev.

Aussi, pour tout espace fonctionnel de Banach E inclut dans l'espace des distributions $D'(\mathbb{R}^n)$ on étudie la notion de l'échelle de Sobolev $W^m(E)$ tel que $m \in \mathbb{Z}$. Cette dernière étude est dû à G. Bourdaud, où nous avons essayer de la comprendre pour des éventuelles continuations.

Mots clés : les espaces de Sobolev, espace fonctionnel de Banach, espace des distributions $D'(\mathbb{R}^n)$, échelle de Sobolev $W^m(E)$.

Abstract :

We introduce here the essential theories notions about the space of Sobolev.

Also, for all functional space of Banach E include in distributions of space $D'(\mathbb{R}^n)$ we study the echelon of the notion of Sobolev $W^m(E)$ despite $m \in \mathbb{Z}$. This last study is dû a G. Bourdaud, where we try to understand the continuations of eventualities.

Key words : the space of Sobolev, functional space of Banach, distributions of space $D'(\mathbb{R}^n)$, the notion of Sobolev $W^m(E)$.

ملخص:

نقدم هنا المفاهيم النظرية الأساسية على مساحات سوبولاف.

كذلك، بالنسبة لأي مساحة وظيفية من بنائ E يشمل في مساحة التوزيعات $D'(\mathbb{R}_n)$ ، ندرس فكرة مقياس سوبولاف $W_m(E)$ بحيث $m \in \mathbb{Z}$.

هذه الدراسة الأخيرة ترجع الى ج. بوردود، حيث حاولنا أن نفهم ذلك من أجل استمراره.
الكلمات المفتاحية : مساحات سوبولاف، مساحة وظيفية ل بنائ، مساحة التوزيعات $D'(\mathbb{R}_n)$ ، مقياس سوبولاف $W_m(E)$.