Table des matières

A

ma mère,

mon père,

et ma famille

Remerciement

Je remercie monsieur NADIR Mostefa, ancien professeur de mathématiques pour ses travaux, ses conseils, ses encouragements, et ses instructions pendant les deux années de master.

Je remercie monsieur SMATI Abdellatif pour son aide et ses efforts dans ce mémoire.

Je remercie monsieur GAGUI Bachir pour ses efforts et ses instructions pour les étudiants.

Je remercie monsieur MIHOUBI Cherif chef du département de mathématiques - M'sila pour ses efforts dans l'administration.

A la fin je remercie tous mes anciens et nouveaux professeurs.

Notations

$\boldsymbol{L(E,F)}$ L'ensemble des applications linéaires de E dans F.

$\boldsymbol{\mathcal{L}(E,F)}$ L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

$\boldsymbol{C([a,b])}$ L'espace des fonctions continues sur $[a,b]$.

$\boldsymbol{C^1([a,b])}$ L'espace des fonctions continûment dérivables, ou de classe C^1 sur $[a,b]$.

$\boldsymbol{C^n([a,b])}$ L'espace des fonctions continûment dérivables n-fois, sur $[a,b]$.

$\boldsymbol{C_0^\infty([a,b])}$ L'espace des fonctions de classe $C^\infty([a,b])$ dont le support est un sous ensemble compact de $[a,b]$.

$\boldsymbol{L^2([a,b])}$ L'espace des fonctions de carrés integrables sur $[a,b]$.

$\boldsymbol{L^\infty([a,b])}$ L'espace des fonctions bornées sur $[a,b]$.

$\boldsymbol{\ell_2}(\mathbb{R})$ L'espaces des suites réelles $(x_n)_n$ de carrés sommables, i.e vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$.

$\boldsymbol{H^k}(\mathbb{R})$ L'espace des fonctions f vérifiant $f^{(n)} \in L_2(\mathbb{R})$ pour toute $0 \leq n \leq k$.

$\boldsymbol{A^{-1}}$ L'inverse de l'opérateur A.

$\boldsymbol{A^*}$ L'adjoint de l'opérateur A.

$\boldsymbol{\mathcal{D}(A)}$ Le domaine de l'opérateur A.

$\boldsymbol{\mathcal{R}(A)}$ L'image de l'opérateur A.

$\boldsymbol{\mathcal{K}er(A)}$ Le noyau de l'opérateur A.

$\boldsymbol{\Gamma(A)}$ Le graphe de l'opérateur A.

$\|\boldsymbol{.}\|_{\boldsymbol{A}}$ La norme du graphe de l'opérateur A.

$\boldsymbol{\overline{A}}$ La fermeture de l'opérateur A.

$\boldsymbol{\rho(A)}$ L'ensemble résolvante de l'opérateur A.

$\boldsymbol{R_\lambda(A)}$ La résolvante de l'opérateur A.

$\boldsymbol{\sigma(A)}$ Le spectre de l'opérateur A.

$\boldsymbol{\sigma_p(A)}$ Le spectre ponctuel de l'opérateur A.

$\boldsymbol{\sigma_r(A)}$ Le spectre résiduel de l'opérateur A.

$\boldsymbol{\sigma_c(A)}$ Le spectre continu de l'opérateur A.

$\boldsymbol{r(A)}$ Le rayon spectral de l'opérateur A.

Introduction

Le concept d'un opérateur entre deux espaces vectoriels normés est une généralisation de l'idée d'une fonction d'une variable réelle. Les opérateurs linéaires bornés ou non bornés sont utilisés dans la physique mathématique comme l'opérateur différentiel, l'opérateur integral, et l'opérateur représenté par une matrice ... etc.

La plupart des opérateurs linéaires importants utilisés dans la physique mathématique ne sont pas bornés comme les opérateurs différentiels, et quelques opérateurs utilisés dans la mécanique quantique.

Une classe des opérateurs non bornés est dite opérateurs fermés. Dans ce mémoire on va étudier cette classe.

Ce mémoire contient quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous étudions une introduction à l'analyse fonctionnelle, les opérateurs bornés avec leurs propriétés, leur adjoint, leurs clasifications, avec quelques exemples dans chaque cas.

Dans le deuxiéme chapitre nous étudions les opérateurs non bornés et leurs propriétés avec quelques exemples des opérateurs non bornés.

Dans le troisiéme chapitre nous étudions des rappels sur les ensembles fermés les espaces fermés et des nouvelles notions des opérateurs linéaires, puis les opérateurs fermés et fermables et leurs propriétés avec une comparaison entre les opérateurs fermés et bornés, nous étudions aussi l'djoint d'un opérateur non borné avec quelques exemples dans chacun des cas précédents.

Dans le quatriéme chapitre nous étudions les propriétés spectrales des opérateurs bornés et des opérateurs fermés avec des études spectrales de quelques exemples dans chaque cas.

Chapitre 1

Opérateurs bornés

1.1 Rappels et définitions

1.1.1 Espaces normés

Définition 1.1. *(Normes)*
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ =$\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$). Une norme sur E est une fonction $\|.\| : E \to \mathbb{K}$ vériant les propriétes suivantes :

1) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$, $\forall f \in E$.
2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$, $\forall f \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, $\forall f, g \in E$.

Définition 1.2. *(Espaces normés)*
Un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ est dite un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.3. *(Suite de Cauchy)*
Une suite x_n d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est dit une suite de cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \ \forall \ m, n \geq n_\epsilon \ : \ \|x_n - x_m\| < \epsilon$$

Définition 1.4. *(Espaces complets)*
Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet si toutes ses suites de cauchy sont convergentes dans E pour sa norme.

Définition 1.5. *(Espace de Banach)*
Un espace de banach est un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ complet pour la distance déduite de sa norme $d(f,g) = \|f-g\|$.

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.6. *(Produit scalaire)*
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ =$\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$). Un produit scalaire sur E est une fonction $\langle f, g\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifie les propriétes suivantes :

1) $\langle f, f\rangle \geq 0$, $\forall f \in E.$
2) $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$
3) $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda \langle f, g\rangle$
4) $\langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$
5) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$

$$\forall f, g, h \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Définition 1.7. *(Espace euclidien)*
Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est dit un espace euclidien ou préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire .

Remarque 1.1. Le produit scalaire d'un espace euclidien nous donne une norme définie par

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Corollaire 1.1. Tout espace euclidien est un espace normé.

Théorème 1.1. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*
Soit E un espace euclidien, alors pour tout $f, g \in E$ on a :

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|.$$

où

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Démonstration. Voir [1]. □

Définition 1.8. *(Espace de Hilbert)*
Un espace de hilbert est un espace euclidien $(E, \langle ., .\rangle)$ complet pour la distance déduite de sa norme

$$d(f,g) = \|f-g\|.$$

Corollaire 1.2. Tout espace de Hilbert est un espace de Banach.

1.2 Propriétés des opérateurs bornés

Définition 1.9. *(Opérateur)*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On dit qu'une application A défini sur un sous-ensemble $S \subset E$ dans F est un opérateur si :

- S est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.10. *(Linéairité des opérateurs)*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. on dit qu'un opérateur A défini sur E dans F est linéaire si :

$$\forall f, g \in E, \ \forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ : \ A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g).$$

Définition 1.11. *(Continuité des opérateurs en un point)*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés, on dit qu'un opérateur A défini sur un ensemble $G \subset E$ dans F est continu (ou borné) en un point x_0 si :
pour toute suite x_n de G converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$.

Théorème 1.2. *Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.*

Proposition 1.1. *(Continuité des opérateurs)*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et A un opérateur linéaire défini de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) L'opérateur A est continu sur E.
2) L'opérateur A est continu en un point x_0.
3) L'opérateur A est borné sur la boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$ de E.
4) L'opérateur A est borné sur la sphère unité fermée $S(0,1)$ de E.
5) Il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Ax\|_F \leq c\|x\|_E$, pour tout $x \in E$.
6) L'opérateur A est lipschitzien.
7) L'opérateur A est uniformément continu sur E.

Remarque 1.2. Dans la pratique, on utilise souvent les assertions 4) et 5) surtout 5).

Proposition 1.2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un espace vectoriel quelconque , si A un opérateur linéaire défini sur E dans F. Alors A est continu.

Démonstration. Soit x un element de E, alors on peut ecrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et on a :

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i$$

d'après la linéairité de A
et donc

$$\|Ax\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i A e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|Ae_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\| \|x\|_\infty$$

Ceci montre que A est continu. □

Notation l'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $L(E,F)$. Lorsque $E = F$ l'espace $L(E,F)$ devient par notation $L(E)$.
Et l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$. Lorsque $E = F$ l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ devient par notation $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 1.3. *(Norme d'un operateur)*
On norme $\mathcal{L}(E,F)$ en posant :

$$\forall A \in \mathcal{L}(E,F), \quad \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_F$$

Remarque 1.3. Le réel $\|A\|$ est le plus petit réel positif c tel que $\|Ax\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$.

Théorème 1.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Alors l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé, i.e :*

1) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$, $\forall A \in \mathcal{L}(E,F)$.

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$, $\forall A \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in \mathcal{L}(E,F)$.

Démonstration. Voir [6]. □

1.3 Exemples des opérateurs bornés

Exemple 1.1. L'opérateur intégral de Voltera défini de $C[0,1]$ dans $C[0,1]$ par

$$Af(x) = \int_0^x f(y)dy$$

est continu pour la norme

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0;1]} |f(x)|$$

et de plus

$$\|Af(x)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \ , \ \|A\|_\infty = 1$$

Exemple 1.2. L'opérateur défini de $L_2(0,1)$ dans $L_2(0,1)$ par

$$Af(x) = xf(x)dy$$

est continu pour la norme

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et de plus

$$\|Af(x)\|_2 \leq \|f\|_2 \ , \ \|A\|_2 = 1$$

Exemple 1.3. L'opérateur de multiplication défini de $C[0,1]$ dans $C[0,1]$ par

$$M_\varphi(f) = \varphi f$$

est continu pour la norme

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0;1]} |f(x)|$$

et de plus

$$\|M_\varphi(f)\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_\infty \ , \ \|M_\varphi(f)\|_\infty = \|\varphi\|_\infty.$$

Exemple 1.4. L'opérateur intégral de Fredholm défini de $C[a,b]$ dans $C[a,b]$ par

$$Af(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

où $k(x,y) \in C([0,1]^2)$ est continu pour la norme

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0;1]} |f(x)|$$

et de plus

$$\|Af(x)\|_\infty \leq (b-a) \sup_{x,y\in[0;1]} |k(x,y)| \, \|f\|_\infty \ , \ \|A\|_\infty = (b-a) \sup_{x,y\in[0;1]} |k(x,y)| \, .$$

Exemple 1.5. les deux opérateurs définis de ℓ_2 dans ℓ_2 par

$$U_1(x_1, x_2, x_3, ...) = (\frac{x}{n}) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ...)., \forall x = (x_1, x_2, ...) \in \ell_2$$

et

$$U_2(x) = (\lambda_n x_n), \forall x = x(x_1, x_2, ...) \in \ell_2$$

ou (λ_n) une suite bornée de nombres complexes , sont continus pour la norme

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et de plus

$$\|U_1(x)\|_2 \leq \|x\| \ , \ \|U_2(x)\|_2 \leq \sup_n |\lambda_n| \, \|x\|$$

et

$$\|U_1\|_2 = 1 \ , \ \|U_2\|_2 = \sup_n |\lambda_n| \, .$$

1.4 Inversibilités des opérateurs bornés

Définition 1.12. *(Inverse d'un opérateur borné)*
Soit H un espace de hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est inversible s'il existe un opérateur noté $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_H$$

Théorème 1.4. *Un opérateur A est inversible si et seulement si $Ax = 0$ implique $x = 0$.*

Démonstration. Si A est inversible et $Ax = 0$, alors

$$x = A_{-1}Ax = A_{-1} = 0.$$

Supposons maintenant que $Ax = 0$ implique $x = 0$. Si $Ax_1 = Ax_2$, alors $A(x_1 - x_2) = 0$ et ainsi $x_1 - x_2 = 0$. Par conséquent $x_1 = x_2$, alors A est inversible. □

Remarque 4 Il est possible que l'opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ admet un inverse mais cet inverse n'est pas dans $\mathcal{L}(H)$.

Exemple 1.6. Soit U un opérateur définie de ℓ_2 dans ℓ_2 par

$$U(x_1, x_2, x_3, ...) = (\frac{x}{n}) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ...).$$

On a :

$$\|U(x_1, x_2, x_3, ...)\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|U(x_1, x_2, x_3, ...)\|_2 = \|x\|_2.$$

U est continu alors il est inversible :

$$U^{-1}(x_1, x_2, x_3, ...) = (nx) = (x_1, 2x_2, 3x_3, ..., nx_n, ...).$$

Mais U^{-1} n'est pas borné. (Voir chapitre 2)

Théorème 1.5. *(Application inverse)*
Soient E et F deux espaces normés et $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors A est bijectif si et seulement si A^{-1} est borné.

Démonstration. Voir [1]. □

1.5 Convergence des opérateurs

Définition 1.13. *(convergence des opérateurs)*
Soient H un espace de Hilbert et $\{A_n\}_n$ une suite d'opérateurs bornés de $\mathcal{L}(H)$. On dit que A_n est convergente vers A dans $\mathcal{L}(H)$ si et seulement si : $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H)}$ est convergente vers 0 dans $\mathbb{R}$. Autrement dit :

$$A_n \longrightarrow A \text{ dans } \mathcal{L}(H) \Longleftrightarrow \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H)} \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathbb{R}$$

Exemple 1.7. Soit $H = L^2(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle_H = \int_\Omega f(x)g(x)dx \ , \ \forall f, g \in H.$$

On définit La suite d'opérateurs sur H dans H comme :

$$A_n f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^n f(x).$$

Alors $A_n \longrightarrow A \equiv 0$ dans $\mathcal{L}(H)$.
En effet :

$$\begin{aligned}
\|A_n - 0\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A_n\|_{\mathcal{L}(H)} &= \sup_{f\neq 0} \frac{\|A_n(f)\|_H}{\|f\|_H} \\
&= \sup_{f\neq 0} \frac{(\langle A_n f, A_n f\rangle_H)^{\frac{1}{2}}}{\|f\|_H} \\
&= \sup_{f\neq 0} \frac{\left(\int_\Omega |A_n f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}}{\|f\|_H} \\
&= \sup_{f\neq 0} \frac{\left(\int_\Omega \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n f(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}{\|f\|_H} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sup_{f\neq 0} \frac{\left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}}{\|f\|_H} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sup_{f\neq 0} \frac{\|f\|_H}{\|f\|_H} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sup_{f\neq 0} 1 \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Alors $A_n \longrightarrow A \equiv 0$ dans $\mathcal{L}(H)$.

Exemple 1.8. Soit $H = C([0,1])$ muni de la norme uniforme

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0;1]} |f(x)| \, .$$

Pour $k_n(x,y) \in C([0,1]^2)$ à valeurs réelles. On définit $A_n \in \mathcal{L}(H)$ par :

$$A_n f(x) = \int_0^1 k_n(x,y) f(y) dy.$$

Alors $\|A_n - 0\|_\infty \longrightarrow 0$ si :

$$\|A_n\|_\infty = \max_{x\in[0;1]} \int_0^1 k_n(x,y) dy \longrightarrow 0$$

Un exemple de fonction k_n vérifie sa est $k_n(x,y) = xy^n$

1.6 L'adjoint d'un opérateur borné

1.6.1 Définitions et propriétes de l'adjoint

Théorème 1.6. *(Représentation de Riesz)*
Soit H un espace de Hilbert. Alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K}),\ \exists!\ g \in E\ :\ \varphi(f) = \langle f, g\rangle,\ \forall f \in E.$$

Démonstration. Voir [1]. □

Théorème 1.7. *(Opérateur adjoint)*
Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un opérateur unique noté $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ s'appelle l'adjoint de A vérifie la relation suivante :

$$\langle Af, g\rangle_{H_2} = \langle f, A^*g\rangle_{H_1},\quad \forall f \in H_1,\ \forall g \in H_2.$$

Démonstration. Soit $g \in H_2$. L'application $\varphi_g : \longmapsto \langle Af, g\rangle_{H2}$ est linéaire et, pour tout $f \in H_1$ on a

$$|\varphi_g(f)| = |\langle Af, g\rangle_{H_2}| \leq \|A\|\|f\|\|g\|.$$

Donc $\varphi_g \in H_2'$. On en déduit d'après le théorème de représentation de Riesz qu'il existe un unique $h \in H_1$ tel que $\varphi_g : \longmapsto \langle f, h\rangle_{H_1}$, pour tout $f \in H_1$. Ce qui montre le Théorème. □

Propriétes :

1) $(I_H)^* = I_H$.
2) $\|A\| = \|A^*\| = \|AA^*\|^{\frac{1}{2}}$.
3) $(A^*)^* = A$.
4) $(AB)^* = B^*A^*$.
5) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$.
6) Si A est inversible. Alors A^* est inversible et de plus $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

1.6.2 Exemples de l'adjoint d'un opérateur borné

Exemple 1.9. Soit l'opérateur intégral de Fredholm défini de $L_2(a, b)$ dans $L_2(a, b)$ par

$$Af(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)dy$$

où $k(x,y) \in C([0,1]^2)$ à valeurs complexes. Alors l'opérateur adjoint A est

$$A^*f(x) = \int_a^b \overline{k(y,x)} f(y)dy$$

pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\langle Af, g\rangle &= \int_a^b (Af(x))\,\overline{g(x)}dx \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b k(x,y)f(y)dy\right)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b k(x,y)\overline{g(x)}dx\right) f(y)dy \\
&= \int_a^b f(y)\left(\int_a^b k(x,y)\overline{g(x)}dx\right) dy \\
&= \int_a^b f(y)\overline{\left(\int_a^b \overline{k(x,y)}g(x)dx\right)}dy \\
&= \langle f, A^*g\rangle.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$A^*g(y) = \int_a^b \overline{k(x,y)}g(x)dx.$$

Donc

$$A^*f(x) = \int_a^b \overline{k(y,x)} f(y)dy$$

Exemple 1.10. Soient $\varphi \in L_\infty[0,1]$ et l'opérateur de multiplication défini de $L_2[0,1]$ dans $L_2[0,1]$ par

$$M_\varphi(f) = \varphi(x)f(x).$$

Alors l'opérateur adjoint de M_φ est donné par

$$M_\varphi^* f(x) = M_{\overline{\varphi}}f(x) = \overline{\varphi(x)}f(x).$$

pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\langle M_\varphi f, g\rangle &= \int_0^1 (M_\varphi f)(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_0^1 \varphi(x)f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \overline{\overline{\int_0^1 \varphi(x)f(x)\overline{g(x)}dx}} \\
&= \overline{\int_0^1 \overline{\varphi(x)f(x)}g(x)dx} \\
&= \int_0^1 f(x)\overline{\overline{\varphi(x)}g(x)}dx \\
&= \int_0^1 f(x)\overline{M_{\overline{\varphi}}g(x)}dx \\
&= \langle f, M_{\overline{\varphi}}g\rangle.
\end{aligned}$$

Exemple 1.11. Soit l'opérateur S défini de $\ell_2(\mathbb{N})$ dans $\ell_2(\mathbb{N})$ par

$$S(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...).$$

Alors l'opérateur adjoint S^* de S est donné par :

$$S^*(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...).$$

car

$$\langle x, Sy\rangle = \overline{x_2}y_1 + \overline{x_3}y_2 + \overline{x_4}y_3 + ... = \langle S^*x, y\rangle$$

1.7 Opérateur auto-adjoint

Définition 1.14. *(Opérateur auto-adjoint)*
Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est un opérateur auto-adjoint (ou hérmitien) s'il égale à son adjoint i.e : $A = A^*$ Autrement dit :

$$\langle Af, g\rangle_H = \langle f, Ag\rangle_H, \quad \forall f, g \in H.$$

Exemple 1.12. Soient H un espace de hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors les deux opérateurs suivants sont auto-adjoints :

$$T_1 = AA^*.$$

$$T_2 = A + A^*.$$

En effet

$$T_1^* = (AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^* = T_1.$$

$$T_2^* = (A + A^*)^* = A^* + (A^*)^* = A^* + A = T_2.$$

Exemple 1.13. Soient $\varphi \in L_\infty[0,1]$ et l'opérateur de multiplication défini de $L_2[0,1]$ dans $L_2[0,1]$ par

$$M_\varphi(f) = \varphi(x) f(x).$$

Alors M_φ est auto-adjoint si et seulement si

$$M_\varphi = M_{\overline{\varphi}}$$

i.e dans le cas de φ à valeurs réelles.

Exemple 1.14. Soit l'opérateur intégral de Fredholm défini de $L_2(a,b)$ dans $L_2(a,b)$ par

$$Af(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy$$

où $k(x,y) \in C([0,1]^2)$ à valeurs complexes. Alors A est auto-adjoint si et seulement si

$$\overline{k(y,x)} = k(x,y).$$

Exemple 1.15. l'opérateur A défini de $L_2(\mathbb{R})$ dans $L_2(\mathbb{R})$ par

$$Af(x) = e^{-|x|} f(x)$$

est un opérateur borné et auto-adjoint.
En effet

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{e^{-|x|} g(x)} dx \\ &= \langle f, Ag \rangle. \end{aligned}$$

Alors A est un opérateur auto-adjoint.

Théorème 1.8. *Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ avec A un opérateur auto-adjoint. Alors*

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Af, f \rangle|.$$

Démonstration. Voir [1]. □

1.8 Opérateur positif

Définition 1.15. *(Opérateur positif)*
Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ avec A un opérateur auto-adjoint. On dit que A est positif si et seulement si :

$$\langle Af, f \rangle \geq 0, \ \forall f \in H$$

Définition 1.16. *(Opérateur strictement positif)*
Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ avec A un opérateur auto-adjoint. On dit que A est strictement positif si et seulement si :

$$\langle Af, f \rangle > 0, \ \forall f \in H$$

Exemple 1.16. L'opérateur integral de Fredholm défini de $L^2[a,b]$ dans $L^2[a,b]$ par

$$Af(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

où k une fonction positive telle que $k(x,y) \in C([0,1]^2)$ est un opérateur positif.
En effet

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \int_a^b \int_a^b k(x,y)f(y)\overline{f(y)}dydx \\ &= \int_a^b \int_a^b k(x,y)\left|f(y)\right|^2 dydx \geq 0 \end{aligned}$$

pour toute $f \in L_2[a,b]$

1.9 Opérateur normal

Définition 1.17. *(Opérateur normal)*
Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est opérateur normal si :

$$A^*A = AA^*.$$

1.10 Opérateur unitaire

Définition 1.18. *(Opérateur unitaire)*
Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est opérateur unitaire si :

$$A^*A = AA^* = I_H.$$

1.11 Opérateurs Compacts

Définition 1.19. *(Opérateur compact)*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un opérateur linéaire défini sur E dans F. On dit que A est un opérateur compact si : $A(G)$ est sous ensemble relativement compact de F pour tout sous ensemble borné de G de E.

Théorème 1.9. *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

Démonstration. Si A un opérateur non borné. Alors il existe une suite $\{f_n\}$ telle que $\|f_n\| = 1$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $\|Af_n\| \longrightarrow \infty$.Alors $\{Af_n\}$ ne contient pas une sous suite convergente, ce qui signifie que A est non compact. □

Exemple 1.17. L'opérateur integral de Voltera défini de $C[0,1]$ dans $C[0,1]$ par

$$Af(x) = \int_0^x f(y)dy$$

est un opérateur compact.

Exemple 1.18. L'opérateur integral de Fredholm défini de $C[0,1]$ dans $C[0,1]$ par

$$Af(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

où $k(x,y) \in C([0,1]^2)$ est un opérateur compact.

Chapitre 2

Opérateurs non bornés

2.1 Définitions et propriétés des opérateurs non bornés

Dans le chapitre précédent, nous avans considéré des opérateurs linéaires bornés définis en chaque élément d'un ensemble de départ. Nous considérerons dans ce chapitre des opérateurs linéaires étant définis seulement sur un sous-espace d'un ensemble de départ.

Définition 2.1. *(Domaine d'un opérateur)*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un opérateur linéaire défini de sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$ dans F. $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A.

Remarque 2.1. Le domaine est une partie de la définition d'un opérateur. En effet on considére par exemple l'opérateur linéaire $A_1 : C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ donné par $A_1 f(x) = f'(x)$. Et l'opérateur $A_2 : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow F$ est aussi donné par $A_1 f(x) = f'(x)$. nous somme avec deux opérateurs déffirents. Il est clair que $A_2 \subset A_1$.

Définition 2.2. *(Opérateur non borné)*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On dit qu'un opérateur linéaire A défini sur $\mathcal{D}(A) \subset E$ dans F est un opérateur non borné si :

- $\mathcal{D}(A) \neq E$.

Remarque 2.2. Dans la pratique pour montrer que un opérateur A est non borné il suffit de trouver une suite $f_n \in D(A)$ telle que $\|f_n\| \leq M$ (pour une constante M et tout $n \in \mathbb{N}$) et $\|Af_n\| \longrightarrow \infty$. Par conséquent on peut montrer qu'un opérateur A est non borné par trouver une suite $\{f_n\} \in D(A)$ convergente vers 0 telle que la suite $\{Af_n\}$ ne converge pas vers 0.

2.2 Exemples des opérateurs non bornés

Exemple 2.1. L'opérateur U défini de ℓ_2 dans ℓ_2 par

$$U(x_1, x_2, x_3, ...) = (nx) = (x_1, 2x_2, 3x_3, ..., nx_n, ...).$$

est un opérateur non borné. (on sait que l'espace ℓ_2 muni de la norme $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
.
En effet, on considère la suite e_n d'éléments dans ℓ_2, où e_n est un suite prend 1 dans le terme $n-$iéme et prend 0 dans tous les autres temres. Alors

$$\|e_n\|_2 = 1$$

et

$$\|U^{-1}e_n\|_2 = n \longrightarrow \infty.$$

D'où l'opérateur U est un opérateur non borné dans ℓ_2.

Exemple 2.2. Soit $\mathcal{D}(D_1)$ un sous espace vectoriel de $C([0, 1])$ composé de toutes les fonctions polynomiales, l'opérateur différentiel D_1 défini de $\mathcal{D}(D_1)$ dans $C([0, 1])$ par :

$$D_1 f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

est un opérateur non borné.
En effet, on considère par exemple la suite des fonctions $f_n(x) = x^n, \quad n = 1, 2, 3, ...$. Il est clair que pour tout $n = 1, 2, 3, ..., \quad f_n \in \mathcal{D}(D_1)$. En outre,

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= \max_{x\in[0;1]} |f_n(x)| \\ &= \max_{x\in[0;1]} |x^n| \\ &= 1 \end{aligned}$$

pour tout $n = 1, 2, 3, ...$
et

$$\begin{aligned}
\|D_1 f_n\|_\infty &= \|f_n'(x)\|_\infty \\
&= \|(x^n)'\|_\infty \\
&= \|nx^{n-1}\|_\infty \\
&= \max_{x\in[0;1]} \left|nx^{n-1}\right| \\
&= n \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

D'où l'opérateur D_1 est un opérateur non borné dans $C([0,1])$.

Exemple 2.3. Soit $\mathcal{D}(D_2)$ un sous espace vectoriel de $L^2([a,b])$ composé de toutes les fonctions dérivables sur certain interval $[a,b] \in \mathbb{R}$, l'opérateur différentiel D_2 défini de $\mathcal{D}(D_2)$ dans $L^2([a,b])$ par :

$$D_2 f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

est un opérateur non borné.
En effet, on considère par exemple la suite des fonctions $f_n(x) = \sin(nx)$, $n = 1, 2, 3, ...$, défini sur $[-\pi, \pi]$. Alors

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_2 &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(nx)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|D_2 f_n\|_2 &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |n\cos(nx)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= n\sqrt{\pi} \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

D'où l'opérateur D_2 est un opérateur non borné dans $L^2([0,1])$.

Exemple 2.4. Soit $\mathcal{D}(D_3)$ un sous espace vectoriel de $L^2([0,1])$ composé de toutes les fonctions continûment dérivables sur $[0,1] \in \mathbb{R}$ (i.e $\mathcal{D}(D_3) = C^1([0,1])$, l'opérateur différentiel D_3 défini de $\mathcal{D}(D_3)$ dans $L^2([0,1])$ par :

$$D_3 f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

est un opérateur non borné.
En effet, on considère par exemple la suite des fonctions $f_n(x) = x^n, \quad n = 1, 2, 3, ...$ Il est clair que pour tout $n = 1, 2, 3, ..., \quad f_n \in \mathcal{D}(D_3)$. En outre,

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_2^2 &= \int_0^1 |f_n(x)|^2 \, dx \\
&= \int_0^1 x^{2n} dx \\
&= \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|D_3 f_n\|_2^2 &= \int_0^1 |D_3 f_n(x)|^2 \, dx \\
&= \int_0^1 \left| n t^{n-1} \right|^2 dx \\
&= \int_0^1 n^2 t^{2n-2} dx \\
&= \frac{n^2}{2n-1}
\end{aligned}$$

Encore on a,

$$\frac{\|D_3 f_n\|_2}{\|f_n\|_2} = n\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \longrightarrow \infty$$

D'où l'opérateur D_3 est un opérateur non borné dans $L^2([0, 1])$.

Exemple 2.5. Soit $\mathcal{D}(D_4)$ un sous espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ composé de toutes les fonctions de carré integrable sur $\mathbb{R}$ et leurs dériveés premières et secondes sont de carré integrable sur $\mathbb{R}$ (i.e $\mathcal{D}(D_4) = H^2(\mathbb{R})$, l'opérateur laplacien de dimension-un D_4 défini de $\mathcal{D}(D_4)$ dans $L^2([0, 1])$ par :

$$D_4 f(x) = -\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -f''(x)$$

est un opérateur non borné.
En effet, on considère par exemple la suite des fonctions $f_n(x) = \exp -n\,|x|, \quad n = 1, 2, 3, ...$ Il est clair que pour tout $n = 1, 2, 3, ..., \quad f_n \in \mathcal{D}(D_4)$. En outre,

$$\begin{aligned}\|f_n\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2 \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp -2n\,|x| dx \\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|D_4 f_n\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |D_4 f_n(x)|^2 \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} n^4 \exp -2n\,|x| dx \\ &= n^3.\end{aligned}$$

Encore on a,

$$\frac{\|D_4 f_n\|_2}{\|f_n\|_2} = n^2 \longrightarrow \infty$$

D'où l'opérateur D_4 est un opérateur non borné dans $L^2([0,1])$.

Remarque 2.3. Les opérateurs non bornés peuvent étre seuleument dans les espaces de dimension infinie parce que dans les espaces de dimension finie tous les opérateurs linéaires sont bornés (chapitre 1).

Chapitre 3

Opérateurs fermés

3.1 Rappels sur les ensembles fermés

Définition 3.1. *(Boule ouverte, Boule fermée)*
Soient a un element d'un espace normé E et r un nombre positf.
La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$B(a,r) = \{y \in E \ : \ \|y-a\| < r\}.$$

La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$\overline{B}(a,r) = \{y \in E \ : \ \|y-a\| \leq r\}.$$

Définition 3.2. *(Ensembles ouverts)*
Un sous ensemble S d'un espace normé E est dit ouvert si pour tout $x \in E$ il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que :

$$B(x,\epsilon) \subseteq S.$$

Définition 3.3. *(Ensembles fermés)*
Un sous ensemble S d'un espace normé E est dit fermé si son complémentaire est ouvert i.e

$$\mathcal{C}_S^E = \{x \in E \ : \ x \notin S\}.$$

est ouvert.

Théorème 3.1. *Un sous ensemble S d'un espace normé E est dit fermé si et seulement si toute suite convergente $(x_n)_n$ d'elements de S converge vers limite $x \in S$, e.i*

$$(x_n \longrightarrow x \ et \ x_n \in S, \ \forall n) \Longrightarrow x \in S.$$

(cette définition est souvent utilisée dans l'analyse fonctionnelle).

Démonstration. Voir [2]. □

Exemple 3.1. Les boules ouvertes sont des ensembles ouverts. Les boules fermés sont des ensembles fermés.

Exemple 3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit l'ensemble ouvert $S_n =]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[$. Alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{0\}$, lequel n'est pas ouvert. Mais $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n =]-1, 1[$, lequel est ouvert.

Exemple 3.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit l'ensemble fermé $S_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}]$. Alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n =]0, 1[$, lequel n'est pas fermé. Mais $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, lequel est fermé.

Définition 3.4. *(Fermeture d'un ensemble)*
Soit S un sous ensemble d'un espace normé E. La fermetue de lensemble S est l'intersection de tous les ensembles fermés contenant S et on la note par $\overline{S}$.
Ou oncore
$$\overline{S} = \{x \in E \ : \ \exists x_n \in S \ tq \ x_n \longrightarrow x\}.$$

Remarque 3.1. La fermeture $\overline{S}$ est le plus petit ensemble fermé contenant l'ensemble S.

Définition 3.5. *(Sous-ensemble dense)*
Un sous ensemble S d'un espace normé E est dit dense dans E si sa fermeture est égal à E, i.e
$$\overline{S} = E.$$

Exemple 3.4. L'ensemble de tous les polynômes sur $[a, b]$ est dense dans $C([a, b])$.

Proposition 3.1. Soient E et F deux espaces normés et $f : E \longrightarrow F$. La fonction f est continue sur E si et seulement si $f^{-1}(G)$ est fermé (resp. ouvert) dans E pour tout ensmble fermé (resp. ouvert) G de F.

Proposition 3.2. Un sous ensemble S d'un espace normé E est fermé dans E si et seulement si : $\overline{S} = E$.

3.2 Rappels sur les espaces fermés

Lemme 3.1. Tout espace de Banach $(E, \|.\|)$ est fermé.

Démonstration. Soit (f_n) une suite d'éléments dans E convergente vers f, alors cette suite est de cauchy dans l'espace complet E qui car $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach. La complitude de E donne la convergence de la suite de cauchy f_n dans E. D'ou E est fermé. □

Proposition 3.3. Tout sous-espace S complet d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est fermé.

Démonstration. Soit $f \in \overline{S}$, alors d'aprés (3.5) il existe une suite (f_n) d'éléments de S telle que $f_n \longrightarrow f$ dans E,comme la suite (f_n) est de cauchy de E complet, donc elle est convergente dans E, comme la limite est unique donc $f \in S$, par consequent $S = \overline{S}$. D'ou S est fermé. □

Proposition 3.4. Tout sous espace vectoriel fermé d'un espace complet est complet.

Corollaire 3.1. Tout sous espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.

Corollaire 3.2. Tout sous espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.

3.3 Notions générales des opérateurs linéaires non bornés

Définition 3.6. *(Image d'un opérateur)*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un opérateur linéaire défini de sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$ dans sous espace vectoriel $\mathcal{R}(A) \subset F$. $\mathcal{R}(A)$ est appelé l'image de l'opérateur A et défini par :

$$\mathcal{R}(A) = Img(A) = A(\mathcal{D}(A)) = \{Af \ : \ f \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Définition 3.7. *(Noyau d'un opérateur)*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un opérateur linéaire défini de sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$ dans sous espace vectoriel $\mathcal{R}(A) \subset F$. $\mathcal{K}er(A)$ est appelé le noyau de l'opérateur A et défini par :

$$\mathcal{K}er(A) = \{f \in \mathcal{D}(A) \ : \ Af = 0\}.$$

Définition 3.8. *(Opérateur densément défini)*
Soient E un espace vectoriel normé et A un opérateur linéaire défini de sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$ dans E. On dit que A est densément défini si son domaine est un sous ensemble dense de E, i.e

$$\overline{D(A)} = E.$$

Exemple 3.5. Soit l'opérateur différentiel défini par $Df(x) = -\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ de $\mathcal{D}(D) \subset L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ où $\mathcal{D}(D) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{est dérivable}$. L'opérateur D est un opérateur densément défini dans $L^2(\mathbb{R})$ car l'espace $\mathcal{D}(D)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 3.9. *(Graphe d'un opérateur)*
Soient E et F deux espaces vectoriels et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow R(A) \subset F$ un opérateur. Le graphe de A est le sous ensemble $\Gamma(A) \subset E \times F$ défini par :

$$\Gamma(A) = \{(f, Af) \ : \ f \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Définition 3.10. *(Norme du graphe d'un opérateur)*
Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$. Il est clair que :

$$\langle f, g\rangle_A = \langle f, g\rangle_{H_1} + \langle Af, Ag\rangle_{H_2}, \ \forall f, g \in \mathcal{D}(A),$$

définie un produit scalaire dans le domaine $\mathcal{D}(A)$. La norme correspondant

$$\|f\|_A = \sqrt{\|f\|^2_{H_1} + \|Af\|^2_{H_2}} \ \forall f \in \mathcal{D}(A),$$

est appelée la norme du graphe de l'opérateur A. Elle est équivalu à la norme

$$\|f\|'_A := \|f\|_{H_1} + \|Af\|_{H_2} \ \forall f \in \mathcal{D}(A),$$

dans $\mathcal{D}(A)$.

Définition 3.11. *(Extension des opérateurs)*
Soient E un espace vectoriel et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ et $B : \mathcal{D}(B) \subset E \longrightarrow E$ deux opérateurs linéaires. Alors on dit que A est une extension de B (ou bien B est une restriction de A) si :

$$\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$$

et $Af = Bf$ pour tout $f \in \mathcal{D}(B)$. Et on le note par $B \subset A$.

Exemple 3.6. Soient $A_k f = f''$ avec $k = 1, 2, 3, 4$ des opérateurs différentiels dans $L^2([0, 1])$ avec leurs domaines :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(A_1) = \left\{f \in C^2([0, 1]) : \ f(0) = f(1) = 0\right\},\\
&\mathcal{D}(A_2) = C^2([0, 1]),\\
&\mathcal{D}(A_3) = \left\{f \in H^2([0, 1]) : \ f(0) = f(1) = 0\right\},\\
&\mathcal{D}(A_4) = H^2([0, 1]),
\end{aligned}$$

comme $H^2([0, 1]) \subset C^2([0, 1])$, alors on a

$$A_1 \subset A_2 \subset A_4,$$

et

$$A_1 \subset A_3 \subset A_4.$$

Proposition 3.5. $B \subset A$ si et seulement si $\Gamma(B) \subset \Gamma(A)$.

Définition 3.12. *(Opérateurs égaux)*
Soient E un espace vectoriel et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ et $B : \mathcal{D}(B) \subset E \longrightarrow E$ deux opérateurs linéaires. Les deux opérateurs A et B sont égaux s'ils ont le même domaine $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ et ils coïncident sur ce domaine, i.e

$$Af = Bf, \ \forall f \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B).$$

Définition 3.13. *(Opérations sur les opérateurs linéaires)*
Soient E_1, E_2 et E_3 trois espaces vectoriels et $A : E_1 \longrightarrow E_2$,$B : E_1 \longrightarrow E_2$ et $C : E_2 \longrightarrow E_3$ trois opérateurs linéaires. Alors

- La multiple complexe αA pour $\alpha \in \mathbb{C}, \ \alpha \neq 0$ est un opérateur linéaire défini de E_1 dans E_2 par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\alpha A) = \mathcal{D}(A), \\ (\alpha A)(f) = \alpha A(f), \ \forall f \in \mathcal{D}(\alpha A), \ \alpha \neq 0. \end{cases}$$

- La somme $A + B$ est un opérateur linéaire défini de E_1 dans E_2 par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B), \\ (A+B)(f) = A(f) + B(f), \ \forall f \in \mathcal{D}(A+B). \end{cases}$$

- La multiple αA pour $\alpha = 0$ par l'opérateur nul est défini de E_1 dans E_2 par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(0) = E_1, \\ (0)(f) = 0, \ \forall f \in \mathcal{D}(0). \end{cases}$$

- Le produit CA est un opérateur linéaire défini de E_1 dans E_3 par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(CA) = \{f \in \mathcal{D}(A) : \ Af \in \mathcal{D}(C)\} \cap \mathcal{D}(B), \\ (CA)(f) = C(Af), \ \forall f \in \mathcal{D}(CA). \end{cases}$$

Remarque 3.2. Pour les opérateurs définis dans l'exemple (3.15), on a les résultats suivantes :

1) $(A + B)C = AC + AB$.
2) $A(B + C) \subset AB + AC$.

La notion du graphe d'un opérateur est très importante parce que cela nous permet de traiter avec la fermeture d'un opérateur.

3.4 Opérateurs fermés

3.4.1 Définitions et propriétés

Définition 3.14. *(Opérateurs fermés)*
Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$ est dit fermé si pour toute suite (f_n) de $\mathcal{D}(A)$ telle que $f_n \longrightarrow f$ dans E et $Af_n \longrightarrow g$ dans F, on a alors : $f \in \mathcal{D}(A)$ et $Af = g$.

Remarque 3.3. Si B_1 et $B2$ deux espace de banach et $A : \mathcal{D}(A) \subset B_1 \longrightarrow B_2$ un opérateur fermé non borné, alors $\mathcal{D}(A)$ ne peut pas être fermé car : si $\mathcal{D}(A)$ est fermé, donc par le corrollaire (3.1) on a $\mathcal{D}(A)$ est un espace de banach, alors le théoréme du graphe fermé implique que A est borné, d'où $\mathcal{D}(A)$ n'est pas fermé, en particulier $\mathcal{D}(A) \neq B_1$ car $B1$ est fermé d'aprés le lemme (3.1).

3.4.2 Comparaison entre les opérateurs bornés et les opérateurs fermés

Notons soigneusement la différence entre les opérateurs continus et les opérateurs fermés.
Pour un opérateur continu A (d'aprés la définition 1.11), la convergence de la suite (f_n) implique la convergence de la suite (Af_n), et

$$\lim_{n\to\infty} Af_n = A\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = A\,(f)\,. \tag{3.1}$$

Pour un opérateur fermé A, la convergence de la suite (f_n) n'implique pas la convergence de la suite (Af_n), mais si tous les deux (f_n) et (Af_n) sont convergentes, alors (3.1) est vérifiée. Autrement dit :
L'opérateur A est fermé si :

$$\begin{cases} f_n \in \mathcal{D}(A) \\ f_n \longrightarrow f \\ Af_n \longrightarrow g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{D}(A) \\ Af = g \end{cases}$$

L'opérateur A est continus si :

$$\begin{cases} f_n \in \mathcal{D}(A) \\ f_n \longrightarrow f \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{D}(A) \\ Af_n \longrightarrow g \\ Af = g \end{cases}$$

Proposition 3.6. Soient E et F deux espaces normés et un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$. Alors A est fermé si et seulement si son graphe $\Gamma(A)$ est un sous-espace fermé de $E \times F$.

Proposition 3.7. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) A est fermé.
2) Le graphe $\Gamma(A)$ est un sous-espace fermé de $H_1 \times H_2$.
3) $(\mathcal{D}(A), \|.\|_A)$ est complet, ou $(\mathcal{D}(A), \langle ., . \rangle_A)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 3.2. *(Théoréme du graphe fermé)*
Soient E et F deux espaces de Banach et $A : E \longrightarrow F$. Si le graphe $\Gamma(A)$ est fermé de $E \times F$, alors A est borné.

Démonstration. Voir [6]. □

Proposition 3.8. Soient E et F deux espaces de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur fermé. Alors A est borné si et seleument si $\mathcal{D}(A) = E$.

Démonstration. En appliquant le théorème du graphe fermé. □

Lemme 3.2. Un sous-espace vectoriel Θ de $E \times F$ est le graphe d'un opérateur de E dans F si et seulement si :

$$((0_E, y) \in \Theta,\ y \in F) \Longrightarrow y = 0_F.$$

Démonstration. Voir [3]. □

Proposition 3.9. Tout opérateur linéaire borné $A : E \longrightarrow F$ est fermé.

Démonstration. Supposons que $(f_n) \in \mathcal{D}(A)$ telle que $f_n \longrightarrow f$ dans E avec $Af_n \longrightarrow g$ dans F. Comme A est borné, donc $\mathcal{D}(A) = E$. Alors d'aprés la continuité de A il est clair que $f \in D(A)$ et $Af = g$. □

Proposition 3.10. Soient $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur fermé et $B \in \mathcal{L}(E)$, alors $A + B$ est fermé.

Démonstration. Supposons que $(f_n) \in \mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A)$ telle que $f_n \longrightarrow f$ et $(A + B)f_n \longrightarrow g$ dans E. Comme B est borné, donc $Af_n \longrightarrow g - Bf$ dans E , comme A est fermé, donc $f \in D(A)$ et $Af = g - Bf$, alors $(A + B)f = g$, d'ou $A + B$ est fermé. □

Définition 3.15. *(L'espace de Sobolev $H^k(\mathbb{R})$)*
Une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est dérivable au sens de distribution (ou bien admet une dérivée faible $f' \in L^2(\mathbb{R})$) si :

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle\,,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

L'espace de Sobolev $H^k(\mathbb{R})$ composé de toutes les fonctions de carré intégrable et leurs dérivées au sens de distribution jusqu'à l'ordre k sont de carré intégrable, i.e :

$$H^k(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) :\ f', f'', ..., f^{(k)} \in L^2(\mathbb{R} \right\},$$

muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle_{H^k} = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \overline{f} g + \overline{f'} g' + ... + \overline{f^{(k)}} g^{(k)} \right\} dx.$$

et de la norme suivante :

$$\|f\|_{H^k} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left\{ |f|^2 + |f'|^2 + ... + \left| f^{(k)} \right|^2 \right\} dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 3.3. *L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $H^k(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Voir [1]. □

Exemple 3.7. L'opérateur différentiel $D : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ défini par :

$$Df = f'.$$

est fermé.
En effet, on suppose que $f_n \in H^1(\mathbb{R})$ telle que $f_n \longrightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $Df_n \longrightarrow g$ dans $H^1(\mathbb{R})$. Alors pour toute fonction de test φ (i.e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$), on a

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle f_n', \varphi \rangle \\ &= -\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi' \rangle \quad (car\, f_n \in H^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f_n \in L^2(\mathbb{R}) \text{ exsiste}) \\ &= -\langle f, \varphi' \rangle\,. \end{aligned}$$

D'ou $f' \in L^2(\mathbb{R})$ et comme $f \in L^2(\mathbb{R}$, alors $f \in H^1(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(D)$.
Et de plus

$$\begin{aligned} \langle g, \varphi \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle Df_n, \varphi \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle f_n', \varphi \rangle \\ &= -\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi' \rangle \\ &= -\langle f, \varphi' \rangle \\ &= \langle f', \varphi \rangle \\ &= \langle Df, \varphi' \rangle\,. \end{aligned}$$

D'ou $Df = g$.

on a alors : $f \in \mathcal{D}(D)$ et $Df = g$. Ceci montre que l'opérateur D est fermé.

3.5 Opérateurs fermables

3.5.1 Définitions et propriétés

Définition 3.16. *(Opérateurs fermables)*
Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$ est dit fermable s'il admet une extension fermée, i.e il exsiste un opérateur fermé $T : \mathcal{D}(T) \subset E \longrightarrow F$ tel que $A \subset T$.

Proposition 3.11. Soient E et F deux espaces normés et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) A est fermable.
2) Pour toute suite (f_n) de $\mathcal{D}(A)$ telle que $f_n \longrightarrow 0$ dans E et $Af_n \longrightarrow g$ dans F, on a alors : $g = 0$.
3) $\overline{\Gamma(A)}$ est un graphe d'un opérateur linéaire (nécessairement fermé).

Définition 3.17. *(Fermeture d'un opérateur)*
Soient E et F deux espaces normés. Si l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$ est fermable, alors sa fermeture est un opérateur noté par $\overline{A}$. L'opérateur $\overline{A}$ est la plus petite extension fermée de A.
L'opérateur $\overline{A}$ est défini par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\overline{A}) = \{f \in E : \exists (f_n) \in \mathcal{D}(A), f_n \longrightarrow f,\ Af_n \text{ c.v}\}, \\ \overline{A}f = \lim_{n\to\infty} Af_n,\ \forall f \in \mathcal{D}(\overline{A}). \end{cases}$$

Remarque 3.4. Si $\overline{A} = A$, alors A est fermé.

Proposition 3.12. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur fermable. Alors $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$.

Proposition 3.13. Si A est fermable, B fermé et $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset B$.

Remarque 3.5. Toute extension fermée de A est aussi une extension de $\overline{A}$.

3.6 Exemples des opérateurs fermés et des opérateurs fermables

Exemple 3.8. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par :

$$Af = -\Delta f, \ \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

où :

$$\mathcal{D}(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Clairement, A est fermable et sa fermeture donnée par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\overline{A}) = H^2(\mathbb{R}^n), \\ \overline{A}f = \lim\limits_{n\to\infty} Af_n = -\Delta f, \ \forall x \in \mathcal{D}(\overline{A}) = H^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Exemple 3.9. Soient $A_k f(x) = f''(x)$ avec $k = 1, 2, 3, 4$ des opérateurs différentiels dans $L^2([0,1])$ avec leurs domaines :

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(A_1) = \left\{f \in C^2([0,1]) : \ f(0) = f(1) = 0\right\}, \\ &\mathcal{D}(A_2) = C^2([0,1]), \\ &\mathcal{D}(A_3) = \left\{f \in H^2([0,1]) : \ f(0) = f(1) = 0\right\}, \\ &\mathcal{D}(A_4) = H^2([0,1]), \end{aligned}$$

- Les deux opérateurs A_1 et A_2 ne sont pas fermés car on peut choisir une suite des fonctions $f_n \in C^2([0;1])$ telle que $f_n \longrightarrow f$ et $f_n'' \longrightarrow g$ dans $L^2([0,1])$, où g n'est pas continue. D'où f n'est pas de classe C^2, alors f n'appartient pas au domaine de A_1 ou A_2 .

- Les deux opérateurs A_3 et A_4 sont fermés.

- Les deux opérateurs A_1 et A_2 sont fermables, avec $\overline{A_1} = A_3$, et $\overline{A_2} = A_4$.

Exemple 3.10. Soient $A_k f(x) = if'(x)$ avec $k = 1, 2$ deux opérateurs différentiels dans $L^2([0,1])$ avec leurs domaines :

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(T_1) = \left\{f \in H^1([0,1]) : \ f(0) = f(1)\right\}, \\ &\mathcal{D}(T_2) = \left\{f \in H^1([0,1]) : \ f(0) = f(1) = 0\right\}, \end{aligned}$$

- Les deux opérateurs T_1 et T_2 sont fermés.

3.7 L'adjoint d'un opérateur non borné

3.7.1 Définitions et propriétés

Nous étondons la notion de l'adjoint pour les opérateurs linéaires non bornés dont le domaine est dense.

Nous avons vu dans le chapitre (1), pour un opérateur borné A, la fonctionnelle $f \longmapsto \langle Af, g\rangle$ est bornée toujours, donc d'après le théorème de représentation de Riesz il existe un unique A^* s'appelle l'adjoint de A et vérifie la relation suivante :

$$\langle Af, g\rangle_{H_2} = \langle f, A^*g\rangle_{H_1}, \quad \forall f \in H_1,\ \forall g \in H_2.$$

Dans le cas des opérateurs non bornés, la fonctionnelle $f \longmapsto \langle Af, g\rangle$ n'est pas bornée en général, du moins pas pour tout $g \in H_2$. Même si la fonctionnelle $f \longmapsto \langle Af, g\rangle$ est bornée pour un certain g, alors dans le cas où $\mathcal{D}(A)$ n'est pas dense cette fonctionnelle admet plusieurs prolongements continus et donc plusieurs éléments $h^* \in H_1$ vérifiant :

$$\langle Af, g\rangle_{H_2} = \langle f, h^*\rangle_{H_1},\ \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

Pour ce raison, nous adoptons la définition suivante.

Définition 3.18. *(Adjoint d'un opérateur non borné)*
Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur linéaire densément défini. On définit

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{g \in H_2 : \exists h \in H_1 \text{ tq } \langle Af, g\rangle_{H_2} = \langle f, h\rangle_{H_1},\ \forall f \in \mathcal{D}(A)\right\}.$$

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H_1, l'élément h, s'il existe, est unique et on a $A^*g = h$. L'opérateur A^* avec domaine $\mathcal{D}(A^*)$ est appelé l'adjoint de A.

Par définition on a :

$$\langle Af, g\rangle_{H_2} = \langle f, A^*g\rangle_{H_1},\ \forall f \in \mathcal{D}(A),\ \forall g \in \mathcal{D}(A^*).$$

Remarque 3.6. Il est possible que $\mathcal{D}(A^*)$ n'est pas dense dans H_2.

Remarque 3.7. En général, il est très difficile de déterminer explicitement les éléments de $\mathcal{D}(A^*)$.

Proposition 3.14. On peut aussi définit $\mathcal{D}(A^*)$ comme suit :

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{g \in H_2 : \exists c \geq 0 \ tq \ \left|\langle Af, g\rangle_{H_2}\right| \leq c \,\|f\|\,,\ \forall f \in \mathcal{D}(A)\right\}.$$

Ou oncore $\mathcal{D}(A^*)$ est l'ensemble de tous les éléments $f \in H_1$ tel que la fonctiennelle $f \longmapsto \langle Af, g\rangle_2$ admet une extension d'une fonctionnelle continue (i.e admet un prolongement continu).

Exemple 3.11. Soit D l'opérateur différentiel défini de $C_0(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ par :

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

(où $C_0(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ s'annulent à l'infini). Alors D est un opérateur non borné et son adjoint D^* est

$$D^* f(x) = -Df(x).$$

En effet

$$\begin{aligned}
\langle Df, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx}\overline{g(x)}dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\overline{g(x)}}{dx} \qquad (I.P.P) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\left[-\frac{dg(x)}{dx}\right]}dx \\
&= \langle f, -Dg\rangle.
\end{aligned}$$

3.7.2 Opérateur auto-adjoint, opérateur symétrique

Définition 3.19. *(Opérateur auto-adjoint)*
Soient H un espace de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur densément défini. On dit que A est auto-adjoint si $A = A^*$ i.e :
$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ et $Af(x) = A^*f(x),\ \forall f \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$.

Remarque 3.8. Si A est un opérateur borné (alors est densément défini) dans H, alors son domaine en plus du domaine de son adjoint est tout l'espace H, i.e $\mathcal{D}(A) = H = \mathcal{D}(A^*)$.

Dans le cas des opérateurs non bornés la situation est beaucoup plus compliquée. Il est possible que un opérateur densément défini A admet un adjoint A^* tel que $Af(x) = A^*f(x)$, $\forall f \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(A^*)$, mais $\mathcal{D}(A) \neq \mathcal{D}(A^*)$, et ainsi A n'est pas auto-adjoint. La définition suivante décrit ce cas.

Définition 3.20. *(Opérateur symétrique)*
Soit H un espace de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur densément défini. On dit que A est symétrique si :

$$\langle Af, g\rangle_H = \langle f, Ag\rangle_H, \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(A).$$

Proposition 3.15. Soit H un espace de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur densément défini. A est symétrique si et seulement si $A \subset A^*$.

Démonstration. Voir [2]. □

Exemple 3.12. Soit D l'opérateur différentiel défini de $C_0(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ par :

$$Df(x) = i\frac{df(x)}{dx} = if'(x)$$

(où $C_0(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ s'annulent à l'infini). Alors l'opérateur D est un opérateur auto-adjoint
En effet

$$\begin{aligned}\langle Df, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} i\frac{df(x)}{dx}\overline{g(x)}dx \\ &= -i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\overline{g(x)}}{dx} \qquad (I.P.P) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\left[i\frac{dg(x)}{dx}\right]}dx \\ &= \langle f, Dg\rangle.\end{aligned}$$

Théorème 3.4. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur densément défini. Alors l'opérateur A^* est fermé.*

Démonstration. Soient $(g_n) \in \mathcal{D}(A^*)$ tel que $g_n \longrightarrow g$ dans H_2 et $A^*g_n \longrightarrow h$ dans H_1. Alors pour tout $h \in \mathcal{D}(A)$ on a :

$$\begin{aligned}\langle Af, g\rangle_2 &= \lim_{n\to\infty} \langle Af, g_n\rangle_2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle f, A^*g_n\rangle_2 \\ &= \langle f, h\rangle_1 .\end{aligned}$$

D'où d'après la définition (3.18) $g \in \mathcal{D}(A^*)$ et $h = A^*g$. Ceci montre que A^* est fermé. □

Théorème 3.5. *Soient $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ et $B : \mathcal{D}(B) \subset H_2 \longrightarrow H_3$ deux opérateurs linéaires et AB est densément défini.*
Si B est densément défini, alors

$$(AB)^* \supset B^* A^*.$$

Démonstration. Voir [3]. □

Théorème 3.6. *Soient $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ et $B : \mathcal{D}(B) \subset H_2 \longrightarrow H_3$ deux opérateurs linéaires et AB est densément défini.*
Si B est borné, alors

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

Démonstration. Voir [3]. □

Théorème 3.7. *Soient $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ et $B : \mathcal{D}(A) \subset H_2 \longrightarrow H_3$ deux opérateurs non bornés et AB, si A est inversible et B est fermé et $\mathcal{D}(BA^{-1}) \subset \mathcal{D}(A)$.*
ALors
$A + B$ est fermé sur $\mathcal{D}(B)$.

Démonstration. Voir [9]. □

Théorème 3.8. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur densément défini, alors*

$$\mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{K}er(A^*).$$

Démonstration. Par la définition (3.18), il est clair que $g \in \mathcal{K}er(A^*)$ si est seulement si

$$\langle f, A^* g \rangle_{H_1} = 0 = \langle Af, g \rangle_{H_2}, \ \forall f \in \mathcal{D}(A).$$

Ceci équivaut à $g \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$, alors $\mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{K}er(A^*)$. □

Théorème 3.9. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur densément défini, alors*

1) *A est fermable si et seulement si A^* est densément défini. Dans ce cas $\overline{A} = A^{**} = (A^*)^*$.*
2) *Si A est fermable, alors $(\overline{A})^* = A^*$.*

Démonstration. Voir [7]. □

Proposition 3.16. Si $A \subset B$, alors $B^* \subset A^*$

Remarque 3.9. Tout opérateur symétrique est fermable.
En effet Si A est symétrique alors $A \subset A^*$, et de plus A^* est fermé par le théoréme (3.4), alors A admet une extension fermé, d'ou A est fermable.

Remarque 3.10. Tout opérateur auto-adjoint est fermé.
En effet Si A est auto-adjoint alors $A = A^*$, et de plus A^* est fermé par le théoréme (3.4), alors A égal à un opérateur fermé, d'ou A est fermé.

3.7.3 Exemples des opérateurs auto-adjoints et des opérateurs symétriques

Exemple 3.13. Soient $A_k f(x) = f''(x)$ avec $k = 1, 2, 3, 4, 5$ des opérateurs différentiels dans $L^2([0,1])$ avec leurs domaines :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(A_1) = \left\{ f \in C^2([0,1]) : \ f(0) = f(1) = 0 \right\}, \\
&\mathcal{D}(A_2) = C^2([0,1]), \\
&\mathcal{D}(A_3) = \left\{ f \in H^2([0,1]) : \ f(0) = f(1) = 0 \right\}, \\
&\mathcal{D}(A_4) = H^2([0,1]), \\
&\mathcal{D}(A_5) = \left\{ f \in H^2([0,1]) : \ f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0 \right\},
\end{aligned}$$

- Pour l'opérateur A_1, si $f \in \mathcal{D}(A_1)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle A_1 f, g \rangle &= \int_0^1 f''(x)\overline{g(x)}dx \\
&= f'(1)\overline{g(1)} - f'(0)\overline{g(0)} - \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx \quad (I.P.P) \\
&= f'(1)\overline{g(1)} - f'(0)\overline{g(0)} - f(1)\overline{g'(1)} + f(0)\overline{g'(0)} + \int_0^1 f(x)\overline{g''(x)}dx \quad (I.P.P) \\
&= f'(1)\overline{g(1)} - f'(0)\overline{g(0)} + \langle f, A_1 g \rangle.
\end{aligned}$$

Pour obtenir

$$\langle A_1 f, g \rangle = \langle f, A_1 g \rangle, \ \forall f \in \mathcal{D}(A_1),$$

le terme $f'(1)\overline{g(1)} - f'(0)\overline{g(0)}$ doit être nul, i.e $g(0) = g(1) = 0$, et il suffut que $g \in H^2([0,1])$, donc

$$\mathcal{D}(A_1^*) = \left\{ g \in H^2([0,1]) : \ g(0) = g(1) = 0 \right\} = \mathcal{D}(A_3),$$

alors

$$A_1^* = A_3.$$

comme $\mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_3)$ et $A_1 f = A_3 f, \ \forall f \in \mathcal{D}(A_1)$, donc $A_1 \subset A_3$. Alors A_1 est symétrique mais n'est pas auto-adjoint.

En faisant les mêmes étapes avec les opérateurs A_2, A_3, A_4 et A_5, on obtient

- $A_3^* = A_3$, alors A_3 est auto-adjoint.

- $A_2^* = A_5$, comme A_5 n'est pas une extension de A_2, alors A_2 n'est ni symétrique ni auto-adjoint.

- $A_4^* = A_5$, comme A_5 n'est pas une extension de A_4, alors A_4 n'est ni symétrique ni auto-adjoint.

- $A_5^* = A_4$, comme $A_5 \subset A_4$, alors A_5 est symétrique mais n'est pas auto-adjoint.

Exemple 3.14. Soient $T_k f(x) = if'(x)$ avec $k = 1, 2$ deux opérateurs différentiels définis dans $C^1([0,1])$ avec leurs domaines :

$$\mathcal{D}(T_1) = \left\{ f \in C^1([0,1]) : \ f(0) = f(1) = 0 \right\},$$
$$\mathcal{D}(T_2) = \left\{ f \in C^1([0,1]) : \ f(0) = 0 \right\},$$

En faisant les mêmes étapes de l'exemple (3.15) avec les opérateurs T_1 et T_2, on obtient
Pour l'opérateur A_1, si $f \in \mathcal{D}(A_1)$ on obtient :

- On a :
$$\mathcal{D}(T_1^*) = \left\{ g \in C^1([0,1]) \right\},$$
comme $\mathcal{D}(T_1) \subset \mathcal{D}(T_1^*)$ et $T_1 f = T_1^* f, \ \forall f \in \mathcal{D}(T_1)$, donc $T_1 \subset T_1^*$. Alors T_1 est symétrique mais n'est pas auto-adjoint.

- On a :
$$\mathcal{D}(T_1^*) = \left\{ g \in C^1([0,1]) : \ g(1) \right\},$$
comme $\mathcal{D}(T_2^*) \not\subset \mathcal{D}(T_2)$ et $\mathcal{D}(T_2^*) \not\supset \mathcal{D}(T_2)$ et $\mathcal{D}(T_2^*) \neq \mathcal{D}(T_2)$, alors T_2 n'est ni symétrique ni auto-adjoint.

3.7.4 Opérateur essentiellement auto-adjoint

Définition 3.21. *(Opérateur essentiellement auto-adjoint)*
Soit H un espace de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur symétrique. On dit que A est essentiellement auto-adjoint si sa fermeture $\overline{A}$ est auto-adjointe.

Proposition 3.17. Si A un opérateur essentiellement auto-adjoint, alors il admet une unique extension auto-adjointe.

Exemple 3.15. Soient $A_k f(x) = f''(x)$ avec $k = 1, 2, 3, 4$ des opérateurs différentiels définis dans $L^2([0,1])$ avec leurs domaines :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(A_1) = \left\{ f \in C^2([0,1]) : \ f(0) = f(1) = 0 \right\}, \\
&\mathcal{D}(A_2) = C^2([0,1]), \\
&\mathcal{D}(A_3) = \left\{ f \in H^2([0,1]) : \ f(0) = f(1) = 0 \right\}, \\
&\mathcal{D}(A_4) = H^2([0,1]),
\end{aligned}$$

- Comme $\overline{A_1} = A_3$ et l'opérateur A_3 est auto-adjoint, alors A_1 est essentiellement auto-adjoint.

- Comme $\overline{A_2} = A_4$ et l'opérateur A_4 n'est pas auto-adjoint, alors A_2 n'est pas essentiellement auto-adjoint.

3.8 Opérateur normal

Théorème 3.10. *Soient H_1, H_2 et H_3 trois espaces de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ et $B : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_3$ deux opérateurs densément définis. Alors $A^*A = B^*B$ si et seleument si $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ et $\|Af\| = \|Bf\|$ pour tout $f \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.*

Définition 3.22. *(Opérateur normal)*
Soit H un espace de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur densément défini.
On dit que A est normal si
$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ et $\|Af\| = \|A^*f\|$ pour tout $f \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$.

Corollaire 3.3. Tout opérateur auto-adjoint est normal.

Proposition 3.18. 1) Tout opérateur normal est fermé.

2) Soit A un opérateur densément défini. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
   - A est normal.
   - A^* est normal.
   - $A^*A = AA^*$.
3) Si A est normal, alors $A + z$ est aussi normal pour tout $z \in \mathbb{K}$.

3.9 Inversibilité des opérateurs non bornés

Définition 3.23. *(Inverse d'un opérateur non borné)*
Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur linéaire bijectif. On définit l'opérateur A^{-1} défini de H_2 dans H_1 tel que :
$AA^{-1}g = g, \ \forall g \in H_1$ et $A^{-1}Af = f, \ \forall f \in \mathcal{D}(A)$
L'opérateur A^{-1} est dit l'niverse de A.

Remarque 3.11. L'image de A^{-1} est égal à le domaine de A, i.e $\mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$.

Remarque 3.12. L'inverse A^{-1} s'il existe, il est unique.

Théorème 3.11. *L'inverse d'un opérateur fermé est fermé.*

Démonstration. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur fermé, alors

$$\Gamma(A) = \{(f, Af) \ : \ f \in \mathcal{D}(A)\}.$$

est fermé, d'où

$$\Gamma(A^{-1}) = \{(Af, f) \ : \ f \in \mathcal{D}(f)\}.$$

est fermé. Ceci montre que A^{-1} est fermé. □

Remarque 3.13. Si A est fermé, alors A^{-1} est borné.
En effet si A est fermé donc d'après le théorème (3.11) A^{-1} est fermé, alors son graphe est fermé, d'où le théorème du graphe fermé montre que A^{-1} est borné.

Proposition 3.19. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur densément défini tel que son inverse est borné, alors

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Exemple 3.16. Soit l'opérateur différentiel $D : \mathcal{D}(D) \subset L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ où

$$\mathcal{D}(D) = \left\{ f \in L^2([0,1]) : \ f \textit{ est absolument continue}, \ f' \in L^2([0,1]), \ f(0) = 0 \right\}$$

L'opérateur D est un opérateur fermé, non borné et inversible et son inverse est donné par

$$D^{-1}g(y) = \int_0^y g(x)dx, \ g \in L^2([0,1]).$$

Chapitre 4

Théorie spectrale des opérateurs

4.1 Propriétés spectrales des opérateurs bornés

Soient E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$, A est inversible si $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. D'après le théorème de l'application inverse (1.5) A est inversible si et seulement s'il est bijectif, i.e A est injectif ($\mathcal{K}er(A) = \{0\}$) et surjectif ($\mathcal{R}(A) = E$).

4.1.1 Définitions et propriétés

Définition 4.1. *(Valeurs propres et vecteurs propres)*
Soit A un opérateur défini sur un espace vectoriel complexe E. Un nombre complexe λ est dit valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $u \in E$ tel que :

$$Au = \lambda u. \tag{4.1}$$

Chaque vecteur u vérifie (4.1) est dit vecteur propre de A correspondant au valeur propre λ.

Définition 4.2. Soient E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$.

1) **L'ensemble résolvante** de A est L'ensemble

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ (\lambda I - A)^{-1} \text{ est borné}\right\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ est bijectif}\}. \end{aligned}$$

2) Soit $\lambda \in \rho(A)$, on définit **la résolvante** $R_\lambda(A)$ de A par

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

3) **Le spectre** de A est l'ensemble

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \mathbb{C} \setminus \rho(A) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ n'est pas inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ n'est pas bijectif}\},\end{aligned}$$

i.e $\sigma(A)$ est le complémentaire du $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$.

4) **Le spectre ponctuel** de A (l'ensemble des valeurs propres) est l'ensemble

$$\begin{aligned}\sigma_p(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ n'est pas injectif}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \mathcal{K}er(\lambda I - A) \neq \{0\}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \exists v \in E \setminus 0 \text{ tel que } Av = \lambda v\}.\end{aligned}$$

5) **Le spectre résiduel** de A est l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ est injectif et } \mathcal{R}(\lambda I - A) \text{ n'est pas dense dans } E\}.$$

6) **Le spectre continu** de A est l'ensemble

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ est injectif et } \mathcal{R}(\lambda I - A) \text{ est dense dans } E\}.$$

Remarque 4.1. Les définitions ci-dessus restent valables même si E n'est pas un Banach.

Remarque 4.2. On a toujours $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.

Remarque 4.3. Si E est de dimension finie, alors $\lambda I - A$ est inversible si et seulement si $\mathcal{K}er(\lambda I - A) = \{0\}$. En particulier, en on déduit $\sigma_p(A) = \sigma(A)$. La situation est plus délicate en dimension infinie.

Proposition 4.1. Le spectre $\sigma(A)$ de A est inclu dans le disque fermé dont le centre est zéro et le rayon est $\|A\|$, i.e

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq \|A\|\}.$$

Proposition 4.2. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. Alors

1) $\rho(A)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.
2) $\sigma(A)$ est un compact de $\mathbb{C}$.
3) $\overline{\sigma_p(A)} \subset \sigma(A)$.

Démonstration. Voir [10]. □

Théorème 4.1. *(Identité de la résolvante)*
Soient $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Alors on a

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\mu(A) R_\lambda(A).$$

De plus, l'application $\lambda \mapsto R_\lambda(A)$ est dérivable sur $\rho(A)$ et sa dérivée est donnée par

$$\frac{dR_\lambda(A)}{d\lambda} = -(R_\lambda(A))^2.$$

Démonstration. Voir [10]. □

Définition 4.3. *(Rayon spectral)*
Le rayon spectral de A est noté par $r(A)$ est le plus petit disque centré par zéro et contient $\sigma(A)$, i.e

$$r(A) := \sup \{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(A)\} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \,.$$

Si $\sigma(A) = \emptyset$, par convention on pose $r(A) := 0$.

Proposition 4.3. On peut écrire le spectre d'un opérateur borné sous forme d'une union des trois sous ensembles disjoints dans le plan complexe, i.e

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A).$$

Proposition 4.4.

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \,.$$

4.1.2 Propriétés importantes des valeurs et vecteurs propres pour les opérateurs auto-adjoints, unitaires et positifs

Théorème 4.2. *Toute valeur propre d'un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert est réelle .*

Démonstration. Soit λ une valeur propre d'un opérateur auto-adjoint A, et soit v un vecteur propre de A correspondant au λ, $v \neq 0$. Alors

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle \,.$$

Comme $\langle v, v \rangle > 0$, alors $\lambda = \overline{\lambda}$. □

Théorème 4.3. *Toute valeur propre d'un opérateur positif est positif. Toute valeur propre d'un opérateur strictement positif est strictement positif.*

Démonstration. Soit A un opérateur positif, et soit $Av = \lambda v$ pour tout $v \neq 0$. Comme A est auto-adjoint, on a

$$0 \leq \langle Av, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda \|v\|^2.$$

D'où $\lambda \geq 0$. la démonstration de la deuxiéme partie du théorème est obtenu par remplacer $\leq$ par $<$. □

Théorème 4.4. *Toute valeur propre d'un opérateur unitaire dans un espace de Hilbert est un nombre complexe de module* 1*.*

Soit λ une valeur propre d'un opérateur auto-adjoint A, et soit v un vecteur propre de A correspondant au λ, $v \neq 0$. Alors

Démonstration.

$$\langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2.$$

D'autre part,

$$\langle Av, Av \rangle = \langle v, A^* A v \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2.$$

D'où $|\lambda| = 1$.

□

Théorème 4.5. *Les vecteures propres correspondant aux deux valeurs propres différentes d'un opérateur auto-adjoint ou unitaire sont orthogonaux.*

Démonstration. 2 □

Théorème 4.6. *Toute valeur propre λ d'un opérateur borné A vérifie*

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Démonstration. 2 □

4.1.3 Propriétés spectrales de l'adjoint

Proposition 4.5. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors

1) $\rho(A^*) =: \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \overline{\lambda} \in \rho(A)\right\}$.
2) $\sigma(A^*) =: \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \overline{\lambda} \in \sigma(A)\right\}$.
3) Pour tout $\lambda \in \rho(A^*)$, on a $R_\lambda(A^*) = (R_{\overline{\lambda}}(A))^*$.
4) $\sigma_r(A) = \sigma_p(A^*)$.
5) $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

Démonstration. Voir [10] et [11]. □

4.1.4 Propriétés spectrales des opératurs auto-adjoints

Proposition 4.6. Si A un opérateur auto-adjoint, alors

$$r(A) = \|A\|.$$

4.1.5 Etude spectrale de quelques exemples des opérateurs bornés

Exemple 4.1. *(Résolvante, spectre ponctuel)*
Soit M_φ l'opérateur de multiplication défini de $C[0,1]$ dans $C[0,1]$ par

$$M_\varphi(f) = \varphi f.$$

pour tout $\varphi \in C[0,1]$.

1) La résolvante de M_φ est

$$R_\lambda(M_\varphi)f = (\lambda I - M_\varphi)^{-1} = \frac{f(x)}{\varphi(x) - \lambda}.$$

En effet, si $\lambda \in \rho(A)$

$$(\lambda I - M_\varphi)f(x) = \lambda I f(x) - M_\varphi f(x) = \lambda f(x) - \varphi(x)f(x) = f(x)\left[\varphi(x) - \lambda\right].$$

On pose $g(x) = f(x)\left[\varphi(x) - \lambda\right]$, alors

$$(\lambda I - M_\varphi)^{-1}(g(x)) = \frac{g(x)}{\varphi(x) - \lambda}.$$

D'où

$$(\lambda I - M_\varphi)^{-1}(f(x)) = \frac{f(x)}{\varphi(x) - \lambda}.$$

2) Le spectre ponctuel (l'ensembles des valeurs propres) de M_φ est exactement l'image de φ, i.e $\sigma_p(M_\varphi) = \mathcal{R}(\varphi) = \varphi([0,1])$.
En effet

$$(\lambda I - M_\varphi)f(x) = \lambda I f(x) - M_\varphi f(x) = \lambda f(x) - \varphi(x)f(x) = f(x)\left[\varphi(x) - \lambda\right] = 0.$$

Donc

$$\varphi(x) - \lambda = 0.$$

Alors

$$\lambda = \varphi(x).$$

D'où

$$\sigma_p(M_\varphi) = \mathcal{R}(\varphi) = \varphi([0,1]).$$

Exemple 4.2. *($\sigma,\ \rho,\ \sigma_p,\ \sigma_r,\ \sigma_c$)*
Soient les deux opérateurs T l'opérateur de décalage à droite défini de ℓ_2 dans ℓ_2 par

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, ...).$$

Et S l'opérateur de décalage à gauche défini de ℓ_2 dans ℓ_2 par

$$S(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...).$$

On a

$$\|T\| = \|S\| = 1,$$

et

$$T^* = S.$$

Donc

- $$\sigma(T) = \sigma(T^*) = \sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| \leq 1\}.$$
- $$\rho(T) = \rho(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| > 1\}.$$
- Le spectre ponctuel de T est

  $$\sigma_p(T) = \emptyset.$$

  En effet, si

  $$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3, ...) &= \lambda(x_1, x_2, x_3, ...), \\ \Longleftrightarrow (0, x_1, x_2, ...) &= \lambda(x_1, x_2, x_3, ...), \\ \Longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3, ...) &= (0, 0, 0, ...), \end{aligned}$$

  alors

  $$\sigma_p(T) = \emptyset.$$

- Le spectre ponctuel de S est

  $$\sigma_p(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| < 1\}.$$

  En effet, si

  $$S(x_1, x_2, x_3, ...) = \lambda(x_1, x_2, x_3, ...),$$

  $$\Longleftrightarrow (x_2, x_3, ...) = \lambda(x_1, x_2, x_3, ...),$$

$$\Longleftrightarrow x_{i+1} = \lambda x_i,\ \forall i \in \mathbb{N}$$

donc

$$\begin{aligned}
&x_1 = x_1 = \lambda^0 x_1,\\
&x_2 = \lambda x_1\\
&x_3 = \lambda x_2 = \lambda(\lambda x_1) = \lambda^2 x_1,\\
&\ \ .\\
&\ \ .\\
&x_i = \lambda^{i-1} x_1,\\
&\ \ .\\
&\ \ .
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$(x_1, x_2, x_3, ...) = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...).$$

et comme $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...) \in \ell_2$ si et seulement si $|\lambda| < 1$
alors

$$\sigma_p(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| < 1\}.$$

- Le spectre résiduel de T est

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| < 1\}.$$

En effet, comme

$$\sigma_r(T) = \sigma_p(T^*) = \sigma_p(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| < 1\}.$$

Donc, on a la résultat.

- Le spectre résiduel de S est

$$\sigma_r(S) = \emptyset.$$

En effet, comme

$$\sigma_r(S) = \sigma_p(S^*) = \sigma_p(T) = \emptyset.$$

Donc, on a la résultat.

- Le spectre continu de T est

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| = 1\}.$$

En effet, comme

$$\overline{B(0,1)} = \sigma(T) = (\sigma_p(T) = \emptyset) \cup (\sigma_r(T) = B(0,1)) \cup \sigma_c(T).$$

Donc

$$\sigma_c(T) = \overline{B(0,1)} \setminus B(0,1) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| = 1\}.$$

- Le spectre continu de S est

$$\sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| = 1\}.$$

En effet, comme

$$\overline{B(0,1)} = \sigma(S) = (\sigma_p(S) = B(0,1)) \cup (\sigma_r(S) = \emptyset) \cup \sigma_c(S).$$

Donc

$$\sigma_c(S) = \overline{B(0,1)} \setminus B(0,1) = . \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| = 1\}$$

4.2 Propriétés spectrales des opérateurs fermés

4.2.1 Définitions et propriétés

Définition 4.4. Soient E un espace de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur fermé, alors

1) **L'ensemble résolvante** de A est L'ensemble

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ est bijectif sur } \mathcal{D}(A) \text{ dans } E \text{ et } (\lambda I - A)^{-1} \text{ est borné}\right\}.$$

2) Soit $\lambda \in \rho(A)$, on définit **la résolvante** $R_\lambda(A)$ de A par

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

3) **Le spectre** de A est l'ensemble

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \mathbb{C} \setminus \rho(A) \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ n'est pas bijectif sur } \mathcal{D}(A) \text{ ou } (\lambda I - A)^{-1} \text{ non borné}\right\}.\end{aligned}$$

i.e $\sigma(A)$ est le complémentaire du $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$.

4) **Le spectre ponctuel** de A (l'ensemble des valeurs propres) est l'ensemble

$$\begin{aligned}\sigma_p(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ n'est pas injectif sur } \mathcal{D}(A)\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \mathcal{K}er(\lambda I - A) \neq \{0\}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \exists v \in \mathcal{D}(A) \setminus 0 \text{ tel que } Av = \lambda v\}.\end{aligned}$$

5) **Le spectre résiduel** de A est l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ est injectif sur } \mathcal{D}(A) \text{ et } \mathcal{R}(\lambda I - A) \text{ n'est pas dense}\}.$$

6) **Le spectre continu** de A est l'ensemble

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ est injectif sur } \mathcal{D}(A) \text{ et } \mathcal{R}(\lambda I - A) \text{ est dense}\}.$$

Proposition 4.7. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur fermé. Alors

1) $\rho(A)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.
2) $\sigma(A)$ est un compact de $\mathbb{C}$.
3) Pour tout $\lambda \in \rho(A^*)$, on a $R_\lambda(A^*) = (R_{\overline{\lambda}}(A))^*$.
   Si $\mathcal{D}(A)$ est dense. Alors
4) $\sigma_r(A) = \sigma_p(A^*)$.
5) $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

Démonstration. Voir [3] et [11]. □

Définition 4.5. *(Rayon spectral)*
Le rayon spectral de A est noté par $r(A)$ est le plus petit disque centré par zéro et contient $\sigma(A)$, i.e

$$r(A) := \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(A)\} = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|.$$

Si $\sigma(A) = \emptyset$, par convention on pose $r(A) := 0$.

Proposition 4.8. Comme le cas d'un opérateur borné, on peut écrire le spectre d'un opérateur non borné sous forme d'une union des trois sous ensembles disjoints dans le plan complexe, i.e

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A).$$

4.2.2 Etude spectrale de quelques exemples des opérateurs fermés

Exemple 4.3. Soit $T_1 f(x) = f'(x)$ un opérateur différentiel défini dans $C([0,1])$ sur $C([0,1])$ avec son domaine :

$$\mathcal{D}(T_1) = C^1([0,1]),$$

Cet opérateur est un opérateur fermé, et de plus on a :

- Le spectre ponctuel de T_1 est

$$\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}.$$

En effet

$$\begin{aligned} T_1 v &= \lambda v, \\ v' &= \lambda v, \end{aligned}$$

donc $v = e^{\lambda t}$,
on remarque que $e^{\lambda t} = e^{\lambda t}\ \forall \lambda \in$.
D'où

$$\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}.$$

- Le spectre de T_1 est

$$\sigma(T_1) = \mathbb{C}.$$

En effet, comme $\mathbb{C} = \sigma_p(T_1) \subset \sigma(T_1)$.
Alors

$$\sigma(T_1) = \mathbb{C}.$$

- L'ensemble résolvante de T_1 est

$$\rho(T_1) = \emptyset.$$

En effet, comme $\rho(T_1) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T_1) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C} = \emptyset$.
Alors

$$\rho(T_1) = \emptyset.$$

- Le spectre résiduel et le spectre continu de T_1 sont

$$\sigma_r(T_1) = \sigma_c(T_1) = \emptyset.$$

En effet, comme

$$\mathbb{C} = \sigma(T_1) = (\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}) \cup \sigma_r(T_1) \cup \sigma_c(T_1).$$

Donc

$$\sigma_r(T_1) = \sigma_c(T_1) = \emptyset.$$

Exemple 4.4. Soit $T_2f(x) = f'(x)$ un opérateurs différentiel défini dans $C([0,1])$ sur $C([0,1])$ avec son domaine :

$$\mathcal{D}(T_2) = \left\{ f \in C^1([0,1]) : \ f(0) = 0 \right\},$$

Cet opérateur est un opérateur fermé, et de plus on a :

- Le spectre de T_2 est

$$\sigma(T_2) = \emptyset.$$

En effet, comme la résolvante de T_2 est donnée par

$$R_\lambda(T_2)f = (\lambda I - T_2)^{-1}f = -\int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)ds,$$

et cette résolvante toujous continue (l'opérateur de Voltera. chapitre 1), donc n'existe pas un nombre complexe λ tel que la résolvante non bornée.
D'où

$$\sigma(T_2) = \emptyset.$$

- L'ensemble résolvante de T_2 est

$$\rho(T_2) = \mathbb{C}.$$

En effet, comme $\rho(T_2) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T_2) = \mathbb{C} \setminus \emptyset = \mathbb{C}$.
Alors

$$\rho(T_2) = \emptyset.$$

- Le spectre ponctuel et le spectre résiduel et le spectre continu de T_2 sont

$$\sigma_p(T_2) = \sigma_r(T_2) = \sigma_c(T_2) = \emptyset.$$

En effet, comme

$$\emptyset = \sigma(T_2) = \sigma_p(T_2) \cup \sigma_r(T_2) \cup \sigma_c(T_2).$$

Donc

$$\sigma_p(T_2) = \sigma_r(T_2) = \sigma_c(T_2) = \emptyset.$$

Exemple 4.5. Pour $k = 1,2,3$, Soient $A_k : \mathcal{D}(A_k) \subset L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ les opérateurs différentiels $A_kf(x) = if'(x)$ avec leurs domaines :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(A_1) = H^1([0,1]),\\
&\mathcal{D}(A_2) = \left\{ f \in H^1([0,1]), : \ f(0) = f(1) \right\},\\
&\mathcal{D}(A_3) = \left\{ f \in H^1([0,1]) : \ f(0) = 0 \right\},
\end{aligned}$$

Ces opérateurs sont des opérateurs fermés, et de plus on a :

- Le spectre de A_1 est
$$\sigma(A_1) = \mathbb{C}.$$

- Le spectre de A_2 est
$$\sigma(A_2) = \{2np : \; n \in \mathbb{N}\}.$$

- Le spectre de A_3 est
$$\sigma(A_3) = \emptyset.$$

Conclusion

Les opérateurs non bornés sont des opérateurs définis seulement sur un sous ensemble de l'ensemble de départ.

Le domaine est un element important pour définir un opérateur non borné.

Le domaine d'un opérateur non borné doit être dense pour définir l'adjoint de cet opérateur, puisque la densité assure l'unicité.

Pour les opérateurs bornés dans un espace de Hilbert H, un opérateur auto-adjoint équivaut à un opérateur symétrique, car $\mathcal{D}(A) = H = \mathcal{D}(A^*)$ toujours. Mais pour les opérateurs non bornés en général $\mathcal{D}(A) \neq \mathcal{D}(A^*)$, ce qui rend la différence entre les opérateurs auto-adjoints et les opérateurs symétriques dans les opérateurs non bornés.

Les opérateurs fermés nous permettent de généraliser la notion du spectre d'un opérateur borné sur les opérateurs non bornés.

Bibliographie

[1] J. K. Hunter et B. Nachtergaele, *Applied Analysis*, Californie, 2000.

[2] L. Debnath et P. Mikusinski, *Hilbert spaces with applications*, Orlando, 1998.

[3] K. Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Spaces*, USA, 2001.

[4] H. Chebli, *Analyse hilbertienne*, Tunis, 2001.

[5] P. Bezandry et T. Diagana, *Almost Periodic Stochastic Processes*, New York, 2011.

[6] M. Nadir, *Cours d'analyse fonctionnelle*, Université de M'sila, 2004.

[7] M. Loss, *About closed operators*, Géorgie.

[8] P. DuChateau, *Linear Operators*, université du Michigan.

[9] M. H. Mortad, *The sum of tow unbounded linear operators*, Université d'oran, 2012.

[10] S. Maingot et D. Manceau, *Théorie spectrale*, Université du Havre, 2011.

[11] S. Schnaubelt, *Lecture Notes Spectral Theory*, Kharlsruhe, 6. Août 2012.

[12] V. Harangi, *Functional Analysis, Spectra of operators*, Université de Toronto, 2012.

[13] J. Feldman, *Spectral Theory Examples*, Université de la Colombie-Britannique, Canada, 15 octobre 2012.