



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Option : Mathématiques Appliquées et Fondamentales

Spécialité : Mathématiques

Par

AHMED MILI Ahmed

Sujet

L'étude spectrale des opérateurs compacts positifs

Soutenu le : 18 / 06 / 2014 devant le jury compose de.

Président	:	GASMI Abdelkader	Pr	Univ M'sila
Rapporteur	:	Mostefa NADIR	Pr	Univ M'sila
Examineur	:	GAGUI Bachir	MA.A	Univ M'sila
Examineur	:	HERAIZ Toufik	MA.B	Univ M'sila

Promotion : 2013/2014

Table des matières

Introduction	1
1 Théorie sur les opérateurs	2
1.1 Opérateurs Linéaires Continus	2
1.1.1 Opérateur linéair	2
1.1.2 Opérateur linéair continu	2
1.2 Opérateurs adjoints	3
1.3 Opérateurs auto-adjoints	5
1.4 Opérateur compact	7
1.4.1 Opérateur linéaire compact	7
1.5 Opérateurs positifs	9
1.5.1 Produit de deux opérateurs positifs	10
1.5.2 Racine carrée d'un opérateur positif	15
2 Théorie spectrale des opérateurs	17
2.1 Théorie spectrale des opérateurs bornés	17
2.2 Théorie spectrale des opérateurs compacts	21
2.3 Théorie spectrale des opérateurs positifs	25
2.4 Théorie spectrale des opérateurs compact positifs	27
2.4.1 Application	28
Conclusion	30
Bibliographie	31

Notations :

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire

I_E : l'opérateur identité de E dans E

$\ker(T) = \{x \in E, Tx = 0\}$.noyau de l'opérateur T

$Ran(T) = \{Tx, x \in E\}$.Image de l'opérateur T

$\mathcal{L}(E, F)$: L'espace des opérateur linéaires continus de E dans F

$K(E, F)$: L'espace des opérateur linéaires compactes de E dans F

A^* : L'adjoint de l'opérateur A

$C(K)$: L'espace des fonctions continues sur l'espace compact K

$B(H)$: L'espace des opérateurs borné sur H

$VP(A)$: Valeur propre de l'opérateur A

$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$: la boule unite de E

Introduction

Dans ce mémoire nous étudierons les opérateurs compacts et opérateurs positifs dans un espace de Hilbert, et comme il est connu le résultat classique en algèbre linéaire toute matrice définie positive admet des valeurs propres positives peut-on, élargir cette notion dans le cas d'un espace de dimension infinie pour les opérateurs compacts, compacts positif

Ce mémoire est composé en deux chapitres:

Dans le premier chapitre on va définir les opérateurs linéaires continus, les opérateurs adjoints, les opérateurs auto-adjoints, les opérateurs compacts et les opérateurs positifs et le rôle de la compacité d'un opérateur

Dans le deuxième chapitre on va définir le spectre des opérateurs bornés et le spectre des opérateurs compacts; opérateurs positifs et opérateurs compacts positifs.

Conclusion

Les opérateurs compacts jouent un rôle très important dans l'analyse fonctionnelle notamment la théorie des opérateurs, ainsi que l'étude spectrale d'un opérateur compact joue presque le même rôle d'où la vision spectrale tout fois simple que l'analyse asymptotique ou le calcul des valeurs propres inclu dans le spectre qui est défini sous forme d'une série dont les termes sont réels, i.e sont négatives et positives, d'autre part un opérateur compact positif leur spectre et aussi sous forme d'une série ou les termes sont strictement positifs.

الملخص :

كما هو معروف أن النتيجة الكلاسيكية في الجبر الخطي لجميع المصفوفات المحددة الموجبة لها قيمة ذاتية موجبة، يمكن أن نمدد هذه الفكرة في حالة وجود فضاءات لا نهائية الأبعاد من أجل المؤثرات المتراسة.

الكلمات المفتاحية: المؤثر المتراس، طيف المؤثر المتراس، طيف المؤثر المتراس الموجب

Abstract:

It is known the classical result in linear algebra any positive definite matrix admits a positive eigenvalues, can we extend this notion in the case of an infinite dimensional space for compact operators.

Key words: Compact operator, spectrum of a compact operator, spectrum of a positive compact operator.

Résumé:

Comme il est connu le résultat classique en algèbre linéaire toute matrice définie positive admet des valeurs propres positives. Peut-on élargir cette notion dans le cas d'un espace de dimension infinie pour les opérateurs compacts.

Mots clés: Opérateur compact, spectre d'un opérateur compact, spectre d'un opérateur compact positif.