UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMTIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du *Diplôme de Master*

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées et Discrètes

Par

DALAL DILMI

SUJET

Comportement auto-similaires dans les équations d'évolution

Dirigé par : Dr. BEN HAMIDOUCHE

MC (A) – Université de M'sila

Composition du jury:

Président:	ZEDAM.LAMNOUAR	Prof.	Univ. de M'sila
Rapporteur:	N.BENHAMIDOUCHE	Dr	Univ. de M'sila
Examinateur:	ARIOUA.YACINE	Dr	Univ. de M'sila.

Promotion: 2012/2013

Remerciements

Tous d'abord Dieu tout puissant, par sa grâce, il nous a donné le courage, la force et tous les moyens pour terminer ce travail.

La réalisation de ce présent projet final n'a pu être achevée sans l'appui, l'aide et le soutien des personnes citées ci-après envers qui nous sommes vivement reconnaissantes et à qui nous tenons à exprimer nos sincères remerciements.

Monsieur Ben Hamidouche , notre promoteur, docteur et maitre de conférences à notre département de Mathématique de M'sila d'avoir été très patient avec nous, en dirigeant ce travail par les précieux conseils et l'appui qu'il nous a prodigué tout au long de ce parcours. Qu'il trouve ici l'expression de nos profondes reconnaissances.

Nos remerciements vont aussi à tous les enseignants et le chef de département de Mathématiques Informatique.

Table des matières

Introduction

Une fonction est appelée une solution auto-similaire d'une équation d'évolution si sa valeur à un moment donné t_0 (par exemple à $t_0 = 1$), est suffisante pour calculer cette fonction pour toutes autres valeurs de temps $t > 0$ par transformation dite auto-similaire. Les solutions auto-similaires ont toujours joué en rôle important dans l'étude des propriétés d'autres solutions pour les équations d'évolution linéaire et non linéaires.

Très souvent, on peut trouver des solutions auto-similaires explicites qui décrivent des propriétés typiques d'autres solutions. Par exemple, le noyau Gauss-Weierstrass

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4t)}$$

est la solution la plus célèbre de l'équation de la chaleur

$$u_t = \Delta u.$$

Cette solution explicite apparaît dans les développements asymptotiques pour $t \to \infty$ d'autres solutions au problème de la valeur initiale pour l'équation de la chaleur.

L'objectif de ce mémoire est de présenter les méthodes mathématiques qui permettent d'analysé et de calculer les différentes solutions auto similaires.

Dans Le chapitre 1, on présente le Problème de Cauchy pour l'équation de la Chaleur, en développant les différentes solutions du problème.

Dans le second chapitre, nous étudions le comportement asymptotique des solutions dite "auto similaire " pour le problème de la chaleur.

En fin, dans le 3ème chapitre le problème de convection diffusion à condition initiale est développée une étude mathématique classique de recherche de solution faible et auto similaire est présentée.

Chapitre 1

Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

Nous allons étudier dans ce chapitre le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur, l'existence et l'unicité seront abordées.

1.1 Représentation des solutions:

Tout d'abord, nous considérons le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) \quad \textit{pour } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \tag{1.1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{1.1.2}$$

Une solution du problème de valeur initiale (1.1.1) - (1.1.2) est représenté par:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)u_0(y)dy \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \tag{1.1.3}$$

avec le noyau de Gauss-Weierstrass:

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) \qquad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \tag{1.1.4}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons toujours notée

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Le théorème suivant regroupe les propriétés typiques de la solution $u = u(x,t)$ définis dans (1.1.3).

Théorème 1.1 *Supposons que* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $u = u(x,t)$ *définer par* (1.1.3)*.Alors*

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

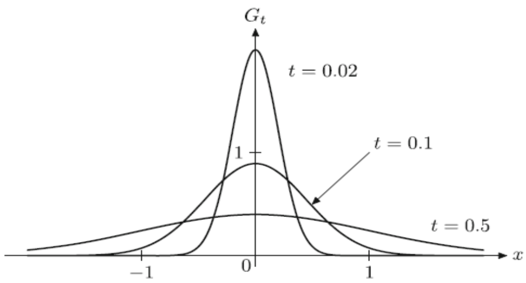
2. *u satisfaisant des équations* (1.1.1) *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $t > 0$.

3. $\|u(.,t) - u_0(.)\|_1 \to 0$ *tq* $t \to 0$.

4. $\|u(.,t)\|_1 \leq \|u_0(.)\|_1$ *pour tout* $t \geq 0$.

C'est l'unique solution de problème (1.1.1) - (1.1.2) *satisfaisant ces propriétés.*

La preuve de ce théorème peut être trouvée dans le livre Evans $[8, CH.2.3]$.



$Figure 1.1.1$: Quelques exemples du graphe de $G(x,t)$ en fonction de x pour $n = 1$ (Figure copié à partir$[9, p.5, la Fig.1.1]$

ou

$$u(x_1, ..., x_n, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n, t) f(y_1, ..., y_n) dy_1 dy_2 ... dy_n.$$

En utilisant le noyau de Gauss :

$$G_t(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \quad x \in \mathbb{R}^n \ , \ t > 0$$

Si la valeur absolue $|f(x)|$ de la fonction $f(x)$ ne pousse pas trop à la l'infini de l'espace. Voir la figure 1.1.

G_t indique le noyau de Gauss et $\exp z$ désigne la fonction exponentielle e^z, où e est la base du logarithme naturel. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|$désigne la norme euclidienne $(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ de x. La fonction u de (1.3) est dérivable à tout ordre par rapport à $x_1, x_2, ..., x_n$ et $t > 0$, satisfait à l'équation de la chaleur (1.1), et vérifie (1.2) dans le sens de$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$ si, par exemple, f est continue et f est égal à zéro en dehors d'une grosse boule dans $\mathbb{R}^n$. On note l'ensemble de ces fonctions f par $C_0(\mathbb{R}^n)$. Voir Figure 1.2. Dans le chapitre 1, sauf mention contraire, nous supposons que le données initial f est dans $C_0(\mathbb{R}^n)$, de sorte que la solution u de $(1.1), (1.2)$ est représenté par (1.3). Bien qu'il soit important d'examiner s'il existe d'autres solutions satisfaisantes $(1,1), (1,2)$, nous ne considérons pas un tel problème dans cette section.

1.2 Estimation de décroissance de solution:

Les résultats suivants sur la décomposition de solutions de l'équation de la chaleur ont été copiés à partir de la

récent livre de Giga et al $[9, CH.1.p6\ , 7]$.

Proposition 1.1 *Soit u la solution* (1.3) *de l'équation de la chaleur avec des données initiales $f(\in C_0(\mathbb{R}^n))$. puis*

$$Sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x,t)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy.t > 0. \tag{1.4}$$

En paticulier :

$$\lim_{t\to\infty} Sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x,t)| = 0$$

i.e $u(x,t)$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}^n$ uniformément que $t \to \infty$.

Avant de donner la preuve, nous rappelons la notation sup, *qui représente la borne supérieure d'un ensemble. Pour n'importe quel sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, le nombre réel M qui satisfait aux deux conditions suivantes est appelée la borne supérieure de l'ensemble A, et est noté* $\sup A$ *(si$A$ est borné par le haut, l'existence d'un tel nombre M résulte de la définition des nombres réels):*

(i) *Nous avons un $a \leq M$ pour tout élément a de A (ie,$a \in A$). (Une telle M est appelé une limite supérieure de la série A).*

(ii) *Pour tout M' moins de M (c'est-à-d $M' < M$), il existe un élément d'une a' de A tel que $a' > M'$.*

En d'autres termes, M est la limite supérieure minimale liée de A. Pour un ensemble A, sans limite supérieure, nous mettons $\sup A = \infty$*, et pour l'ensemble vide A nous mettons* $\sup A = -\infty$*. Si A est l'image d'une fonction h à valeurs réelles définie sur un ensemble U, au lieu d'écrire* $\sup A$ *que* $\sup \{h(x) : x \in U\}$ *on peut écrire*

$\sup_{x \in U} x \in h(x)$ *ou simplement* $\sup_U h$.

Sa valeur est appelée la borne supérieure de la fonction h en U. S'il existe $x_0 \in U$ satisfaisant supx $\in U$

$$h(x) = h(x_0)$$

$\sup_U h$ *est appelée le maximum de h en U et est représentée par* $\max_U h$.

En général, une telle x_0 n'existe pas toujours, et même si elle existe, montrant son existence peut ne pas être facile. D'autre part, la borne supérieure est toujours définie pour toute fonction réelle, ce qui en fait une notion commode. Si $\sup_U |h|$ *est finie, h est dite bornée dans U. De même, la borne inférieure* $\inf_U h$ *d'une fonction h sur U est définie par*

$$\inf_{x \in U} h(x) = -\sup_{x \in U}(-h(x)).$$

*Nous écrivons parfois la portée des variables indépendantes d'une fonction h directement sous "*sup*" ou "*inf*" comme au* §1.3.3.

Preuve de proposition: *par* (1.3)*. Pour $t > 0$, on a:*

$$|u(x,t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\,|f(y)|\,dy \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n}(G_t(x-y)) \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy.$$

Puisque vous avons:

$$G_t(x-y) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}. \tag{1.4}$$

Par ce résultat, nous observons que u converge vers 0 *uniformément à l'ordre au moins $t^{\frac{-n}{2}}$ en tant que $t \to \infty$. Nous demandons ensuite si l'intégrale spatiale de $|u|$ ou de son pouvoir aussi se désintègre. A cet effet, nous définissons d'abord les normes L^p et L^∞des fonctions continues f sur $\mathbb{R}^n$.*

$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$, $\qquad 1 \leq p < \infty$ *(p est constant)*

$\|f\|_{\infty} = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)|$.

Pour plus de simplicité, $\|f\|_p$ *représente* $\|f\|_{\infty}$ *avec* $p = \infty$. *Bien* ∞ *et* $-\infty$ *ne sont pas des nombres réels, nous considérons* $\infty, -\infty$ *comme des symboles qui satisfont* $-\infty < a < \infty$ *pour tout nombre réel* a *de sorte que nous sommes en mesure de gérer les différentes inégalités d'une manière synthétique. Par ailleurs, nous utilisons la convention* $\frac{1}{\infty} = 0, a + \infty = \infty$, *car il est utile pour raccourcir les déclarations. Pour la fonction* $u(x,t)$ *par la variable* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \|u\|_p(t)$ *désigne la norme* L^p *de* $u(x,t)$ *comme une fonction de* x, *à savoir ,*

$$\|u\|_p(t) = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \quad , \quad t > 0 \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x,t)| & p = \infty \quad , \quad t > 0 \end{cases}$$

Une estimation plus générale que dans le §1.1.1*détient.*

Suit on peut également montrer les estimations de décroissance suivant d'autre norme L^p.

Les estimations l^p, l^q **:**

Théorème 1.2 *Soit* u *la solution* (1.3) *de l'équation de la chaleur avec des données initiales* f, *et soit* $1 \leq q \leq p \leq \infty$, *alors:*

$$\|u\|_p(t) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}} \|f\|_q \qquad , \qquad t > 0. \tag{1.5}$$

En suite par ce théorème l'ordre de décroissance de la spatiale norme L^p- *de* u *est estimée par une puissance non positive de* t. *Lorsque* $p = \infty$ *et* $q = 1$, (1.5) *n'est rien d'autre*(1.4).

Bien que la preuve de ce théorème soit plus compliquée que celle de (1.4), *il peut être prouvé facilement en utilisant le jeune inégalité des circonvolutions. Maintenant, nous rappelons un résultat sur la désintégration des produits dérivés d'une solution au problème* (1.1.1).(1.1.2).$[9, ch1, p8-10]$

Derivative $L^p - L^q$ **Estimates :**

Théorème 1.3 *Soit* u *la solution* (1.3) *de l'équation de la chaleur avec les données initial* $1 \leq q \leq p \leq \infty$

ne dépendant que de p, q, n *tel que*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_p (t) \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}}} \left\| f \right\|_q, \qquad j = 1, ..., n \qquad t > 0, \tag{1.6}$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_p (t) \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})+1}} \left\| f \right\|_q, \qquad t > 0, \tag{1.7}$$

Par ailleurs, pour les dérivés supérieurs, il existe une constante $C = C(p, q, n, k, \alpha)$ tels que

$$\left\| \partial_t^k \partial_x^\alpha u \right\|_p (t) \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})+k+\frac{|\alpha|}{2}}} \left\| f \right\|_q, \qquad t > 0, \tag{1.8}$$

(ici k est un nombre naturel ou 0 et α est un multi-index $(\alpha_1....\alpha_n)$: α_i $(1 \leq i \leq n)$ est a un nombre naturel ou 0.

Nous utilisent la convention

$$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}$$

$$\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial_{x_i}}, \qquad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n,$$

$$\partial_x^0 u = u, \qquad \partial_t^0 u = u.$$

En d'autres termes, $|\alpha|$ est de l'ordre de la dérivée ∂_x^α dans la direction de l'espace.)

On remarque que l'on peut choisir les constantes C à $(1,6)-(1,8)$ indépendant de p et q. Par $(1,6), (1,7)$ et $(1,8)$, nous observons que la puissance de t augmente de $\frac{1}{2}$ en différenciant une fois dans les variables spatiales, et qu'il augmente de 1 en différenciant dans la variable temps. Depuis la preuve de $(1,8)$ pour les cas généraux est un peu de temps, nous allons prouver (1.6) que si $p = \infty$ et $q = 1$.

Preuve. de (1.6) (Dans le cas de $p = \infty$, $q = 1$). Différencier (1.3) sous la intégrale, nous avons

$$\partial_{x_i} u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\ \partial_{x_i} G_t)(x - y) f(y) dy.$$

Le symbole $(\ \partial_{x_i} G_t)(x - y)$ est la quantité obtenue en différenciant $G_t(x)$ à x_j nous avons $x - y$.

Heureusement

$$\partial_{x_i} G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} (-\frac{2x_j}{4t}) \exp(-\frac{|x|^2}{4t}).$$

on a

$$\left| \frac{x_j}{2t} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) \right| \leq \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} z \exp(-z^2).$$

est une fonction bornée à z $\exp(-z^2)$. $z \geq 0$ En fait atteint son z $\exp(-z^2)$ maximale $C_1 = 1/\sqrt{2e}$ à $z = 1/\sqrt{2}$, nous obtenons

$$\| \partial_{x_i} G_t \|_\infty \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \frac{C_1}{t^{\frac{1}{2}}}.$$

même façon que dans la preuve de(1.4), nous avons

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_\infty \leq \|\partial_{x_i} G_t\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, dy \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} \|f\|_1 ,$$

$$C = C_1 \tfrac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

avec prouve (1.6). Nous appelons l'estimation au §1.1.1 une estimation de décroissance en mettant l'accent sur le comportement des grandes t, toutefois, l'estimation montre aussi une diminution de la finesse de u lorsque t tend vers 0. Pour cette raison, au§1.1.2, §1.1.3, nous appelons l'estimation n'est pas une estimation de décroissance mais une L^p-L^q-estimation.

Dans ce qui précède, nous avons observé des ordres de désintégration des diverses normes pour la solution du problème de valeur initiale de l'équation de la chaleur (1.1) avec (1.2). Comment ça $u(x,t)$ converge vers 0 quand t tend vers l'infini. Nous savons déjà que la solution se décompose comme $\|u\|_\infty \leq (4\pi t)^{\frac{-n}{2}} \|f\|_1$ par (1.4). Donc, si nous pouvons trouver un simple et bien connu (non nulle) fonction v telle que la norme L^∞, $\|u - v\|_\infty (t)$ tend vers 0 plus vite que $t^{\frac{-n}{2}}$ en tant que $t \to \infty$, on peut dire que u se comporte comme v pour les grands t. Dans cette situation, v est appelé un premier terme de la décomposition de u. Dans la fonction est l'expression d'attaque de la décomposition de la solution de l'équation de la chaleur (1.1) avec (1.2)? Nous tenons à choisir la fonction v aussi simple que possible. Énonce le résultat suivant que l'on peut choisir v comme un multiple constant du noyau de Gauss. ■

1.3 Forme faible du problème de la valeur initiale de l'équation de la chaleur:

Notez que, ci-dessous, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ est l'ensemble de toutes les fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ avec des supports compacts $(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Un tel ensemble est désigné par $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.

Multipliant la chaleur équation

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$$

et puis en intégrant le $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ nous obtenons

$$0 = \int_0^\infty \int_{R^n} (\partial_t u + \Delta u)\ dxdt$$

En utilisant l'intégration par parties. Pour $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, nous disposons

$$\int_{R^n} \varphi \partial_t u dt \ = [\varphi(x,t)u(x,t)]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty u \partial_t \varphi dt$$

$$= -\varphi(x,0)u(x,0) - \int_0^\infty u \partial_t \varphi dt$$

$$\int_{R^n} \varphi \Delta u dx \ = - \int_0^\infty < \nabla\varphi, \nabla u > \ dx = \int_{R^n} (\Delta\varphi) u\ dxdt$$

qui rendements L'équation (1.16) détient également si u est continue dans $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ et lisse $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ Dans ce cas, nous n'assumons pas la continuité De $\partial_t u$ ou $t = 0$ alors $\int_0^\infty \varphi \partial_t u dt$ n'est pas nécessairement fini. Donc, nous remplaçons l'intervalle de temps d'intégration $(0,\infty)$ vers $(\varepsilon,\infty), (\varepsilon > 0)$ et intègre par parties on obtient alors (1.16) en laissant $\varepsilon \to 0$.

$$0 = -\int_{R^n} \varphi(x,0)u(x,0)dx \ - \int_0^\infty \int_{R^n} (\partial_t \varphi + \Delta\varphi) u\ dxdt \tag{1.16}$$

Nous ne réalisons pas la justification de commutation des intégrales de ce chapitre, en fait, la dernière égalité est justifiée par le théorème de Fubini .

Bien sûr, pour $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, il suffit de considérer le Riemann intégrante. Ici, par définition, φ est nulle pour les grands t et pour les grandes $|x|$, mais nous notons que $\varphi(x, 0)$ peut-être pas identiquement nulle (mais appartient à $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$

Inversement, si u est lisse dans $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ et en continu dans $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ (i,e $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$

et $(1, 16)$ est valable pour n'importe quel $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, alors u est une solution de l'équation de la chaleur avec des données initiales

$u(x, 0)$. Ainsi, nous définissons des solutions faibles de l'équation de la chaleur suit.

La faiblesse des solutions au problème de la valeur initiale:

Définition 1.1 *Supposons que u est localement intégrable dans* $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$.

(i) *Supposons que f est localement intégrable dans* $\mathbb{R}^n$.

Une fonction u est appelé une solution faible de l'équation de la chaleur (1.1) *avec des données initial f , si pour* $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$

$$0 = \int_{R^n} \varphi(x, 0) f(x) dx + \int_0^{\infty} \int_{R^n} (\partial_t \varphi + \Delta \varphi) u \; dxdt \qquad (1.17)$$

(ii) *Au lieu de* (1.17), *si*

$$0 = m\varphi(0, 0) + \int_0^{\infty} \int_{R^n} (\partial_t \varphi + \Delta \varphi) u \; dxdt \qquad (1.18)$$

vaut pour n'importe quel $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. *alors u est appelée une solution faible de l'équation de la chaleur* $(1, 1)$ *avec des données initiales* $m\delta$*(m de temps le* δ *distribution). Ici m est un nombre réel.*

1.4 Conditions initiales singulières:

Nous concluons ce chapitre en considérant ce qui suit valeur initiale

$$u_t = \Delta u \tag{1.4.1}$$

$$u(x,0) = M\delta_0 \tag{1.4.2}$$

Théorème 1.4 *Le multiple du noyau de Gauss-Weierstrass $MG(x,t)$ est une solution faible de l'équation de la chaleur* (1.4.1) *avec la donnée initiale $M\delta_0$*

Preuve. Évidemment, $C \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,pour fixe $\varepsilon > 0$, nous répétons les calculs sur la page précédente (voir(1.16)) obtenir

$$0 = -\int_{R^n} \varphi(x,\varepsilon)MG(x,\varepsilon)dx - \int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{R^n} (\partial_t\varphi + \Delta\varphi)MGdxdt$$

Maintenant, nous utilisons la forme auto-similaire:

$$G(x,\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{-n}{2}}G(\frac{x}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}},1)$$

Ainsi, par le changement de variables et le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous concluons

$$\int_{R^n} \varphi(x,\varepsilon)G(x,\varepsilon)dx = \int_{R^n} \varphi(y\varepsilon^{\frac{1}{2}},\varepsilon)\ G(y,1)dy \to \varphi(0,0) \ \text{ comme } \ \varepsilon \searrow 0$$

En fait, le noyau de Gauss-Weierstrass $G = G(x,t)$ est l'unique solution de ce problème. In ce qui suit, nous avons besoin du théorème d'unicité fondamentale suivante qui a été copié ici de[$9, ch, 4, p, 164 - 166$] ∎

Théorème fondamental d'unicité:

Théorème 1.5 *si la fonction $w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ satisfait (i) $\sup_{t>0}\|w\|_1(t) < \infty$ et (ii) pour tout $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,*

$$\int_0^{\infty}\int_{R^n} (\partial_t\varphi + \Delta\varphi)wdxdt = 0 \qquad \textit{alors} \qquad w \equiv 0$$

Remarque 1.1 *Si* ∞ *est remplacé par un* $T > 0$ *fini dans chaque intervalle de temps apparaissant et état (i)par* $\sup_{0<t<T} \|w\|_1 (t) < \infty$ *que nous avons* $w \equiv 0$ *dans* $\mathbb{R}^n \times (0, T)$.

Preuve. Pour les fonctions h_1 et h_2 défini dans $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, nous définissons le L^2 intérieure produit par

$$< h_1, h_2 >_2 = \int_0^\infty \int_{R^n} h_1(x,t) h_2(x,t) dx dt,$$

Et on écrit (ii) comme

$$< A\varphi, w >_2 = 0 \qquad \text{avec} \qquad A = \partial_t + \Delta.$$

Nous allons montrer que $w = 0$ si cette égalité est satisfaite pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ Ce suivra si nous pouvons prouver que l'image de l'opérateur A appliqué à t_0 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ est un sous-ensemble dense de $L^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

Alors w est orthogonale à toute fonction dans $L^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, qui implique que $w = 0$. En d'autres termes, cela signifie que nous devons montrer que pour tout sous-ensemble dense $A\varphi = \psi$ échéant, l'équation est résoluble §4.3.2. Pour cela, nous allons utiliser le théorème d'existence pour l'équation inhomogène prouvé dans t_0 Pour une démonstration rigoureuse, cependant, nous devons d'abord introduire des cours appropriés pour ψ et φ. ■

La première étape: D'abord, nous montrons que l'égalité $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ détient toujours pour satisfaire

$$\begin{cases} \sup_{t>0} \|\partial_t \varphi\|_\infty (t) < \infty . \sup_{t>0} \|\partial_t^\alpha \varphi\|_\infty (t) < \infty \quad (|\alpha| \leq 2) \text{ et} \\ \qquad T > 0 \qquad\qquad \varphi \subset C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T)). \end{cases}$$

Notez que pour ce faire, nous aurons besoin de condition (i).

Montrons que φ peut être approchée par C^∞ fonctions avec compact

Soutenir dans $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$. Choisissez une fonction telle que $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec $0 \leq \theta \leq 1$ et

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \geq 2, \\ 1, & \tau \leq 1, \end{cases}$$

par exemple

$$q(x) = \begin{cases} e^{-1/s}, & s > 0, \\ 0, & s \leq 0, \end{cases}$$

puis $q \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et nous pouvons fixer

$$\theta = q(2-\tau)/\left\{q(2-\tau)+q(\tau-1)\right\}.$$

suivante pour $j = 1, 2, ...$ nous fixons

$$\theta_j(x) = \theta(|x|/j). \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

cela implique $\theta_j \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_j = 1$ pour converge vers t_0 1 un point par point $x \in \mathbb{R}^n$.pour toutes φ_j

$$\varphi_j(x,t) = \theta_j(x)\ \varphi(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty).$$

Maintenant nous définissons comme $\varphi_j \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ Ensuite, et nous avons

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t\varphi_j + \Delta\varphi_j)w dxdt = 0.$$

Ainsi, pour (ii) prouver φ pour t_0 Il reste à montrer que

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t\varphi_j)w dxdt \to \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t\varphi)w dxdt, \tag{4.7}$$

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\Delta\varphi_j)w dxdt \to \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\Delta\varphi)w dxdt. \tag{4.8}$$

Comme $j \to \infty$ par la définition de φ_j, toute évidence $(\partial_t\varphi_j)w \to (\partial_t\varphi)w$ ponctuelle sur $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ et nous avons

$$\left|(\partial_t\varphi_j)w\right|(x,t) \le |w|(x,t)\sup_{t>0}\|\partial_t\varphi\|_{\infty}(t) \qquad\qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

Par conséquent, les hypothèses sur φ et w le théorème de convergence impliquent (4.7) afin de voir (4.8) nous divisons l'intégrale en trois parties I,II et III selon t_0

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\Delta\varphi_j)w dxdt = \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{(\Delta\varphi)\theta_j + 2 < \nabla\theta_j, \nabla\varphi > w + \varphi(\Delta\theta_j)w\right\}dxdt$$

Utiliser (i) et $\sup_{t>0} \|\partial_x^\alpha \varphi\|_\infty (t) < \infty$ ($|\alpha| \leq 2$) analogue à la preuve de (4.7) il s'ensuit I que je converge vers t_0

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\varphi) w dx dt$$

Comme $j \to \infty$ Pour les convergences II observent que

$$\partial_{x_l}\theta_j = \frac{1}{j}\theta'(\frac{|x|}{j})\frac{x_l}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad\qquad l = 1, 2, ..., n.$$

Ce rendements avec C indépendante de $.\left\|\partial_x^\beta \theta_j\right\|_\infty \leq C/j(|\beta| = 1)$ Par (i) ainsi que les hypothèses sur

$$|II| \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} 2\,|\nabla\theta_j|\,|\nabla\varphi|\,|w|\,dxdt \leq \frac{2\sqrt{n}C}{j}\int_0^{T'}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|\,|w|\,dxdt$$

$$\leq \frac{2\sqrt{n}C}{j} C'T' \sup_{s\geq 0} \|w\|_1 (s) \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Dans la première étape, nous obtenons C' Ici C Satisfait $\sup_{t>0} \|\partial_x^\alpha \varphi\|_\infty (t) \leq C'$ pour tous α avec $|\alpha| = 1$ D'une manière très similaire, il peut être démontré que $III \to 0$ et $j \to \infty$ conséquent(4.8) suit.

La deuxième étape: Pour $t > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ avec pour sup $\varphi \subset (\mathbb{R}^n \times [0, T))$ nous désignons par φ la solution de

$$\begin{cases} \partial_t\varphi + \Delta\varphi = \psi, & t < T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad \varphi(x,t) = 0 & \qquad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

par le remplacement $\tau = T - t$ le problème ci-dessus se transforme t_0 en une équation de la chaleur homogène standard pour les variables (x, τ) comme traités dans (§4.3.2) ainsi„ il existe une solution $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T))$ au problème ci-dessus satisfaisant

$$\sup_{0<t<T} \left\|\partial_x^\alpha \partial_t^k \varphi\right\|_\infty (t) < \infty$$

Pour tout α multi-index et pour tout non négatif K représentation montre qu'il existe une $\varepsilon > 0$ tels que φ est nulle sur $\mathbb{R}^n \times [T - \varepsilon, T]$ nous étendons $\varphi(x; t) = 0$ comme pour $t > T$. Ensuite, cette longue φ satisfait toutes les conditions de la première étape alors.

Nous pouvons substituer φ (ii) en obtenir

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t \varphi + \Delta\varphi) w dx dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \psi w dx dt.$$

Puisque cela est vrai pour tous. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ la remarque dans l'exercice (1.8) implique que $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ est identiquement nulle sur $T > 0$. Par le fait que w est arbitraires. Est identiquement nulle sur. $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. La preuve est maintenant terminée

Chapitre 2

Comportement asymptotique de solutions auto-similaire

Dans ce chapitre, nous allons chercher les solutions dites "auto similaires" pour le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur, une étude détaillée sera présentée.

2.1 Méthode auto similaire:

Définition 2.1 *On entend par "Solution auto-similaire" d'une équation aux dérivée partielles une fonction de deux variables qui s'écrit sous la forme :*

$$u(x,t) = t^{\alpha}\varphi(\frac{x}{t^{\beta}}). \tag{2.1.2}$$

Où les exposant de t sont des constants réels appelés paramètres de la solution et prennent des valeurs particulières déterminées caractérisant la solution d'une EDP donée, φ est une fonction d'une seule variable appelée "profil", qui est la soluion d'une équation différentielle ordinaire résultant de l'EDP après l'insertion de u.

Pour une équation aux dérivées partielles, ils existent plusieurs profils, solution de la même équation différentielle ordinaire, pour une seule détermination des paramètres qui caractérisent la solution et l'EDP elle même.

La détermination de la solution revient à déterminer les paramètres et profil, en générale, il sont trois inconnues à déterminer, on va voir qu'on a deux seulement à déterminer. L'EDO qui résulte dépend des paramètres, donc c'est une équation paramétrée, de plus elle est non *linéaire, on sait que la résolution d'une EDO de coefficients déterminés est si compliquée, et à priori une EDO qui est paramétrée, d'où la complexité de ce genre d'équations. Dans la section suivante on va présenter une caractérisation de ce genre d'équation.*

2.1.1 Equations admettant une solution auto-similaire:

Une condition pour qu'une équation aux dérivées partielles admette une solution auto similaire est donné par le théorème suivant:

Théorème 2.1 *Soit $p(x, t, u, u_x, ..) = 0$ un équation aux dérivées partielles, alors p admet une solution auto similaire si et seulement si elle est invariante sous l'action de dilatation.*

c'est-à-dire si l'on remplace u par $a^\alpha u$ et x par $a^\beta x$ et t par $a^\gamma t$ on a

$$P(a^\beta x, a^\gamma t, a^\alpha u...) = 0 \tag{2.1.3}$$

On a la règle de dérivation

La dérivation pour t :

$$\frac{\partial(a^\alpha u)}{\partial(a^\gamma t)} = a^{(\alpha-\gamma)}\frac{\partial u}{\partial t}$$

La dérivation pour x :

$$\frac{\partial(a^\alpha u)}{\partial(a^\beta x)} = a^{(\alpha-\beta)}\frac{\partial u}{\partial x}$$

L'équation est invariante si :

$$P(x, t, u, ...) = 0 \Longrightarrow P(a^\beta x, a^\gamma t, a^\alpha u, ...) = 0$$

Exemple 2.1 *Soit l'équation de la Chaleur :*

$$u_t = u_{xx} \tag{2.1.4}$$

Pour démontrer que cette équation est invariante par dilation, remplaçons u et x et t par $a^\alpha u$, $a^\beta x$, $a^\gamma t$ on a :

$$\frac{\partial^2(a^\alpha u)}{\partial(a^\beta x)^2} = a^{(\alpha-2\beta)}\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2}$$

et

$$\frac{\partial^2(a^\alpha u)}{\partial(a^\gamma t)} = a^{(\alpha-\gamma)}\frac{\partial u}{\partial t}$$

L'équation (2.1.4) devient :

$$a^{(\alpha-2\beta)}\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} = a^{(\alpha-\gamma)}\frac{\partial u}{\partial t}$$

L'équation est invariante donc :

$$a^{(\alpha-\gamma)} = a^{(\alpha-2\beta)}$$

ce qui entraîne $\gamma = 2\beta$ et α quelconque. Donc l'équation de la chaleur est invariante sous l'action de la dilatation de x par a^{β} et t par $a^{2\beta}$ pour tout a et β par suite elle admet une solution auto similaire. La recherche de la solution sous la forme $u = t^{\alpha}\varphi(xt^{-\beta})$ se déduit de $u(x,t)$ par la changement $a^{\alpha}u(a^{\beta}x, a^{\gamma}t) = a^{\alpha}u(a^{\beta}x, 1)$ qui doit être égale à $u(x,t)$, on choisit a telle que $a^{\gamma}t = 1$.

L'équation $a^{\gamma}t = 1$.détermine a, donc $a = t^{\frac{-1}{\gamma}}$, ainsi la solution s'écrit :

$$u(x,t) = t^{\frac{-\alpha}{\gamma}}\varphi(xt^{\frac{-\beta}{\gamma}}) \tag{2.1.5}$$

Détermination des paramètres:

Soit la solution auto similaire :

$$u = t^{\alpha}\varphi(\frac{x}{t^{\beta}}) \tag{2.1.8}$$

L'un des paramètres est déterminé alors que le deuxième reste indéterminé.

*Soit l'équation de la chaleur:

$$u_t = u_{xx}$$

Soit le changement $\xi = \frac{x}{t^{\beta}}$, on a : $\xi_x = \frac{1}{t^{\beta}}$, $\xi_t = \frac{-\beta x}{t^{1+\beta}} = -\beta\frac{\xi}{t}$, dans ce cas la solution devient $u = t^{\alpha}\varphi(\xi)$, et

$$u_t = \alpha t^{\alpha-1}\varphi(\xi) + t^{\alpha}\varphi_{\xi}\xi_t$$

$$= \alpha t^{\alpha-1}\varphi(\xi) - \beta\xi t^{\alpha-1}\varphi_{\xi}$$

et $u_{xx} = t^{\alpha-2\beta}\varphi_{\xi\xi}$, l'équation de la chaleur devient :

$$\alpha t^{\alpha-1}\varphi(\xi) - \beta\xi t^{\alpha-1}\varphi_{\xi} = t^{\alpha-2\beta}\varphi_{\xi\xi}$$

Simplifions par $t^{\alpha-1}$, l'équation devient :

$$\alpha\varphi - \beta\xi\varphi' = t^{(1-2\beta)}\varphi'' \tag{2.1.9}$$

Le terme gauche ne dépend pas de t, dérivons l'équation par rapport à t, on trouve :

$$(1-2\beta)t^{(1-2\beta)}\varphi'' = 0 \tag{2.1.10}$$

pour tout x et t $\quad (1-2\beta) = 0$

ce qui implique que $\beta = \frac{1}{2}$. L'équation dans ce cas s'écrit :

$$\alpha\varphi - \frac{1}{2}\xi\varphi' = \varphi'' \tag{2.1.11}$$

qui dépend du paramètre α c'est une équation de deux inconnues pour la résoudre, on doit avoir une condition supplémentaire.

Détermination du profil:

Pour la détermination de α, φ deux méthodes sont envisagées :

Soit à résoudre l'équation :

$$\alpha\varphi - \frac{1}{2}x\varphi' = \varphi'' \tag{2.1.16}$$

Pour l'intégration de cette EDO, on suppose que la fonction est une distribution tempérée c'est à dire

$$\begin{cases} \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \\ \varphi'', x\varphi' \longrightarrow 0; |x| \longrightarrow \infty \end{cases} \tag{2.1.17}$$

De plus la fonction est supposée positive (condition sur la solution). On intégré l'équation $\alpha\varphi - \frac{1}{2}x\varphi' = \varphi''$ de $-\infty$ à x

$$\int_{-\infty}^{x} (\alpha\varphi(s) - \frac{1}{2}s\varphi'(s))ds = \int_{-\infty}^{x} \varphi''(s)ds.$$

L'intégration par partie du terme gauche donne :

$$(\alpha + \frac{1}{2})\int_{-\infty}^{x} \varphi(s)ds - \frac{1}{2}x\varphi(x) = \varphi'(x)$$

que l'on peut écrire :

$$(\alpha+\frac{1}{2})\int_{-\infty}^{x}\varphi(s)ds=\varphi'(x)+\frac{1}{2}x\varphi(x)$$

Faisons tendre x vers l'infini, le terme $\varphi'+\frac{1}{2}x\varphi$ s'annule. Puisque, $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)ds$ existe, on a :

$$(\alpha+\frac{1}{2})\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)ds=0$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)ds\neq 0$ (sous l'hypothèse $\varphi>0$). Ces deux conditions impliquent $(\alpha+\frac{1}{2})=0$ et par suite $\alpha=\frac{1}{2}$ il résulte

$$\varphi'+\frac{1}{2}x\varphi=0$$

On a réussi à diminuer l'ordre de l'équation : $\alpha\varphi-\frac{1}{2}x\varphi'=\varphi''$ qui devient une équation de premier ordre. L'intégration de l'équation : $\alpha\varphi'+\frac{1}{2}x\varphi'=0$ donne :

$$\varphi=k\exp(\frac{-x^2}{4})$$

Donc la solution auto similaire de l'équation de la chaleur, en remplaçant α, β par leur valeur, est :

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\exp(\frac{-x^2}{4t})$$

2.2 Comportement asymptotique des solutions pour $t\longrightarrow\infty$

En utilisant la formule explicite pour $u\left(x,t\right)$ de (1.1.3) nous pouvons prouver les résultats suivants sur le comportement de grand moment de solutions de l'équation de la chaleur.

Théorème 2.2 *2.1.1. Soit u la solution* (1.1.3) *de l'équation de la chaleur* (1.1.1) *avec initial donnée* $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$*.soit* $m=M=\int_{R^n}f(y)dy$ *alors*

$$\lim_{t\to\infty}t^{(\frac{n}{2})(1-\frac{1}{p})}\left\|u(.,t)-mg(.,t)\right\|_p=0, \tag{2.2.1}$$

Où $g(x,t)=G(x,t)$ *est le noyau de Gauss-Weierstrass.*

Ci-dessous, nous copions la preuve de ce théorème du livre $[9, ch, 1p.10 - 12]$ *dans le cas particulier de* $p = \infty$ *on doit faire face à d'autres* $p \in [1, \infty)$ *en fait analogue voie.*

Notez que l'étiquette "(1.9)*" dans la preuve ci-dessous correspond à "*(2.1.1)*" du théorème* 2.1.1. *Mais d'abord, nous rappelons un résultat classique et importante.*

Ce théorème montre que u *a un comportement similaire à celui* mg *à celle de* $t \to \infty$

lorsque $m = 0$*. Par conséquent* (1.9) *est souvent appelé une formule asymptotique, et nous*

écrire $u \sim mg(t \to \infty)$*. Cette notation est bon pour la compréhension intuitive du comportement de* u*, mais*

pour une expression rigoureuse nous avons besoin d'une formule comme $(1, 9)$*. Lorsque* $m = 0$*,* (1.9) *montre*

qui $\|u\|_\infty (t)$ *tend vers zéro plus vite que* $t^{-\frac{n}{2}}$*. Dans ce cas* (1.9) *ne donne pas une*

conduisant terme. Nous prouvons maintenant la formule asymptotique (1.9)*.*

Preuve. pour $m = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$ on obtenir

$$(4\pi t)^{n/2} \{u(x,t) - m\ g(x,t)\}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{|x-y|^2}{4t}) f(y)dy - \exp(-\frac{|x|\,2}{4t}) \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (h_\eta(x-y) - h_\eta(x)) f(y)dy,$$

par

$$h_\eta(x) = \exp(-\eta\,|x|^2),\ \eta = 1/(4t) \quad (> 0),$$

ce qui implique

$$(4\pi t)^{n/2}\,|u(x,t) - m\ g(x,t)| \ \leq \int_{\mathbb{R}^n} |h_\eta(x-y) - h_\eta(x)|\,|f(y)|\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (2.2.2)$$

nous utilisons le théorème de la valeur moyenne intégrale

$$|h_\eta(x-y) - h_\eta(x)| \leq |y| \int_0^1 |(\nabla h_\eta)(x - (1-\tau)y)|\,d\tau. \qquad x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad (2.2.3)$$

ou ∇ désigne de gradient, c'est a dir

$$\nabla \varphi = (\partial_{x_1}\varphi, ..., \partial_{x_n}\varphi),$$

pour une fonction sur $\mathbb{R}^n$.de puis

$$\nabla h_\eta(x) = -2\eta x h_\eta(x),$$

un argument similaire a celui de la preuve de (1.6) in (1.1.3) rendement

$$|\nabla h_\eta(x)| \leq 2\eta^{1/2} z \exp(-|z|^2) \leq 2\eta^{1/2} C_1, \qquad C_1 = 1/\sqrt{2e}$$

avec $z = \eta^{1/2} |x|$. par cette integralite et (1.11) nous obtenons

$$|h_\eta(x-y) - h_\eta(x)| \leq 2|y| \eta^{1/2} C_1.$$

l'application de ce à (1.10), nous avons

$$(4\pi t)^{n/2} |u(x,t) - mg(x,t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} 2\eta^{1/2} C_1 |y| f(y) dy \ = \frac{C_1}{t^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |y| |f(y)| dy.$$

Etant donné que la partie droite de cette inégalité est indépendant de x, en prenant Supremum des deux côtés rendement

$$t^{\frac{n}{2}} \|u - mg\|_\infty (t) \leq \frac{C_1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} t^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |y| |f(y)| dy, \qquad t > 0. \tag{2.2.4}$$

Depuis l'hypothèse $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ garantit que $\int_{\mathbb{R}^n} |y| |f(y)| dy$ est fini, nous pouvons prendre la limite $t \to \infty$ dans (1.12) pour obtenir la formule asymptotique (1.9). ■

Formule intégrante du théorème de la valeur moyenne :

Théorème 2.3 *Supposons qu'une fonction h est continue dans $\mathbb{R}^n$ jusqu'à toute sa première ordre partiel dérivés $\partial_{x_i} h$ $(1 \leq i \leq n)$i.e, c'est h appartient à la classe C^1-sur $\mathbb{R}^n$.*

puis

$$h(x) - h(x-y) = \int_0^1 \langle (\nabla h)(x-(1-\tau)y, y \rangle \, d\tau, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n \tag{2.2.5}$$

Où $< .,. >$ est le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$. Application de l'inégalité de Schwarz sur $\mathbb{R}^n$: $(|< a, b >| \leq |a| \, |b| \, , a, b \in \mathbb{R}^n)$ à la droite des rendements

$$|h(x-y) - h(x)| \leq |y| \int_0^1 |(\nabla h)(x-(1-\tau)y| \, d\tau, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Ces énoncés sont également valables si $\mathbb{R}^n$ est remplacé par un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$.

Ce théorème est très utile, de même que la forme différentielle de la valeur moyenne théorème pour une fonction d'une seule variable: Il existe $\theta \in (0, 1)$

tel que

$$h(x) - h(x-y) = h^{'}(x - \theta y)y$$

où $h^{'}$ désigne la dérivée de h. La preuve est élémentaire.

Preuve. Nous avons mis en $F(s) = h(x - y + sy)$. Le théorème fondamental des rendements de calcul

$$h(x) - h(x-y) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(\tau) d\tau.$$

Par la règle de la chaîne pour la composition de fonctions, nous avons

$$F'(\tau) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_j}(x - (1-\tau)y) y_j =< (\nabla h)(x - (1-\tau)y), y >$$

de sorte que (2.2.5) suit. ■

2.3 Solutions auto-similaires pour l'équation de la chaleur:

Notons que l'équation de la chaleur

$$u_t = \Delta u, \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad t > 0 \tag{2.3.1}$$

A la propriété suivante:

Si $u = u(x,t)$ est une solution de cette équation, la fonction

$$u_\lambda(x,t) \equiv \lambda^k u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

est une solution pour chacun $\lambda > 0$. Ici, $k \in R$ est un paramètre fixe.

Définition 2.2 (2.3.1.) *Une solution $u = u(x,t)$ est appelée auto-similaire s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tels que:*

$$\lambda^k u(\lambda x, \lambda^2 t) = u(x,t)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, pour $\lambda > 0$.

Exemple 2.2 (2.3.2.) *Le noyau de la chaleur (également appelé le noyau de Gauss-Weierstrass) est une Solution*

auto- similaire avec $k = n$ de l'équation de la chaleur. En effet, il est facile de voir que

$$\lambda^n G(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^n \frac{1}{(4\pi\lambda^2 t)^{n/2}} \exp(-\frac{|\lambda x|^2}{4\lambda^2 t}) \tag{2.3.2}$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) = G(x,t).$$

Il a été montré dans le théorème (2.1.1) *que les solutions de l'équation de la chaleur linéaire avec intégrable les conditions initiales cherche des grandes $t > 0$ en tant que multiple du noyau de Gauss-Weierstrass $G(x,t)$. Maintenant, nous exprimons ce résultat asymptotique dans une façon différentes et de manière équivalente.*

Théorème 2.4 *Notons $u_\lambda(x,t) = \lambda^n u(\lambda x, \lambda^2 t)$. Les deux suivants $p \in [1,\infty]$ .les conditions sont équivalentes:*

1. $\lim_{t\to\infty} t^{(n/2)(1-1/p)} \|u(.,t) - MG(.,t\|_p = 0.$

2. *Pour tout* $t_0 > 0$,

$$u_\lambda(.,t_0) \ \to MG(.,t_0). \quad \textit{comme} \ \ \lambda \to \infty.$$

La convergence est à la norme usuelle de la $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Tout d'abord, il faut remarquer la propriété d'échelle suivante de la norme Lp

$$\|v(\lambda.)\|_p = \lambda^{-n/p} \|v\|_p\,, \tag{2.3.3}$$

qui peut être facilement prouvé par l'évolution des variables dans le intégrante de Ning la norme.

Maintenant, en utilisant cette propriété d'échelle avec l'identité (2.3.2), on obtient

$$\|u_\lambda(.,t_0) - MG(.,t_0\|_p = \ \left\| \ \lambda^n u(\lambda.,\lambda^2 t_0) - M \ \lambda^n G(\lambda.,\lambda^2 t_0)\right\|_p$$

$$= \lambda^{n-n/p} \left\|u(.,\lambda^2 t_0) - M \ G(.,\lambda^2 t_0\right\|_p \qquad (\text{ substituions } \lambda = \sqrt{t/t_0})$$

$$= C(t_0) t^{(n/2)(1-1/p)} \|u(.,t) - MG(.,t)\|_p$$

∎

2.4 Méthode des Quatre étapes:

L'équivalence du théorème 2.3.3 permet de démontrer la formule asymptotique de Théorème 2.2.1 de façon différente.

Au cours de ces conférences, cette idée sera appelé le Four Méthode étape et il sera utilisé pour afficher

Les propriétés asymptotiques des solutions pour non linéaire équations. Maintenant, nous esquissons

La nouvelle preuve du théorème 2.2.1 basé sur les quatre étapes Méthode.

étape 1. Mise à l'échelle. Nous introduisons la famille rescaled des fonctions

$$u_\lambda(x,t) \equiv \lambda^n u(\lambda x, \lambda^2 t) \qquad \text{pour} \quad \lambda > 0.$$

C'est généralement la partie plus difficile de cette méthode: nous devons choisir l'échelle appropriée du modèle, que nous étudions.

étape 2. Les estimations et la compacité. Nous montrons que l'intégration

$$\{u_\lambda(.,t)\}_{\lambda>0} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$$

Est compact pour tout $t > 0$.

Ici, nous tirons ces estimations en utilisant l'équation satisfaite par u_λ.

étape 3. Passage à la limite. Par compacité il existe une suite $\lambda_n \to \infty$ et une fonctions $\overline{u}(x,t)$ tels que

$$u_\lambda(.,t) \to \overline{u}(.,t) \quad \text{dans} \ L^p(\mathbb{R}^n) \ \text{pour tout} \ t > 0.$$

Depuis u_λ Satisfais L'équation de la chaleur (2.3.1), on peut montrer que u est une solution faible de l'équation de la chaleur, aussi bien.

étape 4. Identification de la limite. La fonction de limite $\overline{u}$ correspond t_0 M δ_0 (Dirac delta) en tant que condition initiale. Est la conséquence de la lemme suivant.

Lemme 2.1 *Soit* $u_0 \in L^1$ (R^n). *Pour chaque fonction test* $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ *nous avons*

$$\int_{R^n} \lambda^n u_0(\lambda x)\varphi(x)dx \to M\varphi(0) \qquad et \qquad \lambda \to \infty,$$

où

$$M = \int_{R^n} u_0(x)dx.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la Lebesgue théorème de convergence dominée,

$$\int_{R^n} \lambda^n u_0(\lambda x)\varphi(x)dx = \int_{R^n} u_0(x)\varphi(x/\lambda)dx$$

par un simple changement de variables.

Maintenant, le problème singulier de la valeur initiale $(1.4.1)-(1.4.2)$ a une unique solution faible par le théorème 1.4.1, on obtient immédiatement que

$$\overline{u}(x,t) = MG(x,t).$$

En outre, par l'unicité de la limite, nous avons la relation de limite suivante pour l'ensemble famille

$u(.,t) \to M\ G(.,t)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t > 0$.

Maintenant, il suffit CES à utiliser l'équivalence du théorème 2.3.3, pour compléter la preuve de Théorème 2.2.1.

Conclusion : Cette méthode en quatre étapes est très utile pour étudier les propriétés asymptotiques de solutions partielles Equations différentiels non linéaires Nous montrons détails de ce raisonnement en un cas beaucoup plus général. Preuves détaillées des résultats indiqués dans les étapes 1-4 dans le cas de l'équation de la chaleur linéaire peut être trouvée dans [9CH1]. ■

Chapitre 3

Comportement auto-similaire des solutions de l'équation de convection-Diffusion:

Dans ce dernier chapitre nous allons chercher également les solutions "auto similaires" pour le problème de Cauchy pour l'équation de convection diffusion. L'existence locale et globale seront abordées.

3.1 Le problème de la valeur initiale:

Nous allons montrer la méthode en quatre étapes " en action ", en l'appliquant au problème de la valeur initiale de la diffusion d'équation non linéaire de convection?

$$u_t - u_{xx} + (u^q)_x \qquad \textit{pour} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{3.1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \textit{pour} \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.1.2}$$

où $q > 1$ est un paramètre fixé.

3.2 Existence de solutions:

Voyons d'abord une preuve de l'esquisse de l'existence dans le temps global de solution à un problème (3.1.1) (3.1.2).

Théorème 3.1 (3.2.1) ***(Existence d'une solution dans le temps global)***. *Supposons que*

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}). \tag{3.2.1}$$

Supposons également que $u_0 \geq 0$, *Ensuit, le pb de la valeur initiale non négatif* (3.1.1) (3.1.2) , *la solution en temps global* $u \in C^{2.1}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

Cette solution a la propriété de régularité suivante:

$$u \in C^1((0,\infty), L^p(\mathbb{R})) \cap C((0,\infty), W^{2.p}(\mathbb{R}))$$

Pour chaque $p \in [1, \infty]$, *En outre, la solution conserve l'intégrale ("masse")*

$$M = \|u(t)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx = \|u_0\|_1 \quad \textit{pour tout } t \geq 0 \tag{3.2.2}$$

Il s'agit d'une solution unique dans la classe des fonction satisfaisant $\sup_{t>0} \|u(t)\|_1 < \infty$.

3.2.1 Existence locale via le principe de contraction de Banach:

Nous construisons des solutions douces en heure locale (3.1.1)_(3.1.2) qui sont des solutions de l'équation intégrale suivante

$$u(t) = G(.,t) * u_0 + \int_0^t \partial_x(.,t-s) * u^q(s)ds \tag{3.2.3}$$

Avec le noyau de l'équation de la chaleur

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$$

Nous utilisons les estimations qui en résultent immédiatement de la jeune inégalité pour le

$$\|G(.,t)*f\|_p \le Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|f\|_q, \tag{3.2.4}$$

$$\|\partial_x G(.,t)*f\|_p \le Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\|f\|_q, \tag{3.2.5}$$

de convolution pour chaque $1 \le q \le p \le \infty$, chaque $f \in L^q(\mathbb{R})$, et $C = C(p,q)$ indépendant de t, f.

Remarquer que $C = 1$ dans l'inégalité (3.2.4) pour $p = q$ parce que $\|G(.,t)\|_{L^1} = 1$ pour tout $t > 0$.

Lemme 3.1 (3.2.1) ***(Existence locale)****. Supposons que* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

Alors il existe $T = T(\|u_0\|_1 . \|u_0\|_\infty) > 0$ *tel que l'équation intégrale* (3.2.3) *est une solution unique dans l'espace*

$$y_T = C([0,T], L^1(\mathbb{R})) \cap C([0,T], L^\infty(\mathbb{R})),$$

Complétées par la norme

$$\|u\|_{y_T} = \sup_{0\le t\le T}\|u\|_1 + \sup_{0\le t\le T}\|u\|_\infty .$$

Preuve. Ici, il suffit d'appliquer le principe de contraction de Banach à l'équation interne (3.2.3).

Pour suffisamment petits T le côté droit de l'équation définit la contraction dans l'espace de y_T.

Les détails d'un tel raisonnement, dans le cas d'une légère différente équation peut être trouvée dans [13, 12]. ■

3.2.2 Régularité et le principe de comparaison:

On peut montrer qu'une solution locale dans le temps est positive ou nulle, si l'état initial est ainsi.

En outre, cette solution a la propriété de régularité suivante

$$u \in C^1((0,\infty), L^p(\mathbb{R})) \cap C((0,\infty), W^{2.p}(\mathbb{R})).$$

Pour chaque $p \in [1,\infty]$.

3.2.3 Solutions en temps global:

Dans la preuve du théorème 3.3.2, nous montrons que la solution satisfait la suivante estimations a priori pour chaque $p \in [1,\infty]$:

$$\|u(.,t)\|_p \leq \|u_0\|_p \qquad \text{pour tout } \ t > 0$$

Ainsi, par un raisonnement standard, nous pouvons montrer que la solution est globale dans le temps.

3.3 Comportement auto-similaire de solutions pour un temps assez large:

Le résultat principal sur le comportement de temps de grande auto similaire des solutions aux problèmes (3.1.1) (3.1.2)

est indiqué dans le théorème suivant.

Théorème 3.2 (3.3.1) ***(Asymptotique auto-similaire).*** *Sous les hypothèses du théorème* 3.2.1*, chaque solution* $u = u(x,t)$ *du problème* (3.1.1).(3.1.2) *a une auto-similaire asymptotique du profil comme* $t \to \infty$*. Plus précisément,*

i. *si* $q > 2$*, nous avons*

$$t^{\frac{(1-1/p)}{2}} \|u(t) - M\ G(t)\|_p \qquad \textit{quand} \ \ t \to \infty \tag{3.3.1}$$

pour tout $p \in [1,\infty]$, *où*

$$M = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx$$

et $G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ *est le noyau de la chaleur.*

ii. *D'autre part, si* $q = 2$*, nous avons*

$$t^{\frac{(1-1/p)}{2}} \left\| u(t) - u_M(t) \right\|_p \ \ quand \ \ t \to \infty \tag{3.3.2}$$

pour tout $p \in [1,\infty]$, *où* $u_M(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U_M(-\frac{x}{\sqrt{t}}, 1)$ *dominée par la soi-disant la vague dite diffusion non-linéaire est definie comme la solution unique auto-similaire de la valeur initiale pour le problème de l'équation de Burgers visqueux*

$$u_t - u_{xx} + (u^2)_x \qquad\qquad pour \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{3.3.3}$$

$$u(x,0) = M\delta_0, \tag{3.3.4}$$

Où δ_0 *est la mesure de Dirac.*

Rappelons propriétés des solutions de $(3.3.3) - (3.3.4)$ *qui sera utile dans la preuve*

du théorème $3.3.1$. *Il est bien connu que la transformation de Hopf-Cole nous permet de résoudre ce problème de valeur initiale pour obtenir la solution explicite suivante*

$$u_M = (x,t) = \frac{t^{-\frac{1}{2}} \exp(-\left|x\right|^2/(4t))}{C_M + \frac{1}{2}\int_0^{x/\sqrt{t}} \exp(-\varepsilon^2/4)d\varepsilon}, \tag{3.3.5}$$

C_M *est une constante qui est déterminée de façon unique comme une fonction de* M

par la condition $\int_{\mathbb{R}} u_{M.A}(\eta,1)d\eta \ = M$. *Le point important à noter ici est que pour chaque* $M \in \mathbb{R}$

la fonction u_M *est une solution unique de l'équation* $(3.3.3)$ *dans l'espace* $C((0,\infty); L^1(\mathbb{R}))$ *ayant les propriétés*

$$\int_{\mathbb{R}} u_M(x,t)dx \ = M \qquad pour\ tout \quad t > 0$$

Et

$$\int_{\mathbb{R}} u_M(x,t)\varphi(x)dx \ \rightarrow M\ \varphi(0) \qquad en \quad t \rightarrow 0$$

Pour tous $\varphi \in C_0^\infty(R)$ $([6, Sec.4])$. *Une telle solution est appelée une solution fondamentale à la théorie linéaire et une solution de source dans le cas non-linéaire.*

3.3.1 Famille de fonctions rééchelonnés:

Dans la démonstration du théorème 3.3.1, nous étudions le comportement, comme $\lambda \rightarrow \infty$, de la famille rescaled des fonctions

$$u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \text{pour chaque} \ \ \lambda > 0 \tag{3.3.6}$$

Qui satisfont aux problèmes de valeurs initiales

$$\partial_t u_\lambda = \partial_x^2 u_\lambda - \lambda^{2-q}\partial_x u_\lambda^q \tag{3.3.7}$$

$$u_y(x,0) = u_{0,\lambda}(x) = \lambda u_0(\lambda x) \tag{3.3.8}$$

Notons que si $u = u(x,t)$ est une solution non négative du problème (3.1.1){(3.1.2) obtenu dans le Théorème3.2.1, puis en(3.2.2), et par un simple changement de variables, l'identité suivante

$$||u_\lambda(t)||_1 = ||u_0||_1 \tag{3.3.9}$$

est vrai pour tout $t > 0$ et tout $\lambda > 0$.

3.3.2 L^p -décroissante optimale de solutions:

Théorème 3.3 (3.3.2) *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, la solution du problème* (3.1.1)-(3.1.2)*satisfies*

$$||u(.,t)||_p \leq Ct^{-(1-1/p)2} ||u_0||_1$$

pour chaque $p \in [1,\infty]$, une constante $C = C(p)$ et tout $t > 0$.

Preuve. Nous esquissons la preuve pour $p = 2$, seulement. Autre $p \in [1,\infty]$ peut être traité d'une manière complètement De manière analogue, voir par exemple. $[12, Thm.2.3] et [11, Lemma5$
En multipliant l'équation (3.1.1) par u et en intégrant l'équation résultant sur $\mathbb{R}$ nous avoir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^2 dx = -\int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx \tag{3.3.10}$$

Ici, nous avons utilisé une égalité élémentaire

$$\int_{\mathbb{R}} u_x^q(x,t)u(x,t)dx = \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}} (u^{q+1}(x,t))_x dx = 0$$

Si $u(x,t) \to 0$ lors de $|x| \to \infty$

Maintenant, par l'inégalité de Nash

$$||v||_2 \leq C ||v_x||_2^{1/3} ||v||_1^{2/3} \tag{3.3.11}$$

Qui est valable pour tout $v \in L^1\ (R)$ telle que $v_x \in L^2(\mathbb{R})$, (depuis la norme L^1 de la solution est constante dans le temps par (3.2.2)), nous obtenons l'inégalité différentiel.

$$\frac{d}{dt} ||u_x(t)||_2^2 + C ||u_0||_1^{-4} (||u_x(t)||_2^2)^3 \leq 0 \tag{3.3.12}$$

Ce qui implique $||u(t)||_2 \leq Ct^{-\frac{1}{4}}$ pour tout $t > 0$ et $C > 0$ indépendante de t. ■

3.3.3 Les estimations de la famille rescaled de solutions:

A partir de maintenant, nous supposons toujours que $u = u(x,t)$ est la solution globale à temps non négatif du problème de valeur initiale(3.1.1) $-$ (3.1.2) avec u_0 satisfaisant (3.2.1). En outre, nous supposons que cette solution satisfait les estimations de décroissance suivantes

$$\|u(t)\|_p \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \tag{3.3.13}$$

pour chaque $p \in [1, \infty]$, tout $t > 0$, et C indépendant de t.

La preuve que le grand comportement dans le temps de la solution $u = u(x,t)$ est décrit soit par la solution de l'équation fondamentale de la chaleur ou par la solution auto-similaire de l'équation de Burgers visqueux est basée sur la méthode dite de mise à l'échelle qui est souvent utilisé dans l'étude des propriétés asymptotiques des solutions à l'équation d'évolution non linéaire.

Ici, pour chaque $\lambda > 0$, on désigne par $u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$, la solution du problème de la valeur initiale $(3.3.7) - (3.3.8)$. Dans ce qui suit, nous utilisons systématiquement les identités (3.3.9)ainsi

que l'estimation de décroissance (3.3.13).

Maintenant, nous prouvons une série de lemmes techniques qui devraient normalement être obtenus à appliquer le procédé de mise à l'échelle.

Lemme 3.2 (3.3.3) *pour chaque* $p \in [1, \infty]$ *il existe* $C = C(||K'||_1, ||u_0||_1) > 0$,*indépendant de* t *et de* λ, *de telle sorte que*

$$||u_\lambda(t)||_p \leq Ct^{\frac{-1}{2}(1-\frac{1}{p})} \tag{3.3.14}$$

pour tout $t > 0$ *et tout* $\lambda > 0$.

Preuve. Par le changement de variables et d'estimation (3.3.13), nous obtenons

$$||u_\lambda(t)||_p = \lambda^{1-\frac{1}{p}} \left|\left|u(.,\lambda^2 t)\right|\right|_p \leq C\lambda^{1-\frac{1}{p}}(\lambda^2 t)^{\frac{-1}{2}(1-\frac{1}{p})} = Ct^{\frac{-1}{2}(1-\frac{1}{p})}.$$

■

Lemme 3.3 (3.3.4) *pour chaque* $p \in [1, \infty)$ *il existe* $C = C(p, ||K'||_1, ||u_0||_1) > 0$,*indépendant de* t *et de* λ, *de telle sorte que*

$$||\partial_x u_\lambda(t)||_p \leq Ct^{\frac{-1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}$$

pour tout $t > 0$ *et tout* $\lambda > 0$.

Ce lemme peut être prouvé suivant le raisonnement de deux $[12, Lemma 5.2]$ *où' à partir de* $[11, Lemma 5.1]$ *ou de* $[2, Lemma 3.6]$. *Notez que l'application de l'approche par Giga & Sawada*[10] *on peut améliorer le lemme*3.3.4 *en montrant que* $\left|\left|\theta_x^k u_\lambda(t)\right|\right|_p \leq Ct^{\frac{-1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}}$ *pour chaque* $k \in N$.

La preuve de notre prochain lemme repose sur une forme du résultat de compacité Aubin-Simon que nous rappelons ci-dessous.

Théorème 3.4 (3.3.5) $([12, Theorem 5])$.*Soit* X, B *et* Y *deux espaces de Banach satisfaisant* $X \subset B \subset Y$ *avec intégration compact* $x \subset B$. *Supposons, par*$1 \leq p \leq \infty$ *et* $T > 0, qui$

- *F est bornée dans* $L^P(0, T; X)$,
  - $\{\theta_t f : f \in F\}$*est bornée dans* $L^p(0, T; Y)$.

Alors F est relativement compact dans L^p $(0, T; B)$*(et en* $C(0, T; B)$ *dans le cas* $p = \infty$*).*

Lemme 3.4 (3.3.6) *compacité dans* $L^1_{loc}(R))$ *pour tout* $0 < t_1 < t_2 < \infty$ *et pour tout* $R > 0$ *l'ensemble*$\{u_\lambda\}_{\lambda>0} \sqsubseteq C([t_1, t_2], L^1([-R, R]))$ *est relativement compact.*

Preuve. Nous appliquons le théorème 3.3.5 avec $p = \infty$, $F = \{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ et

$$X = W^{1,1}([-R, R]), \qquad B = L^1([-R, R]), \qquad Y = W^{-1,1}([-R, R])$$

tq $R > 0$ est fixe et arbitraire, et Y est le double de l'espace $W_0^{1,1}([-R, R])$.Évidemment, le plongement $X \subseteq B$ est compact par le théorème Rellich-Kondrashov.

D'après les lemmes 3.3.3 et 3.3.4 avec $p = 1$, les ensembles $\{u_\lambda\}_{\lambda>0} \subseteq L^\infty([t_1, t_2], L^1([-R, R]))$ et $\{\partial_x u_\lambda\}_{\lambda>0} \subseteq L^\infty([t_1, t_2], L^1([-R, R]))$sont bornées.

Pour vérifier la deuxième condition du critère de compacité de Aubin-Simon, il suffit de montrer qu'il existe une constante positive C indépendante de qui $\lambda > 0$ tel que $\sup_{t\in[t_1,t_2]} \|\partial_t u_\lambda\|_y \leq C$, Ici, il suffit d'utiliser l'argument de la dualité, voir $[14, Lemma 5.5]$.

Par conséquent le lemme 3.3.6 est démontré. ■

Lemme 3.5 (3.3.7) *(Compacité en* $L^1(\mathbb{R})$*). Pour chaque* $0 < t_1 < t_2 < \infty$, *l'ensemble* $\{u_\lambda\}_{\lambda>0} \subseteq C([t_1, t_2], L^1(\mathbb{R}))$ *est relativement compacte.*

Preuve.soit $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ être non négatif et satisfaire $\psi\ (x) = 0$ pour $|x| < 1$ et $\psi\ (x) = 1$ pour $|x| > 2$.

Mettez $\psi_R\ (x) = \psi\ (\frac{x}{R})$ pour tout $R > 0$. Comme u est positive ou nulle, compte tenu du lemme 3.3.6, en utilisant un argument de la diagonale standard, il suffit de montrer que

$$sup_{x\in[t_1,t_2]} \|u_\lambda(t)\psi_R\|_1 \to 0 \text{ comme } R \to \infty \text{ uniformément dans } \lambda \geq 1 \tag{3.3.15}$$

Par conséquent, en multipliant les deux côtés de l'équation (3.3.7)par ψ_R et en intégrant sur R et de 0 à t, nous complétons la preuve que dans $[12, Lemme5.6], [2, Lemme3.10]$ ■

Lemme 3.6 (3.3.8) *(État initial). Pour chaque fonction de test* $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ *il existe* $C = C(\phi, \|K'\|_1, \|u_0\|_{1,})$

Indépendant λ *de telle sorte que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u_\lambda(x,t)\phi(x)dx - \int_{\mathbb{R}} u_{0,\lambda}(x)\phi(x)dx \right| \leq C(t + t^{\frac{1}{2}}) \tag{3.3.16}$$

Preuve. Ici, il suffit à suivre $[2, Lemme3.9]$et$[12, Lemme5.7]$

Maintenant, nous sommes en mesure de prouver notre résultat principal sur le comportement de grand moment de solutions aux problèmes $(3.1.1) - (3.1.2)$.

Preuve du théorème 3.3.1. Par le lemme3.3.7, pour tout $0 < t_1 < t_2 < \infty$, la famille $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$est relativement compact dans $C([t_1, t_2], L^1(R))$ pour tout $0 < t_1 < t_2 < \infty$

Par conséquent, il existe une séquence de $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ (pas rebaptisés) et une fonction $\overline{u} \in C((0,\infty), L^1(\mathbb{R}))$ tq

$$u_\lambda \to \overline{u} \text{ dans } C([t_1, t_2], L^1(\mathbb{R})) \quad \text{comme} \quad \lambda \to \infty. \tag{3.3.17}$$

En passant à une suite, on peut supposer que

$$u_\lambda(x,t) \to \overline{u}(x,t) \text{ comme } \lambda \to \infty. \tag{3.3.18}$$

presque partout en $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$.

Maintenant, en multipliant l'équation (3.3.7) par une fonction de test $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$.
et en intégrant l'équation résultant sur $\mathbb{R}\times(0,\infty)$,nous obtenons l'identité

$$-\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty u_\lambda \phi_t dsdx = \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty u_\lambda \phi_{xx} dsdx + \lambda^{2-q}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty u_\lambda^q \phi_x dsdx \qquad (3.3.19)$$

Par conséquent, le passage à la limite $\lambda \to \infty$ à égalité (3.3.19) et en utilisant les propriétés de la séquence $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ indiqué dans (3.3.17) et (3.3.18), on obtient que $\overline{u}(x,t)$ est une solution faible de l'équation

$$\overline{u_t} = \overline{u}_{xx} - (\overline{u}^2)_x$$

Si $q = 2$, Maintenant, remarquez que, par le changement de variables et de la théorème de convergence dominée, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} u_{0,\lambda}(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(\frac{x}{\lambda})dx \to M\phi(0) \text{ comme } \lambda \to \infty$$

Par conséquent, il résulte du lemme 3.3.8 que $\overline{u}(x,0) = M\delta_0$ dans le sens de mesures bornées ainsi,

$\overline{u}$ est une solution faible du problème de valeur initiale

$$\overline{u_t} = \overline{u}_{xx} - (\overline{u}^2)_x, \qquad (3.3.20)$$

$$\overline{u}(x,0) = M\delta_0 \qquad (3.3.21)$$

Depuis problème (3.3.20) – (3.3.21) a une solution unique (voir par exemple [. 6, Sec 4]), toute la famille $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ converge vers $\overline{u}$ dans $C((0,\infty),L^1(\mathbb{R}))$.
Évidemment, si $q > 2$, cette fonction limite est une solution au problème linéaire

$$\overline{u_t} = \overline{u}_{xx}\ , \qquad (3.3.22)$$

$$\overline{u}(x,0) = M\delta_0 \qquad (3.3.23)$$

Donc, c'est le multiple de noyau de Gauss-Weierstrass

$$\overline{u}(x,t) = MG(x,t) = M\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) \tag{3.3.24}$$

Ainsi, par (3.3.17), nous avons

$$\lim_{\lambda\to\infty} \| u_\lambda(1) - \ \overline{u}(1)\|_1 = 0$$

Et, après la mise en $\lambda = \sqrt{t}$ et en utilisant le formulaire d'auto-similaire de $\overline{u}\ (x,t)$ $= t^{\frac{-1}{2}}\overline{u}(xt^{\frac{-1}{2}},1)$

Nous obtenons

$$\lim_{t\to\infty}\ \| u(t) - \overline{u}(t)\|_1 = \ 0 \tag{3.3.25}$$

La convergence de $u(.,t)$ vers l'auto-similaire du pro dans les normes L^p pour $p \in (1,\infty)$ est la conséquence immédiate de inégalité de la Holder, l'estimation de décroissance (3.3.13) avec $p = \infty$, et(3.3.25). En effet, nous avons

$$\| u(t) - \ \overline{u}(t)\|_p \le (\| u(t)\|_\infty + \| \overline{u}(t)\|_\infty)^{1-\frac{1}{p}} \| u(t) - \ \overline{u}(t)\|_1^{\frac{1}{p}} = o(t^{-\frac{(1-\frac{1}{p}}{2}}) \tag{3.3.26}$$

tq $t \to \infty$.

Pour compléter la démonstration du théorème 3.3.1, il reste à montrer la convergence en L^∞

norme. Ici, cependant, il suffit remarquer le déclin estimation$\| u_x(t)\|_2 \le Ct^{\frac{-3}{4}}$, à condition par le lemme 3.3.4 avec $\lambda = 1$, et l'identité $\|\overline{u}(t)\|_2 = t^{\frac{-3}{4}}\ \|\overline{u}(1)\|_2$ résultant de les formules explicites (3.3.24) et(3.3.5). Ainsi, par le Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inégalités et par (3.3.26) avec p = 2, on obtient

$$\begin{aligned} \| u(t) - \ \overline{u}(t)\|_\infty \ &\le \ C(\| u_x(t)\|_2 + \| \overline{u}_x(t)\|_2)^{\frac{1}{2}} \| u(t) - \ \overline{u}(t)\|_2^{\frac{1}{2}} = o(t^{-\frac{1}{2}}) \\ \text{tq } t \ &\to \ \infty. \end{aligned}$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié les solutions du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur et celle de convection diffusion, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution faible de l'équation de la chaleur et sa régularité. Nous avons également cherché les solutions dite "auto similaires" pour le problème de la chaleur, où les solutions de cette forme apparaissent naturellement, car l'équation de la chaleur admet ce type de solutions.

Enfin nous avons étudié l'existence des solutions de type auto similaire pour l'équation dite de "convection diffusion". L'existence locale et globale sont abordés.

Références

[1] BREZIN E, LE GUILLOU JC, ZINN-JUSTIN J.*complete classification of shape functions of self similar solution* Phys Rev D,pp.1540-1544,1977.

[2] P. BILER, G. KARCH, AND W. A. WOYCZY NSKI, *Critical nonlinearity exponent and self-similar asymptotics for L evy conservation laws*, *Ann. Inst. H. Poincar e Anal.Non Lineaire*, 18 (2001), pp. 613-637.

[3] DORODNITSYN A.V:*on invariant solution of the non linear heat équation with a source*, Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiziki, vol. 22,No.6 ,pp.1393-1400,1982.

[4] M. CANNONE AND G. KARCH, S*mooth or singular solutions to the Navier-Stokes system?*, J. Di erential Equations, 197 (2004), pp. 247-274.

[5] J. A. CARRILLO AND G. TOSCANI, *Asymptotic L1-decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity*, Indiana Univ. Math. J., 49 (2000), pp. 113{142.

[6] M. ESCOBEDO, J. L. V AZQUEZ, AND E. ZUAZUA, *Asymptotic behaviour and source-type solutions for a di usion-convection equation, Arch. Rational Mech. Anal.*, 124 (1993), pp. 43-65.

[7] M. ESCOBEDO AND E. ZUAZUA, *Large time behavior for convection-diffusion equations in* R^N, J. Funct. Anal., 100 (1991), pp. 119-161.

[8] L. C. EVANS, *Partial di erential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.

[9] M.-H. GIGA, Y. GIGA, AND J. SAAL, *Nonlinear partial differential equations,Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, 79, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 2010. *Asymptotic behavior of solutions and self-similar solutions.*

[**10**] Y. Giga and O. Sawada, *On regularizing-decay rate estimates for solutions to the Navier-Stokes initial value problem, in Nonlinear analysis and applications*: to V.

Lakshmikantham on his 80th birthday. Vol. 1, 2, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht,

2003, pp. 549-562.

[**11**] G. Karch, *Large-time behaviour of solutions to non-linear wave equations: higher-order asymptotics*, Math. Methods Appl. Sci., 22 (1999), pp. 1671-1697.

[**12**] G. Karch and K. Suzuki, *Spikes and diffusion waves in a one-dimensional model of chemotaxis, Nonlinearity*, 23 (2010), pp. 3119-3137.

[**13**] , *Blow-up versus global existence of solutions to aggregation equations, Applicationes Mathematicae,* to appear (2011).

[**14**] J. Simon, *Compact sets in the space $L^p(0, T;B)$*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 146 (1987), pp. 65-96.

[**15**] J. L. V azquez, *Asymptotic beahviour for the porous medium equation posed in the whole space*, J. Evol. Equ., 3 0(2003), pp. 67-118. Dedicated to Philippe B enilan.