

Remerciements

*Je tiens à remercier, en premier lieu, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.*

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

*Je tiens à remercier **Lakehali Belkacem**, directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.*

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères et ma soeur qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents

- A mes soeurs

-A mes frères.

-A toute la famille

-A toute mes amies

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

NOTATIONS

Ω	Ensemble compact
$C([a, b])$	Espace des fonctions continue sur l'intervalle $[a, b]$
E	Espace normé
H	Espace Hilbert
$\langle u, v \rangle$	Produit scalaire de u et v
A	Opérateur intégrale
A^*	Adjoint de l'opérateur A
$\omega(x)$	Fonction de poids
P_n	polynômes orthogonaux
L_n	polynome de Legendre
$K(x, y)$	Le noyau de l'intégrale
f	Fonction donnée
φ	Fonction inconnue
$\tilde{\varphi}$	Solution approchée

Table des figures

Figure 1	Page 13
Figure 2	Page 29
Figure 3	Page 34
Figure 4	Page 36
Figure 5	Page 37
Figure 6	Page 38

Liste des tableaux

Tableau 1	Page 34
Tableau 2	Page 35
Tableau 3	Page 36
Tableau 4	Page 37

Table des matières

Introduction	2
1 Concepts auxiliaires	3
1.1 Quelques définitions et rappels	3
1.1.1 Espace normé	3
1.1.2 Espace de Banach	4
1.1.3 Espace de Hilbert	4
1.1.4 Théorème de Weierstrass	6
1.2 Les polynômes orthogonaux	6
1.3 Les polynômes orthogonaux de Legendre	9
1.3.1 Propriétés générales	10
1.4 Formules de quadrature	14
1.4.1 Quadrature de Gauss-Legendre	15
2 Analyse fonctionnelle des équations intégrales	17
2.1 Généralités sur les opérateurs	17
2.1.1 Opérateurs compacts	17
2.1.2 Opérateurs intégraux compacts sur $C([a, b])$	18
2.2 Classifications des équations intégrales	18
2.2.1 Liaison entre les équations différentielles et les équations de Volterra	22
2.2.2 Existence et unicité de la solution des équation intégrales de Volterra.	23
2.3 Méthodes de résolution analytiques des équations intégrales de Volterra	24
2.3.1 Méthode des approximations successives	24

2.3.2	Méthode de développement en séries	25
2.3.3	Méthode de décomposition Adomian	27
3	Résolution numérique des équations intégrales	29
3.1	Généralités sur les méthodes de projection	29
3.2	Résolution de l'équation de Volterra par les polynômes de Legendre	31
3.2.1	Vérification Numérique	33
	Conclusion générale	38
	Bibliographie	40

Introduction

Les équations intégrales constituent aujourd'hui une importante branche de l'analyse mathématique, vaste pour qu'on puisse donner, dans une seule conférence, un exposé systématique de son développement.

Les premières équations intégrales furent obtenues par *Daniel Bernoulli* vers 1730 dans l'étude des oscillations d'une corde tendue.

Après l'introduction du noyau de Green, il fallut attendre les dernières années du XIXe siècle, avec les travaux de *Schwarz*, *Poincaré*, *Volterra* et surtout ceux de *Fredholm*, pour disposer de résultats généraux en liaison étroite avec les premiers développements de l'analyse fonctionnelle. Quelques années plus tard.

L'étude des équations intégrales conduisit *D. Hilbert* à définir l'espace qui porte son nom et à poser les premières bases de la théorie spectrale, cadre dans lequel Friesz développa la théorie des opérateurs compacts (1918). Ainsi, les équations intégrales ont joué un rôle historique important dans l'élaboration des principaux concepts de l'analyse contemporaine.

Le but de ce travail est de trouver une approximation numérique de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce par les polynômes de Legendre. Le mémoire comme suite :

Le premier chapitre aborde des notions sur l'Analyse numérique et Fonctionnelle. On va définir les polynômes orthogonaux et les polynômes de Legendre

Le deuxième chapitre présente une introduction à la théorie des opérateurs compacts et les équations intégrales et leurs classifications et on va traiter l'équation intégrale linéaire de *Volterra* de deuxième espèce, ou on démontrera l'existence et l'unicité de la solution de cette dernière et donnons quelque méthode analytique (méthode des approximations successives, méthode de développement en séries et méthode de décomposition Adomian).

Le troisième chapitre et le dernier représente le but de ce mémoire, consiste à la résolution numérique d'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce à l'aide quadrature *Gauss-Legendre*, on fait la comparaison entre la solution approchée et la solution exacte.

Chapitre 1

Concepts auxiliaires

1.1 Quelques définitions et rappels

L'analyse numérique est une branche des mathématiques appliquées elle s'intéresse au développement d'outils et de méthodes numériques pour le calcul d'approximations des solutions de problèmes de mathématiques qu'il serait difficile, voire impossible, de les obtenir par des moyens analytiques .

Dans ce chapitre on vise essentiellement à rappeler quelques définitions et propriétés de base dont nous aurons besoin dans la suite de ce travail.

1.1.1 Espace normé

Définition 1.1.1

soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), on appelle norme sur E une application de E dans \mathbb{R}^+ habituellement noté $\| \cdot \|$ vérifiant pour tout $u, v \in E$ et tout $\lambda \in K$ les conditions suivantes:

- 1 $\|u\| = 0 \iff u = 0$
- 2 $\|\lambda u\| = \|\lambda\| \|u\|$
- 3 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Exemple 1.1.1 Soit $C([a, b], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

Pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b f(x)dx \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $C([a, b], \mathbb{R})$

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.1.2 :

On appelle espace de Banach tout espace normé E dont toute suite de Cauchy (x_k) d'éléments de E converge c -à- d :

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists N \geq 1) \forall p, q \geq N \implies \|x_p - x_q\| \leq \epsilon. \implies \exists x \text{ tel que } \|x_n - x\| < \epsilon$$

Remarque 1.1.1

L'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé $I = [a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), noté $C[I]$ et muni de la norme

$$\|\varphi\| = \sup \{\varphi(x)\}, \quad x \in I,$$

est un espace de Banach.

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.1.3

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe)

une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $u, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$

$$1 \quad \langle u, u \rangle \geq 0$$

$$2 \quad \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$$

$$3 \quad \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$4 \quad \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$5 \quad \langle \overline{u}, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

Exemple 1.1.2

Produit scalaire sur \mathbb{C}^n : $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$

Produit scalaire sur $\ell_2(\mathbb{N})$: $\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \overline{y_j}$ (ensemble des suites)

Produit scalaire sur $L_2(\mathbb{R})$: $\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$. (au sens des fonctions sommables)

Définition 1.1.4

Un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induit par le produit scalaire. En d'autres termes un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire

Définition 1.1.5

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien. .

Espace L_p

Les espaces L_p sont des espace de fonctions dont la puissance p , au sens de Lebesgue.

$$L_p(a, b) = \left\{ f : \int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

Définition 1.1.6

On note par $L_p(a, b)$ ($1 \leq p \leq \infty$) l'espace des fonctions f mesurables intégrables au sens de Lebesgue à valeurs réelles dans \mathbb{R} telle que la norme $\|f\|_p < +\infty$, où

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

et pour $p = +\infty$ on a $\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

et $L^\infty(a, b)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur (a, b)

Proposition 1.1.1

$(L_p(a, b), \|\cdot\|_{L_p(a,b)})$ est un espace de Banach. En particulier, si $p = 2$ alors :

$$L_2(a, b) = \left\{ f : \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$$

$(L_2(a, b), \|\cdot\|_{L_2(a,b)})$ est un espace de Hilbert, où $\|\cdot\|_2$ est le produit scalaire défini comme suite

$$\langle f, g \rangle_{L_2(a,b)} = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad \forall f, g \in L_2(a, b)$$

Remarque 1.1.2

$L_2(I, \mathbb{R})$ est le seul espace qui est de Hilbert dans l'espace de $L_p(I, \mathbb{R})$

Remarque 1.1.3 (I, \mathbb{R})

Définition 1.1.7

On dit que deux vecteurs u et v d'un espace de Hilbert sont orthogonaux si:

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \text{On note } u \perp v$$

1.1.4 Théorème de Weierstrass

Théorème de Weierstrass est fondamental en théorie de l'approximation. Ce Théorème nous permet d'approcher toute fonction continue dans un intervalle $[a, b]$ par un polynômes

Théorème 1.1.1

Pour tout fonction continue sur \mathbb{R} . Il existe une suite des polynômes qui tend vers f uniformément sur \mathbb{R} .

Preuve. voir [3] ■

1.2 Les polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux jouent le rôle le plus important dans la méthode spectral ,il est donc nécessaire de disposer d'une étude approfondie de leurs propriétés

Définition 1.2.1

Soit $\omega : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\omega(x) > 0, \forall x \in I$. On considère $\mathbb{R}_p[X]^2$ des polynômes de module carré intégrable pour le poids $\omega(x)$, muni du produit scalaire :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}_p[X]^2 \quad \langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)\omega(x)dx.$$

Proposition 1.2.1

Soit $(P_i)_{i \geq 0}$ est une famille de polynômes a degré échelonné donc c'est une famille libre de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ comportant $n + 2$ vecteurs.

On en déduit que cette famille est une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, il existe donc des réels a_n, b_n tels que

$$P_{n+1} = (x - a_n) P_n - b_n P_{n-1}$$

Avec

$$a_n = \frac{\int_a^b x P_n^2(x) \omega(x) dx}{\int_a^b P_n^2(x) \omega(x) dx} \quad b_n = \frac{\int_a^b x P_n(x) P_{n-1}(x) \omega(x) dx}{\int_a^b P_{n-1}^2(x) \omega(x) dx}$$

Preuve. voir [7] ■

Définition 1.2.2

Soit $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ et ω une fonction sur \mathbb{R} telle que l'application :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}_p[X]^2 \quad \langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)\omega(x)dx.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$.

Définition 1.2.3

On dit que la famille de polynômes $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes sont orthogonaux ssi

1. le degré de P_i est i pour tout entier i .
2. $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad i \neq j \implies \langle p_i, p_j \rangle = 0$.

Proposition 1.2.2

soit $(P_i)_{i \geq 0}$ une famille de polynômes orthogonaux alors

1. (p_0, p_1, \dots, p_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout entier n .
2. $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geq p \implies p_n \in (\mathbb{R}_p[X])^\perp$

Trois exemples de produit scalaire pour deux polynômes p et q

$$1. \langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

$$2. \langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$3. \langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)q(x)e^{-x^2} dx.$$

Avec le premier exemple, on définit les polynômes de Legendre, puis avec le second les polynômes de Tchebichev et enfin avec le troisième les polynômes d'Hermitte.

Les familles de polynômes orthogonaux vérifient toujours deux propriétés particulièrement intéressantes :

Proposition 1.2.3 (*Existences de racines réelles*)

Soit $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes orthogonaux alors tout polynôme P_n $n \geq 1$ admet n racines distinctes, toutes réelles et situées à l'intérieur de l'intervalle d'intégration $[a, b]$.

Preuve.

Comme $\langle P_n, 1 \rangle = 0$ le polynôme P_n admet au moins une racine réelle avec changement de signe. Soit a_1, \dots, a_p les racines réelles de P_n avec changement de signe, Alors

$$P_n(x) = \prod_{1 \leq i \leq p} (x - a_i) Q(x)$$

et Q est un polynôme de signe constant. On pose $R = \prod_{1 \leq i \leq p} (x - a_i)$. On montre que $p = n$ en raisonnant par l'absurde c'est-à-dire

on suppose que $p < n$, alors $\langle P_n, R \rangle = 0$ ce qui est impossible puisque le produit $P_n R$ est de signe constant sur le domaine d'intégration. Donc $p = n$. ■

1.3 Les polynômes orthogonaux de Legendre

Les polynômes orthogonaux les plus simples sont les polynômes de Legendre pour lesquels l'intervalle d'orthogonalité est $] -1, 1[$ avec fonction de poids $\omega(x) = 1$.

La formule de récurrence de Bonnet permet rapidement d'obtenir l'expression du polynôme de Legendre d'ordre $n + 1$ à partir de ceux d'ordres n et $n - 1$. Pour tout entier $n \geq 1$ voir [2]

Définition 1.3.1

On appelle *équation de Legendre* de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

où α en général est un nombre réel.

Définition 1.3.2

On appelle *polynômes de Legendre de degré n* le polynômes suivant

$$\begin{cases} L_0(x) = 1, L_1(x) = x \\ (n + 1)L_{n+1}(x) = (2n + 1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Théorème 1.3.1

La suite des polynômes de Legendre L_n est une base orthogonale de l'espace $L^2((-1, 1), dx)$

Toute fonction f de $L^2((-1, 1), dx)$ se développe de façon unique sous la forme

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) L_n \quad \text{Avec } c_n(f) = \frac{(2n + 1)}{2} \langle f, L_n \rangle$$

où la convergence de la série a lieu en moyenne quadratique

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=0}^N c_n(f) L_n \right\| = 0$$

on a de plus l'égalité de Parseval

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n(f)|^2}{2n + 1}$$

On notera que le polynôme de Legendre de f de degré n donné par

$$\varrho f(x) = \sum_{k=0}^n c_k(f) L_k(x)$$

Preuve. voir [2] ■

Remarque 1.3.1

Réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de f par des polynômes de degré inférieur ou égal à n

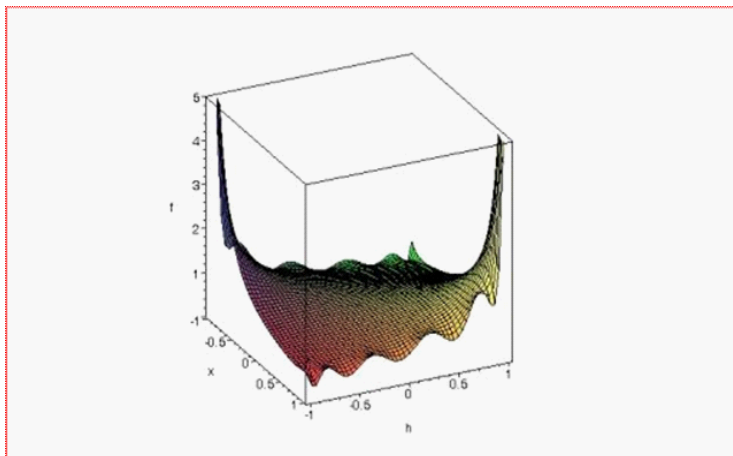
On notera aussi que si f est paire (resp. impaire), son développement ne fera intervenir que les polynômes de Legendre d'indice pair (resp. impair).

1.3.1 Propriétés générales**1 Fonction génératrice**

La fonction génératrice des polynômes de Legendre est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n L_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}} \quad |x| \leq 1.$$

Remarque 1.3.2 Cette expression intervient notamment en physique, par exemple dans le développement à grande distance du potentiel (développement multipolaire).



Fonction génératrice de polynôme de Legendre $L_3(x)$

2. Orthogonalité

les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $\omega(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1, +1]$

$$\int_{-1}^{+1} L_n(x) L_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

où $\delta_{n,m}$ est le symbole de Kronecker.

$$\int_{-1}^{+1} L'_n(x) L'_m(x) (1-x^2) dx = \frac{2}{2n+1} \lambda_n \delta_{n,m}$$

En particulier, Le carré de la norme, Dans $L_2([-1, +1])$ est

$$\|L_n\|_2 = \left(\int_{-1}^{+1} L_n^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

$$\int_{-1}^x L_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2n+1} (L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)) \quad n \geq 1$$

3. Propriété de Symmetric

$$L_n(-x) = (-1)^n L_n(x), L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$$

De plus, nous avons l'uniforme lié

$$|L_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1], n \geq 0.$$

4. Relations de récurrence dérivés

$$(2n+1) L_n(x) = L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x), n \geq 1$$

$$L'_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ impair}}}^{n-1} (2k+1) L_k(x),$$

$$L''_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ pair}}}^{n-1} \left(k + \frac{1}{n} \right) (n(n+1)) - k(k+1) L_k(x),$$

$$(1-x^2) L'_n(x) = \frac{n(n+1)}{2n+1} (L_{n-1}(x) - L_{n+1}(x)).$$

5. Les dix premiers polynômes de Legendre sont

$$L_0(x) = 1.$$

$$L_1(x) = x.$$

$$L_2(x) = (3x^2 - 1)/2.$$

$$L_3(x) = (5x^3 - 3x)/2.$$

$$L_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8.$$

$$L_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8.$$

$$L_6(x) = (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16.$$

$$L_7(x) = (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)/16.$$

$$L_8(x) = (6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)/128.$$

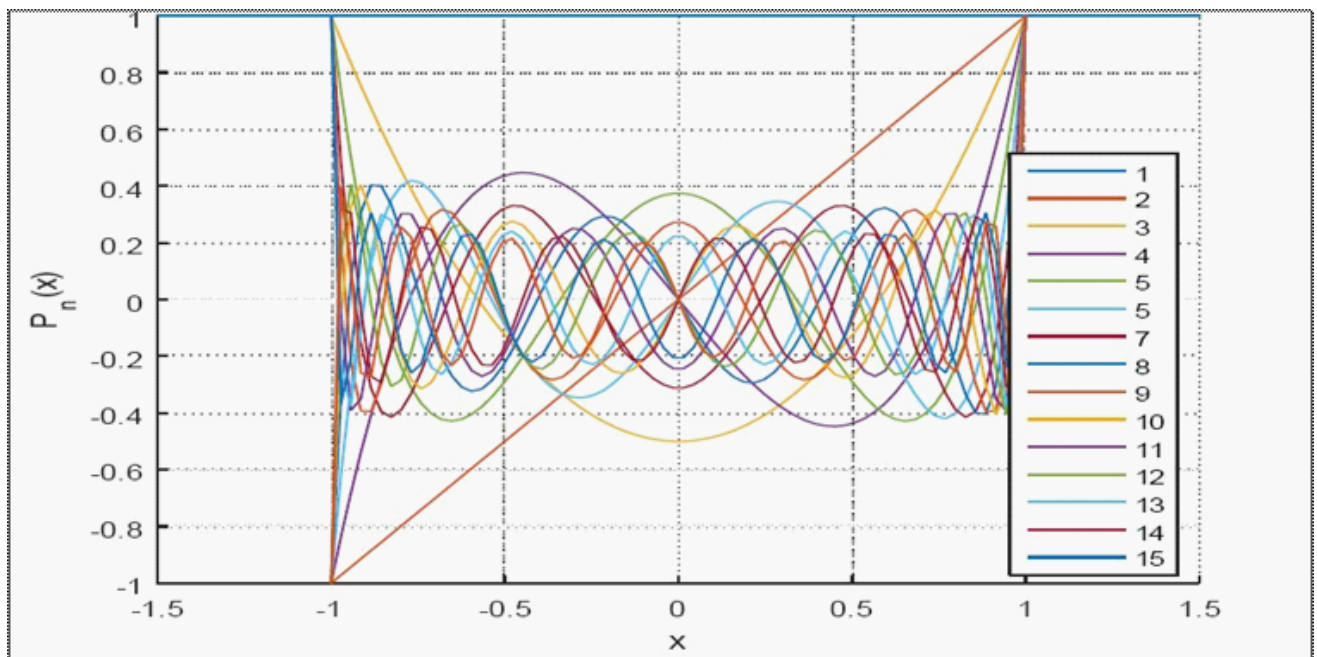
$$L_9(x) = (12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)/128.$$

$$L_{10}(x) = (46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)/256.$$

6. Formule de Rodrigues

En prenant pour condition de normalisation $L_0(x) = 1$, le polynôme $L_n(x)$ peut s'exprimer en utilisant la formule de Rodrigues :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$



Les 15 premiers polynômes de Legendre

1.4 Formules de quadrature

Les méthodes d'intégration numériques permettent d'évaluer des intégrales de fonctions dont les valeurs sont connues en un nombre fini de points.

Soit φ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Chaque approximation de

$$I = \int_a^b \varphi(x) dx$$

est dite formule de quadrature. Une formule de quadrature classique contient les valeurs $\varphi(x_i)$ de la fonction φ dans le support $[a, b]$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. On note la formule de quadrature par $Q_n(\varphi) = \sum_{i=1}^n \omega_i \varphi(x_i)$

Les coefficients ω_i sont appelés les poids de la formule de quadrature et les noeuds x_i sont les poids de la subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < b$ de de l'intervalle $[a, b]$

L'erreur de quadrature est donnée par

$$E(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) dx - Q_n(\varphi) \quad \text{pour } \varphi \in C([a, b])$$

Définition 1.4.1

On dit qu'une formule de quadrature est d'ordre m , si la formule approchée est exacte pour tout polynôme de degré m ie. si $\varphi \in P_n$.

Définition 1.4.2

Une méthode de quadrature Q_n est dite :

(i) *Convergente*, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) dx \quad \text{pour tout } \varphi \in C([a, b])$$

(ii) *Consistante*, s'il existe un sous ensemble dense $\nu \subset C([a, b])$ de fonctions continues telles que la formule de quadrature $Q_n(\varphi)$ converge vers l'intégrale I .

$$Q_n(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) dx \quad \text{pour tout } \varphi \in C([a, b])$$

(iii) Stable, si

$$\sup \left\{ \sum_{i=0}^n |\omega_i| \mid i \in \mathbb{N} \right\} < \infty$$

La norme de la formule de quadrature $Q_n(\varphi)$ est

$$\|Q_n(\varphi)\| = \sum_{i=0}^n |\omega_i|$$

La condition de stabilité prend alors, la forme

$$\sup \{ \|Q_n(\varphi)\| : n \in \mathbb{N} \} < \infty$$

Théorème 1.4.1 (de convergence)

Une méthode de quadrature $Q_n(\varphi)$ est dite convergente si et seulement si elle est stable et consistante.

Preuve. voir ref.[15] ■

1.4.1 Quadrature de Gauss-Legendre

Pour le problème d'intégration le plus classique, on utilise la méthode de Gauss-Legendre.

Il s'agit d'intégrer la fonction φ sur le segment $[-1, 1]$.

Elle prend la forme :

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n \omega_i \varphi(x_i)$$

où

• x_i sont les racines du n - ième polynôme de Legendre, $[L_n(x)]$.

• ω_i les poids : $\omega_i = \frac{2}{(1-x_i^2) [L'_{n+1}(x_i)]^2}$ $0 \leq i \leq n$.

Théorème 1.4.2

On peut obtenir ω_i et x_i à partir la décomposition en valeurs propres de la matrice de Jacobi suivante

$$\begin{bmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & \dots & \dots \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \sqrt{b_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sqrt{b_M} \\ \dots & \dots & \sqrt{b_M} & a_M \end{bmatrix}$$

où

$$a_j = 0, b_j = \frac{j^2}{4j^2 - 1} \quad j \in \mathbb{N}$$

les valeurs et les vecteur propres de cette matrice sont les noeuds et poids c'est pour cette raison qu'on appelle cette méthode(méthode spectrale).

Preuve. voir ref [7] ■

Remarque 1.4.1

Il y a d'autres méthodes de quadrature de Gauss: Méthodes de Gauss-Lobatto, Gauss-Radau, voir [2]

Chapitre 2

Analyse fonctionnelle des équations intégrales

2.1 Généralités sur les opérateurs

2.1.1 Opérateurs compacts

Définition 2.1.1

(Opérateur compact) Un opérateur linéaire $A : E \xrightarrow{A} F$ entre deux espaces normés est dit compact si l'image de la boule unité B_E de E est relativement compacte, ie si $\overline{A(B_E)}$ est compacte. Ceci est équivalent à dire que pour toute suite bornée (φ_n) de E , on peut extraire de $(A\varphi_n)$ une suite convergente dans F .

Quelques propriétés

Corollaire 2.1.1

Soit (A_n) une suite d'opérateurs continus de rangs finis de X dans

E et soit A un opérateur linéaire tel que $\|A_n - A\| \rightarrow 0$. alors A est un compact.

Théorème 2.1.1

Un opérateur de E dans F est compact si, et seulement si, il est limite d'une suite d'opérateurs de rang finis.

Théorème 2.1.2

Soit (A_n) une suite d'opérateurs compact dans un espace de Banach X , convergent en norme vers un opérateur A , alors l'opérateur A est aussi compact.

Théorème 2.1.3

A est un opérateur compact et B un opérateur borné, les opérateurs AB et BA sont compacts.

Preuve. pour les théorèmes (2.1.1) et (2.1.2) et (2.1.3) voir [9] ■

2.1.2 Opérateurs intégraux compacts sur $C([a, b])$

Soit $K : C([a, b]) \times C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'opérateur linéaire défini sur $C[a, b]$ par la formule suivante

$$A : \varphi \in [a, b] \rightarrow A\varphi \in C[a, b]$$

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu K

Remarque 2.1.1

Il existe des opérateurs non compacts comme par exemple les opérateurs d'Abel et opérateurs Intégré de Wiener-Hopf.

Opérateur adjoint

Définition 2.1.2

On dit que deux opérateur $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ et $B : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ sont adjoints s'ils vérifient :

$$\forall (\varphi, \psi) \in C[a, b]^2 \quad \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, B\psi \rangle$$

et on note l'adjoint de A par $A^* = B$.

2.2 Classifications des équations intégrales

Les équations intégrales ont un caractère fort différent des équations différentielles que l'on rencontre dans la plus part des phénomènes physiques .

Nous allons voir dans ce chapitre les classifications de les équation intégrales et quelques méthodes d'approximations .

Définition 2.2.1

Une équations intégrales est une équation de la forme suivante :

$$\varphi(x) - \lambda \int_I K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad \forall x, y \in I \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.2.1)$$

où f est une fonction donnée, λ est un scalaire et $\varphi(x)$ la fonction inconnue, I est un ensemble fermé ,borné et mesurable et K est le noyau de l'équation intégrale

Remarque 2.2.1

Si $f(x) \neq 0$ l'équation(2.2.1) est dite équation intégrale non homogène

Si $f(x) = 0$ l'équation(2.2.1) est dite équation intégrale homogène

1. Équation intégrale de Fredholm

A) Equation de Fredholm du première espèce

L'une des équations intégrales les plus simples est l'équation intégrale de Fredholm du première espèce :

$$f(x) = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \quad (2.2.2)$$

où φ est la fonction inconnue, f et K sont des fonction connues, Les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équation de Fredholm.

B) Equation de Fredholm du seconde espèce

Si la fonction inconnue apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale, alors il s'agit de l'équation intégrale de Fredholm du second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \quad (2.2.3)$$

Le paramètre λ est un facteur inconnu, qui joue le même rôle que la valeur propre en algèbre linéaire.

2. Equation intégrale de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau K est tel que

$$K(x; y) = 0 \quad \text{pour} \quad x > y$$

A) Equation de première espèce

une équations à inconnue $\varphi(x)$ de la forme :

$$\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (2.2.4)$$

B) Equation de seconde espèce

On appelle équation intégrale linéaire de seconde espèce non homogène une équation à inconnue $\varphi(x)$ par la form suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy \quad (2.2.5)$$

3. Equations intégrales de Volterra-Fredholm

Equation intégrale de Volterra-Fredholm, est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints, apparaît dans une équation intégrale.

On appelle équation intégrale de volterra-Fredholm une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K_1(x, y)\varphi(y) dy + \lambda \int_a^b K_2(x, y)\varphi(y) dy \quad (2.2.6)$$

où $K_1(x, y)$ et $K_2(x, y)$ sont les noyaux de l'équation.

Notez que la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît dans les intégrales de Volterra et Fredholm et à l'extérieur les deux intégrales.

4. Equations intégrales singulières

Une équation intégrale singulière est défini comme intégrale avec les limites d'intégration infinies ou lorsque le noyau de l'intégrale devient sans limite à un certain point dans l'intervalle.

La forme standard de cette équation est :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y)\varphi(y)dy$$

5. Les équations intégro-différentielles

Dans ce type d'équation la fonction inconnue $\varphi(x)$ se produit dans un côté comme un dérivé ordinaire, et apparaît de l'autre côté sous le signe.

- Equations intégro-différentielles de Volterra

$$\varphi^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y) dy \quad (2.2.7)$$

$$\text{où } \varphi^{(k)}(x) = \frac{d^k \varphi}{dx^k}, K = 1, 2, 3 \dots n$$

- Equation intégro-différentielles de Fredholm

$$\varphi^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy \quad (2.2.8)$$

$$\text{où } \varphi^{(k)}(x) = \frac{d^k \varphi}{dx^k}, K = 1, 2, 3 \dots n.$$

- Equations Intégro-différentielles de Volterra-Fredholm

$$\varphi^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K_1(x, y)\varphi(y) dy + \int_a^b K_2(x, y)\varphi(y) dy$$

$$\text{où } \varphi^{(k)}(x) = \frac{d^k \varphi}{dx^k}, K = 1, 2, 3 \dots n.$$

2.2.1 Liaison entre les équations différentielles et les équations de Volterra

Soit l'équation différentielle ordinaire d'ordre n

$$\frac{dy^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x) \quad (2.2.9)$$

avec comme conditions initiales (n valeurs initiales)

$$y(\alpha) = c_0, y'(\alpha) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(\alpha) = c_{n-1} \quad (2.2.10)$$

telles que les fonctions $a_i(x)$; $i = 1; 2; \dots, n$ et F sont définies et continues sur $[a; b]$. Alors les équations (2.2.9); (2.2.10) sont équivalentes à l'équation de Volterra de deuxième espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy$$

où

$$\begin{aligned} K(s, t) &= - \sum_{k=1}^n a_k(s) \frac{(s-t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ f(s) &= F(s) + c_{n-1} a_1(s) + [(x-x_0) c_{n-1} + c_{n-2}] a_2(s) + \dots + \\ &\quad \left[\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} c_{n-1} + \dots + (s-x_0) c_1 + c_0 \right] a_n(s) \end{aligned}$$

i.e. nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Exemple 2.2.1

Soit l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 0$$

et aux conditions initiales

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Posons

$$y'' = \varphi(x)$$

Alors

$$y' = \int_0^x \varphi(t) dt + y'(0) \implies y = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + 1.$$

Portons dans l'équation différentielle donnée, il vient

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t) dt + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + 1 = 0$$

ou

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t) \varphi(t) dt$$

2.2.2 Existence et unicité de la solution des équation intégrales de Volterra.

Théorème 2.2.1

Soit $K(x, y)$ est une fonction continue pour $x, y \in [a, b]$ alors l'équation de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y) dy \quad a \leq x \leq b$$

admet une solution unique φ pour tout $f \in L^2[a, b]$ et λ dans \mathbb{R} .

Théorème 2.2.2

Soit l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_a^x K(x, y)\varphi(y) dy = f(x)$$

telles que f, K des fonctions continues, dérivables sur $[a, b]$, si

$$K(x, x) \neq 0 \text{ et } \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < +\infty$$

Alors, il existe une solution unique et continue de l'équation de Volterra de première espèce

2.3 Méthodes de résolution analytiques des équations intégrales de Volterra

Cette partie, on traite l'équation intégrale non homogène de Volterra du second espèce de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy \quad 0 \leq x \leq a \quad (2.3.1)$$

où le noyau $K(x, y)$, $f(x)$ se sont des fonctions continues, et λ un paramètre. La fonction $\varphi(x)$ doit être déterminée; $x \in [0, a]$

Il existe une multitude de techniques de résolution pour faire face aux équations intégrales de Volterra. L'équation intégrale de Volterra du seconde espèce peut être facilement résolue en utilisant la méthode de Picard

2.3.1 Méthode des approximations successives

Prenons une fonction $\varphi_0(x)$ continue dans $[0, a]$. (Notons qu'un bon choix de l'approximation initiale est su
Substituons $\varphi_0(x)$ dans (2.3.1)

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi_0(y) dy \\ \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi_1(y) dy \end{aligned}$$

En continuant le processus on obtient une suite:

$$\varphi_0(x), \varphi_1, \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x)$$

où

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy$$

Les fonction $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont ainsi définies et continues sur le segment $[0, a]$ d'après la théorème du point fixe. (voir ref [2]) $\varphi_n(x)$ converge pour $n \rightarrow \infty$, vers la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégrale.

Exemple 2.3.1

Soit l'équation intégrale de Volterra suivante : $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(y) dy$.

En posant $\varphi_0(x) = 0$ Du moment que $\varphi_0(x) = 0$, on a $\varphi_1(x) = 1$. puis

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x 1 dy = 1 + x$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + y) dy = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi_4(x) = 1 + \int_0^x (1 + y + \frac{y^2}{2}) dy = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Par récurrence

$$\varphi_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Donc e^x est la solution de l'équation.

2.3.2 Méthode de développement en séries

C'est une méthode simple à mettre en œuvre par machine Cette méthode, comme sous le nom : méthode de série de Frobenius, qui on la pratique souvent dans les équations différentiels (voir ref. [1]) la méthode donne une solution analytique

ie la solution $\varphi(x)$ admet une développement de *Taylor* au voisinage de zéro

la solution peut écrite sous la forme

$$\varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.3.2}$$

où les coefficients a et x sont des constantes qui doivent être déterminés.

Remplacent l'équation (2.3.2) dans l'équation (2.3.1) On trouve

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n dy \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) a_0 dy + \int_0^x K(x, y) a_1 y dy \\ &\quad + \int_0^x K(x, y) a_2 y^2 dy + \dots + \int_0^x K(x, y) a_n y^n dy + \dots \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Après le calcul des intégrales (2.3.1) , En comparant les coefficients des deux membres de l'équation(2.3.1) on trouve les a_n et par conséquent en remplaçant dans la solution

$$\varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Exemple 2.3.2

Soit l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = 1 + 2\sin x - \int_0^x \varphi(y) dy$$

Nous supposons que la solution sous la forme de série $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ remplaçant donc la série dans l'équation et nous avons la série de Taylor de $\sin x$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \\ &= 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de la même puissance de x donnent l'ensemble de valeurs suivant :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2 - a_0$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2}$$

$$a_3 = -\frac{2}{3!} - \frac{a_2}{3!}$$

$$a_4 = -\frac{a_3}{4!}$$

Etc. Ainsi, les valeurs des coefficients peuvent être calculées pour être

$$a_0 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{3!}, a_4 = -\frac{1}{4!}$$

Par conséquent , la solution est donnée par

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos(x) + \sin(x) \end{aligned}$$

2.3.3 Méthode de décomposition Adomian

La méthode adomian peut être appliquée dans les équations intégrales linéaire et non linéaire et même les équation intégro-différentielle. Cette méthode a été introduite par George Adomian elle ressemble à la méthode précédente.

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (2.3.4)$$

avec $\varphi_0(x)$ comme le terme en dehors du signe intégral.

donc

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

Substituer l'équation (2.3.5) dans l'équation (2.3.1) rendements

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y) \right\} dy$$

Les composantes $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) \dots$ de la fonction inconnue $\varphi(x)$ peut être complètement déterminée d'une manière de récurrence si nous fixons

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x) \\ \varphi_1(x) &= \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi_0(y) dy \\ \varphi_2(x) &= \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi_1(y) dy \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

etc. Cet ensemble d'équations (2.3.5) peut être écrit comme système de récurrence

suiivante:
$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x) \\ \varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi_n(y) dy \end{cases}$$

on va illustrer cette technique par l'exemple suivant:

Exemple 2.3.3

Soit l'équation intégrale de Volterra suivante $\varphi(x) = x + \int_0^x (y-x)\varphi(y)dy$

Considérons la solution sous la forme de la série $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$.

Ensuite Substituant cette série dans l'équation donnée, nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = x + \int_0^x (y-x) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y) dy.$$

Maintenant, décomposant les différents termes de la manière suivante, nous obtenons un ensemble de solutions

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \int_0^x (y-x)\varphi_1(y)dy \\ &= \int_0^x (y-x) \left(-\frac{y^3}{3!}\right) dy \\ &= \frac{x^5}{5!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \int_0^x (y-x)\varphi_1(y)dy \\ &= \int_0^x (y-x) \left(-\frac{y^3}{3!}\right) dy \\ &= \frac{x^5}{5!} \end{aligned}$$

En continuant de cette façon, nous obtenons une série $\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sin x$

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrales

Généralement la solution des équations intégrales son très difficiles à résoudre, voir impossible.

La solution doit être cherchée dans les espaces $C([a, b], \|\cdot\|_\infty)$ ou $L^2([a, b])$ de dimension infinie

Dans les méthodes de calcul numériques des équations intégrales de type de Fredholm ou de Volterra apparaissent des intégrales régulières qui sont généralement calculées par les schémas classiques de type quadrature de Gauss où on peut trouver une discussion sur le choix du nombres de noeuds à utiliser pourévaluer approximativement une intégrale.

Il existe de nombreuses méthodes de résolution des équations intégrales. On ne cite que quelques une.

3.1 Généralités sur les méthodes de projection

Les méthodes de projection comprend la méthode de collocation, la méthode des moments, la méthode de Galerkin et les procédures des moindres carrées Voir ref [4].

Avant d'étudier des méthodes de projection particulières, donnons quelques résultats relatifs à l'approximation par projection. On se donne un opérateur borné

$A : X \longrightarrow X$ d'un espace de Banach X , ainsi qu'une suite de sous espaces $X_n \subset X$ de dimension finie n . Soit alors $P_n : X \longrightarrow X_n$ un projecteur sur X_n . Ceci signifie que $P_n \neq 0$ vérifie

$$\forall \varphi \in X_n \quad P_n \varphi = \varphi$$

Pour expliciter les systèmes linéaires obtenus, il suffira d'écrire φ_n dans la base des $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$:

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j L_j \tag{3.1.1}$$

Définition 3.1.1 (*Méthode de projection*)

On considère, pour $A : X \longrightarrow X$ continu et $f \in X$, l'équation

$$A\varphi = f, \quad \text{pour } \varphi \in X \tag{3.1.2}$$

On approxime cette équation par l'équation :

$$P_n A \varphi_n = P_n f \quad \text{pour } \varphi_n \in X_n \tag{3.1.3}$$

Cette méthode de projection est dite convergente si il existe un rang n_0 à partir duquel l'équation (3.1.3) admet une unique solution φ_n , et si $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ où φ est

l'unique solution de (3.1.2)

Méthode de collocation

Dans la suite de l'énoncé, on note $\tilde{\varphi} = \varphi - A\varphi$, où A est notre opérateur à noyau. On cherche donc à résoudre, pour $f \in C[a, b]$, le problème :

$$\varphi - A\varphi = f \tag{3.1.4}$$

$$\tilde{\varphi} \iff f \tag{3.1.5}$$

La méthode de collocation est la méthode la plus simple à mettre en oeuvre. Il s'agit de réaliser à l'aide d'une fonction $\tilde{\varphi}_n \in X_n$ une interpolation de la fonction f en n points x_1, \dots, x_n de $[a, b]$ On force donc la fonction $\tilde{\varphi}_n$ à valoir la même chose que f , mais uniquement en un nombre fini de points. Cela se traduit par l'équation :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \tilde{\varphi}_n(x_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{L}_i(x_j) = f(x_j) \tag{3.1.6}$$

De façon plus théorique, il s'agit juste de la projection de notre équation (3.1.4) sur X_n grace à l'opérateur P_n , exactement comme décrit par l'équation (3.1.3).

Une fois écrite φ_n dans la base des L_i comme en (3.1.1), on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \widehat{L}_1(x_1) & \dots & \widehat{L}_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \widehat{L}_1(x_n) & \dots & \widehat{L}_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \dots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

Preuve. voir [2] ■

3.2 Résolution de l'équation de Volterra par les polynômes de Legendre

Notre objectif est de trouver une solution approchée à la solution exacte de l'équation de Volterra de 2^{ème} espèce en utilisant la méthode du Gauss-Legendre.

Donc on doit utiliser la technique de la méthode de Gauss-Legendre pour trouver une solution approchée $\tilde{\varphi}(x)$.

Soit l'équation de Volterra de 2^{ème} espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,y)\varphi(y)dy \quad x \in [0,1] \quad , \quad \lambda = 1 \quad (3.2.1)$$

d'après la quadrature de Gauss-Legendre. on a :

$$\varphi(x) \simeq \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x) \quad (3.2.2)$$

où L_i les polynômes de Legendre et $\alpha_i, i = 0, 1, \dots, n$ sont inconnus, on remplace ceci dans l'équation (3.2.1), on trouve

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x) \simeq f(x) + \int_0^x K(x,y) \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(y) dy \quad (3.2.3)$$

et

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x) - \int_0^x K(x,y) \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(y) dy - f(x) \quad (3.2.4)$$

3.2. Résolution de l'équation de Volterra par les polynômes de Legendre

Pour résoudre Ce système, il faut déterminer les racine des $j^{ième}$ polynômes de Legendre tel que

$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, j = 0, 1, \dots, n$ et les x_j sont des racine de $j^{ième}$ polynômes de Legendre alors,

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) \simeq f(x_j) + \int_0^{x_j} K(x_j, y) \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(y) dy \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Puisque les $x_j \in]-1, 1[$, donc il faut utilisé un changement de variable.

$$\begin{aligned} \text{On pose } y(t) &= \frac{x_j(1+t)}{2} \implies dy = \frac{x_j}{2} dt \\ &\iff \begin{cases} \text{Si } t = -1 \implies y(-1) = 0 \\ \text{Si } t = 1 \implies y(1) = x_j \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

D'après ce changement on obtient

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) \simeq f(x_j) + \frac{x_j}{2} \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_{-1}^1 K(x_j, \frac{x_j(1+t)}{2}) L_i\left(\frac{x_j(1+t)}{2}\right) dt, j = 0, 1, \dots, n \quad (3.2.6)$$

En utilisant la méthode de Gauss-Legendre pour approches l'intégrale par une somme finie, c'est-à-dire

$$\int_{-1}^1 K(x_j, \frac{x_j(1+t)}{2}) L_i\left(\frac{x_j(1+t)}{2}\right) dt \simeq \sum_{k=1}^n \omega_k K(x_j, \frac{x_j(1+x_k)}{2}) L_i\left(\frac{x_j(1+x_k)}{2}\right) \quad (3.2.7)$$

On remplace (3.2.7) dans l'équation (3.2.6) on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) &\simeq f(x_j) + \frac{x_j}{2} \sum_{i=0}^n \alpha_i \sum_{k=1}^n \omega_k K(x_j, \frac{x_j(1+x_k)}{2}) L_i\left(\frac{x_j(1+x_k)}{2}\right), j = 0, 1, \dots, n \\ f(x_j) &\simeq \sum_{i=0}^n \alpha_i \left[L_i(x_j) - \frac{x_j}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k K(x_j, \frac{x_j(1+x_k)}{2}) L_i\left(\frac{x_j(1+x_k)}{2}\right) \right], j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Notons que

$$L_i(x_j) = L_{ij}, f(x_j) = f_j, K(x_j, \frac{x_j(1+x_k)}{2}) = K_{j, \frac{j(1+k)}{2}}, L_i\left(\frac{x_j(1+x_k)}{2}\right) = L_{i, \frac{j(1+k)}{2}}$$

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \left[L_{ij} - \frac{j}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k K_{j, \frac{j(1+k)}{2}} L_{i, \frac{j(1+k)}{2}} \right]_{j=0}^n \simeq f(x_j).$$

Ainsi cette équation intégrale peut être convertir un système d'équation linéaire

$$A_n X = b_n$$

Où

$$A_n = \left[L_{ij} - \frac{j}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k K_{j, \frac{j(1+k)}{2}} L_{i, \frac{j(1+k)}{2}} \right]_{j=0}^n, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$b_n = [f_j] \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$X^t = [\alpha_i]_{i=0}^n$$

3.2.1 Vérification Numérique

Pour valider notre travail, on doit compare les solution exactes avec les solution approchées

En utilisant le Logiciel MATLAB.

Quelques exemple des équation de Volterra

Exemple 3.2.1

Soit l'équation intégrale de Volterra suivante

$$\varphi(x) = 1 + 2\sin x - \int_0^x \varphi(y) dy \quad 0 \leq x \leq 1$$

La solution exacte est $\varphi(x) = \cos x + \sin x$ Voir exemple (2.3.2)

La solution approché $\tilde{\varphi}(x)$ est obtenu par la solution du système des équation linéaire pour $n = 6$

point de x	Solution exacte $\cos x + \sin x$	Solution approché	Erreur
0	1	0.999960296453015	$3.970354698501488e - 005$
0.1	1.094837581924854	1.094837230964531	$3.509603230256175e - 007$
0.2	1.178735908636303	1.178735043562983	$8.650733198667382e - 007$
0.3	1.250856695786946	1.250856629543671	$6.624327508752970e - 008$
0.4	1.310479336311536	1.310473269637246	$6.066674289817442e - 006$
0.5	1.357008100494576	1.357227354985632	$2.192544910559757e - 004$

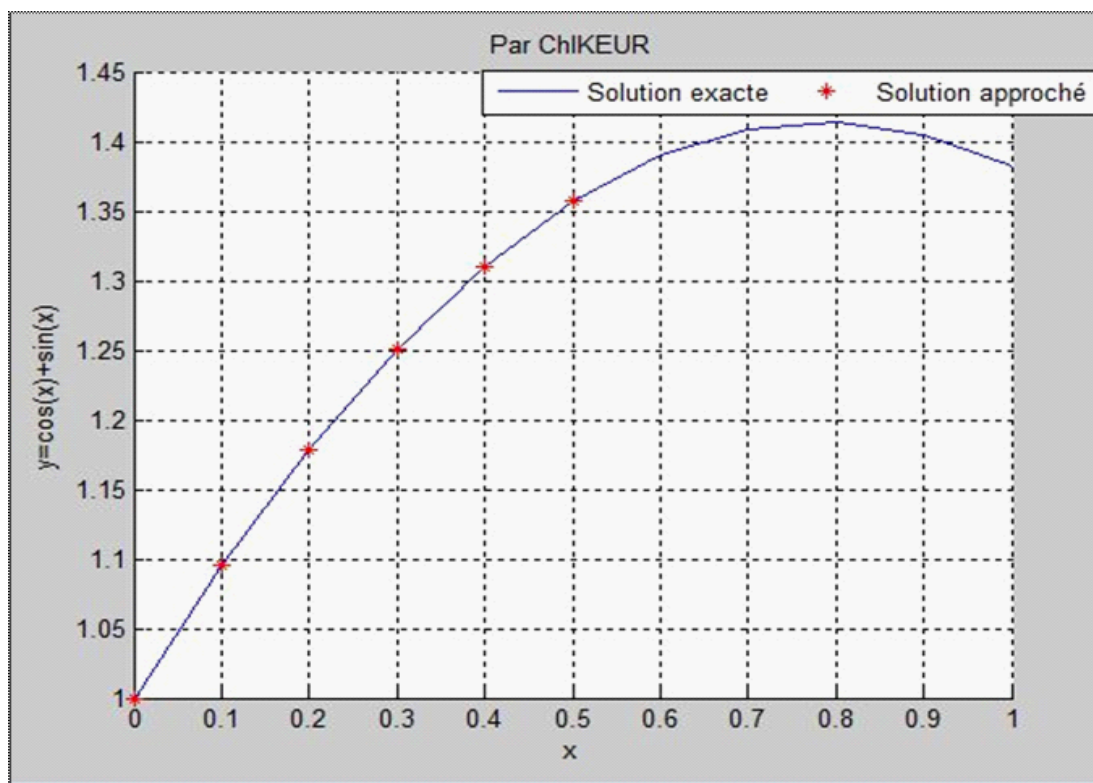


Figure 3

Exemple 3.2.2

Soit l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(y) dy \quad x \in [0, 1]$$

La solution exacte est $\varphi(x) = e^x$ Voir exemple (2.3.1)

d'après la méthode de Gauss-Legendre pour $n = 8$

La solution approchée $\tilde{\varphi}(x)$ est donné par la formule suivante

Point de x	Solution exacte	Solution approché	Erreur
-0.960289856497536	0.382781918067413	0.450421443288976	0.067639525221563
-0.796666477413626	0.450829311699727	0.506943671545873	0.056114359846146
-0.525532409916328	0.591240498251127	0.628257264452576	0.037016766201449
-0.183434642495649	0.832406277957011	0.845326658851774	0.012920380894763
0.1834346424956498	1.201336446493792	1.188416118838307	0.012920327655485
0.52553240991632	1.691359105064642	1.654342148308822	0.037016956755821
0.79666647741362	2.218134389331913	2.162020534186752	0.056113855145162
0.9602898564975362	2.612453600339309	2.544744044943152	0.067709555396157

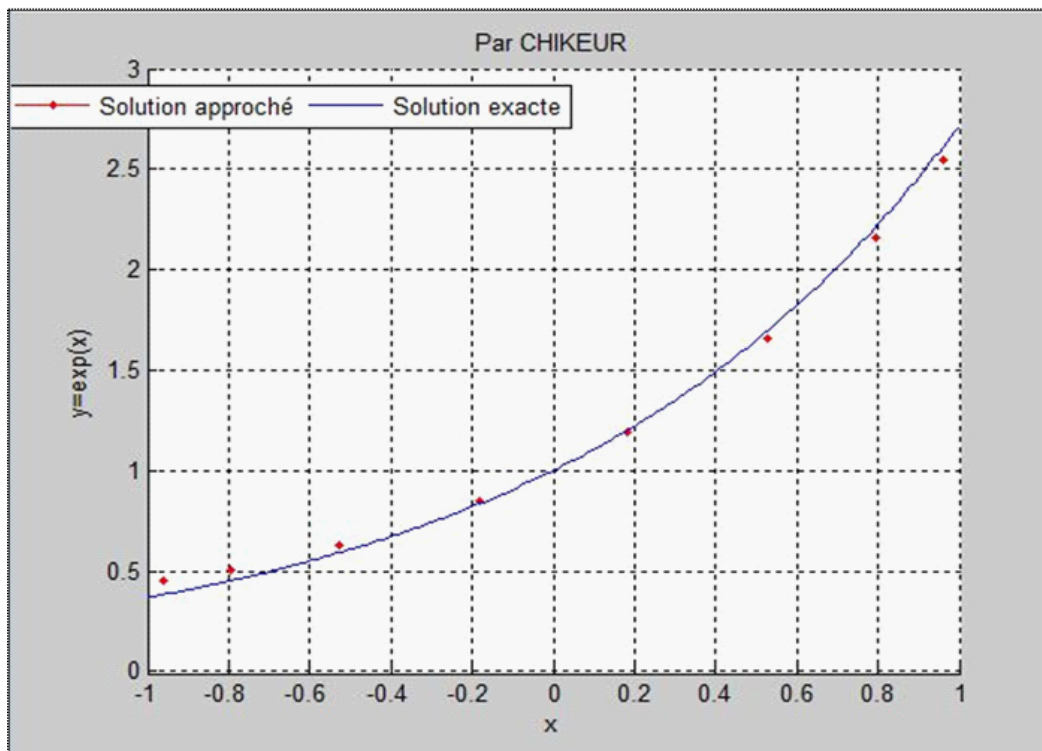


Figure 4

Exemple 3.2.3

Soit l'équation de Volterra suivante

$$\varphi(x) = x + e^x + x^2 - \frac{1}{2}x^4 - x^2e^x + \int_0^x x^2\varphi(y) dy \quad 0 \leq x \leq 1$$

La solution exacte est $\varphi(x) = x + e^x$

La solution approché $\tilde{\varphi}(x)$ est obtenu par du système des équation linéaires pour $n = 6$

point de x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0
0.1	1.205170918075648	1.205145756963043	$2.516111260497667e - 005$
0.2	1.421402758160170	1.420997779998731	$4.049781614390291e - 004$
0.3	1.649858807576003	1.647797347710631	0.002061459865372
0.4	1.891824697641270	1.885276687676925	0.006548009964345
0.5	2.148721270700128	2.132661651943934	0.016059618756194

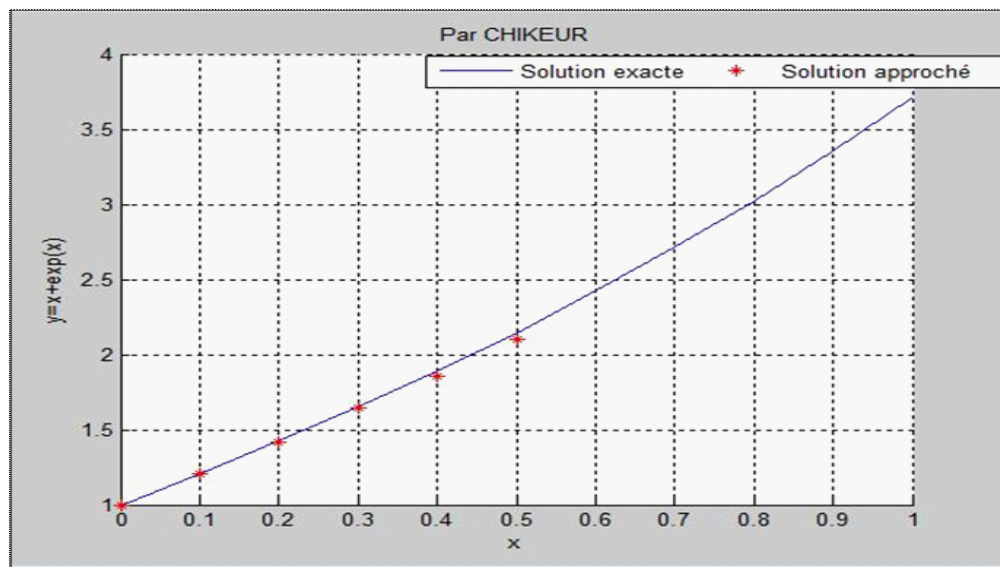


Figure 5

Exemple 3.2.4

Soit l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = 6x - 3x^2 + \int_0^x \varphi(y) dy \quad 0 \leq x \leq 1$$

La solution exacte est $\varphi(x) = 6x$

La solution approché $\tilde{\varphi}(x)$ est obtenu par la solution du système des équation linéaire pour $n = 8$

3.2. Résolution de l'équation de Volterra par les polynômes de Legendre

point de x	Solution exacte $6x$	Solution approché	Erreur
0	0	0	0
0.1	0.6	0.6	0
0.2	1.2	1.2	0
0.3	1.8	1.7999999999999999	$1.110223024625157e - 015$
0.4	2.4	2.4	0
0.5	3	3	0
0.6	3.6	3.6	0
0.7	4.2	4.2	0

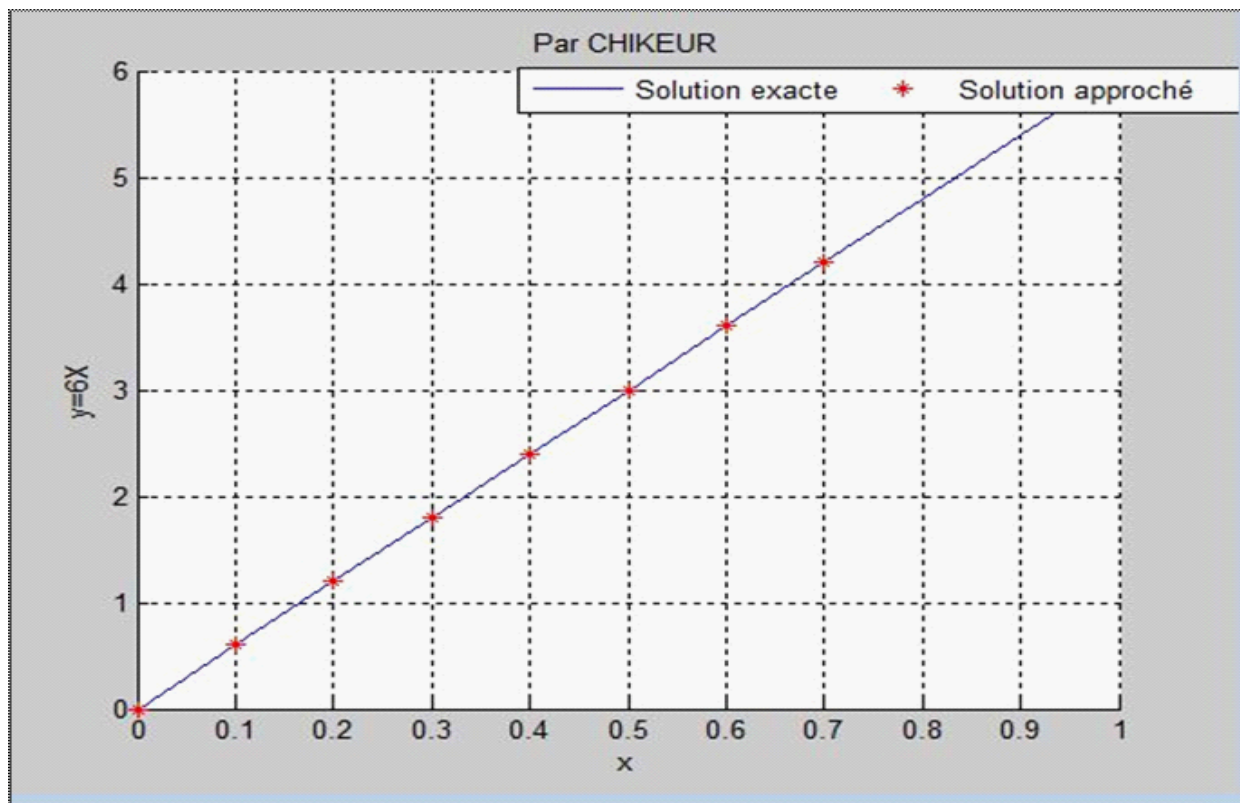


Figure 6

Conclusion générale

Le but est de présenter la résolution d'équations intégrales, et d'illustrer les techniques numériques.

A partir de ce on donne dans ce mémoire on arrive à une idée très importante qui est les racines des polynômes de Legendre jouent un rôle Principa c'est-à-dire donne grande importante dans l'approximation des équations intégrales .

Cette importante faciliter à la plupart des gens de physique mathématique pour trouver des solution pour des defaciliter les problèmes dans les domaines pratique.

Bibliographie

- [1] Abdul-Majid Wazwaz Saint Xavier University, USA:A first coures in integrale equation.
- [2] Andrei D. Polyanin Alexander V. Manzhirov : Integral equations, CRC press, 1998.
- [3] F.G.Tricom i:Integrale equation ,université de press,Cam-bridge,London,1957.
- [4] Gabriel Peyré : Résolution numérique d'équations intégrales.Le 8 octobre 2001.
- [5] Haïm Brezis : Analyse fonctionnelle. Dunod, 1983.
- [6] Jean-Pierre Demailly : Analyse numérique et équations différentielles. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [7] Jie Shen Tao Tang Li-Lian Wang : Spectral Methods Algorithms, Analysis and Applications.sprijer 2007.
- [8] L.M. Delves and J. Mohamed : "Computational Methods for Integral Equations"Cambridge Univ. Press, 1985.
- [9] M.Nadir : cours d'Analyse fonctionnelle ,University de M'sila ,algérie ,2004.
- [10] M.Nadir : cours sur léquation intégrale ,University de M'sila ,algérie ,2008.
- [11] M. Rahman Dalhousie University Canada : Integral Equations and their Applications.
- [12] Pierre-Arnaud Raviart and Jean-Marie Thomas:Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Dunod, 1993.
- [13] Rainer Kress : Linear integral equations. Springer Verlag, 1999.

- [14] Yucheng Liu :Application of Legendre Polynomials in Solving Volterra Integral Equations of the Second Kind .University of Louisiana Lafayette LA 70504 USA.
- [15] Yucheng Liu, PhD, PE :A numerical methode of solving Volterra integrale quatione.University of Louisiana at Lafayette.