



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

Problème de valeurs propres pour le laplacien fractionnaire

Présentée par :

BELHOUT Khadra

Soutenu publiquement le : 30/06/2019.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r NOUIRI* Brahim

Encadreur : *M^r BOUGHERARA* Brahim

Examineur : *M^r ABDELKEBIR* Saâd

M.C.A, Université de M'sila

M.C.A, Université de M'sila

M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2018/2019

Table des matières

1	Rappels sur les espaces de Sobolev fractionnaires	4
1.1	Espace de Sobolev fractionnaire	4
1.1.1	Définitions et propriétés	4
1.1.2	Injection de Sobolev	5
1.1.3	Espace $H^s(\Omega)$	6
1.2	Quelques Inégalités utiles	6
1.2.1	Inégalité de Hölder	6
1.2.2	Inégalité de Poincaré	6
1.3	Quelques résultats de convergence	7
1.4	Introduction au Laplacien et p-Laplacien fractionnaire	8
2	Problème de valeur propre pour Laplacien fractionnaire	11
2.1	Existence de la première valeur propre	11
2.2	Propriété de la première fonction propre	16
2.2.1	Positivité de la première fonction propre	16
2.2.2	Simplicité	17
2.3	Existence d'une suite de valeurs propres	17
3	Problème de valeur propre pour p-Laplacien fractionnaire	24
3.1	Existence de la première valeur propre	24
3.2	Régularité de la fonction propre	29
3.3	Propriété de la première fonction propre	33
3.3.1	Positivité	33
3.3.2	Simplicité	37

Introduction générale

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $p \in (1, +\infty)$ et $s \in (0, 1)$ on définit l'opérateur p-Laplacien fractionnaire non linéaire.

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy$$

Pour $p = 2$ la définition ci-dessus se réduit au Laplacien fractionnaire linéaire $(-\Delta^s)$.

Dans ce travail nous étudions le problème de valeurs propres de l'opérateur Laplacien p-Laplacien fractionnaires .

$$\begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -\Delta_p^s u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

L'essentiel de notre travail est consacré à l'étude de l'existence et la régularité des fonctions propres de ces opérateurs ainsi leurs valeurs propres associées. On donne aussi quelques propriétés sur première fonction propre qui associe à la première valeurs propre qui est le minimum du quotient de Rayleigh suivant :

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}$$

On montre que la première fonction propre qu'une solution faible du problèmes ci-dessus, est dans $L^\infty(\Omega)$ et de signe constante et simple.

Ce travail est présenté en trois chapitres, la première est consacrée à la présentation des espaces de Sobolev fractionnaires et leurs propriétés (réflexivité, complétude, séparabilité, injections, ...ect). Dans le chapitre 2, on étudie le problème aux valeurs propres avec l'opérateur Laplacien et on démontre l'existence et la régularité des fonctions propres ainsi quelques propriétés supplémentaires concernant la première fonction propre. Dans chapitre 3, on généralise l'étude du chapitre 2, pour l'opérateur p-Laplacien.

RAPPELS SUR LES ESPACES DE SOBOLEV FRACTIONNAIRES

Dans ce chapitre, on présente une rappelle sur les espaces de Sobolev fractionnaires ainsi leurs propriétés fonctionnelles puis on donne la définition des opérateurs laplacien et p-laplacien fractionnaire et leurs propriétés.

1.1 Espace de Sobolev fractionnaire

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}$$

c'est un espace vectoriel, muni par la norme :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + [u]_{s,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec

$$[u]_{s,p} = \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition 1.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$. On a

- $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace de Banach et séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.
- $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace uniformément convexe pour tout $1 < p < +\infty$.

Proposition 1.2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , soient $p \in [1, +\infty[$ et $0 < s \leq s' < 1$, alors nous avons :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{s',p}(\Omega)$$

avec $c = c(n, s, p) \geq 1$, en particulier : $W^{s',p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega)$

Proposition 1.3. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $s \in]0, 1[$, soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe $C^{0,1}$. Alors

$$\|u\|_{W^{s,p}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega)$$

avec $C = C(n, s, p) \geq 1$, en particulier : $W^{1,p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega)$
tel que : $W^{1,p}(\Omega)$: l'espace de Sobolev classique.

Définition 1.2. On définit l'espace $W_0^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ dans $W^{s,p}(\Omega)$.

C'est un espace de Banach avec la norme induite de l'espace $W^{s,p}(\Omega)$.

1.1.2 Injection de Sobolev

Dans cette partie, on donne la relation entre les espaces de Sobolev fractionnaires et les espaces de Lebesgue.

Théorème 1.1. (Injection continue cas $sp < n$)

Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < n$, alors il existe un constant positive $c = c(n, s, p)$ tel que pour tout fonction mesurable à support compact $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nous avons :

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq c \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall q \in [p, p^*]$$

avec $p^* = \frac{np}{n-sp}$ "exposant critique fractionnaire"
i.e :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*].$$

On dit que l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ s'injecte dans $L^q(\Omega)$.

Théorème 1.2. (Injection continue cas $sp = n$)

Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp = n$, alors il existe un constant positive $c = c(n, s, p)$ telle que pour tout $f \in W^{s,p}$, on a

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq c \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall q \in [p, +\infty]$$

et on note

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty]$$

Théorème 1.3. (Injection continue cas $sp > n$)

Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp > n$ alors il existe un constant positive $C = C(n, s, p)$ tel que pour tout $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ nous avons :

$$\|f\|_{C^{0,n-\frac{s}{p}}(\Omega)} \leq c \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

et on note

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

De plus

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,n-\frac{s}{p}}(\Omega)$$

Théorème 1.4. (*Injection compact*). Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{0,1}$ de frontière borné, et soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ et $n \geq 1$, alors nous avons :

- si $sp < n$ alors l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact $\forall q < \frac{np}{n-sp}$
- si $sp = n$ alors l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact $\forall q < +\infty$
- si $sp > n$ alors l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,\alpha}$ est compact $\forall \alpha \leq s - \frac{n}{p}$

1.1.3 Espace $H^s(\Omega)$

Dans cette section on s'intéresse au cas particulier où $p = 2$

Définition 1.3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , alors on définit :

$$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega) \text{ pour } 0 < s < 1$$

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tq } \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{2} + s}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \right\}$$

Proposition 1.4. L'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ muni du produit scalaire suivant

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

est une espace de Hilbert.

1.2 Quelques Inégalités utiles

1.2.1 Inégalité de Hôlder

Théorème 1.5. Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $u.v \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)v(x)|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \text{ tq : } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

1.2.2 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.6. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ alors il existe $C > 0$ tel que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{s,p}(\Omega)$$

par conséquent si Ω est borné alors $\|\cdot\|_{W_0^{s,p}}$ est une norme de $W_0^{s,p}(\Omega)$ équivalent à $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$

$$\text{avec } \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Lemme 1.1. Soient $a \geq 0, b \geq 0$ et soit $1 \leq p \leq +\infty$ alors nous avons :

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

1.3 Quelques résultats de convergence

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

Lemme 1.2. (Lemme de Fatou)

Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que :

(1) pour chaque n , $f_n(x) \geq 0$ p.p sur Ω .

(2) $\sup \int_{\Omega} f_n(x)dx < +\infty$.

pour chaque $x \in \Omega$ on pose $f(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, alors $f \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_{\Omega} f(x)dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x)dx$$

Théorème 1.7. (Fubini)

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de \mathbb{R}^n , on suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, alors pour presque tout $x \in \Omega_1$:

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x, y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même , pour presque tout $y \in \Omega_2$:

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} F(x, y)dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus nous avons :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y)dx = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(x, y)dx dy$$

Théorème 1.8. (théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ qui converge presque partout vers une fonction mesurable f . On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que , pour tout $n \geq 1$ on ait : $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω . Alors $f \in L^1(\Omega)$ et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| dx = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x)dx = \int_{\Omega} f(x)dx$$

Lemme 1.3. E un espace de Banach uniformément convexe, Alors tout suite (u_n) de E telle que u_n converge faiblement vers u dans E Alors

$$\|u\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_E$$

1.4 Introduction au Laplacien et p-Laplacien fractionnaire

Définition 1.4. Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$, alors on définit le p-Laplacien fractionnaire par :

$$\begin{aligned} (-\Delta)_p^s u(x) &= 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy \\ &= 2VP \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy \end{aligned}$$

Remarque 1.1. 1. si $p = 2$, on obtient l'opérateur Laplacien fractionnaire linéaire défini par

$$(-\Delta)^s u(x) = 2C(n, s) \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy$$

avec une constante de normalisation $c = c(n, s)$

La proposition suivante donne la relation entre $-\Delta_p$ et $-\Delta_p^s$

Proposition 1.5. $(-\Delta)_p^s \rightarrow (-\Delta)_p$ quand $s \rightarrow 1$. où la convergence est dans l'espace dual de $W_0^{s,p}(\Omega)$.

Proposition 1.6. Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$ Alors :

$$(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))'$$

est bien défini, et de plus :

1. $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ nous avons :

$$\langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+sp}} dx dy$$

2. $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle \leq \|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} \|v\|_{W_0^{s,p}}$$

et par suite : $\|(-\Delta)_p^s u\|_{W^{-s,p'}} \leq \|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1}$

Preuve

1. Comme $u \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ alors l'intégrale dans la définition de $(-\Delta)_p^s$ existe donc :

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy$$

alors $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ nous avons : (on utilise fubini)

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy v(x) dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} v(x) dx dy \end{aligned} \tag{1.1}$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}} v(x) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}} v(y) dx dy \end{aligned}$$

dans le second intégrale nous changeons le rôle entre x et y

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}} v(x) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}} v(x) dx dy \end{aligned}$$

et par suite :

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}} v(x) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy$$

et d'après (1.1) nous avons :

$$\langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy$$

2. $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ nous avons par l'inégalité de Holder

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{(n+sp)(\frac{p-1}{p})} |x-y|^{(n+sp)(\frac{1}{p})}} dx dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} \|v\|_{W_0^{s,p}} \end{aligned}$$

Proposition 1.7. Soit $s \in]0, 1[$, $p \in]1, +\infty[$ et soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

$W_0^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \text{ tel que : } u = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n/\Omega\}$ alors :

$$(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\Omega) \rightarrow (W_0^{s,p}(\Omega))'$$

est strictement monotone, c'est-à-dire

pour tout $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ avec $u \neq v$

$$\langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \rangle > 0$$

Preuve

D'abord nous avons $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \rangle &= \langle (-\Delta)_p^s u, u - v \rangle - \langle (-\Delta)_p^s v, u - v \rangle \\ &= \langle (-\Delta)_p^s u, u \rangle + \langle (-\Delta)_p^s v, v \rangle - \langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle - \langle (-\Delta)_p^s v, u \rangle \\ &\geq \|u\|_{W_0^{s,p}}^p + \|v\|_{W_0^{s,p}}^p - \|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} \|v\|_{W_0^{s,p}} - \|v\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} \|u\|_{W_0^{s,p}} \\ &= (\|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} - \|v\|_{W_0^{s,p}}^{p-1})(\|u\|_{W_0^{s,p}} - \|v\|_{W_0^{s,p}}) \end{aligned}$$

soit $u \neq v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ montrons que :

$$\langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \rangle > 0$$

nous avons :

$$\langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \rangle \geq (\|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} - \|v\|_{W_0^{s,p}}^{p-1})(\|u\|_{W_0^{s,p}} - \|v\|_{W_0^{s,p}})$$

supposons que : $\langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \rangle = 0$, alors :

$$\langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \rangle = (\|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} - \|v\|_{W_0^{s,p}}^{p-1})(\|u\|_{W_0^{s,p}} - \|v\|_{W_0^{s,p}}) = 0$$

et par suit : $\|u\|_{W_0^{s,p}} = \|v\|_{W_0^{s,p}}$ et de plus puisque $\langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle \leq (\|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} \|v\|_{W_0^{s,p}})$ alors :

$$\|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} \|v\|_{W_0^{s,p}} = \langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle \text{ et } \|v\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} \|u\|_{W_0^{s,p}} = \langle (-\Delta)_p^s v, u \rangle$$

cela implique $u = v$ ce qui contradiction avec $u \neq v$.

Proposition 1.8. Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$, Alors :

$$(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))'$$

est continue i.e : $(-\Delta)_p^s \in C(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n), (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))')$

Preuve

Soit $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ montrons que $(-\Delta)_p^s u_n \rightarrow (-\Delta)_p^s u$ dans $(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))'$, en effet nous avons d'après la proposition précédent :

$$\|(-\Delta)_p^s u_n - (-\Delta)_p^s u\|_{W^{-s,p'}} \leq \|u_n - u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1}$$

alors il suffit de montrer que : $\|u_n - u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} \rightarrow 0$: nous avons : $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ alors $u_n \rightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ donc pour une sous suite nous avons : $\exists g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ p.p et } |u_n| \leq g(x)$$

et d'après théorème de convergence dominée nous obtient le résultat souhaité .

PROBLÈME DE VALEUR PROPRE POUR LAPLACIEN FRACTIONNAIRE

Nous allons étudier le problème de valeurs propres suivant.

$$\begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où $s \in (0, 1)$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 2.1. On dit que u est une solution faible de (2.1) si $u \in H_0^s(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+2s}} dx dy = \lambda \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^s(\Omega) \quad (2.2)$$

Définition 2.2. Soit $s \in (0, 1)$, on dit que λ est une valeur propre de l'opérateur laplacien fractionnaire, s'il existe une solution faible $u \in H_0^s(\Omega)$, $u \neq 0$ du problème (2.2). la solution faible u s'appelle fonction propre associé à λ .

Remarque 2.1. Remarquons que si on remplace v par $u \in H_0^s(\Omega)$ dans (2.2) on obtient λ comme le quotient suivant :

$$\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx}$$

ce quotient est appelé le quotient de Rayleigh.

2.1 Existence de la première valeur propre

Définition 2.3. La première valeur propre de l'opérateur Laplacien fractionnaire notée par λ_1 est définie par :

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^s(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} = \inf_{u \in H_0^s(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

Le résultat d'existence de la première valeur propre est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.1. Soit $s \in (0, 1)$, Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , alors le problème admet une fonction propre associée à la première valeur propre $\lambda_1 > 0$ qui caractérisée comme suit

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \quad (2.3)$$

Pour montrer ce théorème on utilise la méthode de minimisation d'une fonctionnelle. On définit la fonctionnelle suivante :

$$J : H_0^s(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx}$$

D'où λ_1 représente le minimum de J .

Théorème 2.2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , avec $n \geq 2$ alors la fonction $J : H_0^s(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur $H_0^s(\Omega)$.

Preuve

– Soit $u \in H_0^s(\Omega)$ nous avons : $u \in L^2(\Omega)$, alors :

$$\|u\|_{H_0^s(\Omega)} < +\infty \text{ et } \|u\|_{L^2(\Omega)} < +\infty.$$

Alors $J(u)$ est bien définie.

– on montre que $J : H_0^s(\Omega)/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est Différentiable en $u \in H_0^s(\Omega)/\{0\}$ c-à-d

$$J(u+v) = J(u) + L_u.v + o(v) \quad \forall v \in H_0^s(\Omega)$$

où $L : H_0^s(\Omega)/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire continue.

En effet, $\forall u \in H_0^s(\Omega)$ on pose :

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy, K(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx$$

1. pour $I(u)$

Nous avons :

$$\begin{aligned} I(u+v) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{((u+v)(x)-(u+v)(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{((u(x)-u(y))+(v(x)-v(y)))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2 + 2(u(x)-u(y))(v(x)-v(y)) + (v(x)-v(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \\ &= I(u) + 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+2s}} dx dy + \|v\|_{H_0^s}^2 \\ &= I(u) + L_u.v + o(v) \end{aligned}$$

telle que

$$L_u.v = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+2s}} dx dy$$

et

$$o(v) = \|v\|_{H_0^s}^2$$

Donc $I(u)$ est différentiable et

$$\langle I'(u), v \rangle = L_u.v = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+2s}} dx dy$$

2. Pour $K(u)$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} K(u+v) &= \int_{\Omega} |u+v|^2 dx = K(u) + 2 \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= K(u) + L_u.v + o(v) \end{aligned}$$

telle que

$$L_u.v = 2 \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

et

$$o(v) = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

car $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H_0^s(\Omega)}$, donc $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|v\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = o(v)$

Donc $K(u)$ est différentiable et

$$\langle K'(u), v \rangle = L_u.v = 2 \int_{\Omega} uv dx$$

3. Pour $J(u)$,

on a $J(u) = \frac{I(u)}{K(u)}$,

d'autre part on a

$$K(u) = K(u) \left(1 + \frac{2}{K(u)} \langle u, v \rangle + o(v) \right)$$

on pose

$$X = \frac{2}{K(u)} \langle u, v \rangle + o(v)$$

donc

$$K(u) = K(u) (1 + X)$$

avec $X \rightarrow 0$ quand $v \rightarrow 0$ donc $o(X) = o(v)$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{K(u+v)} &= \frac{1}{K(u)(1+X)} = \frac{1}{K(u)} (1 - X + o(X)) \\ &= \frac{1}{K(u)} - \frac{2}{K(u)^2} \langle u, v \rangle + o(v) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J(u+v) &= \left(I(u) + 2 \langle u, v \rangle_{H_0^s(\Omega)} + o(v) \right) \times \left(\frac{1}{K(u)} - \frac{2}{K(u)^2} \langle u, v \rangle + o(v) \right) \\ &= \frac{I(u)}{K(u)} + \frac{2}{K(u)} \langle u, v \rangle_{H_0^s(\Omega)} - \frac{2I(u)}{K(u)^2} \langle u, v \rangle_{L^2} + o(v) \end{aligned}$$

Donc $J(u)$ est différentiable en u et

$$L_u.v = \frac{2}{K(u)} \left(\langle u, v \rangle_{H_0^s(\Omega)} - \frac{I(u)}{K(u)} \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \right).$$

Remarque 2.2. Tout point critique de J est une solutions faible de (2.1), i.e : toute point critique u de J nous avons $\langle J'(u), v \rangle = 0 \forall v \in H_0^s(\Omega)$ et par suite :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

Preuve du Théorème 2.1

D'abord on montre que

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy.$$

on a

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^s(\Omega)/\{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \quad (2.4)$$

car $\{u \in H_0^s(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\} \subset \{u \in H_0^s(\Omega)/\{0\}\}$.

pour $u \in H_0^s(\Omega)$,

on pose

$$v = \frac{u}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \in H_0^s(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$$

alors

$$u(x) - u(y) = \|u\|_{L^2(\Omega)}(v(x) - v(y))$$

donc

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|u\|_{L^2}^2 (v(x) - v(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(v(x) - v(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy.$$

d'où

$$\frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} = \|v\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \geq \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2$$

ce qui implique

$$\inf_{u \in H_0^s(\Omega)/\{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \geq \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \quad (2.5)$$

de (2.4) et (2.5) on obtient :

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^s(\Omega)/\{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} = \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2$$

Pour montrer le théorème on utilise la méthode directe de minimisation.

pour $u \in H_0^s(\Omega)$,

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^s(\Omega)/\{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

D'après l'inégalité de Poincaré

$$\exists C > 0 : \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2$$

Par conséquent $\lambda_1 \geq \frac{1}{C} > 0$.

Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minimisante, telle que :

$\forall n > 0, \exists u_n : \lambda_1 \leq \frac{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} < \lambda_1 + \frac{1}{n}$. alors

$$\frac{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} \longrightarrow \lambda_1.$$

c'est-à-dire

$$\|u_n(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 \text{ et } \|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \rightarrow \lambda_1$$

alors $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est borné dans $H_0^s(\Omega)$, donc il existe une sous suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $u \in H_0^s(\Omega)$ telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_0^s(\Omega)$$

par le lemme 1.3, on obtient

$$\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \lambda_1$$

alors $\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \lambda_1$

d'où

$$\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \inf_{v \in H_0^s(\Omega)/\{0\}} \|v\|_{H_0^s(\Omega)}^2$$

donc u est un point minimum.

posons

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy,$$

$$K(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx,$$

et nous définissons le quotient $J : H_0^s(\Omega)/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$J(u) = \frac{I(u)}{K(u)}$$

alors

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} J(u)$$

Ainsi $\exists u \in H_0^s(\Omega)/\{0\}$ et $J(u) = \lambda_1$. et on a la fonction J est différentiable d'après le théorème 2.2, et on a

$$\langle J'(u), v \rangle = \frac{2}{K(u)} \left(\langle I'(u), v \rangle - \frac{I(u)}{K(u)} \langle K'(u), v \rangle \right).$$

Comme u est un point minimum de J donc $J'(u) = 0$, et par conséquent

$$\langle I'(u), v \rangle = \frac{I(u)}{K(u)} \langle K'(u), v \rangle = \lambda_1 \langle K'(u), v \rangle.$$

alors u est une solution faible de (2.2)

2.2 Propriété de la première fonction propre

2.2.1 Positivité de la première fonction propre

Proposition 2.1. Soit $s \in]0, 1[$ et $n > 2s$, alors il existe une fonction non négative $e_1 \in H_0^s(\Omega)$, qui est une fonction propre associée à λ_1 , est le minimum dans (2.3). c'est-à-dire $\|e_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et

$$\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_1(x) - e_1(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \quad (2.6)$$

Preuve

il suffit de montrer que e_1 est de signe constante

D'abord, on montre que

si e est une fonction propre associée à λ_1 , alors e et $|e|$ est le minimum dans (2.3); c'est-à-dire $e \geq 0$ ou $e \leq 0$.

d'après les formules (2.2) et (2.6), on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e(x) - e(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_1(x) - e_1(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

et d'après l'inégalité triangulaire, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$||e(x)| - |e(y)|| \leq |e(x) - e(y)|$$

mais, si $x \in \{e > 0\}$ et $y \in \{e < 0\}$, on a

$$\begin{aligned} ||e(x)| - |e(y)|| &= |e(x) + e(y)| = \max\{e(x) + e(y), -e(x) - e(y)\} \\ &< e(x) - e(y) = |e(x) - e(y)| \end{aligned}$$

alors nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|e(x)| - |e(y)|)^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e(x) - e(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy,$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|e(x)| - |e(y)|)^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &< \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e(x) - e(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy, \\ \text{si } |\{e > 0\}| &\neq 0 \text{ et } |\{e < 0\}| \neq 0 \end{aligned}$$

comme e est le minimum alors : $\lambda_1 = \|e\|_{H_0^s(\Omega)} \leq \| |e| \|_{H_0^s(\Omega)}$ ce qui implique

$$\| |e| \|_{H_0^s(\Omega)} = \|e\|_{H_0^s(\Omega)} = \|e_1\|_{H_0^s(\Omega)} \text{ si } |\{e > 0\}| = 0 \text{ ou } |\{e < 0\}| = 0$$

Alors e_1 est de signe constante.

2.2.2 Simplicité

Nous montrons dans cette section que la fonction propre associée à la première valeur propre est unique à une constante multiplicative près.

Théorème 2.3. *la première valeur propre λ_1 est simple, c'est-à-dire si $u \in H_0^s(\Omega)$ est une solution faible de (2.1) alors $u = Ce_1$, avec $C \in \mathbb{R}$;*

Preuve

On suppose que $f_1 \in H_0^s(\Omega)$ non nul ,une autre fonction propre associe à λ_1 , avec $f_1 \neq e_1$, alors nous avons $f_1 \geq 0$ ou $f_1 \leq 0$. considérons le cas

$$f_1 \geq 0.$$

on pose

$$\tilde{f}_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|_{L^2(\Omega)}} \quad \text{et} \quad g_1 = e_1 - \tilde{f}_1.$$

on montre que

$$g_1 = 0.$$

on montrer par l'absurde , on supposant que

$$g_1 \neq 0.$$

on a $g_1 = e_1 - \tilde{f}_1$, alors g_1 est une fonction propre associé à λ_1 ,alors nous avons $g_1 \geq 0$ ou $g_1 \leq 0$. ce que implique $e_1 \geq \tilde{f}_1$ ou $e_1 \leq \tilde{f}_1$, et on suppose que e_1 non négative ,donc

$$e_1^2 \geq \tilde{f}_1^2 \quad \text{ou} \quad e_1^2 \leq \tilde{f}_1^2.$$

d'autre part ,on a

$$\int_{\Omega} (e_1^2(x) - \tilde{f}_1^2(x)) dx = \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\tilde{f}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 - 1 = 0.$$

alors $e_1^2 - \tilde{f}_1^2 = 0$ donc $e_1 = \tilde{f}_1$,

d'ou $g_1 = 0$ c'est une contradiction.

donc , on obtient f_1 est proportionnelle à e_1

2.3 Existence d'une suite de valeurs propres

Dans cette section nous montrons qu'ils existe une suite de valeurs propres positive qui tend vers l'infini pour l'opérateur Laplacien fractionnaire.

Lemme 2.1. (Orthogonalité) Soient $\lambda, \tilde{\lambda}$ deux valeur propre différents de problème (2.2), avec des fonctions propres e et $\tilde{e} \in H_0^s(\Omega)$,respectivement, alors

$$\langle e, \tilde{e} \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 = \int_{\Omega} e(x) \tilde{e}(x) dx$$

Preuve

pour $e \neq 0$ et $\tilde{e} \neq 0$

posons $f = \frac{e}{\|e\|_{L^2(\Omega)}}$, $\tilde{f} = \frac{\tilde{e}}{\|\tilde{e}\|_{L^2(\Omega)}}$ qui sont des fonctions propres aussi, dans (2,2) on remplace u par f et on remplace v par \tilde{f} , on obtient

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} f(x) \tilde{f}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(f(x) - f(y))(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \tilde{\lambda} \int_{\Omega} f(x) \tilde{f}(x) dx \end{aligned}$$

alors

$$(\lambda - \tilde{\lambda}) \int_{\Omega} f(x) \tilde{f}(x) dx = 0.$$

avec $\lambda \neq \tilde{\lambda}$ donc

$$\int_{\Omega} f(x) \tilde{f}(x) dx = 0$$

d'ou

$$\langle f, \tilde{f} \rangle_{H_0^s(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(f(x) - f(y))(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = 0$$

Théorème 2.4. *L'ensemble des valeurs propres du problème (2.1) consiste en une suite $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ avec :*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots$$

et

$$\lambda_k \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad k \rightarrow +\infty$$

de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les valeurs propres sont caractérisées comme suit

$$\lambda_{k+1} = \min_{\substack{u \in p_{k+1} \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \quad (2.7)$$

où

$$P_{k+1} = \left\{ u \in H_0^s(\Omega) \text{ tq } \langle u, e_j \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \right\};$$

Preuve

On définit λ_{k+1} comme dans (2.7) existe, de plus, $p_{k+1} \subseteq p_k \subseteq H_0^s$, on a :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots$$

on montre que,

$$\lambda_1 \neq \lambda_2.$$

on pose $e_2 \in p_2$ aussi une fonction propre associée à λ_1 donc, d'après le théorème de simplicité $e_2 = ce_1$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$, et $e_2 \neq 0$, puisque $e_2 \in p_2$ alors

$$0 = \langle e_1, e_2 \rangle_{H_0^s(\Omega)} = c \|e_1\|_{H_0^s(\Omega)}^2$$

ce que implique $e_1 \equiv 0$. C'est une contradiction donc

$$\lambda_1 \neq \lambda_2.$$

– pour tout $\varphi \in p_{k+1}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi(x) dx$$

on montre que e_{k+1} est une fonction propre associée à λ_{k+1} , pour tout $\varphi \in H_0^s(\Omega)$.
c'est-à-dire on montre que la formulation faible est valable pour tout $\varphi \in H_0^s(\Omega)$ non seulement dans p_{k+1}

on montre par récurrence

on supposant que vrai pour $1, \dots, k$ et on montre pour $k + 1$

on utilise la décomposition en somme directe.

$$H_0^s = \text{span} \{e_1, \dots, e_k\} \oplus (\text{span} \{e_1, \dots, e_k\})^\perp = \text{span} \{e_1, \dots, e_k\} \oplus p_{k+1}$$

donc, pour tout $\varphi \in H_0^s(\Omega)$, nous écrivons $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, avec $\varphi_2 \in p_{k+1}$ et

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^k c_i e_i$$

pour $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. alors la formulation faible avec φ une fonction test, nous avons,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\varphi_1(x) - \varphi_1(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi_1(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^k c_i \left[\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) e_i(x) dx \right] \end{aligned}$$

d'autre part, pour $i = 1, \dots, k$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda_i \int_{\Omega} e_{k+1}(x) e_i(x) dx,$$

d'après le lemme 2.1 on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = 0 = \lambda_i \int_{\Omega} e_{k+1}(x) e_i(x) dx,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi(x) dx = 0$$

alors e_{k+1} est une fonction propre associée à λ_{k+1} .

– pour $h, k \in \mathbb{N}$, $k \neq h$, alors

$$\langle e_k, e_h \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 = \int_{\Omega} e_k(x) e_h(x) dx,$$

Soit $k > h$, donc $k - 1 \geq h$, alors

$$e_k \in p_k = (\text{span} \{e_1, \dots, e_{k-1}\})^\perp \subseteq (\text{span} \{e_h\})^\perp$$

cela implique

$$\langle e_k, e_h \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0$$

mais e_k est une fonction propre donc, en utilisant l'équation (2,2) pour e_k avec fonction test $\varphi = e_h$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_k(x) - e_k(y))(e_h(x) - e_h(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda_k \int_{\Omega} e_k(x) e_h(x) dx,$$

d'où

$$\langle e_k, e_h \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 = \int_{\Omega} e_k(x) e_h(x) dx,$$

– on montre que

$$\lambda_{k+1} \rightarrow +\infty \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

on suppose que $\lambda_k \rightarrow c$, tq $c \in \mathbb{R}$. alors λ_k est borné dans \mathbb{R} , puisque $\|e_k\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \lambda_k$, alors d'après le théorème d'injection compact il existe une sous suite e_{k_j} tq :

$$e_{k_j} \rightarrow e \text{ dans } L^2(\Omega)$$

comme $k_j \rightarrow +\infty$, et $e \in L^2(\Omega)$. en particulier,

$$e_{k_j} \text{ est une suite de Cauchy dans } L^2(\Omega)$$

d'autre part on a e_{k_j} et e_{k_i} sont orthogonal dans $L^2(\Omega)$, alors

$$\|e_{k_j} - e_{k_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|e_{k_j}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_{k_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2$$

c'est une contradiction

Maintenant, nous montrons que la suite des valeurs propres constructeur en (2.7) c-à-d toute valeur propre du problème (2,2) écrite sous la forme (2.7).

On montrer par l'absurde, supposons qu'il existe une valeur propre λ telle que :

$$\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Soit $e \in H_0^s(\Omega)$ est une fonction propre associé à λ , alors $\|e\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

donc on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e(x) - e(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda.$$

comme λ_1 est le minimum, on a

$$\lambda = \|e\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \geq \|e_1\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \lambda_1$$

on a $\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\lambda_k \rightarrow +\infty$, implique qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que

$$\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}.$$

alors

$$e \notin p_{k+1}.$$

si $e \in p_{k+1}$, on déduire que $\lambda = \|e\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \geq \lambda_{k+1}$.

alors contradiction, donc $e \notin p_{k+1}$. ce que implique il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ telle que $\langle e, e_i \rangle_{H_0^s(\Omega)} \neq 0$. c'est une contradiction, et donc la preuve de $\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est faux, alors toute les valeurs propres appartiennent à la suite $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Remarque 2.3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $e_{k+1} \in p_{k+1}$, qui est une fonction propre associé à λ_{k+1} , réaliser le minimum en (2.7), c'est-à-dire $\|e_{k+1}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et

$$\lambda_{k+1} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

Théorème 2.5. la suite $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de fonction propre correspondant à $\{\lambda_k\}$ est une base orthonormale de $L^2(\Omega)$ et une base orthogonale de $H_0^s(\Omega)$;

Preuve

D'abord on montre que $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $H_0^s(\Omega)$
on montre que

$$\text{si } v \in H_0^s(\Omega) \text{ telle que } \langle v, e_k \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \\ \text{alors } v \equiv 0$$

On démontrer par l'absurde, on suppose qu'il existe non trivial $v \in H_0^s(\Omega)$ satisfait :

$$\langle v, e_k \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

alors, on peut supposer $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et on a $\lambda_{k+1} \rightarrow +\infty$ si $k \rightarrow +\infty$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que

$$\|v\|_{H_0^s(\Omega)}^2 < \lambda_{k+1} = \min_{\substack{u \in p_{k+1} \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

donc, $v \notin p_{k+1}$ et il existe $j \in \mathbb{N}$ telle que $\langle v, e_j \rangle_{H_0^s(\Omega)} \neq 0$ ce qui contradiction, alors $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $H_0^s(\Omega)$.

Théorème 2.6. chaque valeur propre λ_k a une multiplicité finie, plus précisément, si λ_k est telle que

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \dots = \lambda_{k+h} < \lambda_{k+h+1}$$

pour $h \in \mathbb{N}_0$, alors l'ensemble de toutes les fonctions propres correspondant à λ_k correspond à

$$\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\}.$$

Preuve

Soit $h \in \mathbb{N}_0$ telle que $\lambda_{k-1} < \lambda_k = \dots = \lambda_{k+h} < \lambda_{k+h+1}$ est vrai.

on a : chaque élément de $\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\}$ est une fonction propre de problème (2,2) correspondant à $\lambda_k = \dots = \lambda_{k+h}$

Donc montrer que tout fonction propre $\psi \neq 0$ correspondant à λ_k appartient à $\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\}$.
on écrit

$$H_0^s = \text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\} \oplus (\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\})^\perp.$$

et donc $\psi = \psi_1 + \psi_2$, avec

$$\psi_1 \in \text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\} \quad \text{et} \quad \psi_2 \in (\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\})^\perp.$$

en particulier,

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0.$$

puisque ψ est une fonction propre correspondant à λ_k , alors ψ vérifie la formulation faible et on pose la fonction teste ψ , on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\psi(x) - \psi(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \|\psi\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \|\psi_1\|_{H_0^s(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

donc

$$\lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\psi_1\|_{H_0^s(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{H_0^s(\Omega)}^2. \quad (2.8)$$

de plus, on a e_k, \dots, e_{k+h} sont fonctions propres correspondant à $\lambda_k = \dots = \lambda_{k+h}$, et donc

ψ_1 est aussi une fonction propre correspondant à λ_k

alors ψ_1 vérifie la formulation faible et on pose la fonction teste ψ_2 , on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_k \int_{\Omega} \psi_1(x) \psi_2(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\psi_1(x) - \psi_1(y))(\psi_2(x) - \psi_2(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 \end{aligned}$$

alors

$$\int_{\Omega} \psi_1(x) \psi_2(x) dx = 0$$

donc

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\psi_1 + \psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.9)$$

on écrit

$$\psi_1 = \sum_{i=k}^{k+h} c_i e_i$$

avec $c_i \in \mathbb{R}$. d'après l'orthogonalité de $H_0^s(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\|\psi_1\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 \|e_i\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 \lambda_i = \lambda_k \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 = \lambda_k \|\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.10)$$

on a ψ est une fonction propre correspondant à λ_k , et ψ_1 est aussi une fonction propre correspondant à λ_k ,

Alors on déduit que ψ_2 est aussi une fonction propre correspondant à λ_k alors d'après le lemme 2.1, on obtient

$$\langle \psi_2, e_1 \rangle_{H_0^s(\Omega)} = \dots = \langle \psi_2, e_{k-1} \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0.$$

donc

$$\psi_2 \in (\text{span} \{e_1, \dots, e_{k+h}\})^\perp = p_{k+h+1}.$$

On montre que

$$\psi_2 \equiv 0$$

on suppose que , $\psi_2 \neq 0$. alors

$$\begin{aligned} \lambda_k < \lambda_{k+h+1} &= \min_{u \in p_{k+h+1}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} \\ &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\psi_2(x)-\psi_2(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |\psi_2(x)|^2 dx} \\ &= \frac{\|\psi_2\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Alors d'après (2.8) ,(2.9) , (2.10) et (2.11),on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\psi_1\|_{H_0^s(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \\ &> \lambda_k \|\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_k \|\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

c'est une contradiction , alors $\psi_2 \equiv 0$

d'où

$$\psi = \psi_1 \in \text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\}.$$

PROBLÈME DE VALEUR PROPRE POUR P-LAPLACIEN FRACTIONNAIRE

Nous allons étudier le problème de valeurs propres suivant.

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

ou $s \in (0, 1)$, $p > 1$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 3.1. On dit que u est une solution faible de (3.1) si $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2} (u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v dx \quad \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega) \quad (3.2)$$

Définition 3.2. Soit $s \in (0, 1)$ et $p > 1$, on dit que λ est une valeur propre de l'opérateur p-Laplacien fractionnaire, s'il existe une fonction $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$, $u \neq 0$ du problème (3.2). la solution faible u s'appelle fonction propre associé à λ .

Remarque 3.1. Remarquons que si on remplace v par $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ dans (3.2) on obtient λ comme le quotient suivant :

$$\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^p dx}$$

ce quotient est appelé le quotient de **Rayleigh**.

3.1 Existence de la première valeur propre

Définition 3.3. La première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien fractionnaire notée par λ_1 est définie par :

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^p dx} = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}$$

Le résultat d'existence de la première valeur propre est donne par le théorème suivant.

Théorème 3.1. Soit $s \in (0, 1)$ et $p > 1$, Ω est un ouvert borne de \mathbb{R}^n , Alors le problème admet une fonction propre associé à la première valeur propre λ_1 qui caractérisée comme suit,

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \quad (3.3)$$

Pour montrer ce théorème, on utilise le résultat suivant :

Théorème 3.2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , avec $n \geq 2$ pour $p \in]1, +\infty[$ nous définissons la fonction $G : W_0^{s,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$u \mapsto \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy$$

alors G est différentiable sur $W_0^{s,p}(\Omega)$ et

$$\langle G'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y)))}{|x - y|^{n+sp}} dx dy$$

Preuve

On montre que G est Gâteaux différentiable c'est-à-dire

$$\forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(u + tv) - G(u)}{t} = \langle G'(u), v \rangle.$$

considérons l'application $\eta \mapsto \frac{1}{p} \frac{|\eta|^p}{|x-y|^{n+sp}}, \eta \in \mathbb{R}^n, p > 1$ est différentiable, sa différentiable est donné par $\frac{|\eta|^{p-2} \eta}{|x-y|^{n+sp}}, \forall \eta \in \mathbb{R}^n$
d'où

$$\forall \eta, \xi \in \mathbb{R}^n \quad \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{|\eta + t\xi|^p}{|x-y|^{n+sp}} - \frac{|\eta|^p}{|x-y|^{n+sp}} \right) = \frac{|\eta|^{p-2} \eta \cdot \xi}{|x-y|^{n+sp}}$$

par conséquent $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} & \left(\frac{|(u(x)-u(y))+t(v(x)-v(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}} - \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \right) \\ &= \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2} (u(x)-u(y)) (v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

d'autre part, on pose pour $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\psi(t) = \frac{1}{p} \frac{|\eta + t\xi|^p}{|x-y|^{n+sp}}$, ψ est différentiable et

$$\psi'(t) = \frac{|\eta + t\xi|^{p-2} (\eta + t\xi) \xi}{|x-y|^{n+sp}}$$

on applique le théorème des accroissement finis

$\exists \theta$ entre 0 et t ($0 < |\theta| < |t|$) telle que :

$$\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t - 0} = \psi'(\theta)$$

d'où

$$\frac{1}{p} \frac{1}{t} \left(\frac{\frac{1}{p} |\eta + t\xi|^p}{|x-y|^{n+sp}} - \frac{\frac{1}{p} |\eta|^p}{|x-y|^{n+sp}} \right) = \frac{|\eta + \theta\xi|^{p-2} (\eta + \theta\xi) \xi}{|x-y|^{n+sp}}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{1}{t} & \left(\frac{|(u(x)-u(y))+t(v(x)-v(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}} - \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \right) \\ &= \left(\frac{|(u(x)-u(y))+\theta(v(x)-v(y))|^{p-2} ((u(x)-u(y))+\theta(v(x)-v(y)))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}} \right) \end{aligned}$$

supposons que $|t| < 1$, d'où $|\theta| < 1$, et d'après le lemme 1.1 on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \left| \frac{1}{t} \left(\frac{|(u(x)-u(y))+t(v(x)-v(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}} - \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \right) \right| \\ & \leq |(u(x)-u(y)) + \theta(v(x)-v(y))|^{p-1} |v(x)-v(y)| \\ & \leq C (|(u(x)-u(y))|^{p-1} (v(x)-v(y)) + |v(x)-v(y)|^p) \end{aligned}$$

on a $|u(x)-u(y)|^{p-1} \in L^{p'}$ et $|v(x)-v(y)| \in L^p$

D'après l'inégalité de Hôlder on a $|u(x)-u(y)|^{p-1} |v(x)-v(y)| \in L^1(\Omega)$

d'où

$$h = |u(x)-u(y)|^{p-1} |v(x)-v(y)| + |v(x)-v(y)|^p \in L^1(\Omega)$$

donc

$$\left| \frac{1}{t} \left(\frac{|(u(x)-u(y))+t(v(x)-v(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}} - \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \right) \right| \leq Ch \in L^1(\Omega) \quad (3.5)$$

D'après (3.4) et (3.5) et D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \left(\frac{|(u(x)-u(y))+t(v(x)-v(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}} - \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \right) dx dy \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2} (u(x)-u(y)) (v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy, \end{aligned}$$

Enfin G est Gatteux différentiable et

$$\langle G'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|u(x)-u(y)|^{p-2} (u(x)-u(y)) (v(x)-v(y)))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy$$

D'après la proposition 1.8, G' est continue. D'où G est différentiable.

Théorème 3.3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , avec $n \geq 2$ pour $p \in]1, +\infty[$ nous définissons la fonction $H : W_0^{s,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$u \mapsto \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx$$

alors H est différentiable sur $W_0^{s,p}(\Omega)$ et

$$\langle H'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v dx$$

Preuve

on montre que H est Gatteux différentiable c'est-à-dire

$$\forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H(u+tv) - H(u)}{t} = \langle H'(u), v \rangle.$$

considérons l'application $x \mapsto \frac{1}{p} |x|^p$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$ est différentiable, sa différentiable est donné par $|x|^{p-2} x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

d'où

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{|x+ty|^p - |x|^p}{t} \right) = |x|^{p-2} x \cdot y$$

par conséquent $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{|u(x)+tv(x)|^p - |u(x)|^p}{t} \right) = |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) \quad (3.6)$$

d'autre part , on pose pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(t) = \frac{1}{p}|x + ty|^p$, φ est différentiable et

$$\varphi'(t) = |x + ty|^{p-2}(x + ty)y$$

on applique le théorème des accroissement finis

$\exists \theta$ entre 0 et t ($0 < |\theta| < |t|$) telle que :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \varphi'(\theta)$$

d'où

$$\frac{1}{p} \left(\frac{|x + ty|^p - |x|^p}{t} \right) = |x + \theta y|^{p-2}(x + \theta y)y$$

par conséquent

$$\frac{1}{p} \left(\frac{|u + tv|^p - |u|^p}{t} \right) = |u + \theta v|^{p-2}(u + \theta v)v$$

supposons que $|t| < 1$, d'où $|\theta| < 1$, et d'après le lemme 1.1 on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \left| \frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t} \right| &\leq |u + \theta v|^{p-1}|v| \\ &\leq C(|u|^{p-1}|v| + |v|^p) \end{aligned}$$

on a $|u|^{p-1} \in L^{p'}$ et $|v| \in L^p$ D'après l'inégalité de Hôlder on a $|u|^{p-1}|v| \in L^1(\Omega)$

d'où

$h = |u|^{p-1}|v| + |v|^p \in L^1(\Omega)$ donc

$$\left| \frac{|u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p}{t} \right| \leq Ch \in L^1(\Omega) \quad (3.7)$$

D'après (3.6) et (3.7) et D'après le théorème de la convergence dominée de lebesgue, on obtient

$$\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{|(u(x) + tv(x))^p - |u(x)|^p}{t} dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)dx,$$

Enfin H est Gatteux différentiable et

$$\langle H'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |u|^{p-2}uv dx$$

Il facile de montrer la continuité de H . D'où H est différentiable.

Preuve du Théorème 3.1

D'abord on montrer que

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy.$$

on a

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega)/\{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p} \leq \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p \quad (3.8)$$

car $\{u \in W_0^{s,p}(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1\} \subset \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) / \{0\}\}$.
 pour $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$,
 on pose

$$v = \frac{u}{\|u\|_{L^p(\Omega)}} \in W_0^{s,p}(\Omega), \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$$

alors

$$u(x) - u(y) = \|u\|_{L^p(\Omega)}(v(x) - v(y))$$

donc

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|u\|_{L^p}^p (v(x) - v(y))^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^p dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(v(x) - v(y))^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy.$$

d'où

$$\frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p} = \|v\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p \geq \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p$$

ce qui implique

$$\inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) / \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p} \geq \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p \quad (3.9)$$

de (3.8) et (3.9) on obtient :

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) / \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p} = \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p$$

Pour montrer le théorème on utilise la méthode directe de minimisation.

pour $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) / \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}$$

D'après l'inégalité de Poincaré

$$\exists C > 0 : \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p$$

Par conséquent $\lambda_1 \geq \frac{1}{C} > 0$.

Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minimisante, telle que :

$$\forall n > 0, \exists u_n : \lambda_1 \leq \frac{\|u_n\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p} < \lambda_1 + \frac{1}{n}. \text{ alors}$$

$$\frac{\|u_n\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p} \longrightarrow \lambda_1.$$

$$\|u_n(x)\|_{L^p(\Omega)}^p = 1 \text{ et } \|u_n\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p \rightarrow \lambda_1$$

alors $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est borné dans $W_0^{s,p}(\Omega)$, donc il existe une sous suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } W_0^{s,p}(\Omega)$$

par le lemme 1.3, on obtient

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p = \lambda_1$$

d'où $\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p = \lambda_1$ alors le minimum existe.

posons

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy,$$

$$H(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^p dx,$$

et nous définissons le quotient $F : W_0^{s,p}(\Omega) / \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$F(u) = \frac{G(u)}{H(u)}$$

alors

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} F(u)$$

Ainsi $\exists u \in W_0^{s,p}(\Omega) / \{0\}$ et $F(u) = \lambda_1$. les fonctions G et H sont différentiables alors il en est de même pour F, et

$$\langle F'(u), v \rangle = \frac{1}{K(u)} (H(u) \langle G'(u), v \rangle - G(u) \langle H'(u), v \rangle).$$

Comme u est un point minimum de F donc $F'(u) = 0$, et par conséquent

$$H(u) \langle G'(u), v \rangle - G(u) \langle H'(u), v \rangle = 0.$$

ce qui implique

$$\langle G'(u), v \rangle = \frac{G(u)}{H(u)} \langle H'(u), v \rangle = \lambda_1 \langle H'(u), v \rangle.$$

alors u est une solution faible de (3.2)

3.2 Régularité de la fonction propre

On montre dans cette partie le résultat suivant :

Théorème 3.4. Soit $s \in (0, 1)$, $p > 1$ et $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ est une solution de (3.1), Alors $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 3.1. Soit (a_n) une suite réelle telle que $a_n > 0$, $a_{n+1} \leq C^n a_n^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ si } a_0 \text{ est assez petit}$$

Preuve

on a

$$\begin{aligned}
 a_n &\leq C^{n-1} a_{n-1}^{1+\alpha} \\
 a_{n-1}^{1+\alpha} &\leq C^{(n-2)(1+\alpha)} a_{n-2}^{(1+\alpha)^2} \\
 a_{n-2}^{(1+\alpha)^2} &\leq C^{(n-3)(1+\alpha)^2} a_{n-3}^{(1+\alpha)^3} \\
 &\vdots \\
 a_1^{(1+\alpha)^{n-1}} &\leq C^{0 \times (1+\alpha)^{n-1}} a_0^{(1+\alpha)^n}
 \end{aligned}$$

Par multiplication, on obtient

$$a_n \leq C^{S_n} a_0^{(1+\alpha)^n}$$

avec $S_n = (n-1) + (n-2)(1+\alpha) + (n-3)(1+\alpha)^2 + \dots + (1+\alpha)^{n-2}$
alors

$$S_n = \frac{(1+\alpha)^n}{\alpha^2}$$

donc

$$a_n \leq C^{\frac{(1+\alpha)^n}{\alpha^2}} a_0^{(1+\alpha)^n} = \left(C^{\frac{1}{\alpha^2}} a_0 \right)^{(1+\alpha)^n}$$

alors

$$a_n \longrightarrow 0 \text{ si } C^{\frac{1}{\alpha^2}} a_0 < 1$$

c'est-à-dire

$$a_0 < C^{\frac{-1}{\alpha^2}}$$

Lemme 3.2. si $\|u^+\|_{L^p} \leq \delta$ alors $\|u^+\|_{L^\infty} \leq 1$
pour certain $\delta > 0$.

Preuve

– pour tout entier $K \geq 1$, on considère la fonction w_k définie comme suit :

$$w_k = (u - (1 - 2^{-k}))^+.$$

tq : $w_k \in W_0^{s,p}(\Omega)$ et $w_k = 0$ p.p dans Ω .

on remarque que les inégalités suivantes

$$w_{k+1}(x) \leq w_k(x) \text{ dans } \mathbb{R}^n. \quad (3.10)$$

et

$$u(x) < (2^{k+1} - 1)w_k(x) \text{ pour } x \in \{w_{k+1} > 0\}, \quad (3.11)$$

on vérifie cette inégalité

$$\begin{aligned}
 (2^{k+1} - 1)w_k &= (2^{k+1} - 1)(u - (1 - 2^{-k})) \\
 &\geq (2^{k+1} - 1) \left(u - \frac{1-2^{-k}}{1-2^{-(k+1)}} \cdot u \right) \\
 &= u(2^{k+1} - 1) \left(1 - \frac{1-2^{-k}}{1-2^{-(k+1)}} \right) \\
 &= u.
 \end{aligned}$$

et on remarque les inclusions

$$\{w_{k+1} > 0\} \subseteq \{w_k > 2^{-(k+1)}\}, \quad (3.12)$$

on vérifie cette inclusion

pour $x \in \{w_{k+1} > 0\}$ alors

$$u(x) > 1 - 2^{-(k+1)},$$

et on a d'après (3.11)

$$u(x) < (2^{k+1} - 1)w_k,$$

alors

$$1 - 2^{-(k+1)} < (2^{k+1} - 1)w_k$$

ce que implique $w_k > \frac{1-2^{-(k+1)}}{(2^{k+1}-1)} = \frac{2^{-(k+1)}(2^{k+1}-1)}{(2^{k+1}-1)} = 2^{-(k+1)}$.

donc

$$w_k > 2^{-(k+1)},$$

d'ou

$$x \in \{w_k > 2^{-(k+1)}\}.$$

– si $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$, alors

$$|v(x) - v(y)|^{p-2} (v^+(x) - v^+(y)) (v(x) - v(y)) \geq |v^+(x) - v^+(y)|^p,$$

on vérifie cette inégalité

si $x \in \{v > 0\}$ et $y \in \{v < 0\}$.

$$I = |v(x) - v(y)|^{p-2} (v^+(x) - v^+(y)) (v(x) - v(y)) > |v^+(x) - v^+(y)|^p,$$

si $x \in \{v < 0\}$ et $y \in \{v < 0\}$.

$$I = |v(x) - v(y)|^{p-2} (v^+(x) - v^+(y)) (v(x) - v(y)) = |v^+(x) - v^+(y)|^p,$$

si $x \in \{v > 0\}$ et $y \in \{v > 0\}$.

$$I = |v(x) - v(y)|^{p-2} (v^+(x) - v^+(y)) (v(x) - v(y)) = |v^+(x) - v^+(y)|^p,$$

alors

$$|v(x) - v(y)|^{p-2} (v^+(x) - v^+(y)) (v(x) - v(y)) \geq |v^+(x) - v^+(y)|^p,$$

pour $v^+ = w_{k+1}$ et $v = u - (1 - 2^{-(k+1)})$, on a

$$\begin{aligned} \|w_{k+1}\|_{w_0^{s,p}}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w_{k+1}(x) - w_{k+1}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (w_{k+1}(x) - w_{k+1}(y))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &= \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) w_{k+1}(x) dx = \lambda \int_{\{w_{k+1} > 0\}} |u(x)|^{p-2} u(x) w_{k+1}(x) dx \\ &\leq \lambda (2^{k+1} - 1)^{p-1} \int_{\{w_{k+1} > 0\}} w_k(x)^{p-1} w_{k+1}(x) dx \quad \text{d'après (3.11)} \\ &\leq \lambda (2^{k+1} - 1)^{p-1} \int_{\{w_{k+1} > 0\}} w_k(x)^p dx \quad \text{d'après (3.10)} \\ &\leq \lambda (2^{k+1} - 1)^{p-1} U_k \\ \text{avec } U_k &= \|w_k\|_{L^p}^p = \int_{\{w_k > 0\}} w_k(x)^p dx \end{aligned} \quad \text{alors}$$

$$\|w_{k+1}\|_{w_0^{s,p}}^p \leq \lambda (2^{k+1} - 1)^{p-1} U_k. \quad (3.13)$$

d'autre part, nous avons par l'inégalité de h lder ,

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= \|w_{k+1}\|_{L^p}^p = \int_{\{w_{k+1}>0\}} w_{k+1}(x)^p dx, \\ &\leq \left(\int_{\{w_{k+1}>0\}} w_{k+1}^{\alpha p}(x) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\{w_{k+1}>0\}} 1^{\beta} dx \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad tq : \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \end{aligned}$$

on choisit $\alpha : \alpha p = p^* \Rightarrow \alpha = \frac{p^*}{p}$, donc $\beta = \frac{n}{sp}$.

$$U_{k+1} \leq \left(\int_{\{w_{k+1}>0\}} w_{k+1}^{p^*}(x) dx \right)^{\frac{p}{p^*}} |\{w_{k+1} > 0\}|^{\frac{sp}{n}}$$

et d'après le théorème d'injection continue de Sobolev ($W_0^{s,p} \hookrightarrow L^{p^*}$), on obtient :

$$U_{k+1} \leq c \|w_{k+1}\|_{W_0^{s,p}}^p |\{w_{k+1} > 0\}|^{\frac{sp}{n}}. \quad (3.14)$$

et on a

$$|\{w_{k+1} > 0\}| \leq |\{w_k > 2^{-(k+1)}\}| \leq 2^{p(k+1)} U_k. \quad (3.15)$$

on vérifier cette inégalité
d'après (3.12), on obtient

$$|\{w_{k+1} > 0\}| \leq |\{w_k > 2^{-(k+1)}\}|$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned} U_k &= \int_{\{w_{k+1}>0\}} w_k^p = \int_{\{w_k>2^{-(k+1)}\}} w_k^p + \int_{\{w_k\leq 2^{-(k+1)}\}} w_k^p \\ &\geq \int_{\{w_k>2^{-(k+1)}\}} w_k^p \\ &\geq \int_{\{w_k>2^{-(k+1)}\}} 2^{-(k+1)p} \\ &= 2^{-(k+1)p} |\{w_k > 2^{-(k+1)}\}| \end{aligned}$$

cela implique

$$|\{w_k > 2^{-(k+1)}\}| \leq 2^{(k+1)p} U_k$$

c'est le résultat souhaité.

on remplace (3.13) et (3.15) dans (3.14), on obtient :

$$U_{k+1} \leq c \lambda (2^{p(k+1)} U_k)^{1+\frac{sp}{n}}.$$

d'où

$$U_{k+1} \leq C^k U_k^{1+\frac{sp}{n}}$$

$$\text{avec } C^k = \left(c^{\frac{1}{k}} \lambda^{\frac{1}{k}} 2^{\frac{p(k+1)(1+\frac{sp}{n})}{k}} \right)^k$$

Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_k = 0.$$

D'après le lemme 3.1, si

$$\|u^+\|_{L^p(\Omega)}^p = U_0 \leq C^{\frac{-1}{\alpha^2}} = \delta^p$$

avec $\alpha = \frac{sp}{n}$

on a

$$U_k = \|w_k\|_{L^p(\Omega)}^p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

alors

$$w_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (3.16)$$

d'autre part on a , si $k \rightarrow \infty$ alors $w_k \rightarrow (u - 1)^+$ p.p
et $w_k \leq u^+ \in L^p$. D'après le théorème de convergence dominée.

$$w_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (u - 1)^+ \text{ dans } L^p. \quad (3.17)$$

D'après (3.16)et(3.17) et par l'unicité de la limite,

$$(u - 1)^+ = 0 \Rightarrow u \leq 1.$$

donc

$$u^+ \leq 1$$

d'ou

$$\|u^+\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1.$$

donc,on obtient

$$\|u^+\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \delta^p \text{ alors } \|u^+\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1.$$

Preuve (preuve de théorème 3.4)

Si $sp > n$ on a $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ d'après l'injection de Sobolev(voir théorème 1.4).

donc, on suppose que $sp \leq n$.

pour démontre le théorème , il suffit de montrer que la partie positive $u^+ \in L^\infty$,puis on déduire que $u^- \in L^\infty$ si on pose $(-u)^+ = u^-$.

on a

$$\|u^+\|_{L^p(\Omega)} \leq 1 \text{ car } \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1.$$

d'ou

$$\|\frac{\delta}{2}u^+\|_{L^p} \leq \frac{\delta}{2} < \delta.$$

d'après le lemme précédent

$$\|\frac{\delta}{2}u^+\|_{L^\infty} \leq 1$$

d'ou

$$\|u^+\|_{L^\infty} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$$

donc $u^+ \in L^\infty$

3.3 Propriété de la première fonction propre

3.3.1 Positivité

Nous montrons dans cette section que la fonction propre associée à la première valeur propre est de signe constante .

Lemme 3.3. Soit $s \in (0, 1)$, $p > 1$, soient $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ telle que $u, v \neq 0$, considérons la fonction σ_t définie par :

$$\sigma_t(x) = ((1-t)v^p(x) + tu^p(x))^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq (1-t) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy + t \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Preuve

On remarque que

$$\sigma_t = \left\| (t^{\frac{1}{p}}u, (1-t)^{\frac{1}{p}}v) \right\|_{l^p},$$

où $\|\cdot\|_{l^p}$ la norme dans \mathbb{R}^2 .

Alors, par l'inégalité triangle

$$||\xi|_{l^p} - |\eta|_{l^p}| \leq \|\xi - \eta\|_{l^p}.$$

on pose $\xi = (t^{\frac{1}{p}}u(x) + (1-t)^{\frac{1}{p}}v^p(x))$ et $\eta = (t^{\frac{1}{p}}u(y) + (1-t)^{\frac{1}{p}}v^p(y))$

on obtient

$$\begin{aligned} & \left| (tu^p(x) + (1-t)v^p(x))^{\frac{1}{p}} - (tu^p(y) + (1-t)v^p(y))^{\frac{1}{p}} \right| \\ & \leq (t(u(x) - u(y))^p + (1-t)(v(x) - v(y))^p)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

alors

$$|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)| \leq (t(u(x) - u(y))^p + (1-t)(v(x) - v(y))^p)^{\frac{1}{p}}.$$

donc

$$|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p \leq t(u(x) - u(y))^p + (1-t)(v(x) - v(y))^p.$$

on multiplie l'inégalité par $\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}$, et on intègre sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq (1-t) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy + t \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy.$$

Théorème 3.5. Soit $s \in (0, 1)$, $p > 1$ et $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ est une solution de (3.2), tel que $v > 0$ dans Ω .

Alors

$$\lambda = \lambda_1.$$

Preuve

Supposons que $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ est une solution strictement positive de (3.2).

Soit $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ une solution du problème minimum

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy.$$

on pose $u_\epsilon = u + \epsilon$, $v_\epsilon = v + \epsilon$ et

$$\sigma_t^\epsilon(x) = (tu_\epsilon^p(x) + (1-t)v_\epsilon^p(x))^{\frac{1}{p}}, \quad x \in \Omega, \quad \forall t \in [0, 1].$$

d'après le lemme 3.3 on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t^\epsilon(x) - \sigma_t^\epsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\
& \leq (1-t) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy + t \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\
& \quad - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\
& \leq t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \right)
\end{aligned}$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t^\epsilon(x) - \sigma_t^\epsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq t(\lambda_1 - \lambda). \quad (3.18)$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et $\epsilon > 0$, par la convexité de la fonction $|x|^p$ on a l'inégalité suivant :

$$|x|^p - |y|^p \geq p|y|^{p-2}y(x-y)$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t^\epsilon(x) - \sigma_t^\epsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\
& \geq p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\
& \quad \times (\sigma_t^\epsilon(x) - \sigma_t^\epsilon(y) - (v(x) - v(y))), \quad (3.19)
\end{aligned}$$

pour $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ la fonction $\sigma_t^\epsilon \in W_0^{s,p}(\Omega)$, Alors on pose $\phi = \sigma_t^\epsilon - v_\epsilon$ une fonction test, alors on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy (\sigma_t^\epsilon(x) - \sigma_t^\epsilon(y) - (v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))) \\
& = \lambda \int_{\Omega} v(z)^{p-1} (\sigma_t^\epsilon(z) - v(z)) dz,
\end{aligned}$$

on a $v(x) - v(y) = v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)$, cela implique

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dx dy (\sigma_t^\epsilon(x) - \sigma_t^\epsilon(y) - (v(x) - v(y))) \\
& = \lambda \int_{\Omega} v(z)^{p-1} (\sigma_t^\epsilon(z) - v(z)) dz, \quad (3.20)
\end{aligned}$$

et d'après (3.18) et (3.19) et (3.20) on obtient :

$$p\lambda \int_{\Omega} v(z)^{p-1} (\sigma_t^\epsilon(z) - v(z)) dz \leq t(\lambda_1 - \lambda),$$

alors

$$p\lambda \int_{\Omega} v(z)^{p-1} \frac{(\sigma_t^\epsilon(z) - v(z))}{t} dz \leq (\lambda_1 - \lambda),$$

on pose $f_t(z) = p\lambda v(z)^{p-1} \frac{(\sigma_t^\epsilon(z) - v(z))}{t}$

alors

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0} p \lambda v(z)^{p-1} \frac{((1-t)v_\epsilon^p(z) + t u_\epsilon^p(z))^{\frac{1}{p}} - v(z)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} p \lambda v(z)^{p-1} \frac{(v_\epsilon(z)^p + t(u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p))^{\frac{1}{p}} - v(z)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} p \lambda v(z)^{p-1} \frac{(v_\epsilon(z)^p + t(u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p))^{\frac{1}{p}} - (v(z)^p)^{\frac{1}{p}}}{t(u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p)} (u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p) \\
&= \lambda v(z)^{p-1} (v_\epsilon(z)^p)^{\frac{1}{p}-1} (u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p) \\
&= \lambda v(z)^{p-1} (v_\epsilon(z)^{1-p}) (u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p) \\
&= \lambda \left(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)} \right)^{p-1} (u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p),
\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}
|f_t(z)| &\leq p \lambda |v(z)^{p-1}| \left| \frac{((1-t)v_\epsilon^p(z) + t u_\epsilon^p(z))^{\frac{1}{p}} - v(z)}{t} \right| \\
&= p \lambda |v(z)^{p-1}| \left| \frac{(v_\epsilon(z)^p + t(u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p))^{\frac{1}{p}} - (v(z)^p)^{\frac{1}{p}}}{t} \right|
\end{aligned}$$

on pose $\varphi(t) = (v_\epsilon(z)^p + t(u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p))^{\frac{1}{p}}$ alors

$$\varphi'(t) = \frac{1}{p} (u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z)) (v_\epsilon(z)^p + t(u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p))^{\frac{1}{p}-1}$$

on applique le théorème des accroissement finis

$\exists \theta$ entre 0 et t ($0 < |\theta| < |t|$) telle que :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \varphi'(\theta)$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \frac{(v_\epsilon(z)^p + t(u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p))^{\frac{1}{p}} - (v(z)^p)^{\frac{1}{p}}}{t} \\
&= \frac{1}{p} (u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z)) (v_\epsilon(z)^p + \theta(u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p))^{\frac{1}{p}-1}
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
|f_t| &\leq p \lambda |v^{p-1}| \left| \frac{(v_\epsilon^p + t(u_\epsilon^p - v_\epsilon^p))^{\frac{1}{p}} - (v^p)^{\frac{1}{p}}}{t} \right| \\
&\leq \lambda |v^{p-1}| \left| (u_\epsilon^p - v_\epsilon^p) (v_\epsilon^p + \theta(u_\epsilon^p - v_\epsilon^p))^{\frac{1}{p}-1} \right| \\
&\leq C \lambda |v^{p-1}| |u_\epsilon^p + v_\epsilon^p| |v_\epsilon^{1-p} + u_\epsilon^{1-p}| \quad \text{par (1.1)} \\
&\leq C \lambda \left(\left| \frac{v}{v_\epsilon} \right|^{p-1} |u_\epsilon^p + v_\epsilon^p| + \left| \frac{v}{u_\epsilon} \right|^{p-1} |u_\epsilon^p + v_\epsilon^p| \right) \in L^1(\Omega)
\end{aligned}$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} p \lambda v(z)^{p-1} \frac{(\sigma_t^\epsilon - v(z))}{t} dz = \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)} \right)^{p-1} (u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z))$$

et par suite

$$\int_{\Omega} \lambda \left(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)} \right)^{p-1} (u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon(z)^p) \leq (\lambda_1 - \lambda).$$

pour ϵ assez petit, alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)} \right)^{p-1} ((u^p(z) + \epsilon) - (v^p(z) + \epsilon)) = \lambda(u^p(z) - v^p(z))$$

et on a

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)} \right)^{p-1} ((u(z) + \epsilon)^p - (v(z) + \epsilon)^p) \right| &\leq \left| \left(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)} \right)^{p-1} \right| |(u(z) + \epsilon)^p - (v(z) + \epsilon)^p| \\ &\leq 1 \times |C(u^p + \epsilon^p) + C(v^p + \epsilon^p)| \\ &\leq C |u^p + v^p + 2| \in L^1(\Omega) \end{aligned}$$

on applique le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)} \right)^{p-1} ((u^p(z) + \epsilon) - (v^p(z) + \epsilon)) &= \int_{\Omega} (u^p(z) - v^p(z)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

alors, on obtient

$$0 \leq (\lambda_1 - \lambda)$$

d'où

$$\lambda \leq \lambda_1$$

puisque λ_1 est plus petit valeur propre, alors

$$\lambda_1 \leq \lambda$$

donc

$$\lambda_1 = \lambda.$$

3.3.2 Simplicité

Théorème 3.6. Soit $s \in (0, 1)$ et $p > 1$. Alors la première valeur propre λ_1 est simple, c'est-à-dire si u, v deux fonctions propres associées à λ_1 alors $u = \alpha v$ pour certain α .

Preuve

Soient u, v deux fonctions propre associée à λ_1 , $u, v > 0$. On rappelle la définition de la fonction σ_t :

$$\sigma_t(x) = ((1-t)v^p(x) + tu^p(x))^{\frac{1}{p}}$$

Alors, D'après le lemme 3.3 nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \leq (1-t) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy + t \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy$$

et on a

$$(1-t) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy + t \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy = (1-t)\lambda_1 + t\lambda_1 = \lambda_1$$

d'où, d'après la définition de λ_1 , on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy = \lambda_1.$$

Donc

$$u(x)v(y) = u(x)v(y)$$

Donc

$$\frac{u(y)}{v(y)} = \frac{u(x)}{v(x)} = C$$

ce qui implique

$$u = Cv$$

Bibliographie

- [1] E.DI NEZZA,G.PALATUCCI,E.VALDINOCI : Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. Bull. Sci. math. **136**,pp.521-573.
- [2] E.LINDGREN,P. LINDQVIST : Fractional eigenvalues.Calc. Var.partial Differential Equations **49**(2014),no.1-2, 795-826.MR 3148135
- [3] G.FRANZINA, G. PALATUCCI : Fractional p-eigenvalues, pp.1-13.
- [4] R.SERVADEI , E.VALDINOCI : Variational methods for non-local operators of elliptic type,
- [5] Haim. Brezis, Analyse fonctionnelle th  orie des applications, NEW YORK,1987
- [6] W.DONG, J.XU, Weak solutions for a fractional p-Laplacien equation with signchanging potential, 2015 ; DOI : 10.1080/17476933.2015.1076808

Dans ce mémoire, nous avons étudié la première valeur propre de l'opérateur Laplacien fractionnaire et le p-Laplacien fractionnaire, plus précisément, on étudié les deux problèmes suivants

$$\begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \begin{cases} (-\Delta_p^s)u = \lambda|u|^{p-2}u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n et $1 < p < +\infty$ Nous montrons l'existence de la première valeur propre et montrons qu'il est strictement positive et simple. nous montrons aussi que λ_1 est la seule valeur propre associée à une fonction propre strictement positive.

Mots-Clés : Espace de Sobolev fractionnaire, Laplacien fractionnaire, Problèmes elliptiques linéaires et non linéaires.

In this memoir, We studied the first eigenvalue of the fractional laplacian operator and the fractional p-laplacian more precisely, We studied the two following problems

$$\begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \begin{cases} (-\Delta_p^s)u = \lambda|u|^{p-2}u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Where Ω is a open bounded domain of \mathbb{R}^n and $1 < p < +\infty$ We have shown the existence of the first eigenvalue and shown that it is strictly positive and simple. We also show that λ_1 is the only eigenvalue associated with a strictly positive eigenfunction.

Keywords : Fractional space of Sobolev, Fractional Laplacian, Elliptic problem linear and nonlinear.

ملخص: في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة القيمة الذاتية الأولى للمؤثرين لابلاس و p-لابلاس بتعبير أدق درسنا المسألتين التاليتين

$$\begin{cases} \Delta^s u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta_p^s u = \lambda|u|^{p-2}u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

حيث Ω هو ميدان محدود ومفتوح في \mathbb{R}^N و $1 < p < \infty$.

أظهرنا وجود القيمة الذاتية الأولى و بينا أنها موجبة تماما عادية , و اظهرنا أيضا أن λ_1 هي القيمة الذاتية الوحيدة المرتبطة بدالة ذاتية موجبة تماما .

كلمات مفتاحية: فضاء سبوليف الكسري , لابلاس الكسري , مسائل من النوع القطع الناقص خطية و لا خطية.