UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique
Par
Seraiche Cheyma
Sujet

Solution approchée de quelque types d'équation Intégro-Différentielles par les polynômes de Bernstein

Devant le jury :

Mr. Miloud Moussai	M.C.B. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. Selt Omar	M .C.A. Univ de M'sila	Président
Mrs. Khirani Amina	M .C.A. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2019 / 2020

Remerciements

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je tiens à remercier particulièrement mon directeur de thèse Monsieur **MOUSSAI Miloud**, pour tout l'aide qu'il ma apporté et leur patience, leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Je lui suis également reconnaissant
pour la confiance qu'il ma accordée.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leurs aides et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

En effet, je voudrai remercier ma famille, mon encadreur et tous ceux qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Également, un remerciement à tous mes collègues de promotion 2020 pour les bons moments qui nous avons passé ensemble.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon pére.

- A mes soeurs

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction

Les phénomènes physiques et mécaniques dépendent entièrement de leur transformation en problèmes mathématiques pour les résoudre, Volterra a été le premier à présenter des équations intégro- différentielles pour résoudre certains problèmes mécaniques en 1900. Freholm, Adil et Lutoka y ont travaillé et se sont spécialisés dans la résolution de problèmes de mécanique, de biologie, ...etc.

Nous cherchons à trouver une solution approximative aux équations intégro-différentielles des polynômes Bernstein.

Notre thèse se compose de quatre chapitres:

Le premier chapitre aborde des notions sur les équations intégrales, définition et classification des équations integro-différentielles

Le deuxième chapitre nous présentons les théorèmes du point fixe qui assureront que l'équation inégrals et l'équation intégro- différentielle admette une solution unique.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude les méthodes analytiques de résolution exacte de l'équation integro-différentielle de Volterra et Fredholm linéaire et non linéaire, avec des exemples

Le quatrième chapitre Consacré à l'étude des méthodes numériques en utilisant le polynôme Bernstein à la solution approximative de l'équation intégro – différentielle, avec exemples.

Préliminaire

Espace de Banach

Définition 0.0.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un application $N : E \to \mathbb{R}$ est un norme si seulement si :*

1. $\forall x \in E, N(x) \succ 0$ (positivé).
2. $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$ (définit).
3. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$ (homogénéité).
4. $\forall x, y \in E, N(x, y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

(E, N) Une espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 0.0.2 *Un espace métrique X est complet si tout suite de Cauchy dans E est convergente.*

Définition 0.0.3 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

1. Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.
2. Espace Hilbert et complet est un espace de Banach.

Espace de $\mathcal{L}^2$

Définition 0.0.4 *on note $\mathcal{L}^2(\Omega)$ l'ensemble des fonction de carré intégrable sur Ω.($\Omega = [a \ b]$) Une fonction u définie sur Ω à valeurs comples est dit de carré intégrable si u est mesurable et $u^2 \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, on définie alors la norme sur $\mathcal{L}^2$:*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 \right)^{1/2}$$

- l'espace $\mathcal{L}^2$ est complet, c'est un espace de Hilbert.
- L'application $\mathcal{L}^2 * \mathcal{L}^2 \to \mathbb{C}$:

$$\langle u, v \rangle \to \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx$$

est un produit scalaire que l'on notera $\langle u, v\rangle_{\mathcal{L}^2}$.

Espace $C^l([a,b])$

L'espace $C^l([a,b])$ est l'espace des fonctions dérivables jusqu'a l'ordre l sur$[a,b]$ $f:[a,b]\to\mathbb{R}(ou$ $\mathbb{C}$), sa norme est donnée par

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{l} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(h)}(x) \right|, \forall f \in C^l([a,b]).$$

La convergence dans C^l signifiée la convergence uniformement et de ces dérivées

$$f_n \underset{cs}{\overset{C^l}{\longrightarrow}} f \Longrightarrow f_n \underset{cu}{\longrightarrow} f, f^{(1)}, ..., f^{(l)} \longrightarrow f.$$

(CS:converge simple, CU : converge unifrmement.)

Définition 0.0.5 *(Fonction holomorphe)*

Soint U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de U vers $\mathbb{C}$. f est dérivable au sens complexe en $z \in U$ si:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe.

Si cette limite existe pour tout point z du U et de plus f' est définie et continue sur U, alors, on dit que f est holomorphe sur U. La condition de l'existence de la limite s'écrite aussi

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= f'(z) - h + \alpha(h)\,|h| \\ \text{ou } \lim_{h\to 0} \alpha(h) &= 0. \end{aligned}$$

Définition 0.0.6 *(Fonction analytique) Soit $z_0 \in U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et une fonction f, $U \longrightarrow \mathbb{C}.f$ est analytique en z_0 si:*

1 Existe un nombre $r > 0$ tel que le disque $|z - z_0| < r$ soit continue dans U.

2 Existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n w^n$ de rayon de convergence $\rho \geqslant r$ tel que, pour $|z - z_0| < r$, et on dit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \rho^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k.$$

On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de u.

Opérateur intégral

Définition 0.0.7 *On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire A défini sur un espace normé F donné sous la forme:*

$$A\varphi(x) = \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)dy,\ x \in G$$

Où $K(x,y)$ une fonction continue counnue définit sur un ensemble compact $G \times G$ et $\varphi(y)$ est une fonction inconnue définie sur G.La fonction mesurable $K(x,y)$ est dite noyau de l'opérateur intégral.(voir [9])

Théorème 0.0.1 *(voir [9])soit G est un ensemble compact et la fonction $k : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ est appélée la noyau de l'opérateur et $A\varphi$ est un fonction définie par, pour tout $x \in G$*

$$A\varphi(x) = \int_G k(x,y)\varphi(y)dy$$

et l'opérateur est borné de norme $\|A\|$ définie par

$$\|A\| = \max_{x \in G} \int_G |k(x,y)|\, dy$$

Opérateur compact

Définition 0.0.8 *Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il en voie tout ensemble borné dans E d'un ensemble relativement compact dans F .*

Théorème 0.0.2 *(voir [9])(Arzela-Ascoli) A ensemble $G \subset C(K)$ est relativement compact . Si et seulement si elle est bornée et équicontinue dire s'il existe une constante $M > 0$ telle que:*

$$|\varphi(x)| \leq M\ ,\forall x \in K, \varphi \in G$$

Plus loin, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que:

$$\textit{pourtout } \varphi \in G, \textit{on a } : |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon, \forall x,y \in K, |x-y| < \delta.$$

Chapitre 1

Introduction à la théorie des équations Intégrales et intégro-difffférntielles

Dans ce chapitre on présente quelques définitions des équations intégrales avec leurs classifcations avec une petite introduction théorique comme on s'intéresse aussi a la signifcation d'équation intégro-différentielles.

1.1 Équation intégrale

Tout équation fonctionelle de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E K(x, y)\varphi(y)dy. \tag{1.1.1}$$

Est appele équation intégral, où φ est l'inconne f est une fonction donnée, $\lambda \in \mathbb{R}(où\ \mathbb{C})$, E est un ensemble fermé, borné et mesurable, d'un espace euclidien et K le noyau.

L'équation intégral devient

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_E K(x, y)\varphi(y)dy. \tag{1.1.2}$$

Qui est dite un équation intégrale linéaire.

1.2 Classifications des équations intégrales

Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont sous les deux principales classes, nomées équations intégrales de Volterra et équations intégrales de Fredholm.

1.2.1 Équation intégrale de volterra

On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde sepéce une équationde la forme suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y, \varphi(y))dy \tag{1.2.1}$$

Avec $\varphi(x)$ est un fonction inconnue et $K(x, y), f(x)$ sont des fonctions connues, et λ nombre réele.

Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x, y, \varphi(y))dy \tag{1.2.2}$$

elle est dit équation intégral de volterra non linéaire de seconde sepéce homogène. Si dans le cas contraire.

Si $f(x) \neq 0$ elle est dit équation intégral de volterra non linéaire de seconde sepéce non homogène

- Une équation intégrale de Volterra linéaire de seconde sepéce une équationde la forme:

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy = 0 \tag{1.2.3}$$

Avec $\varphi(x)$ est un fonction inconnue et $K(x, y), f(x)$ sont des fonctions connues, et λ nomber réele.

Elle est dit équation intégral de volterra linéaire de seconde sepéce homogène. Si dans le cas constraire $f(x) = 0$ elle est dit équation intégral de volterra linéaire de seconde sepéce non homogène.

- Une équation de la forme:

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy \tag{1.2.4}$$

Où $\varphi(x)$ est un fonction inconnue et $K(x,y), f(x)$ sont des fonctions connues, et λ paramètre réel.

Est appellée équation intégral linéaire de volterra de preméire sepéce.

1.2.2 Équation intégral de Fredholm

On appelle équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde sepéce une équationde la forme suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y, \varphi(y))dy \tag{1.2.5}$$

Avec $\varphi(x)$ est un fonction inconnue et $K(x,y), f(x)$ sont des fonctions connues, et λ nomber réel.

Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, y, \varphi(y))dy \tag{1.2.6}$$

elle est dit équation intégral de Fredholm non linéaire de seconde sepéce homogéne. Si dans le cas constraire.

Si $f(x) \neq 0$ elle est dit équation intégral de volterra non linéaire de seconde sepéce non homogéne

- Une équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde sepéce une équationde la forme:

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy = 0 \tag{1.2.7}$$

Avec $\varphi(x)$ est un fonction inconnue et $K(x,y), f(x)$ sont des fonctions connues, et λ paramétre réel.

Elle est dit équation intégral de Fredholm linéaire de seconde sepéce homogéne. Si dans le cas constraire $f(x) = 0$ elle est dit équation intégral de Fredholm linéaire de seconde sepéce non homogéne.

- Une équation de la forme:

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy \tag{1.2.8}$$

Où $\varphi(x)$ est un fonction inconnue et $K(x,y), f(x)$ sont des fonctions connues, et λ paramétre réel. Est appellée équation intégral linéaire de Fredholm de preméire espéce.

1.3 Équations intégrales singulières

Une équation intégrale singulière est définie comme une intégrale avec les limites infinies ou lorsque le noyau de l'intégrale devient illimité à un certain point dans l'intervalle.(voir [10])

Exemple 1.3.1 *(Équation d'Abel) On appelle équation intégrale d'Abel linéaire une équation de la forme :*

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-y)^\alpha}\varphi(y)dy, \quad 0 < \alpha < 1$$

On appelle équation intégrale d'Abel non-linéaire une équation de la forme :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{x} |x-t|^{\alpha-1} g(u(t))dt \quad \textit{oú,} 0 < \alpha < 1$$

et $g :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$, *tel que* $g(0) = 0$ *et* $g(x) > 0$

.

1.4 Relation entre les équations intégrales et les équations différentielles ordinaires linéaires

Dans cette section, nous allons présenter la technique qui convertit les équations intégrales de Volterra du second type en équations différentielles équivalentes. Cela peut être facilement réalisé en appliquant la règle Leibniz importante pour différencier une intégrale. Il semble raisonnable de revoir les grandes lignes de la règle. Il y a une relation fondamentale entre les équations intégrales de Volterra et les équations différentielles ordinaires.(voire [6])

Soit l'équation différentielle du type:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)y = F(x) \tag{1.4.1}$$

et les conditions initiales:

$$y(a) = \alpha_0, y'(a) = \alpha_1, ..., y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1} \tag{1.4.2}$$

L'équation (1.4.1) peut être réduite à une équation intégrale de Volterra du second éspèce

$$u(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt = f(x)$$

Pour arriver à cette équation intégrale, on utilise la transformation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x)$$

d'où, par intégration par rapport à x de a à x; on obtient

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_a^x u(t)dt + q_{n-1}$$

et les intégrales successives sont

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} &= \int_a^x \int_a^{x_1} u(x)dxdx_1 + q_{n-1}x + q_{n-2} \\
\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} &= \int_a^x \int_a^{x_2} \int_a^{x_1} u(x)dxdx_1dx_2 + q_{n-1}\frac{x^2}{2!} + q_{n-2}x + q_{n-3} \\
... &= ...
\end{aligned}$$

et en procédant de la même manière, on obtient

$$y(x) = \int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} ... \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} u(x_1)dx_1...dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}u(t)dt$$

En retournant à l'équation différentielle (1.4.1), on voit qu'on peut l'écrire comme suit

$$u(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt = f(x) \tag{1.4.3}$$

Ou

$$k(x,t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{(x-t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

et

$$f(x) = F(x) - q_{n-1}a_1(x) - [(x-a)q_{n-1} + q_{n-2}]a_2(x) - ... - (q_{n-1}\tfrac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + ... + q_1(x-a) + q_0)a_n(x).$$

Exemple 1.4.1 *L'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$\varphi(x) = x^3 - \frac{1}{2}\sin(x) + \int_0^x (x^2-1)\varphi(t)dt$$

devient après les transformations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dx}(x) &= 3x^2 - \frac{1}{2}\cos(x) + (x^2-x)\varphi(x) + 2x\int_0^x \varphi(t)dt \\
\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) &= 6x + \frac{1}{2}\sin(x) + (4x-1)\varphi(x) + (x^2-x)\frac{d\varphi}{dx}(x) + 2\int_0^x \varphi(t)dt
\end{aligned}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3}(x) = 6 + \frac{1}{2}\cos(x) + 6\varphi(x) + (6x-2)\frac{d\varphi}{dx}(x) + (x^2-x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$$

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3}(x) - 6\varphi(x) - (6x-2)\frac{d\varphi}{dx}(x) - (x^2-x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = 6 + \frac{1}{2}\cos(x)$$

on pose

$$y = \varphi(x)$$

$$y^{(3)} - 6y - (6x-2)y' - (x^2-x)y" = 6 + \frac{1}{2}\cos(x)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = -\frac{1}{2}, y"(0) = 0$$

1.5 Équations intégro-differentielles

Les équations intégro-différentielles (E.I-D) est une branche importante de mathématique modèrne et survient fréquemment dans becaucoup de domaines appliqués, qui incluent mécanique de l'ingénieur, physiques, chimies, astronomies, biologies, économies, théorie potentielle et électrostatique.

Une (E.I-D) est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles qui impliquent la fonction inconnue φ.

Nous intéressons dans ce chapitre aux types les plus simples qui concerne les (E.I-D) unidimentionnelle (la fonction inconnue φ depende d'un variable) .

la forme générale d'une équation intégro-différentielle non linéaire d'ordre n est :

$$\varphi^{(n)}(x) = F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)) + \lambda \int_E k(x, t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t))dt \tag{1.5.1}$$

Avec les conditions initiales :

$$\varphi(\alpha) = \beta_0, \varphi'(\alpha) = \beta_1, ..., \varphi^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}.$$

Telle que α, β, n nomber donner, k le noyau de l'équation intégre-differntielle, E est une ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimention fini, λ paramétre réel.

La forme linéaire d'une (E.I-D) d'ordre n est :

$$L_x(\varphi) + \lambda \int_E K(x,t) M_t(\varphi) dt = f(x) \tag{1.5.2}$$

$$\text{óu } L_x(\varphi) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\varphi^{(i)}(x) \text{ et } M_t(\varphi) = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\varphi(t).$$

óu a, b, f sonts des fonction connue, φ est un fonction inconnue, λ paramétre réel.

1.6 Classifications des équations intégro-differentielles

1.6.1 Équations intégro-différentielles de Fredholm

L'équation intégro-différentielle de Fredholm linéaire sous la forme:

$$L_x(\varphi) + \lambda \int_a^b K(x,t)M_t(\varphi)dt = f(x) \tag{1.6.1}$$

$$\text{óu } L_x(\varphi) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\varphi^{(i)}(x) \text{ et } M_t(\varphi) = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\varphi(t).$$

óu a, b, f sonts des fonction connue, φ est un fonction inconnue, λ paramétre réel.

L'équation intégro-différentielle de Fredholm non linéaire sous la forme:

$$\varphi^{(n)}(x) = F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x), \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t))dt \tag{1.6.2}$$

Exemples de équations l'integro-différentielle de Fredholm sont données par

$$\begin{aligned} \varphi^{(3)}(x) &= \sin(x) - x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\varphi'(t)dt \\ \varphi(0) &= 1,\ \varphi^{'}(0) = 0,\ \varphi^{"}(0) = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{'}(x) &= 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^x xt\varphi(t)dt \\ \varphi(0) &= 0. \end{aligned}$$

1.6.2 Équations intégro-différentielles de Volterra

L'équation intégro-différentielle de Vloterra linéaire sous la forme:

$$L_x(\varphi) + \lambda \int_a^x K(x,t)M_t(\varphi)dt = f(x) \tag{1.6.3}$$

$$\text{óu } L_x(\varphi) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\varphi^{(i)}(x) \text{ et } M_t(\varphi) = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\varphi(t).$$

L'équation intégro-différentielle de Vloterra non linéaire sous la forme:

$$\varphi^{(n)}(x) = F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x), \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t))dt. \tag{1.6.4}$$

Exemples des équations l'integro-différentielle de Volterra sont données par

$$\begin{aligned} \varphi^{'}(x) &= 1 + \int_0^x e^{-2t}\varphi(t)dt \\ \varphi(0) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x (x-t)\varphi^3(t)dt \\ \varphi(0) &= 1, \quad ,\varphi^{'}(0) = 0. \end{aligned}$$

1.6.3 Équations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm

L'équation intégro-différentielle de Vloterra-Fredholm linéaire sous la forme:

$$L_x(\varphi) + \lambda_1 \int_a^x K(x,t)M_t(\varphi)dt + \lambda_2 \int_a^b K(x,t)M_t(\varphi)dt = f(x) \tag{1.6.5}$$

$$\text{óu } L_x(\varphi) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\varphi^{(i)}(x) \text{ et } M_t(\varphi) = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\varphi(t).$$

óu a, b, f sonts des fonction connue, φ est un fonction inconnue, λ paramétre réel.

Exemples de équations l'integro-différentielle de Volterra-Fredholm sont données par

$$\begin{aligned} \varphi^{'}(x) &= 1 + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_{-1}^1 (xt)\varphi(t)dt. \\ \varphi(0) &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{'}(x) &= \sin(x) + \int_0^x t\varphi(t)dt + \int_0^1 t^2\varphi(t)dt. \\ \varphi(0) &= 0. \end{aligned}$$

1.7 Équations intégro-différentielles singulières

Une équation integro-différentielle est dite singulier si l'un ou les deux hypothèses suivantes consistent dans (E.I-D) si :

1. L'un ou les deux limites de l'intégration sont infinies .
2. Le noyau devient infinie au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle de l'intégration.(voire [10])

Exemple 1.7.1

$$u(x) = \pi^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{v(x)}{t-x} dt, \quad (0 \leq x < +\infty)$$

avec

$$\begin{aligned} u &= a_n \frac{d^n \varphi}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}} + ... + a_0 \varphi \\ v &= b_n \frac{d^n \varphi}{dx^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}} + ... + b_0 \varphi \end{aligned}$$

1.8 Conversion une (E.I-D) de Fredholm à une (E.I) de Fredholm

Cette section est préoccupée par une technique qui permettra de réduire (E.I-D) de Fredholm à (E.I) peut être facilement faite par l'intégration des deux côtés de l'équation intégro-différentielle de Fredholm plus de fois que l'ordre de la dérivée dans l'équation de a à x, en utilisant les conditions initiales pour chaque fois qu'on intègre .(voir [6])

Soit l'équation intégro-différentielle suivante:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) + \int_0^1 k(x,t)y(t)dt \\ \quad y(0) = \alpha, \qquad\qquad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{1.8.1}$$

Où $a(x), b(x)$, et $k(x,t)$ sont des fonctions continues sur $[0,1]$

Si on pose :

$$y'(x) = z(x)$$

on obtient :

$$y(x) = \alpha + \int_0^x z(t)dt$$

on trouve :

$$z(x) = a(x) + (\alpha + \int_0^x z(t)dt) + b(x) + \int_0^1 k(x,t)(\alpha + \int_0^t z(u)du)dt$$

alors on obtient:

$$z(x) = g(x) + h(x).$$

telle que

$$\begin{aligned} g(x) &= a(x) + b(x) + \alpha \int_0^1 k(x,t) z(t) dt. \\ h(x) &= a(x) \int_0^x z(t) dt + \int_0^1 k(x,t) \left(\int_0^t z(u) du \right) dt \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 k(x,t) \left(\int_0^t z(u) du \right) dt &= \int_0^1 \left(\int_0^t k(x,u) du \right) z(t) dt \\ k'(x,t) &= \int_t^1 k(x,u) du \end{aligned}$$

$$h(x) = a(x) \int_0^x z(t) dt + \int_0^1 k'(x,t) z(t) dt$$

$$h(x) = \int_0^1 (a(x) - H(x-t) + k'(x,t)) z(t) dt$$

avec

$$H(x,t) = \begin{cases} 1, x-1 \geqslant 0 \\ 0,\ x-t < 0 \end{cases}$$

on pose

$$a(x).H(x-t) + k'(x,t) = \eta(x,t)$$

Soit l'équation intégro-différentielle de Frédholm de second ordre suivantes :

$$\varphi"(x) = e^x - x + x \int_0^1 t\varphi(t) dt, \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$$

En réduisant à une équation intégrale de Frédholm, on intègre les deux côtésde l'équation deux fois de 0 à x avec les conditions initiales .

On obtient

$$\varphi(x) = e^x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!} \int_0^1 t\varphi(t) dt \tag{1.8.2}$$

C'est une équation de Fredholm typique par la méthode de calcul directe, cette équation peut être écrite comme suite :

$$\varphi(x) = e^x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!}\alpha \tag{1.8.3}$$

avec

$$\alpha = \int_0^1 t\varphi(t)dt$$

en remplaçant (1.8.2) dans (1.8.3) on obtient :

$$\alpha = \int_0^1 t(e^t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^3}{3!}\alpha)dt$$

Ce qui réduit à céder $\alpha = 1$, alors la solution peut être écrite comme $\varphi(x) = e^x$.

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions des équations intégrales et intégro-différentielles

Dans ce chapitre, nous étudions l'éxistence et l'unicité de la solution pour les équations intégrales et les équations d'intégro-différentielles en utilisant des théories et des définitions de l'existence de la solution (théoreme point fixe, ...)

2.1 Existence et unicité de solution l'équation intégrale

2.1.1 Opérateur de contraction

(voir [7])

Définition 2.1.1 *Soit l'opérateur intégral du second ordre*

$$u - Au = f$$

L'unicité et l'existence de la solution peut être donnée par la série de "Neumann"pour vu que l'opérateur A soit une contraction $\|A\| < 1$.

Théorème 2.1.1 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$; et soit I l'opérateur identique dans X: Alors $(I - A)$ admet un opérateur inverse* *borné donné par la série de Neumann*

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\| = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

de plus

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

Théorème 2.1.2 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$ et soit I l'opérateur identique dans X: Alors pour toutf $\in X$ l'approximation successive*

$$Au_{n+1} = Au_n + f$$

avec u_0 un vecteur arbitraire de X; converge vers une unique solution de l'équation.

$$u - Au = f$$

Corollaire 2.1.1 *Soit K un noyau continu vérifiant la relation max*

$$\max \int_G |K(x,y)|\, dy < 1$$

Alors pour tout $f \in X$, l'équation intégrale du second espèce

$$u(x) - \int_G K(x,y)u(y)dy = f(x)$$

admet une solution unique $u \in C(G)$, de plus l'approximation successive

$$u_{n+1}(x) - \int_G K(x,y)u_n(y)dy = f(x)$$

converge uniformément vers la solution u pour tout vecteur arbitraire u_0 de $C(G)$.

Théorème 2.1.3 *Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même, alors pour que l'équation non homogène*

$$Tu = u - Au = f \tag{2.1.1}$$

admette une solution unique $u \in X$ pour tout $f \in X$, il suffit que l'équation homogène

$$Tu = u - Au = 0 \tag{2.1.2}$$

admette la solution triviale

$$u = 0$$

Théorème 2.1.4 (Alternative de Fredholm) *Soit A un opérateur compact défini sur un espace de Hilbert X à valeurs dans X et soit l'équation*

$$u - Au = f \tag{2.1.3}$$

et son adjoint

$$v - A^*v = g \tag{2.1.4}$$

Alors les équations (2.1.3) et (2.1.4) admettent la solution unique pour tout second membre si les équations homogènes

$$\begin{aligned} u - Au &= 0 \\ v - A^*v &= 0 \end{aligned}$$

possèdent et uniquement les solutions triviales $u = 0$et $v = 0$.
Ou bien les équations homogènes possèdent le même nombre . . . ni des solutions linéairement,indépendantes

$u_1, u_2, ..., u_n$ *et* $v_1, v_2, ..., v_n$ *respectivement et les équations (2.1.3) et (2.1.4) sont solvable si seulement si on a*

$$\begin{aligned} \langle f, v_k \rangle &= 0 \\ \langle g, u_k \rangle &= 0, \forall k = 1, 2, .., n \end{aligned}$$

La solution générale de (2.1.3) est donnée par

$$u = u_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k$$

Celle de l'équation (2.1.4) est

$$v = v_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k$$

où u_0, v_0 *sont des solutions particulières des équations (2.1.3) et (2.1.3) respectivement et* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *des constants arbitraires.*

Théorème 2.1.5 *On a l'équation*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y, \varphi(x))dy = f(x) \tag{2.1.5}$$

Supposons que

$$\left\| \int_a^b k(x, y, \varphi(y))dy \right\| \leq M \left\| \varphi(y) \right\|$$

et que

$$|k(x, y, z_1) - k(x, y, z_2)| \leq N(x, y) |z_1 - z_2|$$

où

$$\int_a^b \int_a^b |N(x,y)|^2 \, dxdy = p^2 < \infty$$

Si $f \in L_2[a,b]$ l'équation on (2.1.5) a une solution unique en $L_2[a,b]$ si $|\lambda|\, p < 1$.

Théorème 2.1.6 *let $f(x) \in L_2[a,b]$ (on considère un intervalle fini et sans perte de généralité laissons le être $[a,b]$) et supposons que $k(x,y)$ continous pour $x, y \in [0,1]$ et donc uniformément borné disent $|k(x,y)| \leq M$ puis l'équation*

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x k(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$$

a une solution unique φ, pour tout λ et $f(x)$ en $L_2[0,1]$

2.2 Existence et unicité de solution l'équations intégro-différentielles

2.2.1 Théorème de point fixe

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème du point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné. Dans cette section nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la défnition d'un point fixe.([1])

Définition 2.2.1 *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de f tout point $u \in E$ tel que*

$$f(u) = u$$

Rappelons que le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe.

2.2.2 Théorème du point fixe métrique

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 2.2.1 (picard) *Soient $(E; d)$ un espace métrique complet et '$\varphi : E \longrightarrow E$ une application contractante, i.e Lipschitzienne de rapport $k < 1$. Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$quelconque et $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a.*

Théorème 2.2.2 *Soit A un opérateur défini dans un espace de Banach X, tel que A^n est contractant sur X, pour un entier positif n, alors A a un point fixe unique.*

Lemme 2.2.1 *Soit l'opérateur A tel que $A : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$, u et $v \in C([a, b])$et $L \in R_+^*$ est le constant de Lipschitz de la fonction K au troisième variable,*

$$k : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Alors

$$\|A^p(u) - A^p(v)\|_\infty \leq \frac{L^p(b-a)^{2p}}{p!} \|u - v\|_\infty$$

et l'équation intégro-différentielle de Fredholm

$$\begin{cases} \varphi^{'}(x) = g(x) + \int_a^b k(x, t, \varphi(t))dt, x \in [a, b] \\ \varphi(a) = \alpha \end{cases} \tag{2.2.1}$$

admet une seule solution φ point fixe.

Théorème 2.2.3 (Schrauder) *Soit X un espace de Banach et $E \subset X, E$ convexe et fermé, et $A : E \longrightarrow E$ avec A complètement continu, alors A admet un point fixe.*

Théorème 2.2.4 *Supposons que* $f \in [J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, $k \in [J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ *tel que*

$$\int_{t_0}^{t} k(r, s, u(s))dr \leq N$$

Pour $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \alpha$ *avec* $u \in H_0 \in \{\phi \in C[J \times \mathbb{R}^n] : \phi(t_0) = u_0 \text{ et } |\phi(t) - u_0| \leq b\}$, *pour certain* $0 < \alpha < a$. *Alors l'équation intégro-différentielle de Volterra*

$$\begin{cases} u^{'}(x) = f(t, x(t)) + \int_s^t k(t, s, u(t))dt \\ \phi(t_0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution unique..

Théorème 2.2.5 (Tychonoff) *Soit* B *un espace complet, localement convexe, et* B_0 *un sous-ensemble convexe fermé de* B. *Soit la cartographie* $A : B \longrightarrow B$ *continue et* $A(B_0) \subset B_0$: *Si la fermeture de* $A(B_0)$ *est compact alors* A *a un point fixe dans* B_0.

Théorème 2.2.6 *Supposons que*

i $f \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}], g \in C[\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+]$,

$g(t, u)$ monotone non décroissante dans u $|f(t, u)| \leq g(t, |x|)$ $\quad t, x \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$

ii $k \in C[\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, $G \in [\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+]$

$G(t, s, u)$ monotone non décroissante dans u pour $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$ et

$$|k(t, s, x(t))| \leq G(t, s, |x(t)|), \ (t, s, |x(t)| \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^n$$

iii Pour $(u_0 > 0)$ l'équation intégro-différentielle

$$\begin{cases} u^{'}(t) = g(t, u(t)) + \int_0^t G(t, s, u(s))ds \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

admet une solution $u(t)$ pour $t > t_0$.

iv $\int_1^t k(\varsigma, s, x(s))d\varsigma < N$ pour $t, s \in \mathbb{R}, x \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que $|x_0| < x_0$ l'équation intégro-différentielle

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t)) + \int_{t_0}^t k(t, x, x(s))ds \\ x(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

admet une solution $x(t)$satisfie $|x(t)| < u(t)$, $t > t_0$.

Chapitre 3

Résolution analytique des équations intégro-différentielles

3.1 Équations intégro-différentielles de Fredholm linéaire de deuxième type

Soit équations intégro-différentielles de Fredholm linéaire donnée sous la forme

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt.\varphi^{(n)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq (n-1)$$

nous concentrerons notre étude sur les équations intégro-différentielles de Fredholm qui impliquent des noyaux séparables où le noyau $K(x,t)$ peut être exprimé sous forme de somme finie de la forme

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t). \tag{3.1.1}$$

Sans perte de généralité, nous ferons notre analyse sur un noyau à un terme $K(x,t)$ du formulaire

$$K(x,t) = g(x)h(t). \tag{3.1.2}$$

3.1.1 La méthode de calcul direct

La forme des équations intégro-différentielles de Fredholm donne par

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt.\varphi^{(n)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq (n-1) \tag{3.1.3}$$

où $\varphi^{(n)}(x)$ indique le nième dérivé de $\varphi(x)$ par rapport à x et b_k sont les conditions initiales. Le remplacement de (3.1.2) par (3.1.3) donne

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda g(x) \int_a^b h(t)\varphi(t)dt.\varphi^{(n)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq (n-1) \tag{3.1.4}$$

On peut facilement observer que l'intégrale définie dans l'équation integro-différentielle (3.1.4) implique un entier qui dépend complètement de la variable t. Cela signifie que l'intégrale définie à droite de (3.1.4) est équivalente à une constante α. En d'autres termes, nous définissons

$$\alpha = \int_a^b h(t)\varphi(t)dt \tag{3.1.5}$$

Par conséquent, l'équation. (3.1.5) devient

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda g(x)\alpha. \tag{3.1.6}$$

Intégration des deux côtés de (3.1.6) n fois de 0 à x, et en utilisant le conditions initiales, nous pouvons trouver une expression pour $\varphi(x)$ qui implique la constante α en plus de la variable x. Cela signifie que nous pouvons écrire

$$\varphi(x) = v(x; \alpha) \tag{3.1.7}$$

Substituer (3.1.7) au côté droit de (3.1.5), évaluer l'intégrale, et résoudre l'équation résultante, nous déterminons une valeur numérique pour la constante α. Cela conduit à la solution exacte $\varphi(x)$ obtenue lors de la substitution la valeur résultante de φ en (3.1.7). Il est important de rappeler que cette méthode mène toujours à la solution exacte et non aux composants de série.

Exemple 3.1.1 *Résoudre l'équation Fredholm integro-différentielle suivante*

$$\varphi^{''}(x) = 1 - \exp + \exp(x) + \int_0^1 \varphi(t)dt.\ \varphi(0) = \varphi^{'}(0) = 1 \tag{3.1.8}$$

Cette équation peut être écrite comme

$$\varphi^{''}(x) = 1 - \exp + \exp(x) + \alpha \tag{3.1.9}$$

telle que

$$\alpha = \int_0^1 \varphi(t)dt. \tag{3.1.10}$$

Intégration des deux côtés de (3.1.9) deux fois de 0 à x, et en utilisant le conditions initiales *que nous obtenons*

$$\begin{aligned} \varphi(x) - x - 1 &= \frac{1 - \exp + \alpha}{2} x^2 + \exp(x) - 1 - x. \qquad (3.1.11) \\ &\Longrightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1 - \exp + \alpha}{2} x^2 + \exp(x). \end{aligned}$$

Substitution (3.1.11) en (3.1.10) et évaluation de l'intégrale obtenue

$$\alpha = \int_0^1 \varphi(t)dt = \frac{1 - \exp + \alpha}{6} + \exp - 1 \qquad (3.1.12)$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = \exp - 1 \qquad (3.1.13)$$

La solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \exp(x).$$

3.2 Équations intégro-différentielles de Volterra linéaire le deuxième espéce

3.2.1 La méthode de transformation de Laplace

La méthode de Laplace transformée a été utilisé avant pour résoudre Volterra intégrale les détails et les propriétés de la méthode de transformation Laplace peuvent être trouvés dans les textes ordinaires des équations différentielles.

Dans la transformation de Laplace théorème de convolution„ il a été déclaré que si le noyau $K(x,t)$ de l'équation intégrale

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt, \qquad (3.2.1)$$

dépend de la différence $x - t$, puis il est appelé un noyau de différence. L'équation integro-différentielle peut donc être exprimée comme

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt. \qquad (3.2.2)$$

Considérer deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ qui possèdent les conditions nécessaires pour l'existence de Laplace transformer pour chacun. Laissez le Laplace transforme pour les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ être donné par

$$\mathcal{L}\{f_1(x)\} = F_1(s),\ \mathcal{L}\{f_2(x)\} = F_2(s). \tag{3.2.3}$$

Le produit de convolution Laplace de ces deux fonctions est défini par

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt, \tag{3.2.4}$$

oú

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x-t)f_1(t)dt, \tag{3.2.5}$$

Rappelons que

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x). \tag{3.2.6}$$

Nous pouvons facilement montrer que la transformation Laplace du produit de convolution $(f_1 * f_2)(x)$ est donnée par

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(x)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt\right\} = F_1(s)F_2(s). \tag{3.2.7}$$

Pour résoudre les équations Volterra integro-différentielles en utilisant la transformée de Laplace méthode, il est essentiel d'utiliser les transformées Laplace des dérivés $\varphi(x)$. Nous pouvons facilement montrer que

$$\mathcal{L}\{\varphi^n(x)\} = s^n\mathcal{L}\{\varphi(x)\} - s^{n-1}\varphi(0) - s^{n-2}\varphi^{'}(0) - \ldots - \varphi^{(n-1)}(0), \tag{3.2.8}$$

Cela donne simplement

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\varphi^{'}(x)\right\} &= s\mathcal{L}\{\varphi(x)\} - \varphi(0) \\
&= sU(s) - \varphi(0), \\
\mathcal{L}\left\{\varphi^{''}(x)\right\} &= s^2\mathcal{L}\{\varphi(x)\} - s\varphi(0) - \varphi^{'}(0) \\
&= s^2U(s) - s\varphi(0) - \varphi^{'}(0) \\
\mathcal{L}\left\{\varphi^{'''}(x)\right\} &= s^3\mathcal{L}\{\varphi(x)\} - s^2\varphi(0) - s\varphi^{'}(0) - \varphi^{''}(0) \\
&= s^3U(s) - s^2\varphi(0) - s\varphi^{'}(0) - \varphi^{''}(0) \\
\mathcal{L}\left\{\varphi^{(iv)}(x)\right\} &= s^4\mathcal{L}\{\varphi(x)\} - s^3\varphi(0) - s^2\varphi^{'}(0) - s\varphi^{''}(0) - \varphi^{'''}(0) \\
&= s^4U(s) - s^3\varphi(0) - s^2\varphi^{'}(0) - s\varphi^{''}(0) - \varphi^{'''}(0),
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

et ainsi de suite pour les dérivés d'ordre supérieur.

Nous appliquons d'abord la transformée de Laplace des deux côtés de (3.2.2), utilisons la transformée de Laplace appropriée pour le dérivé de $\varphi(x)$, puis résolvons pour $U(s)$. Nous utilisons ensuite la transformation inverse de Laplace des deux côtés de l'équation résultante pour obtenir la solution $\varphi(x)$ de l'équation.

Exemple 3.2.1 *Utilisez la méthode de transformation Laplace pour résoudre le Volterra integro-différentiel équation*

$$\varphi^{''}(x) = -1 - x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \ \varphi(0) = \varphi^{'}(0) = 1 \tag{3.2.10}$$

Notez que le noyau $K(x-t) = (x-t)$. Prenant Laplace transformer des deux côtés de (3.2.10) donne

$$\mathcal{L}\left(\varphi^{''}(x)\right) = -\mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}((x-t) * \varphi(x)) \tag{3.2.11}$$

pour que

$$s^2U(s) - s\varphi(0) - \varphi^{'}(0) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}(s) \tag{3.2.12}$$

obtenu lors de l'utilisation (3.2.9). Utiliser la condition initiale donnée et $U(s)$ nous trouvons

$$U(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} \tag{3.2.13}$$

En prenant la transformation inverse de Laplace des deux côtés de (3.2.13), l'exact solution est donnée par

$$\varphi(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

Chapitre 4

Résolution numérique des équations intégro-différentielles linéaire par les polynômes de Bernstien

On utilise les polynômes de Bernstein pour trouver le solution numérique de certaines équation intégrales et équations intégro- différentielles en employant la matrice opérationnelle d'intégration et de dérivation où on obtient la solution approximative sous forme d'un polynôme.

Définition 4.0.1 *La formule générale des polynômes de Bernstien du n^{eme} degré sur l'intervalle $[a,b]$ est définie par*

$$B_{i,n}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}, si\ 0 \leq i \leq n \\ 0, si\ non \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

si $[a,b] = [0,1]$, *on a*

$$B_{i,n}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (x)^i (1-x)^{n-i}, si\ 0 \leq i \leq n \\ 0, si\ non \end{cases}$$

4.1 Propriétés des polynômes de Bernstien:

- **Partition de l'unité**

$$\sum_{j=0}^{n} B_{j,n}(x) = 1.$$

- **Positivité** :

Les polynôme de Bernstein sont non négatif sur $[0,1]$

$$\forall x \in [0,1], B_{i,n}(x) \geq 0$$

- **Symétrie** :

$$\text{Si } 0 \leq i \leq n \text{ alors } B_{i,n}(1-x) = B_{n-i,n}(x).$$

- **Récurrence** :

$$\begin{aligned} B_{i,n}(x) &= (1-x)B_{i,n-i}(x) + xB_{i-1,n-1}(x) \\ \text{avec } B_{0,0}(x) &= 1 \text{ et } B_{i,n}(x) = 0, \forall i \notin 0, ..., n \end{aligned}$$

4.2 La dérivée du polynôme de Bernstein

Lemme 4.2.1 *La dérivée d'ordre $k > 1$ du polynôme de Bernstein est donnée par*

$$B_{i,n}^{(k)}(x) = \left(\prod_{s=0}^{s=k-1} (n-s) \right) \left(\sum_{m=0}^{m=k} (-1)^{m+2} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} B_{i-k+m,n-k}(x) \right), (i \geq k \geq m) \tag{4.2.1}$$

Preuve. démonstration par récurrence pour $(k = 1)$, on a

$$\begin{aligned} B'_{i,n}(x) &= \left(\prod_{s=0}^{s=0}(n-s)\right)\left(\sum_{m=0}^{m=1}(-1)^{m+2}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} B_{i-1+m,n-1}(x)\right) \\ &= n\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_{i-1,n-1}(x) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B_{i,n-1}(x)\right) \\ B'_{i,n}(x) &= n\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_{i-1,n-1}(x) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B_{i,n-1}(x)\right) \end{aligned}$$

la relation est vraie pour $k = 1$

On suppose que la relation (4.2.1) est vraie pour $k \in \mathbb{N}$

Montrons que la relation est vraie pour $(k+1)$ on a

$$B^{(k+1)}_{i,n}(x) = \left[B^{(k)}_{i,n}(x)\right]'$$

$$B^{(k)}_{i,n}(x) = \left(\prod_{s=0}^{s=k-1}(n-s)\right)(B_{i-k,n-k}(x) - kB_{i-k+1,n-k}(x) + \frac{k(k-1)!}{2!}B_{i-k+2,n-k}(x) + ... + (-1)^{m+2}B_{i,n-k}(x))$$

$$\begin{aligned} \left[B^{(k)}_{i,n}(x)\right]' &= \left(\prod_{s=0}^{s=k-1}(n-s)\right)(B'_{i-k,n-k}(x) - kB'_{i-k+1,n-k}(x) + \\ &\quad \frac{k(k-1)!}{2!}B'_{i-k+2,n-k}(x) + ... + (-1)^{m+2}B'_{i,n-k}(x)) \end{aligned}$$

on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} B'_{i-k,n-k}(x) &= (n-k)(B_{i-k-1,n-k}(x) - B_{i-k,n-k-1}(x)) \qquad (4.2.2) \\ B'_{i-k+1,n-k}(x) &= (n-k)\infty(B_{i-k,n-k-1}(x) - B_{i-k+1,n-k-1}(x)) \\ &\;\;... \\ &\;\;... \\ &\;\;... \\ B'_{i,n-k}(x) &= (n-k)(B_{i-1,n-k-1}(x) - B_{i,n-k-1}(x) \end{aligned}$$

substituant (4.2.2) dans (4.2.3) on obtient

$$\begin{aligned} \left[B^{(k)}_{i,n}(x)\right]' &= \left(\prod_{s=0}^{s=k-1}(n-s)\right)(n-k)\,(B_{i-(k+1),n-k-1}(x) - (k+1)B_{i-k,n-(k+1)}(x) \qquad (4.2.3) \\ &\quad + \left(\frac{k(k-1)!}{2!}B'_{i-(k+1),n-(k+1)}(x) + ... + (-1)^{m+2}B'_{i,n-(k+1)}(x)\right) \end{aligned}$$

on

$$\left(\prod_{s=0}^{s=k-1}(n-s)\right)(n-k)=\left(\prod_{s=0}^{s=k}(n-s)\right)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \end{pmatrix}, (k+1)=\begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \frac{k(k-1)!}{2!} &= \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \end{pmatrix}, ..., 1=\begin{pmatrix} k+1 \\ k+1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

substituant (4.2.4) dans (4.2.3) on obtient

$$\begin{aligned} \left[B_{i,n}^{(k)}(x)\right]' &= \left(\prod_{s=0}^{s=k-1}(n-s)\right)(n-k)\left(B_{i-(k+1),n-k-1}(x)-(k+1)B_{i-k,n-(k+1)}(x)\right. \\ &\quad \left.+\tfrac{k(k-1)!}{2!}B'_{i-(k+1),n-(k+1)}(x)+...+(-1)^{m+2}B'_{i,n-(k+1)}(x)\right) \\ &= \left(\prod_{s=0}^{s=k}(n-s)\right)\left(\begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \end{pmatrix}B_{i-(k+1),n-k-1}(x)-\begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix}B_{i-k,n-(k+1)}(x)\right. \\ &\quad \left.+\left(\begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \end{pmatrix}B'_{i-(k+1),n-(k+1)}(x)+...+(-1)^{m+2}\begin{pmatrix} k+1 \\ k+1 \end{pmatrix}B'_{i,n-(k+1)}(x)\right)\right) \\ &= \left(\prod_{s=0}^{s=k-1}(n-s)\right)\left(\sum_{m=0}^{m=k}(-1)^{m+2}\begin{pmatrix} k+1 \\ m \end{pmatrix}B_{i-k+m,n-k}(x)\right)=B_{i,n}^{(k+1)}(x) \end{aligned}$$

et la relation est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$ ■

4.3 Approximation par les polynômes de Bernstein

4.3.1 Développement d'une fonction en série de Bernstein

Une fonction $f\in\mathcal{L}^2([0,1])$ peut être écrite

$$f(t)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=0}^{n}C_{i,n}B_{i,n}(t)$$

Où, $C_{i,n}=\langle f,B_{i,n}\rangle$ et $\langle,\rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathcal{L}^2([0,1])$.

Si la série est tronquée au $n=m$, alors nous avons

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n}C_{i,m}B_{i,m}(t)$$

Où, $C,B(t)$ sont les matrices $(m+1)\times 1$ données par

$$C=[c_{0,m},c_{1,m},...,c_{m,m}]^T$$

et

$$B(t) = [b_{0.m}, b_{1,m}, ..., b_{m,m}]^T$$

4.3.2 Théorème de Weierstrass

Définition 4.3.1 *le polynôme de Bernstein d'ordre* n *associé à* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est égal à:*

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k \, (1-x)^{n-k}$$

Les polynômes de Bernstein permettent de démontrer facilement le théorème de Weierstrass

Théorème 4.3.1 (Weierstrass) *pour toute fonction continue* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, il existe une suite* (B_n)*de polynômes qui converge vers* f *uniformément sur*$[a, b]$.
La démonstration que nous allons en donner est due à Bernstein. L'intérêt essentiel de cette preuve est de fournir un procédé constructif d'une telle suite : ce sont les fameux polynômes de Bernstein. Par un changement de variable afine, nous pouvons ramener notre étude à l'intervalle $[0; 1]$*. Ce que nous ferons désormais.*

Théorème 4.3.2 (Bernstein) *Pour toute fonction continue* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *la suite* $(B_n f))$ *converge uniformément vers* f *sur* $[0, 1]$.

Preuve. Comme la fonction f est continue sur $[0, 1]$, elle est bornée sur cet intérvalle, il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0, 1]$. Puisque f est continue sur$[0, 1]$. Elle est uniformément continue (théorème de Heine) autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout x et $y \in [0, 1]$, $|x - y|$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

Donnons-nous $\epsilon > 0$ et le $\delta > 0$ correspondant. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{|(x-k)n| > \delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x) + \sum_{|(x-k)n| \leq \delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x) \end{aligned}$$

la première somme est majorée par $\sum_{k=0}^{n} \epsilon B_{k,n}(x) = \epsilon$ et la seconde somme par

$$\sum_{|(x-k)n|>\delta} 2MB_{n,k}(x) \leq \frac{2M}{\delta} \sum_{|(x-k)n|>\delta} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{M}{2n\delta^2}$$

En utilisant les propriétès de polynômes de Bernstein et l'inégalité $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. On obtient donc

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \epsilon \frac{M}{2n\delta^2} \leq 2\epsilon.$$

Dès que $n \geq \left[\frac{M}{2\epsilon\delta^2}\right] + 1$ (les crochets indiquent la partie entière). Comme cette dernnière quantité est indépendante de $x \in [0,1]$. On a bien prouvé que la convergence est uniforme sur cet intervalle. ■

4.4 Base des polynômes de Bernstein

4.4.1 Conversion de la base de Bernstein à la base des monômes

Puis que la base de puissance des monômes constitue une base pour l'espace dse polynômes de degré inférieur ou égal à n. Alors tout polynôme Bernstein de degré n peut être écrit en termes de base des monômes. Ce la peut être calculé directement en utilisant la définition des polynômes de Bernstein et le théorème binomial,comme suit,

$$\begin{aligned}
B_{k,n}(x) &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k (x-1)^{n-k} \\
&= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \begin{pmatrix} n-k \\ i \end{pmatrix} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k \\ i \end{pmatrix} x^{i+k} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{i-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ i-k \end{pmatrix} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{i-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ i-k \end{pmatrix} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{i-k} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} x^i
\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé le théorème binomial pour développer $(x-1)^{n-k}$.

Pour montrer que chaque élément de base des monômes peut être écrit comme une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein, nous utilisons les formules d'élévation de degré et l'induction pour calculer :

$$\begin{aligned}
x^k &= x(x^{k-1}) \\
&= x\sum_{i=k-1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} i \\ k-1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}} B_{i,n-1}(x) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \frac{\begin{pmatrix} i-1 \\ k-1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}} xB_{i-1,n-1}(x) \\
&= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\begin{pmatrix} i \\ k-1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}} \frac{i}{n} B_{i,n}(x) \\
&= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}} \frac{i}{n} B_{i,n}(x)
\end{aligned}$$

Où l'hypothèse d'induction a été utilisée dans la deuxième étape.

4.4.2 Les polynômes de Bernstein forment une base pour l'espace des polynômes

Pourquoi les polynômes Bernstein d'ordre n forment-ils une base pour l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à n ?

- Ils couvrent l'espace des polynômes tout polynôme de degré inférieur ou égal à n peut être écrit comme une combinaison linéaire des polynômes de Bernstein.

Les polynômes de Bernstein sont une polarisation des polynômes.

- Ils sont linéairement indépendants:

$$c_0 B_{0,n}(x) + c_1 B_{1,n}(x) + ... + c_n B_{n,n}(x) = 0 \Longrightarrow c_0 = c_1 = ... = c_n = 0$$

Tient pour tout t, alors c_i doit être nul.

Si cela était vrai, nous pourrions écrire

$$\begin{aligned}
0 &= c_0 B_{0,n}(x) + c_1 B_{1,n}(x) + ... + c_n B_{n,n}(x) \\
&= c_0 \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} x^i + c_1 \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} x^i \\
&\quad + ... + c_n \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ n \end{pmatrix} x^i \\
&= c_0 + \left[\sum_{i=0}^{1} c_i \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] x^1 + ... + \left[\sum_{i=0}^{n} c_i \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \right] x^n
\end{aligned}$$

Puis que la base de puissance est un ensemble linéairement indépendant, nous devons avoir cela

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0 \\
\sum_{i=0}^{1} c_i \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\
&. \\
&. \\
&. \\
\sum_{i=0}^{n} c_i \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} &= 0
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $c_0 = c_1 = ... = c_n = 0$ (c_0 est clairement nul,en remplaçant ceci dans la seconde équation donne $c_1 = 0$, en remplaçant ces deux par la troisième équation...)

4.5 Matrice opérationnelle d'intégration

Dans cette section, la matrice opérationnelle bernstien d'intégration est dérivée. donc commençons par la propriété intégrale de la matrice opérationnelle de base

$$\int_a^t ... \int_a^t \varphi(\sigma)(d\sigma)^k \approx P_{m+1}^k \varphi(t)$$

Où $\varphi(t) = [\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)]^T$ dans lequel l'élément $\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)$ est la fonction de base, orthogonal un certain intervalle $[a, b]$ et P est la matrice opérationnelle pour l'intégration de $\varphi(t)$.

noter que P est une matrice constante d'ordre $(m+1)\times(m+1)$.

L'orthonormale bernstien polynômes matrice opérationnelle d'intégration de l'ordre $m\times m$ sera dérivée maintenant. pour atteindre ce. considérer l'intégrale suivante

$$\begin{aligned}
\int_0^x B_{i,n}(t)dt &= \varphi_i(x)=\sum_{J=0}^{m} C_{J,m}^{j} B_{J,m}(x), \qquad j,J=0,1,2,...,m \\
\int_0^x B(t)dt &= \int_0^x \begin{pmatrix} B_{0,m}(t) \\ B_{1,m}(t) \\ . \\ . \\ B_{m,m}(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_0^x B_{0,m}(t)dt \\ \int_0^x B_{1,m}(t)dt \\ . \\ . \\ \int_0^x B_{m,m}(t)dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{J=0}^m C_{J,m}^0 B_{J,m}(x) \\ \sum_{J=0}^m C_{J,m}^1 B_{J,m}(x) \\ . \\ . \\ \sum_{J=0}^m C_{J,m}^m B_{J,m}(x) \end{pmatrix} \\
\int_0^x B(t)dt &= \begin{bmatrix} C_{0,0}^m & C_{0,1}^m & ... & C_{0.m}^m \\ C_{1,0}^m & C_{1,1}^m & ... & C_{1,m}^m \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ C_{m,0}^m & C_{m,1}^m & ... & C_{m,m}^m \end{bmatrix} B(x) \\
\int_0^x B(t)dt &= P_{m+1}B(x)
\end{aligned}$$

Où

$$P_{m+1}=\begin{bmatrix} C_{0,0}^m & C_{0,1}^m & ... & C_{0.m}^m \\ C_{1,0}^m & C_{1,1}^m & ... & C_{1,m}^m \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ C_{m,0}^m & C_{m,1}^m & ... & C_{m,m}^m \end{bmatrix}$$

tel que

$$C_{J,m}^{j}=\langle \varphi_i, B_{J,m}\rangle\,, \quad \text{et} \qquad C_{J,m}^{j}=\int_0^1\left(\int_0^t B_{i,m}(x)dx\right)B_{J,m}(t)dt$$

Pour $(n = 5)$ le matrice P_6 est

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0.152778 & 0.288948 & 0.241533 & 0.20663 & 0.159329 & 0.092228 \\ -0.012563 & 0.125 & 0.242517 & 0.180128 & 0.146743 & 0.082341 \\ 0.002216 & -0.022048 & 0.097222 & 0.191725 & 0.116686 & 0.077868 \\ -0.000624 & 0.006211 & -0.027389 & 0.069444 & 0.134479 & 0.051021 \\ 0.000242 & -0.002406 & 0.010608 & -0.026896 & 0.041667 & 0.065296 \\ -0.00099 & 0.000992 & -0.004375 & 0.011092 & -0.017183 & 0.013889 \end{pmatrix}$$

noter

$$\int_0^x \frac{B(t)}{\sqrt{x-t}}dt = P_{m+1}B(x)$$

4.5.1 La matrice opérationnelle de dérivation

La dérivée de $B(x)$ est donnée par

$$\frac{dB(x)}{dx} = D^{(1)}B(x)$$

où $D^{(1)}$ est la matrice opérationnelle $(n+1) \times (n+1)$ du dérivé et est donnée

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= AVB^* \\ A &= \begin{pmatrix} (-1)^0 \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} & (-1)^1 \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-0 \\ 1 \end{pmatrix} & ... & (-1)^{n-0} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-0 \\ n-0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & (-1)^0 \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} & & (-1)^{n-i} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-i \\ n-i \end{pmatrix} \\ \vdots & & & \\ 0 & ... & 0 & (-1)^0 \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ V &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} A^{-1}_{[-1]} \\ A^{-1}_{[2]} \\ . \\ . \\ . \\ A^{-1}_{[n]} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.6 Application de la méthode

Dans ce section, on utilise les polynômes de Bernstein pour trouver une solution approximative de quelques types d'équations intégro-differentielles.(voir [6])

On considère l'équation intégro-differentielle de Fredholm donné par :

$$\begin{cases} g_1(x)y^{'}(x) + g_2(x)y(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt \\ \sum_{s=0}^{n} m_s y(r_s) = \mu, a < r < b \end{cases} \tag{4.6.1}$$

L'approximation de y(x) par les polynômes de Bernstien est donnée par

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x) = C^T B(x) \qquad (4.6.2) \\ C^T &= (c_0, c_1, ..., c_n), B(x) = (B_{0,n}, B_{1,n}, ..., B_{n,n})^T \end{aligned}$$

où $B_{i,n}$ sont les polynômes Bernstien de degré n définis dans l'équation 4.6.1 et $c_i(i = 0, 1, ..., n)$ sont des paramètres inconnus.

Dérivant l'équation 4.6.2, nous obtenons:

$$y^{'}(x) = \sum_{i=0}^{n} nc_i(B_{i-1,n-1} - B_{i,n-1}) \tag{4.6.3}$$

substituant 4.6.2 et 4.6.3 en 4.6.1, nous obtenons

$$g_1(x)\sum_{i=0}^{n} nc_i(B_{i-1,n-1} - B_{i,n-1}) + g_2(x)\sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x)dt = f(x)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow & \left[g_2(x)B_{0,n}(x) - ng_1(x)B_{0,n-1}(x)\lambda \int_a^b k(x,t)B_{0,n}(x)dt\right] c_0 \qquad (4.6.4) \\ & + \sum_{i=1}^{n} c_i \left[ng_1(x)(B_{i-1,n-1} - B_{i,n-1}) + g_2(x)B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)B_{i,n}(x)dt\right] \\ = & \ f(x) \end{aligned}$$

multiplier les deux côtés en 4.6.4 par $B_{j,n}$ et intégrer par rapport à x de a à b on obtient

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[g_2(x)B_{0,n}(x) - ng_1(x)B_{0,n-1}(x)\lambda \int_a^b k(x,t)B_{0,n}(x)dt\right] c_0 B_{j,n}(x)dx \\ & + \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b \left[ng_1(x)(B_{i-1,n-1} - B_{i,n-1}) + g_2(x)B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)B_{i,n}(x)dt\right] B_{j,n}(x)dx \\ = & \int_a^b f(x)B_{j,n}(x)dx \end{aligned}$$

on pose

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= \int_a^b \left[g_2(x)B_{0,n}(x) - ng_1(x)B_{0,n-1}(x)\lambda \int_a^b k(x,t)B_{0,n}(x)dt \right] B_{j,n}(x)dx \\
\beta_{i,j} &= \int_a^b \left[ng_1(x)(B_{i-1,n-1} - B_{i,n-1}) + g_2(x)B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)B_{i,n}(x)dt \right] B_{j,n}(x)dx \\
G_j &= \int_a^b f(x)B_{j,n}(x)dx, i = 0,1,..,n, j = 0,1,...,n-1
\end{aligned}$$

La condition peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{s=0}^{n} m_s y(r_s) = \sum_{s=0}^{n} m_s \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(r_s) \\
&= \sum_{s=0}^{n} m_s(c_0 B_{0,n}(r_s) + c_1 B_{1,n}(r_s) + ... + c_n B_{n,n}(r_s)) \\
&= \sum_{s=0}^{n}(m_s B_{0,n}(r_s))c_0 + \sum_{s=0}^{n}(m_s B_{1,n}(r_s))c_1 \\
&\quad +... + \sum_{s=0}^{n}(m_s B_{n,n}(r_s))c_n
\end{aligned}$$

on pose

$$w_k = \sum_{s=0}^{n}(m_s B_{k,n}(r_s)), k = 0,...,n$$

on obtien

$$\mu = w_0 c_0 + w_1 c_1 + ... + w_n c_n$$

le système général peut être obtenu comme suit:

$$\begin{cases} c_0\alpha_j + \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_{i,j} = G_j, j = 0,1,...,n \\ \sum_{i=1}^{n} c_i w_i = \mu \end{cases}$$

Et l'équation algébrique linéaire est donnée par:

$$AX = b$$

et

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_{1,0} & ... & \beta_{n,0} \\ \alpha_1 & \beta_{1,1} & ... & \beta_{n,1} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \alpha_{n-1} & \beta_{1,n-1} & ... & \beta_{n,n-1} \\ w_0 & w_1 & ... & w_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \\ . \\ . \\ . \\ G_{n-1} \\ G_n \end{pmatrix}$$

Le système linéaire correspondant à la solution de l'équation 4.6.1 dans la condition est donné par une solution approximative:

$$\widetilde{y} = c_0 B_{0,n}(x) + c_1 B_{1,n}(x) + ... + c_n B_{n,n}(x).$$

Exemple 4.6.1 *(voir [6])On considère l'équation intégro-différentielle à condition mixte*

$$\begin{cases} x^3 y'(x) + e^x y(x) + 2\int_0^1 e^{2(x+1)t-(x-1)} y(t)dt = f(x) \\ y(0) + y(1) = 0.30860 \end{cases} ,0 \quad < \quad x < 1$$

$$f(x) \quad = \quad (2x^3 + e^x)e^{2x-1} - \frac{e^{(x+2)} - e^{-(x+2)}}{x+2}$$

La solution exacte

$$y(x) = e^{2x-1}$$

alors, on a

$$\begin{aligned} g1(x) &= x^3,\ g2(x) = e^x,\ k(x,t) = e^{2(x+1)t-(x-1)},\ \lambda = 2 \\ e_0 &= e_1 = 1,\ r_0 = 0,\ r_1 = 1,\ \mu = 0.30860 \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \int_a^b \left[e^x B_{0,n}(x) - n x^3 B_{0,n-1}(x) \lambda \int_a^b e^{2(x+1)t-(x-1)} B_{0,n}(x)dt \right] B_{j,n}(x)dx \\ \beta_{i,j} &= \int_a^b \left[n x^3 (B_{i-1,n-1} - B_{i,n-1}) + e^x B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b e^{2(x+1)t-(x-1)} B_{i,n}(x)dt \right] B_{j,n}(x)dx \\ G_j &= \int_a^b ((2x^3 + e^x)e^{2x-1} - \frac{e^{(x+2)} - e^{-(x+2)}}{x+2}) B_{j,n}(x)dx, i = 0,1,..,n, j = 0,1,...,n-1 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i w_i &= 0.30860 \end{aligned}$$

pour $n = 4$, *la matrice* $\widetilde{A}$ *et le vecteur* $\widetilde{b}$ *est*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0.1584 & 0.1266 & 0.1235 & 0.1441 & 0.1901 \\ 0.0949 & 0.1350 & 0.1627 & 0.1911 & 0.2346 \\ 0.0560 & 0.1095 & 0.1750 & 0.2428 & 0.3208 \\ 0.0360 & 0.0758 & 0.1470 & 0.2712 & 0.4847 \\ 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}, \; \widetilde{b} = \begin{pmatrix} 0.9458 \\ 1.1459 \\ 1.4402 \\ 1.8654 \\ 3.0860 \end{pmatrix}$$

et

$$X = (a_0, a_1, a_1, a_2, a_3, a_4)^T$$

det $\widetilde{A} \neq 0$, *l'équation* $\widetilde{A}X = \widetilde{b}$ *admet une seule solution*

$$X = (0.3743, 0.5165, 0.8987, 1.3507, 2.7118)^T$$

La solution approximative

$$\begin{aligned} \widetilde{y}(x) &= a_0 B_{0,n}(x) + a_1 B_{1,n}(x) \not+ a_2 B_{2,n}(x) + a_3 B_{3,n}(x) + a_4 B_{4,n}(x). \\ \widetilde{y}(x) &= 1.0093x^4 - 0.6808x^3 + 1.4404x^2 + 0.5684x + 0.3743 \end{aligned}$$

x	*Exact solution*	*Aproximate solution*	*Square error* $(y(x) - \widetilde{y}(x))^2$
0	0.3679	0.3743	0.4096×10^{-4}
0.1	0.4493	0.4451	0.1764×10^{-4}
0.2	0.5488	0.5419	0.4761×10^{-4}
0.3	0.6703	0.6643	0.1101×10^{-4}
0.4	0.8187	0.8145	0.1764×10^{-4}
0.5	1.0000	0.9967	0.1101×10^{-4}
0.6	1.2214	1.2177	0.1369×10^{-4}
0.7	1.4917	1.4869	0.2304×10^{-4}
0.8	1.8221	1.8158	0.3469×10^{-4}
0.9	2.2255	2.2186	0.4761×10^{-4}
1	2.7183	2.7117	0.5476×10^{-4}

Table 1:solution exacte et solution approximative et lecarré de l'erreur pour $(n = 4)$

approximative pour (n = 4)

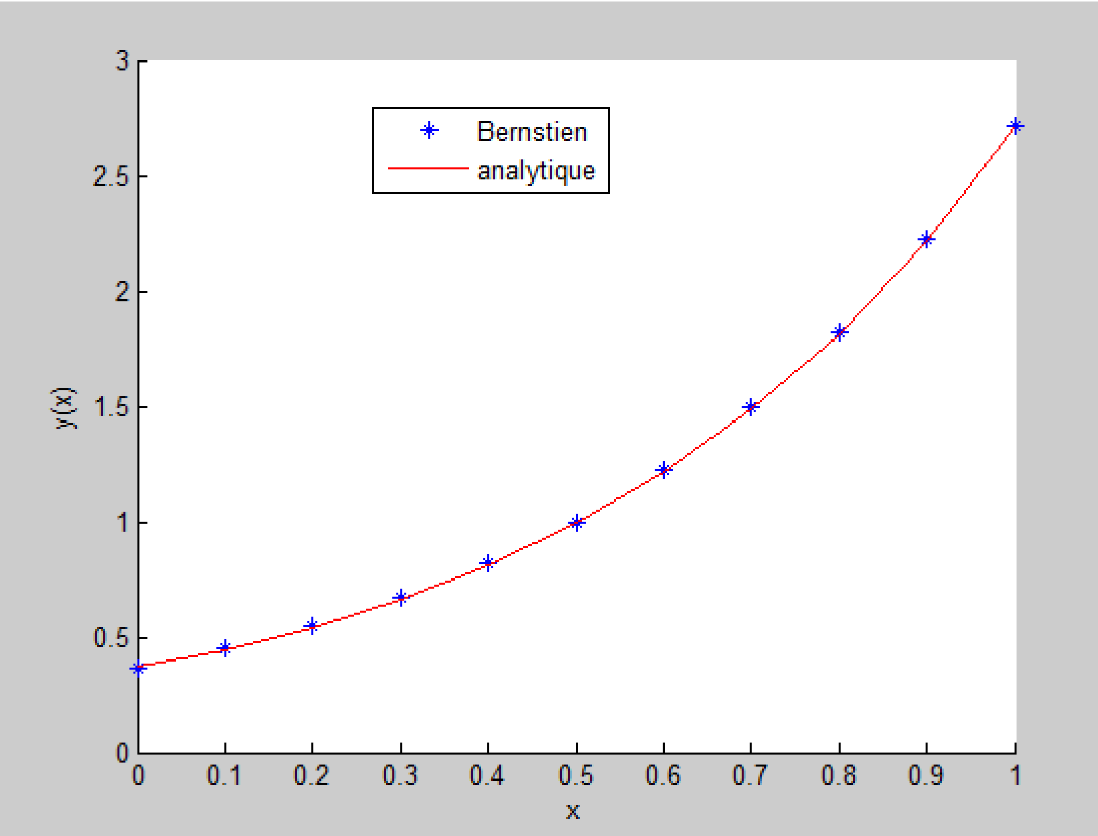

Figure1.La solution exacte et la solution approximative pour $(n = 4)$

Exemple 4.6.2 *On considère (EDIF) linéaire suivante*

$$\begin{cases} (x^2+1)y'(x)+xy(x)-2\int_0^1 e^{x+t}y(t)dt = f(x) \\ \frac{1}{\sqrt{e}}y(\frac{1}{2})+y(1) = -0.6947 \end{cases} \tag{4.6.5}$$

$$f(x) = \frac{(x^2+x+2-e^2)e^x}{2-e^2}$$

La solution exacte de(4.6.5)

$$y(x) = \frac{e^x}{2-e^2}$$

La solution de (4.6.5) par la méthode précédente et pour ($n = 5$) donne

$$X = (0.1855765, 0.2226918, 0.2690726, 0.327809, 0.4016988, 0.4947668)^T$$

La solution approximative est

$$\widetilde{y}(x) = 0.00213837x^5 - 0.0065302x^4 - 0.0315287x^3 - 0.0926552x^2 - 0.1855765x - 0.1855765$$

x	*Exact solution*	*Aproximate solution*	*Square error* $(y(x) - \widetilde{y}(x))^2$
0	-0.1856	-0.1856	0.0000×10^{-4}
0.1	-0.2051	-0.2051	0.0000×10^{-4}
0.2	-0.2266	-0.2267	0.0001×10^{-4}
0.3	-0.2505	-0.2505	0.0000×10^{-4}
0.4	-0.2768	-0.2768	0.0000×10^{-4}
0.5	-0.3059	-0.3059	0.0000×10^{-4}
0.6	-0.3381	-0.3381	0.0000×10^{-4}
0.7	-0.3737	-0.3736	0.0001×10^{-4}
0.8	-0.4130	-0.4129	0.0001×10^{-4}
0.9	-0.4564	-0.4562	0.0004×10^{-4}
1	-0.5044	-0.5040	0.0016×10^{-4}

Table 2:solution exacte et solution approximative et lecarré de l'erreur pour $(n = 5)$

approximative pour (n = 4)

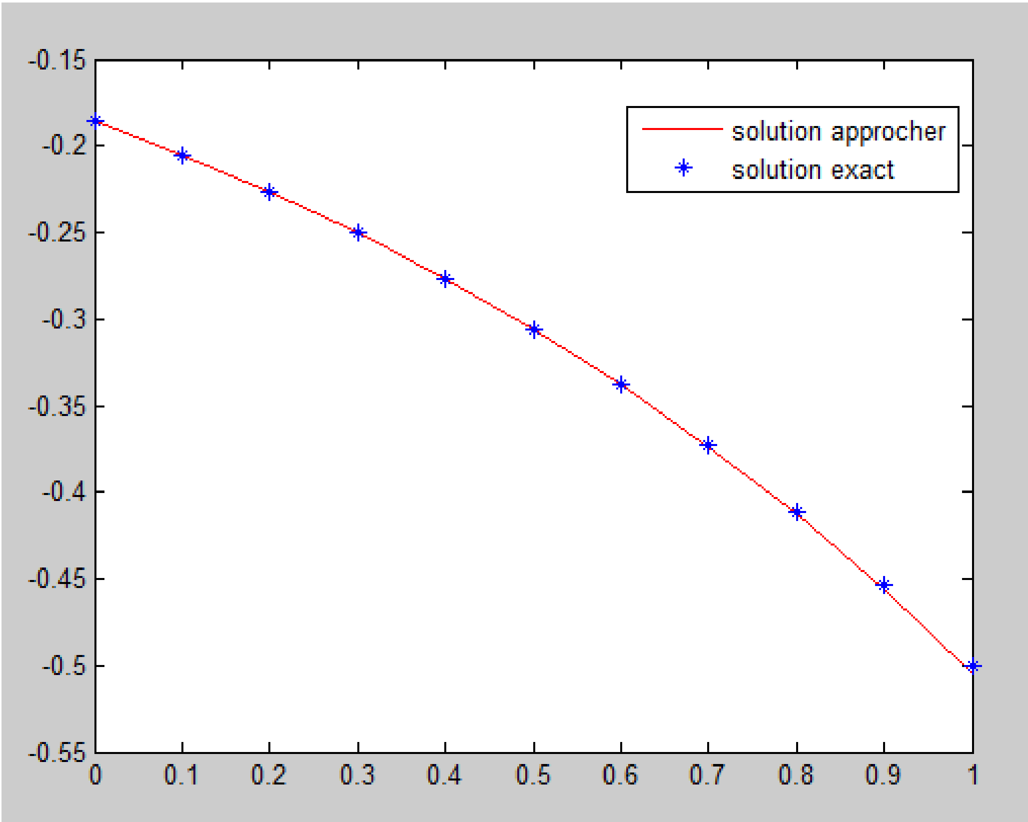

Figure2.La solution exacte et la solution approximative pour $(n = 5)$

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail nous avons utilisant les polynômes de Bernstien pour trouver le solution approchée de quelques types d'équations intégro- différentielles linéaires, en utilisant les polynômes de Bernstein.

Cette combinaison nous a permis de construire des méthodes numériques, où on a employé les propriété de ce polynôme dans un cadre théorique qui nécessite l'existence et l'unicité de la solution.

Notre but revient à trouver la solution approximative de ces équations sous forme de polynômes. La comparaison de toutes ces méthodes de solution utilisées au cours de notre recherche, nous a permis de constater que la méthode de colloctions.

Bibliographie

[1] **A.M WAZWAZ :**A first cours in integral equations ,Saint Xavier University, USA

[2] **A.GUERFI :**Quelques Méthodes pour La Résolution des Équations Intégro-Différentielles .Mémoire de Master.Université de Ouargla 2015.

[3] **B.LAKEHALI :** Approximation d'une solution, par les polynômes de Bernstein pour une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce , Mémoire de Master Université de M'sila 2006.

[4] **G.G.LORENTEZ** , Bernstien Polynomials . Professor of Methematics University of Texas Untis,Texas.

[5] **I.Kenneth Joy :** Bernstein polynomials, Departement of Computer Science University of California, Davis 1996-2000.

[6] **L.CHITER :** Résolution des équations intégro-défférentielles.Mémoire de Doctora.Université de M'sila 2018.

[7] **M. H. Reihani**, **Z. Abadi**, Rationalized Haar functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations, J. Comput. Appl. Math. 200 (2007) 12-20.

[8] **M.NADIR :** Cours d'Analyse Fonctionnelle ,Université de M'sila 2004.

[9] **M.NADIR :** Cours sur Les Équation Intégrales, Université de M'sila 2004.

[10] **V.LAKSHIKANTHAN and R.RAMAMOHANA RAO** .Theory of Integro-Differentiel Equations, Florida a Institute of Technology, USA.

ملخص:

في هذه المذكرة استخدمنا كثيرات حدود برنشتاين لايجاد الحل التقريبي لمعادلات التكامل-التفاضلية وقدمنا امثلة عددية للتاكد من الطريقة

كلمات مفتاحية:

معادلة التكامل-التفاضلية، معادلة التكامل-التفاضلية لفريدهولم ، معادلة التكامل التفاضلية لفولتيرا ، كثيرات حدود برنشتاين

Abstract:

In this paper, we used Bernstein's polynomials to come up with a rough solution of integro-differential equations and provided numerical examples to confirm the method

Key words:

Integro-differential equation , Fredholm integro-differential equation ,Volterra integro-differential equations , Bernstein's polynomials

Résume :

Dans cette mémoire, nous avons utilisé les polynômes de Bernstein pour trouver une solution approximative des équations intégro-différentielle et nous avons fourni des exemples numériques pour confirmer la méthode

Mots clé :

Equation intégro-différentielle , équation intégro-différentielle de Fredholm , équation intégro-différentielle de Volterra , polynôme de Bernstein.