الجمهوريـــة الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
وزارة التعليـم العالــي والبحــث العلمــي

جامعة محمد بوضياف بالمسيلـــــة
كليـــة العلـــــوم
رقم21/ك ع/2024

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

المسيـــلة في: 2024/01/21

شهادة موافقة علمية على مطبوعة بيداغوجية

للأستاذة بوناب صبرينة - أستاذ محاضر أ -

يشهد رئيس المجلس العلمي لكلية العلوم بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة، أنه بعد الإطـــلاع على تقاريـــر الخبـــــرة الواردة من طرف الخبـــراء من صف الأستاذيـــة:

- السيد **بعجي نجيب** ، أستاذ التعليم العالي بجامعة محمد بوضياف- المسيلة.
- السيد **كحول عبد الحليم** أستاذ التعليم العالي **بجامعة البشير الابراهيمي برج بوعريرج .**

والمعينين طرف المجلس العلمي لكلية العلوم في الاجتماع المنعقد في دورته العادية يوم2023/12/05 لإجراء الخبرة للمطبوعة البيداغوجية الخاصة بالأستاذ **بوناب صبرينة** - أستاذ محاضر- أ- بقسم الفيزياء والمتعلقة بخبرة للمطبوعة البيداغوجية للمــادة المعنونة بـ: «**Séries et équations Différenceilles**» والمقررة في برنامج التكوين ليسانس، تخصص: « **L2 Physique** » و المفتوح بقسم الفيزياء.،

تــمت الموافقــة عليها شكــلا ومضمونـــا.

رئيس المجلس العلمي لكلية العلوم

أ.د . بعزيز حكيم

الديمقراطيـة الشعبيـة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF- M'SILA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

جامـعـة محمد بوضياف - المسيلة
كلية العلـــــــوم
قسم الفيزيــــــاء

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Support de cours du module

Séries & Equations Différentielles

(Math 3)

Présenté par : Dr. Bounab Sabrina

Destiné Aux Etudiants De La Deuxième Année

Licence Physique

Année Universitaire 2023/2024

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales Simples et Multiples

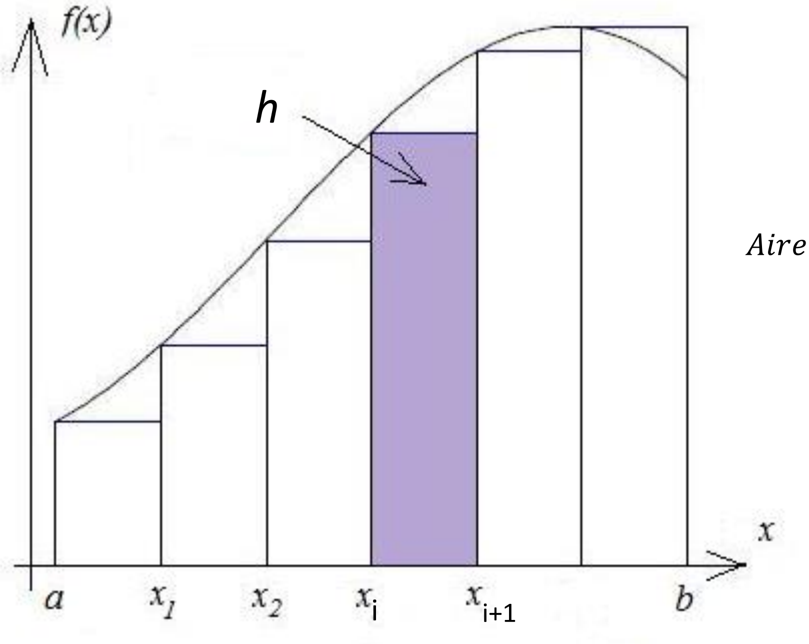
CHAPITRE 1 : Intégrales simples et multiples

1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitive

Soit $f(x)$ une fonction définie et continue dans tout l'intervalle$[a, b]$. On subdivise cet intervalle en n intervalles égaux de largeur h. Soit $x = a + ih$ on appelle intégrale de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ la limite de la somme $R_n = \sum_{i=1}^n h. f(x_i)$ lorsque n tend vers l'infini

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n h. f(x_i) = \int_a^b f(x)dx \qquad (1.1)$$

L'intégrale est l'aire algébrique entre la courbe, l'axe et les bornes.



$$h = \frac{b-a}{n} \quad , h = x_{i+1} - x_i$$

$$Aire \quad \blacksquare \quad = \quad h. f(x_{i+1})$$

$$Aire\ totale\ R_n = \sum_{i=1}^{n} h. f(x_{i+1})$$

$$L'intégrale = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} R_n$$

Remarque : il faut noter que l'intégrale d'une fonction n'existe pas toujours. En d'autres termes la limite définissant l'intégrale n'existe pas toujours. Cependant il est possible de démontrer que si la fonction à intégrée $f(x)$ est continue sur $[a, b]$alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Théorème1 (Chasles) :

Soit $c \in]a, b[$; la fonction f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si, elle est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (1.2)$$

Théorème2 (Linéarité) :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$; les fonctions f et g sont intégrables sur $[a, b]$, on a alors :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \beta g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \qquad (1.3)$$

Rappel sur les Primitives :

- Une fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.
- une primitive de f est une fonction dérivable F telle que $F' = f$
- les fonctions F telles que $F' = 0$ sont les fonctions constantes
- si F_1 et F_2 sont des primitives de f_1 et f_2 respectivement, elles diffèrent d'une constante.
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, avec F est primitive de f

Exemple : Sur $\mathbb{R}$ la fonction A$rctgx$ est une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ puisque pour

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\text{Arctgx})' = \frac{1}{1+x^2}$$

1.1.1 Outils de Calcul d'intégrales

1.1.1.1. Décomposition en somme

Si f est une fonction telle que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ et si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ ont des primitives, on calcule $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx \qquad (1.4)$$

Exemple :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}dx = \int_0^1 \frac{x^2+4-4}{x+2}dx = \int_0^1 (x-2)dx + 4\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = -\frac{3}{2} + ln2$$

1.1.1.2. Intégration par partie

Soit u et v deux fonctions de class C^1sur $[a,b]$on a :

$$\int_a^b f(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)\,dx \qquad (1.5)$$

Remarque : L'intégration par partie est commode dans le cas ou $f(x)$ est l'une des formes :

$$P(x).e^{kx};\ P(x).\sin(\omega x)\,;\ P(x).\cos(\omega x)\,; ou\ P(x).\ln(ax)$$

Avec $P(x)$ étant un polynôme.

1.1.1.3. Changement de variables

On suppose que f est une fonction intégrable dans $[a,b]$, que φ est une fonction à dérivée continue réalisant une bijection de $[\alpha,\beta]$ vers $[a,b]$ telle que $\{\varphi(\alpha) = a\ et\ \varphi(\beta) = b\}$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt \qquad (1.6)$$

$$(avec\ x = \big(\varphi(t)\big)\ et\ dx = \varphi'(t)dt)$$

Exemple :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$$

On pose : $\varphi = \sqrt{x+1} \ \Rightarrow \begin{cases} x = \varphi^2 - 1 \\ dx = 2\varphi d\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \varphi = 1 \\ x = 1 \Rightarrow \varphi = \sqrt{2} \end{cases}$

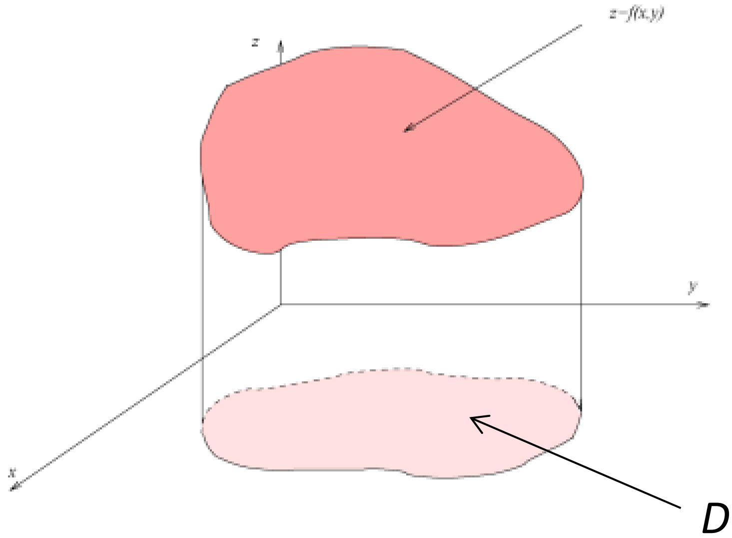
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\varphi^2-1}{\varphi} 2\varphi d\varphi = 2\left[\frac{\varphi^3}{3} - \varphi\right]_1^{\sqrt{2}}$$

1. 2. Intégrales Doubles

1.2.1 Définition: soit D une région $\mathbb{R}^2$bornée de et $f(x,y)$ une fonction définie et continue sur D. on définit l'intégrale double de f sur D :

$$\iint_D f\,(x,y)dxdy \qquad (1.7)$$

De telle manière qu'elle soit égale au volume compris entre la base D et la surface S représentative de $f(x,y)$: $S = \{(x,y),\ f(x,y)\ /(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{D}\}$

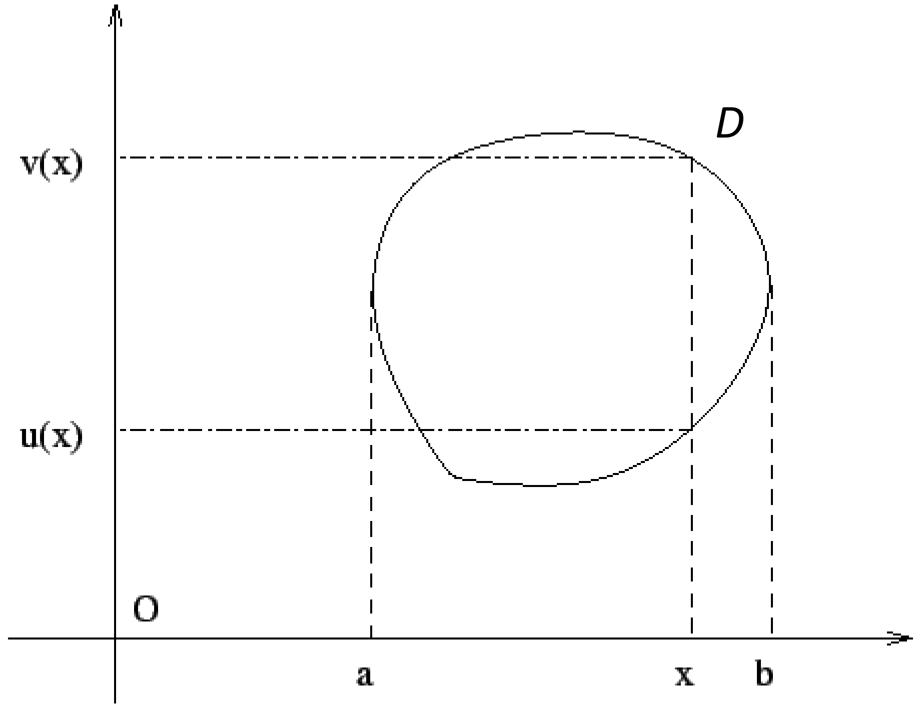


1.2.2 Cas Particulier

Si $f(x,y) = 1$, alors $\iint_D dxdy$ est l'aire de D, $ds = dxdy$ est l'élément d'aire en coordonnée cartésiennes.

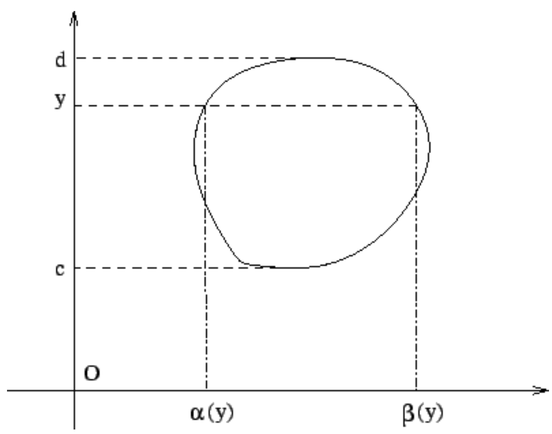
1.2.3Théorème de Fubini

- Soit D le compact de $\mathbb{R}^2$ défini par : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x \in [a,b]\,, u(x) \le y \le v(x)\,,\}$ a, b sont des réels $(a < b)$, u et v des fonctions numériques continues sur [a, b] et vérifiant $u(x) \le v(x)$ pour tout x ∈ [a, b] . Soit f une fonction continue sur D. On alors :



$$\iint\limits_{D} f\,(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy\right)dx \tag{1.8}$$

- Si le domaine le permet, on peut permuter les rôles de x et de y soit α et β des fonctions numériques continues sur [c, d] et vérifiant $\alpha(y) \leq \beta(y)$ pour tout x ∈ [c, d], notons D l'ensemble des point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $c \leq y \leq d\ et \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$, alors :



$$\iint\limits_{D} f\,(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dx\right)dy \tag{1.9}$$

1.2.4 Changement de Variables

Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur le domaine D fermé et borné, en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe $\mathbb{C}^1$

$$(u,v) \longmapsto \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \text{ alors :}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv \tag{1.10}$$

Ou J appelé Jacobien, es le déterminant de la matrice :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial u}\right) \tag{1.11}$$

1.2.4.1 Cas des coordonnées polaires

Le changement de variables en coordonnées polaires est donné par l'application :

$$(\rho,\theta) \longmapsto \begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}$$

Ou $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[$ sont les coordonnées des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; cette application a Jacobien :

$$J = \det\begin{pmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta \\ sin\theta & \rho cos\theta \end{pmatrix} = (\rho cos^2\theta - \rho sin^2\theta) = \rho \tag{1.12}$$

Alors

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(\rho cos\theta, \rho sin\theta))\rho d\rho d\theta \tag{1.13}$$

1. 3. Intégrales Triples

1.3.1 Définition: f étant continue sur un domaine D fermé et borné de $\mathbb{R}^3$, on définit l'intégrale triplée de f sur D :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D f(x,y,z)dv \tag{1.13}$$

Se définit de façon analogue aux intégrales doubles et se calcule par intégration successives.

1.3.2 Cas particulier *:* Si $f(x,y) = 1$ alors

$$\iiint_D dxdydz = Volume\ de\ D \tag{1.14}$$

Ou $dv = dxdydz$ est l'élément de volume en coordonnées cartésiennes.

1.3.3 Calcul effective : Soit f une fonction définie et continue sur D, δ est la projection orthogonal de Dsur le plan xOy, alors :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_\delta \left(\int_{V(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \tag{1.15}$$

Où $V(x,y) \ = \ \{z/(x,y,z) \in D\}$

En général on utilise cette méthode quand D est une portion de surface comprise entre deux surfaces $z_1(x,y)$ et $z_2(x,y)$: $D \ = \ \{(x,y,z) \ / \ (x,y) \ \in \ \delta, z_1(x,y) \ \leq \ z \ \leq \ z_2 \ (x,y)\}$, ce qui donne :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_\delta \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \tag{1.16}$$

1.3.4 Changement de Variables

Le théorème est analogue au cas des intégrales doubles, Soit $f(x,y,z)$ une fonction continue sur le domaine D fermé et borné, en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe $\mathbb{C}^1$

$$(u,v,w) \longmapsto \begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \xi(u,v,w) \end{cases} \text{ alors :}$$

$$\iiint_D f(x,y)dxdydz = \iiint_\Delta f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|dudv \tag{1.17}$$

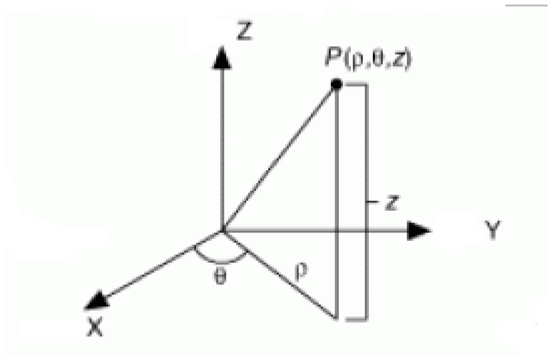
Ou J appelé Jacobien, es le déterminant de la matrice :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{1.18}$$

1.3.4.1 Cas des coordonnées Cylindriques

Le changement de variables en coordonnées cylindriques est donné par l'application :

$$(\rho,\theta,z) \longmapsto \begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



Cette application donne un Jacobien :

$$J = \det\begin{pmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta & 0 \\ sin\theta & \rho cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\rho cos^2\theta - \rho sin^2\theta) = \rho \qquad (1.19)$$

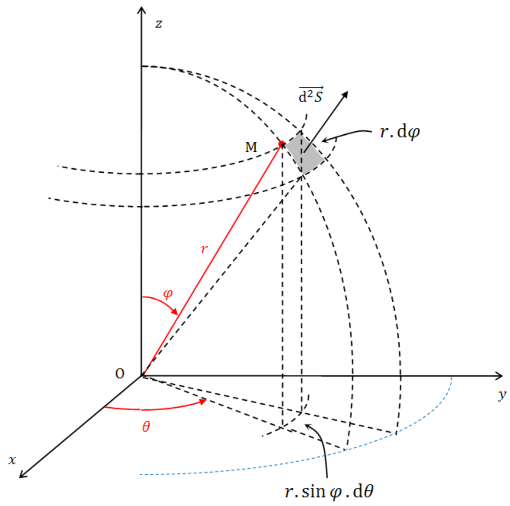
Alors

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta f(\rho cos\theta, \rho sin\theta, z))\, \rho d\rho d\theta dz \qquad (1.20)$$

1.3.4.2 Cas des coordonnées Sphériques

Le changement de variables en coordonnées sphériques est donné par l'application :

$$(r,\theta,\varphi) \longmapsto \begin{cases} x = rsin\varphi cos\theta \\ y = rsin\varphi sin\theta \\ z = rcos\varphi \end{cases}$$



Où $(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$

Cette application donne un Jacobien J égale à:

$$J=\det\begin{pmatrix} sin\varphi cos\theta & -rsin\varphi sin\theta & rcos\varphi cos\theta \\ sin\varphi sin\theta & rsin\varphi cos\theta & rcos\varphi sin\theta \\ cos\varphi & 0 & -rsin\varphi \end{pmatrix}=r^2 sin\varphi \tag{1.21}$$

Alors

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Delta g(r,\theta,\varphi)\,r^2 sin\varphi drd\theta d\varphi \tag{1.22}$$

1.4 Exercices

Exercice 1.1 : soit $D=[0,1]\times[0,2]$, on veut calculer $\iint_D \; xe^{xy}\,dxdy$

Exercice 1.2 : on veut calculer le volume d(un solide qui s'élève sur le domaine D du plan Oxy délimité par la droite d'équation $y=2x$ et la parabole $y=x^2$ et couverte par la paraboloïde $z=x^2+y^2$

Exercice 1. 3 : Calculer l'aire D ; où D est la zone définie comme suite :

$$D \;=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq\frac{1}{2} ; xy\leq 1 \;\; et\; y \;\leq\; x^2 \right\}$$

Exercice 1. 4 : On veut intégrer la fonction $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ sur le domaine

$$D \;=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\;\leq\sqrt{3}x\;\; et 1\;\leq\; x^2+y^2\;\leq\; 4)\;\right\}$$

Exercice 1. 5 : Calculer $I=\iint\frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$ sur le domaine

$$D \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\;>a\;\; et\; x^2+y^2\;<\; a^2\;\}$$

Exercice 1.6 : Calculer $I=\iiint_D dxdydz$ sur le domaine D avec :

$$D \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\;\; et\; x+y+z\leq 1\;\}$$

Exercice 1. 7 : Considérons $I=\iiint_D 4y^3 dxdydz$ sur le domaine D avec :

$$D \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq z^2\;\; et\; 1<z<2\;\}$$

Exercice 1. 8 : Calculer $\iiint_D \; ze^{x^2+y^2}dxdydz$, avec :

$$D \;=\; \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\leq\sqrt{x^2+y^2}\;\leq 2\;\; et 0\leq\; z\leq\; 1)\;\right\}$$

Exercicee1. 9 : Calculons $\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, avec :

$$D \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a^2\leq\; x^2+y^2+z^2\leq\;\; b^2\, avec\; 0<a<b)\;\}$$

Exercice 1. 10 : Calculons $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, avec :

$$D \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\geq 0,\; x^2+y^2\leq z^2\;\; et\; x^2+y^2+z^2\leq\; 1)\;\}$$

1.6 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1.1:

$$I=\iint_D xe^{xy}\,dxdy=\int_0^1 x\left(\int_0^2 e^{xy}dy\right)dx=\int_0^1 x\left(\left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=2}\right)dx=\int_0^1 (e^{2x}-1)dx=\frac{1}{2}(e^2-3)$$

Solution de l'exercice 1.2 : le domaine D peut être écrit par :

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x\le 2, x^2\le y\le 2x),\}$$

$$I=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

$$=\int_0^2\left(\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)dy\right)dx$$

$$=\int_0^2\left(\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=x^2}^{y=2x}\right)dx=\int_0^2\left(\frac{x^6}{3}-x^4+\frac{14}{3}x^3\right)dx=\frac{216}{35}$$

Solution de Exercice 1.3 : On calcule d'abord les points d'intersections des courbes qui délimitent l'aire D :

$$\begin{cases}xy=1\\ y=x^2\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\Rightarrow xy=1\Rightarrow y=2\Rightarrow(\frac{1}{2},2)\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=x^2\Rightarrow y=\frac{1}{4}\Rightarrow(\frac{1}{2},\frac{1}{4})\\ xy=1\ et\ y=x^2\Rightarrow(1{,}1)\end{cases}$$

$$Aire=D=\iint_D dxdy=\int_{x=\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{y=x^2}^{\frac{1}{x}}dy\right)dx=\int_{x=\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}-x^2\right)dx=\left[lnx-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=ln2-\frac{7}{24}$$

Solution de l'exercice 1.4 : on passe en coordonnées polaires

$$I=\iint_\Delta \frac{1}{1+\rho^2}\rho\,d\rho d\theta$$

Avec : $\Delta=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi[: 1\le\rho\le 2\ et\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4})\right\}$, alors :

$$I=\int_1^2 \frac{1}{1+\rho^2}\rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{6}ln\frac{5}{6}$$

Solution de l'exercice 1.5 : on passe en coordonnées polaires

$$I=\iint_\Delta \frac{\rho(cos\theta+sin\theta)}{\rho^2}\rho d\rho d\theta=\iint_\Delta (cos\theta+sin\theta)d\rho d\theta$$

Avec : $\Delta=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi[:\frac{a}{cos\theta+sin\theta}\le\rho\le a\ et\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2})\right\}$

$$I=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{a}{cos\theta+sin\theta}}^{a}(cos\theta+sin\theta)d\rho\right)d\theta=a\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$$

Solution de l'exercice 1.6 : ici $\delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\ \ et\ x+y\le 1\}$

Avec $(z_1(x,y)=0,\ z_2(x,y)=1-x-y)$

$$I=\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x}\left(\int_{z=0}^{1-x-y}dz\right)dy\right)dx=\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x}(1-x-y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_{x=0}^{1}\left[(1-x)y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}dx=\frac{1}{6}$$

Solution de l'exercice1. 7 : En effet

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 1<z<2, 0\le x\le z, 0\le y\le\sqrt{z^2-x^2}\right\}$$

$$I=\int_{z=1}^{2}\left(\int_{x=0}^{z}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{z^2-x^2}}4y^3dy\right)dx\right)dz=\int_{z=1}^{2}\left(\int_{x=0}^{z}(z^2-x^2)^2\,dx\right)dz$$

$$=\int_{z=1}^{2}\left(\left[z^4x+\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}z^2x^3\right]_0^z\right)dz=\frac{28}{5}$$

Solution de l'exercice 1. 8 : on utilise les coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases}x=\rho cos\theta\\ y=\rho sin\theta\Longrightarrow x^2+y^2=\rho^2\ \Longrightarrow 1\le\rho\le 2\\ z=z\end{cases}$$

$$\Delta=\{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3: 1\le\rho\le 2\ ;\ 0\le\theta\le 2\pi\ et0\le\ z\le\ 1)\ \}$$

$$I=\int_{z=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=1}^{2}ze^{\rho^2}\rho d\rho d\theta dz=\int_{z=0}^{1}zdz\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{\rho=1}^{2}\rho e^{\rho^2}d\rho=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$$

Solution de l'exercice 1. 9 : on utilise les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = rsin\varphi cos\theta \\ y = rsin\varphi sin\theta \\ z = rcos\varphi \end{cases}$$

$\Delta = \ \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : a \leq \ r \leq \ \ b, 0 \leq \theta \ \leq 2\pi \ et \ \ 0 \leq \varphi \leq \pi) \ \}$ et $J = r^2 sin\varphi$

$$I = \iiint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz = \int_a^b rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} sin\varphi d\varphi = 2\pi(b^2 - a^2)$$

Chapitre 2

Intégrales Impropres

CHAPITRE 2 : Intégrales Impropres

2.1 Définition de l'intégrale impropre

L'intégral impropre$\int_a^b f(x)dx$ est dite intégrale impropre si :

①$f(x)$ est continue et si $a = -\infty$ Ou $b = +\infty$, où les deux ($a = -\infty$ et $b = +\infty$), c'est-à-dire si un ou les deux bornes d'intégrations est infinie

②$f(x)$ n'est pas borné en un ou plusieurs points $\in [a, b]$, de tels points sont appelés singularités de $f(x)$.

Remarque : Les intégrales correspondant à ① ou à ②s'appellent intégrales impropres de première ou de deuxième espèce respectivement.

Les intégrales correspondant aux deux conditions ① et ② s'appellent intégrales impropres de troisième espèce.

Exemples :

1. $\int_0^{+\infty} sin^2 x dx$ est une intégrale impropre de première espèce ($b = +\infty$).
2. $\int_0^4 \frac{dx}{x-3}$ est une intégrale impropre de deuxième espèce ($f(x)$ n'est pas borné en $x = 3 \in [a, b]$)
3. $\int_0^1 \frac{sinx}{x} dx$ est une intégrale propre (puisque $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \neq \infty$ donc $f(x)$ est borné en $x = 0$)
4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ est une intégrale impropre de première espèce ($b = +\infty$).

2.2 Intégrale impropre sur un intervalle non borné (1^{er} espèce)

Définition : Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty\,[$ pour tout x appartenant à $[a, +\infty[$, on dit que l'intégrale impropre de f sur $[a, +\infty\,[$ notée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente si et seulement si $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ existe et elle est finie.

I. Dans le cas ou $\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)dx$ n'existe pas on dit que l'intégrale est divergente.

II. De même, per définition $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$ est convergente ou divergente selon que la limite existe ou n'existe pas.

III. D'une manière semblable, on définit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx \tag{2.1}$$

Ou x_0 est un nombre réel, et l'on dit que l'intégrale est convergente ou divergente selon que les intégrales du membre droite de l'égalité (2.1) convergent ou non, selon les définitions (I) et (II).

Exemple 1:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = 1$$

Si bien que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$converge vers 1

Exemple 2:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx = \lim_{a\to+\infty} \int_a^0 e^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty} [-e^{-x}]_a^0 = -1$$

Si bien que $\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx =$converge vers -1

Exemple 3:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} [lnx]_{1}^{b} = +\infty$$

Si bien que $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est divergente.

2.2 .1 Critères de Convergence pour les intégrales impropres de première espèce

Les critères suivant sont données pour le cas où une borne d'intégration est $+\infty$. Des critères similaires existent quand une borne d'intégration est $-\infty$ (un changement de variable $x = -y$ change la borne en $+\infty$) .

Nous supposons que $f(x)$ est continue, donc intégrable sur tout intervalle finie $a \leq x \leq b$:

2.2.1.1 Critère de Comparaison

Pour les intégrales d'une fonction positive (non négatif) :

i. ***Convergence :*** soit $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq a$ et supposons que $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ converge, alors si : $0 \leq g(x) \leq f(x) \ \ \forall x > a: alors \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ converge également.

ii. ***Divergence :*** soit $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq a$ et supposons que $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ diverge, alors si : $0 \leq f(x) \leq g(x) \ \ \forall x > a: alors \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ diverge également.

Exemples :

1) *Puisque* $\forall x \in [0, +\infty[: \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{e^x}$ *et que* $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx$ converge alors $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+e^x} dx$ converge aussi.
2) *Puisque* $\forall x \in [2, +\infty[: \frac{1}{ln} \geq \frac{1}{x}$ *et que* $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge alors $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{lnx} dx$ diverge également.

2.2.1.2 Critère de Quotient

Pour les intégrales d'une fonction positive (non négatif) :

i. Si $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ et si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0 \ et \neq \infty$ Alors :

$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \ \ et \ \ \int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ Ont la même nature c-à-dire convergent toutes deux ou divergent toutes deux.

ii. Si $k = 0$ dans (i) et si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge également.

iii. Si $k = \infty$ dans (i) et si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge également.

2.2.1.3 Critère de Riemann

Pour $g(x) = \frac{1}{x^p}$ et soit :

$$\lim_{x\to\infty} x^p \times f(x) = k \tag{2.2}$$

i. Alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si $p > 1$ *et si* k est finie $(k \neq \infty)$.

ii. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge si $p \leq 1$ $et\ si\ k \neq 0$ $(\ k\ peut\ etre\ infinie\ k = \infty)$

Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{4x^4+25} dx$ converge puisque :

$$\lim_{x\to\infty} x^p \times \frac{x^2}{4x^4+25} = \frac{1}{4} \qquad (p = 2 > 1\ et\ k = 1/4 \neq \infty)$$

2.2 .2 Intégrale des fonctions de signe quelconque

2.2.2.1 Convergence Absolue et Semi convergence

- On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.
- Et si $\int_a^b f(x)dx$ converge mais $\int_a^b |f(x)|dx$ diverge, on dit que $\int_a^b f(x)dx$ est semi convergente.

Exemple :

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{cosx}{1+x^2} dx$ converge absolument et donc converge puisque :

$$\forall x \in [0, +\infty[\ :\ \left|\frac{cosx}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Et on a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ converge alors par comparaison l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left|\frac{cosx}{1+x^2}\right| dx$ converge également, et par conséquent $\int_0^{+\infty} \frac{cosx}{1+x^2} dx$ converge absolument.

Remarque :

Tous les critères utilisés pour les intégrales avec des intégrants non négatifs peuvent être utilisés comme critères de convergence absolue.

2.2.2.2 Critère d'Abel

Théorème (Théorème d'Abel) :

Soient $f\,et\,g$ deux fonctions définies : $[a,+\infty[\ \longrightarrow\ R$, si on a :

i. f est une fonction décroissante sur $[a,+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$ ($\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$).
ii. il existe une constante M telle que, quels que soient $x\ et\ x'$ dans $[a,+\infty[$ on ait :

$$\left|\int_{x}^{x\prime} g(x)dx\right| \leq M \qquad (2.3)$$

Alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f\,(x) \times\, g\,(x)dx$ *converge*.

Exemple :

L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente :

En effet on a la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction monotone décroissante sur $[1,+\infty[$

et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0)$

Et d' autre part on a aussi :

$$\forall x \in [1,+\infty[\ :\ \left|\int_1^x \sin x\, dx\right| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2$$

On a alors la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ par application du critère d'Abel.

2.3 Intégrale impropre de seconde espèce

Définition :

- Si f une fonction n'est pas bornée (n'est pas continue) seulement à l'extrémité $x = a$ de l'intervalle $a \leq x \leq b$, alors on propose par définition :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (2.4)$$

Si la limite du membre droite de (2.4) existe, on dit que l'intégrale de membre gauche est convergente, sinon elle est dite divergente.

- De même si f une fonction n'est pas bornée seulement à l'extrémité $x = b$ de l'intervalle $a \leq x \leq b$, alors on propose par définition :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (2.5)$$

En pareil cas, l'intégrale du membre gauche de (2.5) est dite convergente ou divergente selon que la limite de membre de droite existe ou n'existe pas.

- Si f une fonction n'est pas bornée seulement en un point intérieur $x = x_0$ de l'intervalle$a \leq x \leq b$, alors par définition on pose:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_{a}^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (2.6)$$

L'intégrale du membre gauche de (2.6) converge ou diverge selon que les limites de membre de droite existent ou n'existent pas.

2.3.1 Intégrales impropres de seconde espèce de fonctions particulières

1. *L'intégrale impropre (en $x = a$)*$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ converge si $p < 1$ et diverge si $p \geq 1$.
2. *L'intégrale impropre (en $x = b$)*$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ converge si $p < 1$ et diverge si $p \geq 1$.

On appelle ces intégrales puissances de seconde espèce (remarquons quand $p \leq 0$ les intégrales sont propres.

2.3.2 Critères de Convergence pour les intégrales impropres de seconde espèce

Les critères suivant sont données pour le cas ou $f(x)$ n'est pas bornée seulement à l'extrémité $x = a$ de l'intervalle $a \leq x \leq b$. Des critères similaires existent si $f(x)$ est non bornée en $x = b$ ou $x = x_0$ où $a < x_0 < b$.

2.3.2.1 Critère de Comparaison

Pour les intégrales d'une fonction positive (non négatif) :

1. ***Convergence :*** soit $g(x) \geq 0$ pour tout $a < x \leq b$ et supposons que $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors si : $0 \leq g(x) \leq f(x)$ $\forall x > a$ $\int_a^b f(x)dx$ converge également.
2. ***Divergence :*** soit $g(x) \geq 0$ pour tout $a < x \leq b$ et supposons que $\int_a^b g(x)dx$ diverge, alors si : $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x > a$ $\int_a^b f(x)dx$ diverge également.

2.3.2.2 Critère de Quotient

Pour les intégrales d'une fonction positive (non négatif) :

Si $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ pour tout $a < x < b$ et si $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0 \; et \neq \infty$ Alors :

$\int_a^b f(x)dx \; et \; \int_a^b g(x)dx$ ont la même nature c-à-dire convergent toutes deux ou divergent toutes deux.

1. Si $k = 0$ dans (i) et si $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge également.
2. Si $k = \infty$ dans (i) et si $\int_a^b g(x)dx$ diverge, alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge également.

2.3.2.3 Critère de Riemann

Si en prenant le cas particulier de $g(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$ dans le critère de quotient on obtient :

$$\lim_{x \to a^+} (x-a)^p \times f(x) = k \tag{2.7}$$

- ✓ Alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si $p < 1 \; et \; si \; k$ est finie $(k \neq \infty)$.
- ✓ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge si $p \geq 1 \; et \; i \; k \neq 0$ ($k \; peut \; etre \; infinie \; k = \infty$).

2.3.3 Convergence Absolue et Semi convergence

- On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.
- Et si $\int_a^b f(x)dx$ converge mais $\int_a^b |f(x)|dx$ diverge, on dit que $\int_a^b f(x)dx$ est semi convergente.

2.4 Exercices

Exercice 2.1 : Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\, dx$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 2.2 : Etudier la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} \sin x\, dx \quad et \quad \int_1^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$.

Exercice 2.3 : Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$.

Exercice2.4 : Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x(1-x)^3} dx$.

Exercice 2.5 : Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4-1}} dx$

Exercice 2.6 : Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 2.7: Etudier la convergence de l'intégrale $\int_\pi^{4\pi} \frac{sinx}{\sqrt[3]{x-\pi}} dx$

2.5 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 2.1 :

On intègre par parties en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow v(x) = \dfrac{-1}{1+x} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\, dx = \left[\frac{-\ln x}{1+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x(1+)} dx = \left[\frac{x}{1+x}\text{lnx} - \ln(x+1\right]_0^1 = -\ln 2$$

Solution de l'exercice2.2 :

- ***Pour*** $\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$ ***:***

$$On\ a \int_0^{+\infty} \sin x\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \sin x\, dx = \lim_{b\to+\infty} [1-\cos b]$$

Cette limite n'existe pas (cette limite prend plus d'une valeur), et donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$ est divergente

- ***Pour*** $\int_1^{+\infty} \sin x^2\, dx$ *:on fait le changement de variable* $t = x^2 \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$On\ a \int_1^{+\infty} \sin x^{\,2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt$$

En appliquant le Théorème d'Abel à l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt$:

- ✓ D'une part la fonction $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$ *et* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$).
- ✓ Et d'autre part on a :

$$\forall x \in [1,+\infty[\ \left|\int_1^{x} sint dt\right| \leq 2$$

Alors l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt$ *converge* ; ainsi l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \sin x^{\,2} dx$converge également.

Solution de l'exercice2.3 :

On a $\forall x \in\,]1,5]: \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ *; et on a aussi* $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ converge $(p = \frac{1}{2} < 1)$

Alors par comparaison l'intégrale $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$ converge également.

Solution de l'exercice2.4 :

On a $\forall x \in [0,1[\ :\ \frac{1}{x(1-x)^3} \geq \frac{1}{(1-x)^3}$ *et on a aussi* $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^3} dx$ diverge $(p = 3 > 1)$

Alors par comparaison $\int_0^1 \frac{1}{x(1-x)^3} dx$ diverge également.

Solution de l'exercice2.5:

En appliquant le critère de Riemann on a

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^p \times f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^p \times \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4-1}} = 1 \qquad \left(p = \frac{1}{2} \ < 1 \; et \; k = 1 \neq \infty\right)$$

$alors\ l'intégrale \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4-1}} dx\ converge$

Solution de l'exercice2.6 :

En appliquant le critère de Riemann on a

$$\lim_{x\to 3^-} (3-x)^p \times f(x) = \lim_{x\to 3^-} (3-x)^p \times \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = 1 \qquad (p = 1 \quad et \; k = 2 \neq 0)$$

$$alors\ l'intégrale \int_0^3 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} diverge$$

Solution de l'exercice2.7

On va étudier la convergence absolue $\int_\pi^{4\pi} \left|\frac{sinx}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| dx$; on a :

$$\forall x \in \,]\pi, 4\pi] : \ \left|\frac{sinx}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$$

Et on a $\int_\pi^{4\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}} dx$ converge $d'aprésle\ ctitére\ de\ Riemann$ $\left(p = \frac{1}{3} \ < 1 \; et \; k = 1 \neq \infty\right)$alors par comparaison $\int_\pi^{4\pi} \left|\frac{sinx}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| dx$ converge également, et par conséquent $\int_\pi^{4\pi} \frac{sinx}{\sqrt[3]{x-\pi}} dx$ converge absolument.

Chapitre 3

Équations différentielles

Chapitre 3 : Équations différentielles

3.1 Définition

Une équation différentielle ordinaire est une équation contenant une variable x, une fonction b et une ou plusieurs dérivées de cette fonction. C'est-à-dire toute équation qui peut s'écrire sous la forme

$$F\left(x, y, y', y", \dots \dots \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.1}$$

Par exemple, les équations suivantes sont des équations différentielles

$$\begin{aligned} & y'' - 2y = x \\ & 2xy' - 3\cos x = 6 \\ & 3x(y')^2 - 2y''' = 0 \end{aligned}$$

- On définit l'ordre d'une équation différentielle comme étant le plus élevé des ordres des dérivées apparaissant dans l'équation. Le degré d'une équation différentielle est l'exposant de la dérivée d'ordre le plus élevé.

Exemple : L'équation $y''' - x(y')^5 = e^x$ est une équation différentielle d'ordre 3 et de degré 1 car y''' est la dérivée d'ordre le plus élevé (3) et que celle-ci est affectée de l'exposant 1.

3.2 Solution d'une équation différentielle

Toute fonction qui satisfait à une équation différentielle est une solution de cette équation. Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les solutions de l'équation.

Exemple : On peut constater que $y = 2\sin x$ et $y = 3\cos x$ sont toutes deux solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$

En effet, si $y = 2\sin x$ alors $y' = 2\cos x$ et $y'' = -2\sin x$.

$y'' + y = -2\sin x + 2\sin x = 0$

De même, si $y = 3\cos x$ alors $y' = -3\sin x$ et $y'' = -3\cos x$.

$y'' + y = -3\cos x + 3\cos x = 0$

- Il existe donc plusieurs solutions à une équation différentielle. En fait, il en existe une infinité. Dans ce cas-ci toute fonction de la forme $y = A\sin x + B\cos x$

où A et B sont des constantes arbitraires, est solution de cette équation.

- On appelle **solution générale** d'une équation différentielle, l'ensemble de toutes les solutions (famille de fonctions) qui vérifient l'équation différentielle. Une équation différentielle d'ordre *n* comporte *n* constantes arbitraires.

On peut donc affirmer que $y = A\sin x + B\cos x$ où A et B sont des constantes arbitraires est la solution générale de l'équation $y'' + y = 0$

$y = 2\sin x$ et $y = 3\cos x$ sont ***des solutions particulières***.

3.3 Équations différentielles d'ordre 1

3.3.1 Équations à variables séparables

Une équation différentielle est dite à *variables séparables* si elle peut s'écrire sous la forme

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \tag{3.2}$$

Les fonctions de x et y multipliant chaque différentielle sont «séparées».

- Pour résoudre cette équation, on doit d'abord séparer les variables puis intégrer chacun des termes de cette équation.

En divisant par $P(x)N(y)$, on obtient

$$\frac{M(x)N(y)}{P(x)N(y)}dx + \frac{P(x)Q(y)}{P(x)N(y)}dy = 0$$

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0 \tag{3.3}$$

On trouve la solution générale en intégrant

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = K \qquad (3.4)$$

3.3.2 Équations homogènes

Une fonction $f(x, y)$ est dite *fonction homogène* de degré *n* si il existe un réel *k* ; telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(kx, ky) = k^n f(x, y) \qquad (3.5)$$

Pour toutes les valeurs de *k, x, y* pour lesquelles la fonction est définie.

(*multiplier chaque variable par k multiplie la fonction par* k^n)

- Une équation différentielle est dite *homogène* si on peut l'écrire sous la forme

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (3.6)$$

où $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont des *fonctions homogènes de même degré*.

- Pour résoudre une équation différentielle homogène, il suffit de faire le changement de variable $y = ux$ (où *u* est une fonction de *x*) pour la transformer en une équation à variables séparables.

3.3.3 Équations linéaires du premier ordre

Une équation différentielle *linéaire d'ordre 1* est une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (3.7)$$

Cette équation peut se résoudre à l'aide d'un *facteur intégrant* (F.I). C'est un artifice de calcul permettant d'obtenir une forme plus facilement intégrable.

Dans ce cas, le facteur intégrant est $e^{\int P(x)dx}$. En multipliant l'équation différentielle par le F.I., on obtient

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x) \qquad (3.8)$$

Or le membre de gauche de cette équation est la dérivée de $ye^{\int P(x)dx}$. On peut donc écrire

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right)=e^{\int P(x)dx}Q(x) \tag{3.9}$$

$$e^{\int P(x)dx}y=\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+K \tag{3.10}$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+K\right) \tag{3.11}$$

Cette dernière équation est donc la solution générale de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1.

3.3.4 Équation de Bernoulli

C'est une équation de la forme :

$$\frac{dy}{dx}+yP(x)=Q(x)y^n \tag{3.12}$$

On transforme cette équation en une équation linéaire en la divisant par y^n et en faisant le changement de variable

$$\begin{aligned} &z=y^{1-n}\\ &\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=(1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ce qui implique que $y^{-n}\,\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(1-n)}\dfrac{dz}{dx}$.

Effectuons ces opérations.

$$\frac{dy}{dx}+yP(x)=Q(x)y^n \tag{3.14}$$

$$y^{-n}\,\frac{dy}{dx}+y^{1-n}P(x)=Q(x) \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+zP(x)=Q(x) \tag{3.16}$$

$$\frac{dz}{dx}+z(1-n)P(x)=(1-n)Q(x) \tag{3.17}$$

Nous avons maintenant une équation linéaire. Nous savons comment résoudre cette équation. Par la suite, il nous suffira de revenir à la variable *y* pour avoir notre solution finale.

3.3.5 Équation différentielle de différentielle exacte (totale)

Une équation différentielle de type :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.18}$$

est une différentielle *exacte* s'il existe une fonction différentiable $f(x,y)$ telle que la différentielle totale de cette fonction (df) soit précisément égale au membre de gauche de (3.18).

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = df = 0 \tag{3.19}$$

La solution de l'équation est alors donnée par $f(x,y) = K$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que (5.6) soit une équation différentielle exacte est que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3.20}$$

(*les dérivées mixtes de f* (*x*,*y*) *sont alors égales*)

Une fois cette condition vérifiée, on pose $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ et on intègre par rapport à *x*, ce qui donne

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) \tag{3.21}$$

Pour déterminer la fonction $C(y)$, on va dériver $f(x,y)$ par rapport à y et comparer la fonction obtenue avec $N(x,y)$.

Cas particuliers (équation réductible à une équation exacte)

Les équations de la forme $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ne sont pas nécessairement exactes. Toutefois il est possible, sous certaines conditions, d'utiliser un facteur intégrant pour qu'elles deviennent exactes. Par exemple, si

$\dfrac{\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)}{-N}=f(x)$ (*une fonction de x uniquement*) alors $e^{\int f(x)dx}$ est un facteur intégrant, et

si $\dfrac{\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)}{M}=g(y)$ (*une fonction de y uniquement*) alors $e^{\int g(y)dy}$ est un facteur intégrant

3.3.6 Equation de Clairaut

C'est une équation de type :

$$y = xy' + g(y') \tag{3.22}$$

On la résout en posant $y' = p$

L'équation (3.22) devienne :

$$y = xp + g(p) \tag{3.23}$$

Puis on différentié par rapport à x :

$$y' = p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dg(p)}{dx} \tag{3.24}$$

$$0 = \frac{dp}{dx}\left(x + \frac{dg(p)}{dp}\right) \tag{3.25}$$

- Soit $\frac{dp}{dx} = 0$ et la solution générale est de type $p = c^{te}$

$$y = xc + g(c) \tag{3.26}$$

- Soit $x + \frac{dg}{dp} = 0$ et on obtient une solution singulière la solution

$$x = -g'(p) \tag{3.27}$$

$$y = -pg'(p) + g(p) \tag{3.28}$$

3.3.7 Equation de Lagrange

C'est une équation de type :

$$y = xf(y') + g(y') \tag{3.29}$$

C'est un cas général de l'équation de Clairaut :

En posant $y' = p$; et on différentié l'équation (3.29) devienne :

$$p = f(p) + \frac{dp}{dx}\left(x\frac{df(p)}{dp} + \frac{dg(p)}{dp}\right) \tag{3.30}$$

$$-(p - f(p))\frac{dx}{dp} + x\frac{df(p)}{dp} + \frac{dg(p)}{dp} = 0 \tag{3.31}$$

Qui est une équation linéaire en x; connaissant $x(p)$ en déduit $y(p)$

3.4 Équations différentielles linéaire du 2ème ordre

Définition : une équation différentielle linéaire (EDL) du 2ème ordre à coefficients constants est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{3.32}$$

Ou $a, b,\ c \in \mathbb{R}\ (a \neq 0)$

L'équation homogène (EH), ou sans second membre associée est

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.33}$$

La solution générale de (3.32) est

$$y = y_p + y_h \tag{3.34}$$

y_h: est la solution de l'équation homogène associée(EH).

y_p: est la solution de particulière à l'équation (3.32).

3.4.1 Résolution de l'équation homogène (EH)

Théorème 1: si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène (EH) alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution de (EH)

$$\begin{cases} ay''_1 + by'_1 + cy_1 = 0 \\ ay''_2 + by'_2 + cy_2 = 0 \end{cases} \tag{3.35}$$

Théorème 2: si y_1 est une solution de l'équation homogène (EH) alors c_1y_1 est aussi une solution de (EH)

Théorème 3: si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène (EH) alors $c_1y_1 + c_2y_2$ est aussi une solution de (EH)

- On cherche la solution de l'équation (EH) sous la forme :

  $$y = e^{rx} \qquad r \in \mathbb{R}$$

  On a donc $y' = ry \quad et\ y'' = r^2y$

  Donc l'équation (EH) devienne :

$$y(ar^2 + br + c) = 0 \tag{3.36}$$

Définition :

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{3.37}$$

L'équation (3.37) se nomme équation caractéristique(EC) de (EH) :

1) Si l'équation caractéristique(EC) admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ alors

$$y_1 = e^{r_1x} \ et \quad y_2 = e^{r_2x} \tag{3.38}$$

La solution y_h de (EH) est :

$$y_h = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \tag{3.39}$$

2) Si l'équation caractéristique(EC) admet une racine double $r \in \mathbb{R}$ alors, la solution y_h de (EH) est :

$$y_h = (c_1x + c_2)e^{rx} \tag{3.40}$$

3) Si l'équation caractéristique(EC) admet deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad et \qquad r_2 = \alpha - i\beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}\ et\ \beta \neq 0)$$

La solution y_h de (EH) est alors:

$$y_h = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \qquad (3.41)$$

Exemple : l'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$, l'équation caractéristique(EC) associée à cette équation est :

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0$$

$$r_1 = -1 + 2i \quad et \quad r_2 = -1 - i2$$

La solution y_h de (EH) est alors:

$$y_h = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

Remarque :

La solution générale à (3.32) est de la forme $y_g = y_p + y_h$, ou y_p est une solution particulière de (3.32), et y_h parcourt toutes les solutions de l'équation homogène (E.H.).

3.4.2 Solution particulière

3.4.2.1 1ère Méthode

On distingue encore deux cas particuliers et une méthode générale :

$f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ ou $(\alpha \in \mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}(I) est\ un\ polynôme$

On cherche une solution sous la forme : $y_p = Q(x)e^{\alpha x}$ ou $Q(x)$ est un polynôme, dont on peut préciser le degré :

- Si α n'est pas racine de (EC) ; alors $degré\ Q = degré\ P$
- Si α est l'un des deux racines de (EC) ; alors $degré\ Q = degré\ P + 1$
- Si α est racine double de (EC) ; alors $degré\ Q = degré\ P + 2$

3.4.2.2 2ème Méthode (Changements des variables)

Soit l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$, dont la solution homogène est :

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad (3.42)$$

Pour l'équation avec second membre, on considére que c_1 et c_2 des fonctions en x $c_1(x)$ et $c_2(x)$

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 \qquad (3.43)$$

$$\Rightarrow y' = c'_1(x)y_1 + c_1(x)y'_1 + c'_2(x)y_2 + c_2(x)y'_2 \qquad (3.44)$$

On choisit $c_1(x)$ et $c_2(x)$ telle que :

$$c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 = 0 \tag{3.45}$$

$$y' = c_1(x)y'_1 + c_2(x)y'_2 \tag{3.46}$$

$$\Rightarrow y'' = c'_1(x)y'_1 + c_1(x)y''_1 + c_{\prime 2}(x)y'_2 + c_2(x)y''_2 \tag{3.47}$$

En substituant $y'', y'\ et\ y$ dans l'équation (3.32)

$$\Rightarrow a\big(c'_1(x)y'_1 + c_1(x)y''_1 + c'_2(x)y'_2 + c_2(x)y''_2\big)y'' + b\big(c_1(x)y'_1 + c_2(x)y'_2\big) + c(c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2) = f(x)$$

$$a\big(c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2\big) + \left(\underbrace{ac_1(x)y''_1 + bc_1(x)y'_1 + cc_1(x)y_1}_{=0} + \underbrace{ac_2(x)y''_2 + bc_2(x)y'_2 + cc_2(x)y_2}_{=0}\right) = f(x) \tag{3.48}$$

Par conséquent, il reste :

$$a\big(c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2\big) = f(x) \tag{3.49}$$

Finalement on trouve le système d'équations :

$$\begin{cases} c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 = 0 \\ c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2 = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases} \tag{3.50}$$

Qui est un ensemble de deux équations linéaires ($c'_1(x)\ et\ c'_2(x)\ inconues$) , puis par intégration de i$c'_1(x)\ et\ c'_2(x)$, on trouve $c_1(x)\ et\ c_2(x)$.

3.5 Eléments d'équations aux dérivées partielles

3.5.1 Généralités

Une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) est une équation fonctionnelle qui met en relation des dérivées partielles. Typiquement, si u est une fonction à valeurs scalaires des variables $x \; et \; y, (x, y) \in \Omega$ où Ω désigne un ouvert de$\mathbb{R}^2$, une EDP est une relation de la forme :

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad Pour \; (x, y) \in \Omega \qquad (3.51)$$

où F désigne une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

- L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation. L'équation (3.51) est donc d'ordre 1.
- La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u. L'équation (3.51) est donc de dimension 2.
- Résoudre l' EDP consiste donc à déterminer toutes les fonctions u définies sur Ω satisfaisant (3.51).
- En général, une EDP est complétée par des conditions sur le bord de Ω du type :

$$G\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad Pour \; (x, y) \in \Gamma \subset \partial\Omega \qquad (3.52)$$

5.5.2 Définition : Classification des EDP

Cette classification est illustrée dans le cas d'équations du second ordre.

a) On dit qu'une équation aux dérivées partielles est linéaire si la dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles est linéaire :

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y)\;\frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y)u + g(x, y) = 0 \qquad (3.53)$$

L'équation est dite homogène si la fonction g est identiquement nulle sur Ω.

b) On dit qu'une équation aux dérivées partielles est semi-linéaire si la dépendance par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé est linéaire :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3.54)$$

où a, b, c désignent des fonctions des variables $x\ et\ y$, et F une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

c) On dit qu'une équation aux dérivées partielles est quasi-linéaire si elle est de la forme :

$$a\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3.55)$$

où a, b, c et F sont des fonctions définies dans un ouvert de$\mathbb{R}^5$.

d) On dit qu'une équation aux dérivées partielles est complètement non linéaire si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.

3.5.3 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires

3.5.3.1 Equation de transport

Considérons un contaminant de concentration $\boldsymbol{\mu}$ dans un fluide en mouvement, où le champ de vitesse $\vec{v}$, fonction des variables d'espace (x, y) et du temps t, est donné.

En l'absence de source répartie, la conservation de la matière conduit à l'équation :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathrm{div}(\mu\, \vec{v}) \;=\; 0 \qquad (3.56)$$

Appelée équation d'advection.

Si on suppose que le fluide support est incompressible ($\mathrm{div}(\vec{v})$ = 0), on obtient V équation de transport :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathrm{div}(\mu\, \vec{v}) \;=\; 0 \qquad (3.57)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mu)\vec{v} \;=\; 0 \qquad (3.58)$$

Considérons le cas unidimensionnel en espace :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nu \frac{\partial \mu}{\partial x} \;=\; 0 \tag{3.59}$$

Si on suppose de plus que la vitesse νest constante, il apparaît clairement que toute fonction de la forme :

$$(x,t) \longmapsto \mu(x,t) \;= \tilde{\mu}(x \;-\; \nu t) \tag{3.60}$$

est solution.

3.5.3.2 Équation de la chaleur

Désignons par $\vec{q} et\ T$ les fonctions « flux de chaleur » et « température », des variables spatiales $(x,y), et\ du\ temps\ t$.

D'après le premier principe de la thermodynamique, une équation d'état et la loi de Fourier, on a

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{q}) = c\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ \vec{q} = -k\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \end{cases} \tag{3.61}$$

où $\boldsymbol{c} \;>\; 0$ désigne la chaleur spécifique, et $\boldsymbol{k} \;>\; 0$ le coefficient de conductivité thermique. Pour ce qui suit, on pose $a = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{c}}$
Par combinaison, on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a\Delta T \;=\; 0 \tag{3.62}$$

L'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue est appelée ***équation de la chaleur.*** Elle gouverne tous les phénomènes diffusifs (c'est donc aussi l'équation de la diffusion).
Reprenons l'équation en une dimension d'espace :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \;=\; 0 \tag{3.63}$$

3.6 Exercices

Exercice 3.1 : Résoudre l'équation différentielle : $y' = \frac{x}{y}$.

Exercice 3.2 : Résoudre sur $]1, +\infty[$l'équation différentielle : $xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y$

Exercice 3.3 : Résoudre l'équation différentielle $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

Exercice 3.4 : Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' \cos x + y \sin x = 1$

Exercice 3.5 : Résoudre l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2$

Exercice 3.6 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$(x - y + 2)dx + (y - x + 1)dy = 0$

Exercice 3.7 : Résoudre l'équation différentielle : $ydx - (x + y^2)dy = 0$

Exercice 3.8 : Résoudre l'équation différentielle : $yy' = xy'^2 + 1$

Exercice 3.9 : Résoudre l'équation différentielle : $y = xy'^2 + y'^2$

Exercice 3.10 : Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2y' = e^x \sin x$

Exercice 3.11 : Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = \frac{1}{x} e^x$

Exercice 3.12 : Résoudre l'équation différentielle : $y'' - y = \frac{1}{e^x + 1}$

Exercice 3.13 : Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$

Exercice 3.14 : Résoudre l'équation différentielle :$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + u(x, y) = 0$

3.7 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 3.1 : Cette équation s'écrit sous la forme :

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow ydy - xdx = 0$

Il ne reste plus qu'à intégrer :

$$\int y dy - \int x dx = C$$
$$\left(\frac{y^2}{2} + C_1\right) - \left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) = C$$
$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C - C_1 - C_2$$
$$y^2 - x^2 = 2(C - C_1 - C_2)$$
$$y^2 - x^2 = K$$

où $K = 2(C - C_1 - C_2)$ est une constante arbitraire

La solution générale est donc la famille de fonctions $y^2 - x^2 = K$

Solution de l'exercice 3.2 : En divisant par $(xy \ln x)$:

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln x}\right) \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln x}\right) dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 3\ln|x| + \ln|\ln x| + c$$

Etant donné $x \in]1, +\infty[$, on trouve finalement :

$$y = cx^3 \ln x$$

Solution de l'exercice 3.3 : Cette équation s'écrit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$
$$xydy = (x^2 + y^2)dx$$
$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

On a $M(x, y) = x^2 + y^2$ et $N(x, y) = -xy$.

On vérifie aisément que ces deux fonctions sont homogènes de degré 2.

Posons $y = ux$. On a alors $dy = udx + xdu$.

Notre équation devient

$$(x^2+u^2x^2)dx - x(ux)(udx+xdu)=0$$
$$x^2dx+u^2x^2dx-u^2x^2dx-ux^3du=0$$
$$x^2dx-ux^3du=0$$
$$dx-ux\,du=0$$

Séparons les variables et intégrons :

$$dx = ux\,du$$
$$\frac{dx}{x}=u\,du$$
$$\ln|x|=\frac{u^2}{2}+k$$
$$\ln(x^2)=u^2+k_1$$
$$x^2=e^{k_1}\cdot e^{u^2}$$
$$x^2=Ke^{u^2} \quad où \quad K=e^k \quad \text{est une constante positive}$$

Il ne nous reste plus qu'à remplacer u par $\frac{y}{x}$

$$x^2=Ke^{y^2/x^2}$$

Solution de l'exercice 3.4 : Nous devons d'abord mettre cette équation sous la même forme que l'équation (5.4).

$$y' + y\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx}+y\tan x=\frac{1}{\cos x}$$

On calcule le facteur intégrant $e^{\int \tan x dx} = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx} = e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{\cos x}$

On peut maintenant résoudre

$$\frac{1}{\cos x}\frac{dy}{dx}+y\frac{1}{\cos x}\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}+y\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$\frac{y}{\cos x} = \tan x + K$$

$$y = \sin x + K\cos x$$

Solution de l'exercice 3.5 : (c'est une équation de Bernoulli) En divisant par y^2 on obtient :

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = 1$$

Posons $z = y^{-1}$. Alors $\Longrightarrow \dfrac{dz}{dx} = -y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$.

L'équation devient

$$-\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = 1$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -1$$

Le facteur intégrant est alors $e^{\int -\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$

La solution est donc

$$\frac{1}{x}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2}z = \frac{-1}{x}$$

$$z\left(\frac{1}{x}\right) = \int \frac{-1}{x}dx + K$$

$$z\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x + K$$

$$z = -x\ln x + Kx$$

$$\frac{1}{y} = -x\ln x + Kx$$

$$y = \frac{1}{-x\ln x + Kx}$$

Solution de l'exercice 3.6 : Nous avons :

$\frac{\partial M}{\partial y}=-1$ et $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$.

On a donc bien affaire à une équation de différentielle exacte. Alors

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M(x,y)dx + C(y) = \int (x-y+2)dx + C(y) \\ &= \frac{x^2}{2} - xy + 2x + C(y) \end{aligned}$$

Posons $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + C'(y) = y - x + 1 = N(x,y)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} C'(y) &= y+1 \\ C(y) &= \frac{y^2}{2} + y \end{aligned}$$

Donc $f(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + 2x + \frac{y^2}{2} + y$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$\frac{x^2}{2} - xy + 2x + \frac{y^2}{2} + y = K$$

Solution de l'exercice 3.7 : On a $\frac{\partial M}{\partial y}=1$ et $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$. L'équation n'est pas exacte. Par contre

$\dfrac{\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)}{M}=\left(\dfrac{-1-1}{y}\right)=\dfrac{-2}{y}$ est une fonction de y seulement. Le facteur intégrant est donc $e^{\int\frac{-2}{y}dy}=e^{-2\ln y}=\dfrac{1}{y^2}$. Si on multiplie notre équation initiale par ce facteur, on obtient $\dfrac{1}{y}dx-(\dfrac{x}{y^2}+1)dy=0$ qui est une équation exacte.

Vérifions ceci

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{-1}{y^2}$ et $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{-1}{y^2}$

Résolvons maintenant cette équation

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)=\int\frac{1}{y}dx+C(y)$$
$$=\frac{x}{y}+C(y)$$

Posons $\dfrac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}+C'(y)=-\dfrac{x}{y^2}-1=N(x,y)$.

On trouve

$$C'(y)=-1$$
$$C(y)=-y$$

Donc $f(x,y)=\dfrac{x}{y}-y$

La solution de l'équation différentielle est donc $\dfrac{x}{y}-y=K$

Solution de l'exercice 3.8 :

$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

on pose $y' = p$

L'équation devienne :

$$y = xp + \frac{1}{p}$$

Puis on différentié par rapport à x :

$$y' = p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}\frac{1}{p^2}$$

$$0 = \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{p^2}\right)$$

- Soit $\frac{dp}{dx} = 0$ et la solution générale est de type $p = c^{te}$

$$y = xc + \frac{1}{c}$$

- Soit $x - \frac{1}{p^2} = 0$ et on obtient une solution singulière la solution

$$x = \frac{1}{p^2}$$

$$y = \frac{2}{c}$$

Solution de l'exercice 3.9 :

$$y = xy'^2 + y'^2$$

on pose $y' = p$

L'équation devienne :

$$y = xp^2 + p^2$$

Puis on différentié par rapport à x :

$$y' = p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$p - p^2 = 2p\frac{dp}{dx}(x+1) \Rightarrow 1 - p = 2\frac{dp}{dx}(x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{(x+1)} = \frac{2}{1-p}dp$$

On intègre

$$\Rightarrow \ln|x+1| = \ln\frac{C}{(1-p)^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{C}{(1-p)^2} - 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{Cp^2}{(1-p)^2}$$

- Soit $\frac{dp}{dx} = 0$ et la solution générale est de type $p = c^{te}$

$$y = xc + \frac{1}{c}$$

- Soit $x - \frac{1}{p^2} = 0$ et on obtient une solution singulière la solution

$$x = \frac{1}{p^2}$$

$$y = \frac{2}{c}$$

Solution de l'exercice 3.10 :

L'équation homogène $E_H\ est$: $\quad y'' - 2y' = 0$

Qui correspond à une équation caractéristique :

$$r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0\ et\ r_2 = 2$$

Dont la solution homogène est :

$$y_h = c_1e^0 + c_2e^{2x}$$

On utilise la méthode de changement des constantes

$$\begin{cases} c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 = 0 \\ a\left(c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2\right) = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c'_1(x)1 + c'_2(x)e^{2x} = 0 \dots \dots \dots .. (1) \\ 2c'_2(x)e^{2x} = e^x \sin x \dots \dots \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

De l'équation (2) on trouve :

$$c'_2(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \sin x$$

On intègre $c'_2(x)$ par partie deux fois :

$$u = e^{-x} \longrightarrow u' = -e^{-x}$$

$$v' = \sin x \longrightarrow v = -\cos x$$

$$2c_2(x) = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx$$

$$2c_2(x) = -e^{-x} \cos x - \left[e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x \, dx \right]$$

$$2c_2(x) = -e^{-x} [\sin x + \cos x] - 2c_2(x)$$

$$\Rightarrow c_2(x) = \frac{-1}{4} e^{-x} [\sin x + \cos x]$$

Et on d'après l'équation (1)

$$c'_1(x) = -c'_2(x)e^{2x}$$

$$\Rightarrow c'_1(x) = -\frac{1}{2} e^{+x} \sin x$$

De la même façon on trouve

$$\Rightarrow c_1(x) = \frac{1}{4} e^{+x} [\sin x - \cos x]$$

Alors on peut écrire la solution particulière comme :

$$y_p = \frac{e^x}{4} [\sin x - \cos x] + \frac{-1}{4} e^x [\sin x + \cos x] = \frac{-1}{2} e^x [\cos x]$$

Et la solution générale est :

$$y_g = y_h + y_p = c_1 - \frac{e^x}{2}\,[\cos x] + c_2\, e^{2x}$$

Solution de l'exercice 3.11 :

L'équation homogène $E_H\ est$: : $y'' + 2y' + y = 0$

Qui correspond à une équation caractéristique :

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow une\ racine\ double\ r = -1$$

Dont la solution homogène est :

$$y_h\ = (c_1 x + c_2)e^{-x}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = xe^{-x}\ \ et\ \ y_2 = e^{-x} \\ y'_1 = (1-x)e^{-x}\ \ et\ \ y'_2 = -e^{-x} \end{cases}$$

On utilise la méthode de changement des constantes

$$\begin{cases} c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 = 0 \\ a\big(c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2\big) = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c'_1(x)xe^{-x} + c'_2(x)e^{-x} = 0 \ldots\ldots\ldots..(1) \\ c'_1(x)(1-x)e^{-x} - c'_2(x)e^{-x} = \dfrac{1}{x}e^{-x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

(1)+ (2) on trouve :

$c'_1(x)e^{-x} = \frac{1}{x}e^{-x} \Rightarrow c'_1(x) = \frac{1}{x}$

Par intégration on trouve :

$$c_1(x) = \ln|x|$$

Et on d'après l'équation (1)

$$c'_2(x) = -xc'_1(x)$$

$$\Rightarrow c_2(x) = -x$$

Alors on peut écrire la solution particulière comme :

$$y_p = (\text{xln}|x| - x)e^{-x}$$

Et la solution générale est donnée :

$$y_g = y_h + y_p = (\text{xln}|x| + xc_1 - x + c_2)e^{-x}$$

Solution de l'exercice 3.12 :

L'équation homogène $E_H\ est$: $\ :\ y'' - y = 0$

Qui correspond à une équation caractéristique :

$$r^2 - 1 = 0 \Longrightarrow r_1 = -1\ et\ r_2 = +1$$

Dont la solution homogène est :

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{+x}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x}\ \ et\ \ y_2 = e^{x} \\ y'_1 = -e^{-x}\ \ et\ \ y'_2 = e^{x} \end{cases}$$

On utilise la méthode de changement des constantes

$$\begin{cases} c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 = 0 \\ a\left(c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2\right) = f(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c'_1(x)e^{-x} + c'_2(x)e^{x} = 0 \ldots\ldots\ldots..(1) \\ -c'_1(x)e^{-x} + c'_2(x)e^{+x} = \dfrac{1}{e^x + 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

(1)+ (2) on trouve :

$2c'_2(x)e^{x} = \frac{1}{e^x+1} \Longrightarrow 2c'_2(x) = \frac{e^{-x}}{e^x+1}$

$$\Longrightarrow 2c_2(x) = \int \frac{e^{-x}}{e^x + 1}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^x(e^{-x} + 1)}dx = \int \frac{e^{-x} + 1 - 1}{e^x(e^{-x} + 1)}dx$$

$$\Longrightarrow 2c_2(x) = \int \left(\frac{e^{-x} + 1}{e^x(e^{-x} + 1)} - \frac{1}{e^x(e^{-x} + 1)}\right)dx = \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + 1)}\right)dx$$

$$\Rightarrow c_2(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(e^{-x}+1)$$

Et on d'après l'équation (1)

$$c'_1(x) = -c'_2(x)e^{2x} \Rightarrow 2c'_1(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\Rightarrow 2c_1(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

On trouve finalement:

$$\Rightarrow c_1(x) = \frac{1}{2}\ln(e^x+1)$$

Et la solution particulière est donnée :

$$y_p = \left(\frac{1}{2}\ln(e^x+1)\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{2}\ln(e^{-x}+1)e^x\right) + \frac{1}{2}$$

Et la solution générale est donnée :

$$y_g = y_h + y_p = \left(\frac{1}{2}\ln(e^x+1) + c_1\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{2}\ln(e^{-x}+1) + c_2\right)e^x + \frac{1}{2}$$

Solution de l'exercice 3.13 :

L'équation homogène $E_H\ est:$ $: y'' + y = 0$

Qui correspond à une équation caractéristique :

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -i\ et\ r_2 = +i$$

Dont la solution homogène est :

$$y_h = c_1\cos x + c_2\sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \cos x \quad et \quad y_2 = \sin x \\ y'_1 = -\sin x \quad et \quad y'_2 = \cos x \end{cases}$$

On utilise la méthode de changement des constantes

$$\begin{cases} c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 = 0 \\ a\left(c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2\right) = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c'_1(x)\cos x + c'_2(x)\sin x = 0 \ldots\ldots\ldots..(1) \\ -c'_1(x)\sin x + c'_2(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin^3 x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \times (c'_1(x)\cos x + c'_2(x)\sin x) = 0 \ldots\ldots\ldots..(3) \\ \cos x \times (-c'_1(x)\sin x + c'_2(x)\cos x) = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4) \end{cases}$$

(3)+ (4) on trouve :

$$c'_2(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x} \Rightarrow c_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$$

$$\Rightarrow c_2(x) = \frac{-1}{2\sin^2 x}$$

Et on d'après l'équation (1)

$$c'_1(x) = -c'_2(x)\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow c'_1(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow c_1(x) = \int \frac{-1}{\sin^2 x}dx$$

On trouve finalement:

$$\Rightarrow c_1(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Et la solution particulière est donnée :

$$y_p = \frac{\cos x}{\sin x}\cos x + \frac{-1}{2\sin^2 x}\sin x = \frac{2\cos^2 x - 1}{2\sin x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{\cos 2x}{2\sin x}$$

Et la solution générale est donnée :

$$y_g = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{\cos 2x}{2\sin x}$$

Solution de l'exercice 3.13 :

Figeons la variable y, et posons $v(x) = u(x, y)$. On doit résoudre l'équation différentielle :

$$v''(x) + v(x) = 0$$

Les solutions sont :

$$v(x) = A \sin x + B \cos x$$

et revenant à u on obtient :

$$u(x) = A(y) \sin x + B(y) \cos x$$

Chapitre 4

Les Séries

Chapitre 4 : Les Séries

4.1 Séries numériques

Généralité

Soit (U_n) une suite de nombre réels, on pose :

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots .. U_n = \sum_{k=0}^{n} U_k \tag{4.1}$$

- (S_n) est appelée suite des sommes partielles de la série.
- La limite de S_n est appelée série de terme générale U_n.
- $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} U_k = U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots$

  R_n est appelé le reste d'ordre n de la série.

Notation :

Une série de terme générale U_n est notée $(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n)$ *ou* $(\sum_{n\geq 0} U_n)$.

4.1.1 Convergence

Définition :

Une série de terme générale U_n est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée somme de la série est on note :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \tag{4.2}$$

- Une série qui n'est pas convergente est dite divergente
- En d'autre terme, si on note :

$$l = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{4.3}$$

On a alors $(\sum_{n\geq 0} U_n)$ converge vers l $\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |Sn - l| \leq \varepsilon \tag{4.4}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{n} \geq N \Rightarrow 0 \left|\sum_{k=0}^{n} U_k - l\right| < 0 \tag{4.5}$$

- ***La série géométrique :*** une série géométrique est une série dont le terme générale est de la forme :

$$U_n = ar^n , \quad a \neq 0 \tag{4.6}$$

Pour ce type de série la somme partielle est donnée par :

$$Sn = a \times \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} \tag{4.7}$$

Et on remarque que la limite $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe si et seulement si : $|r| < 1$ dans ce cas la série est convergente et on a :

$$\sum_{n\geq 0} a.r^n = \frac{a}{1 - r} \tag{4.8}$$

Proposition 1 :

Soit $(\sum_{n\geq 1} U_n)$ une série convergente alors $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ la réciproque est fausse

Preuve : Posons

$$l = \sum_{n=0}^{\infty} Un = \lim_{n\to+\infty} Sn = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} \tag{4.9}$$

$$S_n - S_{n-1} =$$

$$(U_0 + U_n + \cdots \ldots . + U_{n-1} + U_n) - (U_0 + U_n + \cdots \ldots . + U_{n-1}) = U_n \tag{4.10}$$

Et on a

$$\lim_{n\to\infty}(Sn - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} Un = 0 \tag{4.11}$$

Remarque :

La proposition précédente est utile sous sa forme contre posée, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n \neq 0 \Rightarrow \sum U_n \ \ diverge \tag{4.12}$$

- ***Exemple :*** la série $\sum_{n\geq 1} n!$, $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$, $\sum_{n\geq 1}$, $\sum \cos(\frac{1}{n})$ sont des séries divergentes.

Tandis que la série numérique ($\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente bien qu'elle vérifie $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Propositions 2 :

Soit ($\sum_{n\geq 1} U_n$)et ($\sum_{n\geq 1} V_n$) deux séries convergentes respectivement vers u et v alors :

1. La série $\sum_{n\geq 1}(U_n + V_n)$est convergente et on a :
$$\sum_{n\geq 0}(Un + V_n) = \sum_{n\geq 0} Un + \sum_{n\geq 0} Vn = u + v \tag{4.13}$$

2. Pour tous $\alpha \epsilon R$, *la serie* ($\sum \alpha \ Un$) est convergente et on a :
$$\sum_{n\geq 0}(\alpha Un) = \alpha \sum_{n\geq 0} Un = \alpha u \tag{4.14}$$

Définition 2 (Critère de Cauchy) :

Une série est dite de Cauchy, si la suite des sommes partielles (S_n) est de Cauchy cela revient a dire qu'elle vérifiée de la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists N \in \mathbb{N} : \forall p , q \in \mathbb{N}, \forall p \geq q \geq N \Rightarrow$$

$$|Sp - Sq| < \left| \sum_{k=0}^{p} U_k - \sum_{k=0}^{q} U_k \right| < \varepsilon \tag{4.15}$$

Toutes séries réelles de Cauchy sont convergentes.

4.1.2 Séries à termes positifs

Définition : une série ($\sum Un$) est dite série à terme positif si : $U_n \geq 0$ pour tous n $\in N$

Remarque :

Une série ($\sum Un$) est à termes positifs, la suite des sommes partielles (S_n) est croissante.

En effet $S_n - S_{n-1} = Un \geq 0$ d'où la proposition suivante :

Proposition : Soit ($\sum Un$) une série à termes positifs :

$$\sum Un \ \ Converge \Longrightarrow \ (S_n) \ est \ majorée.$$

4.1.2.1 Critère de convergence et de divergence des séries numérique :

4.1.2.1.1 Critère de comparaison

Pour des séries de termes non négatifs (tout série de terme général $Un \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$) soit Un et V_n de R^+ avec $0 \leq Un \leq Vn$.

a) la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} Vn$ ⇒ la convergence $\sum_{n\geq 0} Un$
b) la divergence de $\sum_{n\geq 0} Vn$ ⇒ la divergence de $\sum_{n\geq 0} Un$

4.1.2.1.2 Critère du quotient

Pour des séries de termes positifs soit Un ≥ 0, Vn ≥ 0 et si on a $\lim_{n\to\infty} \frac{Un}{Vn} = k$, alors :

a. si $k = 0$ et $\sum_{n\geq 0} Vn$ converge il est de même pour $\sum_{n\geq 0} Un$.
b. si $0 < k < +\infty$ alors $\sum_{n\geq 0} Vn$ et $\sum_{n\geq 0} Un$ sont toutes deux convergentes.
c. $k = +\infty$ et $\sum_{n\geq 0} Vn$ diverge il en est de même de $\sum_{n\geq 0} Un$.

4.1.2.1.3 Critère d'intégrale

Pour des séries de termes positifs si $f(x)$ est positif continue et monotone décroissante pour $x \geq 1$, et si elle est telle que $f(x) = Un$ alors $\sum_{n\geq 0} Un$ converge ou diverge selon que l'intégrale généralisé

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx \tag{4.16}$$

Converge ou diverge.

Les séries de Riemann : Ce sont des séries de la forme

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots \tag{4.17}$$

Ou p est une constante, elle converge pour $p > 1$ et diverge pour $p \leq 1$.

La série avec $p = 1$ appelée série harmonique.

Remarque :

se déduit du critère par comparaison et en est souvent une forme alternative très utile. à partir des propriétés connus de la série de Riemann la théorie suivante :

4.1.2.3 Règle de Riemann

Si en prenant dans le critère de quotient le cas particulier $V_n = \frac{1}{n^p}$, nous obtenons le théorème suivant :

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} n^p\, u_n = k \tag{4.18}$$

Alors :

- **a.** $\sum Un$ converge si p$>$ 1 et $0 \leq \mathrm{k} < \infty$ $(k \neq \infty)$
- **b.** $\sum Un$ diverge si p$<$ 1, k$\neq$ 0

4.1.2.4 Séries et Equivalents

Soient $\sum_{n\geq 0} U_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} V_n$deux séries numériques à termes positifs telles que $U_n \sim_\infty V_n$. Alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} V_n$ sont de mêmes natures (convergentes ou divergentes).

4.1.3 Séries à termes Quelconques

4.1.3.1 Séries alternées

On appelle série alternée les termes successifs sont alternativement positives $U_n = (-1)^n \,|\, U_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Pour qu'une série alternée converge il suffit (mais n'est pas nécessaire que les deux conditions suivantes soient réalisées :
1) $\lim_{n\to\infty} |U_n| = 0$.
2) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante $pour\ n \geq 1$.

4.1.3.2 Série absolument convergentes et séries semi convergentes

- La série $\sum U_n$ est appelée absolument convergente si $\sum |U_n|$ converge.
- Si $\sum U_n$ converge mais la série $\sum |U_n|$ diverge alors on dit que la série $\sum U_n$ est semi convergente.

Théorème 2 : Si $\sum |U_n|$ converge, alors $\sum U$ converge. En d'autre terme, une série absolument

Converge est une série convergente.

Remarque :

Tous les critères utilisés pour les séries de termes positives peuvent être utilisés comme critères de convergence absolue.

4.1.3.3 Règle d'Alembert

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on pose :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lambda \tag{4.19}$$

Alors :

1. La série $\sum U_n$ est absolument convergente si λ<1.
2. La série $\sum U_n$ est divergente si λ>1.
3. Le critère est en défaut si λ=1.

4.1.3.4 Règle de Cauchy

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Si on a :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|}=\lambda \tag{4.20}$$

alors :

1. La série $\sum U_n$ converge absolument si λ<1.
2. La série $\sum U_n$ diverge si λ>1.
3. Si λ=1 Le critère est en défaut.

4.1.4 Produit des séries

Soit (U_n) et (V_n) deux suites de R, on appelle le produit les deux série $\sum Un$ et $\sum Vn$ la série de terme générale Wn :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} U_k V_{n-k} \tag{4.21}$$

Exemple : Soient $\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{b^n}{n!}$ deux séries numériques, alors le terme général de la série produit $\sum_{n\geq 0} w_n$ est

$W_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(a+b)^n}{n!}$

Théorème :

Soit (Un) et (Vn) deux suites de R, si la série $\sum Un$ est absolument convergente et que la série $\sum Vn$ est aussi absolument convergente alors la série des produit des deux séries $\sum W\,n$ est absolument convergente et on peut écrire :

$$\sum Wn = (\sum Un\,) \times (\,\sum Vn\,) \tag{4.22}$$

4.2 Suites et séries de fonctions

3.2.1 Suites de fonction

Supposons qu'une suite de fonction (f_n) converge vers une fonction f lorsque $n \to \infty$ il faut motionner que des propretés connues la continuité, la dérivabilité ou l'intégralité ne sont pas nécessairement préservées pour cette raison, nous allons décrire le type de convergence existant pour les suites de fonctions.

4.2.1.1 Convergence simple

Soit (f_n) une suite de fonction définie sur l'intervalle I de R.

Définition 1: On dit que la suite (f_n) converge simplement (on ponctuellement) vers la fonction f sur I pour chaque valeur de $x \in I$la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$converge vers la fonction $f(x)$.

On peut reformuler la définition précédente comme suite :

Définition2 :

On dit que la suite (f_n) converge simplement vers f on que f limite simple de la suite (f_n) sur Isi :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, x \in I, \exists\, n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{4.23}$$

Nous remarquerons que dans cette formulation, le nombre n dépend à la fois de ε et de x

Exemple :Soit la suite de fonction définie par : f_n(x)=$\frac{\sin nx}{n}$, x ∈ R

Etudions la convergence simple de la suite (f_n)

on fixe , x $\in R$, et on étudie la limite de suite numérique $f_n(x)$

$\forall\, n\ \in\ \mathbb{N}, \forall\, x\ \in R:\ -1 \leq \sin nx \leq\ +1$

$\forall\, n\ \in\ \mathbb{N}, \forall\, x\ \in R:\ \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin nx}{n} \leq\ \frac{+1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{\sin nx}{\underset{n\to\infty}{n}} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall\ x\ \in R$

On dit que la suite $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction nulle $f = 0$.

***Exemple 2**:*

Soit f_n définit sur [0,1] par : $\forall\ x\ \in [0,1]$: $f_n(x) = \frac{1-nx}{1+nx}$

On montre facilement que la suite de fonction f_n converge simplement sur l'intervalle [0,1]

$\forall x \in [0,1]$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\,(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ -1 & si\ x\ \neq 0 \end{cases}$

Remarquons que dans cet exemple bien que les fonctions f_n soient contenues, la fonction limite f ne l'est pas.

4.2.1.2 Convergence uniforme

Soit f_n une suite de fonction à valeurs réelles ou complexes, définies sur l'intervalle I et soit f une fonction définit sur I. on dit la suite f_n converge uniformément vers f ou f est limite uniforme de la suitef_n , si l'on a la propreté suivante :

$$\forall\ \varepsilon\ > 0:\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall\ n \in \mathbb{N}:\ \forall\ x \in I, n > n_0:\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{4.24}$$

Définition 3 :

On dit que la suite f_n converge uniformément vers la fonction f sur I, si on posant :

$$a_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \tag{4.25}$$

Pour tous n$\in \mathbb{N}$ on obtient une suite qui converge vers 0

($\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \; ou \; \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0$).

De point de vue pratique :

1) On étudie la convergence simple afin de déterminer la limite simple f.
2) On fixe $n \in \mathbb{N}$, on étudié la fonction $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ et on cherche ensuite

$a_n = sup_{x\in I}\, g_n(x)$. Et On détermine la limite de $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Si la limite $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors f_n converge uniformément vers f sur I.

Sinon ($\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$) la suite de fonctions $f_n$ne converge pas uniformément vers f sur I.

Théorème 1(continuité d'une fonction limite) :

Soit $f_n \; [a,b] \to R$ des fonctions continues qui convergent uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f\colon [a,b] \to R$ alors f est continue sur$[a,b]$.

Théorème 2 (intégration d'une fonction limite) :

Soit $f_n \; [a,b] \to R$ des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ qui convergent uniformément vers une fonction $f \; [a,b] \to R$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \tag{4.26}$$

On a donc interversion de l'intégrale et la limite

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n\,(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \tag{4.27}$$

Théorème 3 :

Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle réel quelconque I de R tell que :

1) Il existe un point x_0 de I tel que la suite $f_n(x_0)$ converge
2) La suite des dérivées $f_n{}'(x)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé $[a,b]$ contenue sur 1.

Alors :

1) La suite des (f_n) converge simplement sur I vers fonction f.
2) La fonction f est de classe C^1 et sa dérive coïncide avec la limite de la suite $(\acute{f_n})$.
3) La suite des (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ contenu dans 1.

4.3 Série de fonctions

4.3.1 Convergence simple

Définition 1: Soit $\sum_{n\geq 1} U_n$ une série de fonctions définie sur l'intervalle I. on dit que la série est simplement convergente si, pour tout x de I, la suite des sommes partielle $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une série convergente.

$$S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \cdots\cdots + U_n(x) \quad (4.28)$$

Et dans ce cas on écrit :

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \quad (4.29)$$

On appelle $S(x)$ somme de la série $\sum_{n\geq 1} U_n$, il s'ensuit que $\sum_{n\geq 1} U_n$converge simplement vers $S(x)$ pour tout x de I si :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in I : \exists\, n_0\,(\varepsilon, x) : n > n_0 : |S_n(x) - \mathrm{S(x)}\,| < \varepsilon \quad (4.30)$$

- Si n_0 ne dépend que de ε , la série est dite uniformément convergente sur 1.

4.3.2 Convergence uniforme

Définition 2 **:** Soit $\sum_{n\geq 1} U_n$ une série de fonctions, on dit que la série est uniformément convergente, si la suite des fonctions somme partielle d'ordre n c.-à-d. la suite de fonction $(S_n(x))$ définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k \quad (4.31)$$

Est une suite de fonctions uniformément convergente.

En d'autre terme, elle vérifié la propriété suivante :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in I : \exists\, n_0\,(\varepsilon) : n > n_0 : |S_n(x) - \mathrm{S(x)}\,| < \varepsilon \quad (4.32)$$

- Où n_0 dépend uniquement de ε

Remarque :

Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} U_n$ est une série qui converge simplement on peut considérer pour tout x la suite des restes d'ordre n de la série$\sum_{n\geq 1} U_n$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k \tag{4.33}$$

Puisque $S(x) - S_n(x)$=$R_n(x)$ et le reste de la série après le nième terme, on peut dire de façon équivalente que la série $\sum_{n\geq 1} U_n$ est uniformément convergente pour tout x de I si la suite des restes partiels $R_n(x)$converge uniformément vers la fonction nulle sur 1.

4.3.3 Théorèmes sur les séries uniformément convergentes

Si une série de fonctions est uniformément convergente, elle possède en commun avec les sommes partielles de fonctions de nombreuses propriétés comme le montrent les théorèmes suivants :

Théorème 1 :

Si les fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des fonctions continues sur $[a, b]$ alors S(x) est continue sur $[a, b]$ Ex bref, ceci veut dire que la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est une fonction continue. Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer qu'une série donnée n'est pas uniformément convergente en démontrant que la fonction somme S(x) est discontinue en un point, en particulier si x_0 est dans $[a, b]$ alors le théorème établit que :

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n\geq 0} U_n(x) = \sum_{n\geq 0} \lim_{x\to x_0} U_n(x) = \sum_{n\geq 0} U_n(x_0) \tag{4.34}$$

On utilise la limite à droite ou la limite à gauche si x_0 est à une extrémité de $[a, b]$

Théorème 2 :

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des fonctions continues sur $[a\ , b]$, et si $\sum U_n(x)$ converge uniformément vers la somme $S(x)$ sur$[a\ , b]$ alors :

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b U_n(x)\,dx \tag{4.35}$$

$$\int_a^b \sum_{n\geq 1} U_n\,(x) = \sum_{n\geq 1} \int_a^b U_n(x)dx \tag{4.36}$$

En bref une série uniformément convergente de fonctions continues peut être intégrée terme à terme.

Théorème 3 :

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des fonctions continues et ont des dérivées continues sur $[a,b]$, et si $\sum_{n\geq 1} U_n(x)$ converge vers S(x) tandis que $\sum_{n\geq 1} U_n(x)$ est informent convergent sur $[a,b]$ alors

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} U_n'(x) \tag{4.37}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n\geq 1} U_n(x)\right] = \sum_{n\geq 1} \frac{d}{dx} U_n(x) \tag{4.38}$$

Ce théorème donne les conditions pour qu'une série puise être dérivée terme à terme.

- Des théorèmes semblables au théorème ci-dessus peuvent être formulés pour les suites de fonctions.
- Pour exemple, si la suite $U_n(x)$ est uniformément convergente sur $[a,b]$ alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b U_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} U_n(x)\,dx \tag{4.39}$$

4.3.4 Critères particuliers pour la convergence uniforme des séries de Fonctions

4.3.4.1 Critère de Weierstrass (Convergence Normale)

Si on peut trouver une suite numérique de termes positifs $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que sur un certain intervalle I on ait :

a- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I : \; |U_n(x)| \leq M_n$

b- $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge

Remarque :

- Les séries de fonctions qui réalisent le théorème précèdent s'appellent les séries convergentes normalement.
- Ce critère fournit une condition suffisante mais non nécessaire pour la convergence uniforme c'est-à-dire, qu'une série peut être uniformément convergente sans que le critère puisse s'appliquer. A cause de ce critère, on peut être conduit à croire qu'une série uniformément convergente doit être absolument convergente, et inversement cependant, ces deux propriétés sont indépendantes.

Alors $\sum U_n(x)$ est uniformément et absolument convergent sur c'est intervalle 1.

4.3.4 .2 Critère de Dirichlet

Supposons que :

1) La suit $\{a_n\}$ soit une suite décroissante de constantes positives tendant vers zéro ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

2) Il existe une constant P, telle que pour tout a$< x < b$, l'on ait :

$$\forall n \geq 1 : |U_1(x) + U_2(x) + \cdots U_n(x)| \leq P \tag{4.40}$$

Alors la série $\sum_{n\geq 1} a_n \, U_n(x)$ est uniformément convergente pour $a < x <$ b

4.3.4 .3 Théorème (le reste de la série)

Si on peut trouver une suite numérique ε_n convergente vers zéro $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n$ = 0 telle que :

$$\forall \, n \; \in \; N^* : \; \forall \, x \; \in \; [a, b] : |R_n(x)| < \varepsilon_n \tag{4.41}$$

Alors la série $\sum U_n(x)$ est uniformément convergente.

$R_n(x)$: est le reste de la série $\sum U_n(x)$ d'ordre n $R_n\,(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)$

4.4 Séries entières

Définition : On appelle série entière d'une variable x une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} X^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n \tag{4.42}$$

Les coefficients $a_0, a_1, \ldots \ldots a_n sont\ données$

4.4.1 Rayon de convergence

- En générale une série entière converge pour $|x| < R$ et diverge pour$|x| > R$, pour une certaine constante R appelée rayon de convergence de la série pour $|x| = R$ la série peut aussi bien converger que diverger.
- L'intervalle $|x| < R$ on R < x <-R avec inclusions possible des extrémités, s'appelle l'intervalle de convergence de la série
- Le critère de l'Alembert réussisse souvent pour obtenue cet intervalle, il peut être on défaut et on ce cas on doit faire appel à d'autres critères.

Exemple :

- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}$ d'après le critère de d'Alembert on a :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\times n!}{(n+1)!\times x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| = 0 < 1(si\ x \neq 0)$$

Pour $x \neq 0$La série converge absolument, et Pour x=0 la série devient 0 Et cette série converge$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}$ converge absolument sur $R]-\infty, +\infty[$

- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est une série géométrique de raison $q = x$ elle converge pour tout $|x| < 1$ donc l'intervalle $]-1, +1[$ et le rayon de convergence R=1.
- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2}$, D'après la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{\underset{n\to\infty}{U_n}}\right| = \lim\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\ \frac{n^2}{x^n}\right| = |x|$$

Elle converge si $|x| < 1$, R=1

Calcule du rayon de converge :

Soit la série $\sum_{n>0} a_n x^n$ une série entière, le rayon de convergence de cette série est donnée par l'une des deux relations suivante :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{a_n}} \; (Règle\ de\ Cauchy) \tag{4.43}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \; (Règle\ de\ d'Alembert) \tag{4.44}$$

Théorème :

Une série entière converge uniformément et absolument dans intervalle strictement contenu dans l'intervalle de convergence.

4. 4.2 Fonction somme d'une série entière

Continuité :

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction définie sur l'intervalle de convergence, somme de la série entière de rayon de convergence R alors f est continue sur un intervalle strictement contenu dans l'intervalle de convergence.

Théorème1 :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série de rayon de convergence $R > 0$ pour tous x : $R > |x| \geq 0$ on a

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n x^n \quad = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} . x^{n+1} \tag{4.45}$$

Théorème 2 :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ par conséquent la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a le même rayon de convergence R.

Théorème 3 :

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et la série dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence R

- Une série entière est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$, par récurrence on trouve

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots . (n-k+1)\, a_n x^{n-k} \tag{4.46}$$

Et on déduit que :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tag{4.47}$$

Ainsi les coefficients de la série entière sont définis de manière unique par la fonction somme $f(x)$.

- Par conséquent, deux série entière de rayon de convergence non nul sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
- Une série entière de rayon de convergence non nul est nulle si et seulement si ses coefficients sont nuls.

Exemple : En dérivant la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{4.48}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \tag{4.49}$$

4.4.5 Développement de fonction en série entière

Supposant que $f(x)$ et ses dérivées $f(x), f'(x), \dots \dots f^{(n)}(x)$ existent et soient continués dans l'intervalle fermée$[a, b]$ et que $f^{n+1}(x)$ existe dans l'intervalle ouvert a < x < b. Nous avons vu précédemment que :

$$f(x) = f(a) + f(a) \times (x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!} \times (x-a)^2 \dots . + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \times (x-a)^n + R_n \tag{4.50}$$

Ou R_n est le reste est donnée par sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (\boldsymbol{Forme\ de\ Lagrange}) \tag{4.51}$$

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n)!}(x-\xi)^n(x-a) \qquad (\boldsymbol{Forme\ de\ Cauchy}) \qquad (4.52)$$

Ou ξ qui se trouve entre a et x, est en générale différent dans les deux formes.

Quand x varie, ξ varie également en générale. Si pour tous x et tout ξ dans$[a, b]$, nous avons, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ alors l'équation (4.51) peut s'écrire :

$$f(x) = f(a) + f(a) \times (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \times (x-a)^2 \dots . + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \times (x-a)^n \qquad (4.53)$$

Cette série s'appelle la série ou le développement de Taylor de $f(x)$,

- dans le cas ou $a = 0$, elle est souvent désignée sous le nom de série ou développement de Maclaurin. On pouvait être tenté de croire que si toutes les dérivées de $f(x)$ existent au point $x = a$, le développement (4.51) est valable. En fait ceci n'est pas nécessairement le cas , car bien que l'on peut puisse formellement obtenir la série du nombre de droite de l'équation (4.51), la série résultante peut ne pas convergé vers $f(x)$.

Quelques exemples importants des séries entières :

On emploie fréquemment dans la pratique, les séries suivantes convergentes vers les fonctions données dans l'intervalle indiqué :

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \qquad -1 < x < 1$
2. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n \qquad -1 < x < 1$
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \dots .. + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad -\infty < x < +\infty$
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \dots .. + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad -\infty < x < +\infty$
5. $e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n)!} \qquad -\infty < x < +\infty$
6. $\ln|1+x| = \mathrm{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \qquad -1 < x < +1$
7. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \mathrm{x} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \dots .. + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad -1 < x < +1$
8. $Arctg\, x = \mathrm{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \dots .. + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad -1 < x < +1$
9. $(1+x)^p = 1 - px - \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots \frac{p(p-3)\dots .(p-n+1)}{n!}x^n$

Cette série est la série de binôme

a) Si p est entier positif ou zéro, la série un nombre fini de terme.

b) Si $p > 0$ mais n'est pas entier la série converge absolument pour $-1 \leq x \leq +1$

c) Si $-1 < p < 0$, la série converge pour $-1 < x \leq +1$

d) Si $p \leq -1$, la série converge pour $-1 < x < +1$

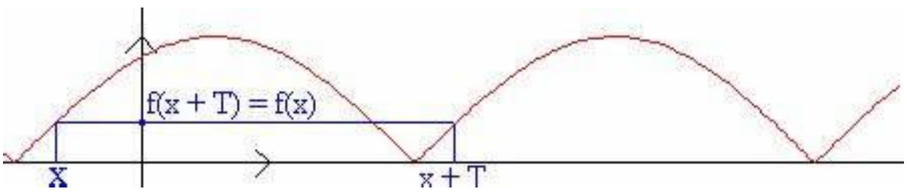
Pour tout p, la série converge certainement pour $-1 < x < +1$

4. 5 Séries de Fourier

4.5.1 Fonctions Périodiques

On dit qu'une fonction $f(x)$ a une période T ou est périodique de période T, où T est une constante positive si pour tout x : $f(x) = f(x+T)$

Exemple : les fonctions $sinx$ et $cosx$ ont des périodes : $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots \ldots$



4.5.2 Séries de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction définie sur l'intervalle $]-L,+L[$ et en dehors de cet intervalle par $f(x) = f(x+2L)$ c'est-à-dire périodique de période $2L$, La série de Fourier ou le développement de Fourier correspondant à $f(x)$ est donné par :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n cos\frac{n\pi}{L}x + b_n sin\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4.54}$$

Où les coefficients de Fourier a_n et b_n sont donnés par :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x)\, cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x)\, sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} \qquad (4.55)$$

Si $f(x)$ a la période $2L$, les coefficients $a_n\ et\ b_n$ peuvent être déterminés de manière équivalente par :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x)\, cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x)\, sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} \qquad (4.56)$$

Ou c est n'importe quel nombre réel, dans le cas particulier ou $c = -L$ (4.56) devient (4.55).

Pour déterminer $a_0\ dans\ (4.54), on\ utilise\ (4.55)\ ou\ (4.56)\ avec\ n = 0$, par exemple :

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x)\, dx \qquad (4.57)$$

4.5.3 Conditions de Dirichlet

Supposons que :

1. $f(x)$ est définie et univoque sauf peut être en un nombre fini de points de l'intervalle $]-L, +L[$.
2. $f(x)$ est périodique en dehors de l'intervalle $]-L, +L[$ avec la période $2L$.
3. $f(x) et\ f'(x)$ sont continues par morceaux dans de l'intervalle $]-L, +L[$.

   Alors la série (I) avec les coefficients $(II)\ ou\ (III)$ converge vers :

   A. $f(x)$ si x est un point de continuité.

   B. $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ si x est un point de discontinuité.

   Ici $f(x+0)\ et\ f(x-0)$ sont les limites à droite et à gauche de $f(x)$ au point x respectivement.

4.5.4 L'égalité de Parseval

Soit f une fonction 2π-périodique et supposons pour le moment que sa série de Fourier converge uniformément vers $f(x)$; En multipliant les deux membres de l'équation (4.54) $\left(f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi}{L}x + b_n sin\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$ par $f(x)$ et en intégrant terme à terme sur $[-\pi, \pi]$, on obtient l'égalité suivante, dite égalité de Parseval:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}(f(x))^2\,dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2) \tag{4.58}$$

4.6 Exercices

Les Séries Numériques

Exercice 4.1 : démontrer que la série suivante est convergente, en calculant sa somme :

$$\sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\dots\dots\dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

Exercice 4. 2 : Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq1}(-1)^{n+1}$

Exercice 4.3 : Etudier la divergence ou la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq1}\frac{1}{2^n+1}\ ;\ \sum_{n\geq2}\frac{1}{\ln n}$$

Exercice 4.4 : Etudier la convergence de la série : $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$

Exercice 4.5 : Etudier la convergence de la série : $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}$

Exercice 4.6 : Etudier la convergence des séries : $\sum_{n\geq1}\frac{n}{4n^3-2}$; $\sum\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$

Exercice 4.7 : Etudier la convergence de la série :$\sum_{n\geq1}\ln\frac{1}{n} - \ln\sin\frac{1}{n}$

Exercice 4.8: Démontrer que la série suivante est convergente :

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n}+\cdots=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$$

Exercice 4.9 : Etudier la convergence absolue de la série :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Exercice 4.9 : Etudier la convergence absolue de la série : $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n!}$

Exercice 4.10: Etudier la convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 1}\left(a+\frac{1}{n^p}\right)^n \qquad avec(a>0, p\geq 0\ )$$

Exercice 4.11: Soit la suite de fonction définie par : f_n(x)=$\frac{\sin nx}{n}$, x ∈ R

Etudions la convergence simple et uniforme de la suite (f_n)

Exercice 4.12: Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) de fonctions définie sur [0,1] par : ∀ x ∈ [0,1]: $f_n(x)=\frac{1-nx}{1+nx}$

Exercice 4.13: Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) de fonctions définie sur $]-1,1[$ par :

$$f_n(x)=1+x+\cdots x^{n-1}$$

Exercice 4.14: Soit la série $\sum_{n\geq 1}U_n(x)$ de terme générale $U_n(x)$ définie par :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1]:U_n(x)=\ x^{\frac{1}{2n+1}}-\ x^{\frac{1}{2n-1}}$

Montrer que la série est simplement convergente et non uniformément.

Exercice 4.15: Etudier la convergence absolue et uniforme des séries $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n^2}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{3^{2n}}$

Exercice 4.16: Étudier la convergence uniforme de la série définie par le terme générale :

$f: R^* \to R \quad x : f(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$

Exercice 4.17: Trouver le rayon de convergence de la série $\sum_{n>0} \frac{n!}{n^n} x^n$

Exercice 4.18: Calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3^n} nx^n$

Exercice 4.19: Soit $f(x) = x$ définie sur $]-\pi, +\pi[$ de période 2π ; développer la fonction $f(x)$ en série de Fourier, en déduire les sommes des séries $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}; et \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

4.7 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 4.1 :

La série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$ ($q < 1 \Rightarrow$ *la série est convergente*) ; on a alors :

$$Sn = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 \Rightarrow la\ limite\ existe\ donc\ la\ série\ est\ convergente\ ,et\ on\ peut\ déduire\ que$$

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

Solution de l'exercice 4.2:

$$on\ a \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots\cdots + (-1)^{n+1} + \cdots\cdots\cdots$$

$$Sn = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - \cdots \ldots (-1)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} Sn = \begin{cases} 0 & si\ n\ est\ pair \\ 1 & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

Donc la limite de S_n n'existe pas, la série est donc divergente.

Solution de l'exercice 4.3 :

- Pour $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n+1}$, On a :

$\forall\, n \geq 1 : \frac{1}{2^n+1} \leq \frac{1}{2^n}$

Et on a déjà prouvé que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ est convergente alors par comparaison la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n+1}$ et aussi convergente.

- Pour $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$, Puisque :

$\forall\, n \geq 2 : \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$

Et puisque la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ est divergente, alors il en est de même de pour $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$

Solution de l'exercice 4.4 :

$\forall\, n \geq 1$: La fonction $f(x) = \frac{1}{n^2}$ est positive contenue décroissante sur $]1, +\infty]$

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to\infty} \left(1 - \frac{1}{M}\right) = 1 \ (la\ limite\ existe).$$

$\Rightarrow$ *l'intégrale impropre est convergente alors la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est convergente .*

Solution de l'exercice 4.5 :

$\forall\, n \geq 1$: *la fonction* $f(x) = \frac{1}{n}$ *est positive contenue décroissante sur* $]1, +\infty]$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty} [\ln x]_1^M = +\infty$$

$\Rightarrow$ *l'intégrale impropre est divergente alors la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente .*

Solution de l'exercice 4.6 :

- En utilisant la règle de Riemann la série $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{4n^3-2}$ est Convergente.

Puisque $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{n}{4n^3-2} = \frac{1}{4}(p = 2 > 1, et\ k \neq +\infty)$

- La série est $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ divergente :

Puisque $\lim_{n\to\infty} n^{1/2} \times \frac{\ln n}{(n+1)^{1/2}} = +\infty. (p = \frac{1}{2} < 1, et\ k \neq 0)$

Solution de l'exercice 4.7 : soit : $U_n = \ln\frac{1}{n} - \ln\sin\frac{1}{n}$

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \varepsilon(n)(\lim_{n\to\infty}\varepsilon(n) = 0, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0)$$

Soit $U_n \sim \ln\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}\right) \Rightarrow U_n \sim -\ln\left(1 - \frac{1}{6n^3}\right)$

Et on a : $\ln(1-x) \sim_{x\to 0} -x - \frac{-x^2}{2} + \ldots$

$\ln\left(1 - \frac{1}{6n^2}\right) = -\frac{1}{6n^2} \Longrightarrow U_n \sim \frac{1}{6n^2}$

La série $\sum_{n\geq 1} U_n$ est équivalente à une série de Riemann$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{6n^2}$ qui est convergente, alors elle est de même $\sum_{n\geq 1}\left(\ln\frac{1}{n} - \ln\sin\frac{1}{n}\right)$

Solution de l'exercice 4.8 :

- La série donnée est une série alternée, nous avons le terme général : $Un = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, on vérifié les deux conditions :

1) $\forall n \in \mathbb{N} :\ \lim_{n\to\infty}|U_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$
2) $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{d|U_n|}{dn} = -\frac{1}{n^2} < 0 \Longrightarrow$ Donc $|\mathrm{U_n}|$ est décroissant

Par conséquent la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$est convergente.

- La série des valeurs absolues $\sum\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), alors la série $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est semi convergente.

Solution de l'exercice 4.9 : En utilisant le critère de d'Alembert, on trouve :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

La série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n!}$ est absolument convergente.

Solution de l'exercice 4.10 : En utilisant le critère de Cauchy, on trouve :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(a + \frac{1}{n^p}\right) = \lambda$$

On a les cas suivants :

- Si $p = 0 \Longrightarrow \lambda = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|} = a + 1 > 1$

Alors la série est divergente.

- Si $p > 0 \Longrightarrow \lambda = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|} = a$

  Dans ce cas on a :

  - si a<1 la série est absolument convergente
  - si a>1 la série est divergente
  - si a = 1 la régle est en défaut

$$\text{on remerque que : } \lim_{n\to\infty} U_n = \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)^n = \begin{cases} 1 & si\ p > 1 \\ +\infty & si\ p < 1 \\ e & si\ p = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$, alors la série est divergente pour $a = 1$

Solution de l'exercice 4.11 :

- **La convergence simple** : on fixe, $x \in R$, et on étudie la limite de suite numérique $f_n(x)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in R : -1 \leq \sin nx \leq +1$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in R : \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin nx}{n} \leq \frac{+1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

Donc $\forall\, x \ \in R:\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

On dit que la suite $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction nulle $f = 0$.

- **la convergence uniforme :**

Connaissant la fonction limite $f = 0$ de la suite de fonctions f_n

On fixe $n \in \mathbb{N}$, on cherche si possible $a_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$.

$$a_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{n}\right|$$

Et Comme $|\sin nx| \leq 1$ alors $-\frac{1}{n} \leq \left|\frac{\sin nx}{n}\right| < +\frac{1}{n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ *donc* la suite de fonctions f_n limite converge uniformément vers f.

Remarque **:** On peut prouver que $a_n = \frac{1}{n}$ pour la valeur $x = \frac{\pi}{2n}$.

Solution de l'exercice 4.12 :

On montre facilement que la suite de fonction f_n converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$

$$\forall x \in [0,1]: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - nx}{1 + nx} = f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ -1 & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

Remarquons que dans cet exemple bien que les fonctions f_n soient contenues, la fonction limite f ne l'est pas, par conséquent la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$

Solution de l'exercice 4.13 :

La suite de fonctions $f_n(x)$ est une somme d'une série géométrique, alors on a

$\forall x \in\,]-1,1[\colon\ f_n(x) = 1 + x + \cdots x^{n-1} = 1 \times \frac{1-x^n}{1-x}$

$$\forall x \in\,]-1,1[\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\forall x \in\,]-1,1[\colon g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{-x^n}{1-x}$$

$\sup_{x\in[-1,1]} g_n(x) \Rightarrow x_{sup} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} g_n(0) = 0$

Alors la suite de fonctions converge uniformément sur $]-1,1[$

Solution de l'exercice 4.14 :

$$S_n(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) = U_1(x) + U_k(x) + \cdots\cdots + U_n(x)$$

$$=\left(x^{1/3} - x\right) + \left(x^{1/5} - x^{1/3}\right) + \cdots + \left(x^{1/2n-1} - x^{1/2n+1}\right)$$

$$S_n(x) = x^{1/2n+1} - x$$

Et on a

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ 1 - x & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

La limite de $S_n(\mathrm{x})$ existe alors la série converge simplement vers $S(x)$ sur $[0,1]$, mais on remarque que cette limite $S(x)$ n'est pas continue $en\ x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} S(\mathrm{x}) = 1 \neq S(0) = 0$$

$\Longrightarrow$ La série donnée $\sum_{n\geq 1} U_n(x)$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$

Solution de l'exercice 4.15 :

- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$

On a $\forall\, x \in R : \forall\, n \in N^* : \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$

Et on a aussi la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann n=2) $\Longrightarrow$ *la série* $\sum \frac{\cos nx}{n_2}$ converge uniformément et absolument (converge normalement) sur $\mathbb{R}$

- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{3^{2n}}$

On a $\forall\, x \in R : \forall\, n \in N^* : \left|\frac{\sin nx}{3^{2n}}\right| < \frac{1}{3^{2n}}$

Et on a aussi la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{2n}}$ est convergente (série géométrique avec $q=\frac{1}{3^2}<1$) $\Longrightarrow$ *la série* $\sum\frac{\sin nx}{3^{2n}}$ converge uniformément et absolument (converge normalement)sur $\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 4.16 :

- On étudie la convergence simple de cette série :

La sérié donnée est une série alternée vérifions les deux conditions :

1- $\forall n\geq 1, \forall x\in R^*: \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right|=0$

2- $\forall n\geq 1, \forall x\in R^*: \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dn}}|U_n|=\frac{-1}{(n+x)^2}<0 \Longrightarrow |U_n|\ est\ décroissante\ sur\ R^*$

Les deux conditions sont vérifiées, alors $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n+x}$ est simplement convergente sur R^*, par conséquent et étant donné que la série est alternée et convergente on peut écrire :

$$\forall n\geq 1, \forall x\in R^*: R_n(x)\leq |U_{n+1}|$$

$$\forall n\geq 1, \forall x\in R^*: R_n(x)\leq \frac{1}{n+1+x}<\frac{1}{n+1}$$

Donc il suffit que $\varepsilon_n=\frac{1}{n+1}\ ou\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ alors la série est uniformément convergente sur R.

Solution de l'exercice 4.17 :

On utilise la règle de Riemann :

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\times\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e$$

Donc le rayon de convergence de cette série est $R=e$ (et l'intervalle de convergence est $x\in\,]-e,+e[$.

Solution de l'exercice 4.18 : on trouve l'intervalle de convergence ; en calculant le rayon de convergence :

On utilise la règle de Riemann :

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3^n}\times\frac{(3)^{n+1}}{(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\right) = 3$$

Donc le rayon de convergence de cette série est $R = 3$ (et l'intervalle de convergence est $x \in]-3, +3[$.

Alors il existe un intervalle $I \subset]-3, +3[$ telle que :

$$\forall x \in I : \sum_{\mathrm{n}\geq 1}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{3^{\mathrm{n}}}\mathrm{n}x^{\mathrm{n}} = S(x)$$

On remarque la sérié géométrique $\sum_{\mathrm{n}\geq 0}\left(\frac{-x}{3}\right)^{\mathrm{n}}$de raison $q = \frac{x}{3}$

$$\forall x \in]-3, +3[: \sum_{\mathrm{n}\geq 0}\left(-\frac{x}{3}\right)^{\mathrm{n}} = \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{3}{3+x}$$

En dérivant la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^{\mathrm{n}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^{\mathrm{n}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{3+x}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}x^{n-1} = \frac{-3}{(3+x)^2}$$

$$\Rightarrow x^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}x^n = \frac{-3}{(3+x)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}x^n = \frac{-3x}{(3+x)^2}$$

Solution de l'exercice 4.19 :

On a $f(x)$ est une fonction impaire $\Rightarrow\ a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\,sinnxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+} x\,sinnxdx$$

On intègre par partie on trouve :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{-x}{n}cosnx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{+\pi} cosnxdx}_{=0}\right) = \frac{-2}{n}cosn\pi = \frac{-2}{n}(-1)^n$$

Par conséquent le développement de Fourier correspondant de $f(x)$ est

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2}{n}(-1)^n sinnx$$

- En déduire pour $x = \frac{\pi}{2} \in \left]-\pi, +\pi\right[$, $f(x)$ vérifier les conditions de Dirichlet et $x = \frac{\pi}{2}$ est un point de continuité alors :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2}{n}(-1)^n sinn\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{2n+1}(-1)^n = \frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

- En appliquant l'égalité de Parseval on trouve :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Chapitre 5

Transformation de Laplace

CHAPITRE 5 : Transformation de Laplace

5.1 Définition de la Transformée de Laplace et conditions d'existences

Définitions Préalables :

1. Une fonction est dite continue par morceau (sur un domaine finie $t \in [a,b]$) :
   - Si il est possible de subdiviser le domaine en un nombre fini d'intervalles dans lesquels la fonction est continue.
   - Si $f(t)$ possède une limite à droite et à gauche à chaque limite d'un intervalle.
2. Une fonction est dite « d'ordre exponentiel » si on peut trouver des constantes réelles $M \; et \; \gamma > 0$ telles que $|f(t)| < Me^{\gamma t} \quad \forall t > T$, on dit $f(t)$ est d'ordre exponentiel γ quand $t \to \infty$

Il est équivalent de dire que l'on peut trouver une constante $\beta > 0$ telle que $\lim_{t\to+\infty} e^{-\beta t} \times |f(t)| \longmapsto 0$ (il suffit de choisir $\beta > \gamma$)

Ainsi $f(t) = e^{t^2}$ *n'est pas d'ordre exponentiel.*

5.2 Définition de la Transformée de Laplace

Si $f(t)$ désigne une fonction à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle t, définie sur le domaine $t \in]0, +\infty[$ et nulle pour $t < 0$, on appelle Transformée de Laplace de $f(t)$ la fonction :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (1)$$

Ou p est une variable complexe (paramètre) et $F(p)$ est une fonction complexe.

- L'existence de $F(p)$ suppose la convergence de l'intégrale.
- On appelle $F(p)$ l'image de $f(t)$.

Conditions d'existence de $\boldsymbol{F(p)}$:

- $f(t)$ doit être continue par morceau.
- $\exists \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$: tel que $\lim_{t\to 0} t^{\alpha} \times |f(t)| \to 0$

- $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel.

Conséquence : Certaines fonctions ne possèdent pas de Transformée de Laplace, par exemple la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ (qui ne respecte pas la deuxième condition d'existences) ou $f(t) = e^{t^2}$ (qui ne respecte pas la 3ième condition d'existences).

Exemple 1: la fonction $f(t) = t$

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^{+\infty} te^{-pt}dt$$

On intègre par partie on trouve :

$$\mathcal{L}(t) = \underbrace{\left[\frac{-t}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{-1}{p^2}\left[e^{-pt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}$$

Exemple 2: la fonction $f(t) = t^n$

$$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt \overset{(on\,fait\,le\,changement\,pt=u)}{\cong} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{p}\right)^n e^{-u}\frac{du}{p} = \frac{1}{p^{n+1}}\underbrace{\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du}_{=I_n}$$

Alors on a :

$$I_n = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du \Longrightarrow I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,du = 1$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du = \underbrace{\left[-u^n e^{-u}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} nu^{n-1}e^{-u}\,du = nI_{n-1}$$

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_1 = 1 \\ I_2 = 2 \times 1 \\ \vdots \\ I_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n = n! \end{cases}$$

Finalement on trouve :

$$\Rightarrow \ \mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Exemple 3: la fonction $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{+\infty} e^{at}.e^{-pt}dt \ = \frac{1}{p-a}$$

Exemple 4:

$\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ (on utilise $\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$)

$\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ (on utilise $\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}$)

5.3 Propriétés de la Transformée de Laplace

On note $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ la fonction image de $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$ dite original de $F(p)$:

1. ***Linéarité*** : Si $F_1(p) = \mathcal{L}\big(f_1(t)\big)\ et\ F_2(p) = \mathcal{L}\big(f_2(t)\big)\ alors$:

$$\mathcal{L}(Af_1(t) + Bf_2(t)) = A\mathcal{L}\big(f_1(t)\big)B\mathcal{L}(f_2(t))$$

Exemple : $\mathcal{L}(2+3t-5t^2) = 2\left(\frac{1}{p}\right) + 3\left(\frac{1}{p^2}\right) - 5\left(\frac{1}{p^3}\right)$

2. $\boldsymbol{\mathcal{L}\big(f(at)\big) = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)}$:

$$\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-pt}dt \xrightarrow{(changement\ de\ variable\ t=\frac{u}{a}} \mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{pu}{a}}\,du$$

3. $\boldsymbol{\mathcal{L}\big(e^{ct}f(t)\big) = F(p-c)}$:

$$\mathcal{L}\big(e^{ct}f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-c)t}\,dt$$

Exemple : $\mathcal{L}(e^{ct}t^n) = \frac{n!}{(p-c)^{n+1}}$

4. $\boldsymbol{\mathcal{L}\big(t^n f(t)\big) = (-1)^n F^{(n)}(p)}$

5.4 Transformée de Laplace de la fonction dérivée

Si $f(t)$ est continue de classe $\mathbb{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, alors :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0^+) \qquad ou\ f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$$

On peut itérer ce résultat, et si f est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, alors :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\big(f^{(n)}(t)\big) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \cdots\cdots - f^{(n-1)}(0^+)}$$

Donc

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(f''(t)) = p^2 F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)}$$

5.5 Transformée de Laplace de l'intégral

Soit

$$h(t) = \int_0^t f(u)du \quad donc\ h'(t) = f(t)$$

On pose : $\mathcal{L}(h(t)) = H(p)\ et\ \mathcal{L}(f(t)) = F(p)$

$$\mathcal{L}(h'(t)) = pH(p) - h(0^+) \quad \Longrightarrow\ H(p) = \frac{F(p)}{p} + \frac{h(0^+)}{p}$$

Exemple :

$$\mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{p^2+4} \Longrightarrow\ \mathcal{L}\left(\int \sin 2u\, du = -\frac{1}{2}\cos 2t\right) = \frac{1}{p}\frac{2}{p^2+4} + \frac{-1}{2p}$$

$$\Longrightarrow\ \mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{p}{p^2+4}$$

5.6 Table de transformées de Laplace usuelles

De même qu'il existe des tables de primitives usuelles, des tables de développements limités usuels, il existe des tables de transformées de Fourier et des tables de transformées de Laplace de fonctions usuelles. Dans la table ci-dessous, il faudrait en toute rigueur indiquer les abscisses de convergence.

$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t).dt$
1 ou H(t)	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$ ou $e^{\alpha t}$H(t)	$\frac{1}{p-\alpha}$
cos(ωt) sin(ωt)	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$ $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
ch(ωt) sh(ωt)	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$ $\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
t^n ou t^n H(t)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{\alpha t}$ ou $t^n e^{\alpha t}$ H(t)	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

5.7Exercices

Exercice 4.1 : Pour chacune des fonctions $F(p)$ suivantes, trouver une fonction causale f telle que $\mathcal{L}(\ f(t)\ = F(p)$:

$$F(p) = \frac{1}{(p+2)(p-1)} \ , \quad F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)}$$

Exercice 4.2 : En utilisant la Transformée de Laplace de la fonction dérivée. Calculer la transformée de Laplace de : $\boldsymbol{f(t) = sin\,2t}$

5.7.1 Applications de la Transformée de Laplace à la résolution des équations différentielles

Exercice 4.3 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y"(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 3e^{-3t} \ , \quad avec\ y(0) = y'(0) = 0$$

Exercice 4.4 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y"(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0 \ , \quad avec\ y(0) = 3\ et\ y'(0) = -7$$

Exercice 4.5 : Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y"() + 3y'(t) + 2y(t) = 1 \ , \quad avec\ y(0) = y'(0) = 0$$

5.8 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 3.1 :

1) Décomposons en éléments simples $F(p) = \frac{1}{(p+2)(p-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+2}\right)$

$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t) = \frac{1}{3}(e^{t} - e^{-2t})$

2) De même, décomposons en éléments simples $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{p^2+1} - \frac{1}{p+1}\right)$

$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t - e^{-t})$

Solution de l'exercice 3.2 : Nous avons la transformée de Laplace de la fonction : $\cos \omega t$

$\mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{p}{p^2+2^2}$

Par définition on a aussi :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0^+) \qquad ou\ f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$$

$$\mathcal{L}((\cos 2t)') = \frac{p^2}{p^2+4} - 1 = \frac{-4}{p^2+4} = -2\mathcal{L}(\sin 2t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{p^2+4}$$

Solution de l'exercice 3.3 :

La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$p^2Y(p) + 6pY(p) + 9Y(p) = 3\frac{1}{p+3}$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{3}{(p+3)^3}$$

Et en utilisant la formule

$$\mathcal{L}(t^n e^{ct}) = \frac{n!}{(p-c)^{n+1}} \Rightarrow \mathcal{L}(t^2 e^{-3t}) = \frac{2!}{(p-c)^3}$$

$$Y(p) = \frac{3}{2}\frac{2}{(p+3)^3} \Rightarrow y(t) = \frac{3}{2}t^2 e^{-3t}$$

Solution de l'exercice 3.4 : La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$p^2Y(p) - 3p + 7 + 5pY(p) - 15 + 6Y(p) = 0$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{3p+8}{p^2+5p+6} = \frac{3p+8}{(p+2)(p+3)} = \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+3}$$

Par conséquent on trouve

$$y(t) = 2e^{-2t} + e^{-3t}$$

Solution de l'exercice 3.5 : La transformée de Laplace de l'équation différentielle est :

$$p^2Y(p) + 3pY(p) + 2Y(p) = \frac{1}{p}$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^2+3p+2)} = \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2(p+2)}$$

Par conséquent on trouve

$$y(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Chapitre 6

Transformation de Fourier

Chapitre 6 : 6. Transformations de Fourier

La transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques.

La transformée (continue) de Fourier (également appelée intégrale de Fourier) associe à une fonction

$F(x)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une autre fonction notée $\mathcal{F}(F(x))(\omega)$ ou plus simplement $\hat{F}(\omega)$; ω est une variable indépendante de x, appelée variable duale.

$$F\ :\ F(x) \longmapsto\ \hat{F}(\omega)\ \equiv\ \mathcal{F}(F(x))(\omega) \tag{6.1}$$

Lorsque la fonction $F(x)$ représente un signal, une image, une onde sonore, électromagnétique (x désignant la variable de temps ou d'espace), sa transformée de Fourier $\hat{F}(\omega)$ est son spectre avec ω qui représente la fréquence ou la pulsation.

6.1 Définition de la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\cdot)$

Définition : Soit une fonction $F(x)$ à valeurs dans $\mathbb{C}(ou\ \mathbb{R})$, F intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens $F\ \in\ L^1(\mathbb{R})$:

L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|\, dx$ est finie c.-à-d. convergente.

La transformée de Fourier de F est la fonction $\mathcal{F}(F)\ =\ \hat{F}$ définie par :

$$\mathcal{F}(F)\colon \omega \longmapsto\ \hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\omega x}dx \tag{6.2}$$

Où e^{iz} désigne l'exponentielle complexe.

Notons que même pour F à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\hat{F}$ est (a-priori) à valeurs dans $\mathbb{C}$.

La transformation de Fourier F est un opérateur qui transforme une fonction $F(x)$ sur R, intégrable, en une autre fonction $\hat{F}(\omega)$; ω est appelée variable duale.

Remarques

- Il est possible de choisir une définition légèrement différente pour la transformation de Fourier; cela n'est qu'une question de convention dont les conséquences ne se sont que des facteurs multiplicatifs dans les formules à venir (notamment dans l'expression de la transformée de Fourier inverse). Typiquement selon les communautés scientifiques, e.g. mécaniciens, électroniciens, physiciens quantiques etc., on considèrera les définitions suivantes :

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i2\pi\omega x}dx \;\; ou\ encore\ \hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i2\pi\omega x}dx \qquad (6.3)$$

- On peut définir la transformée de Fourier pour une fonction F à plusieurs variables : $F(x_1, \dots, x_n)$. Si on note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, $(x, \omega) = \sum_{j=1}^{n} x_j\,\omega_j$, alors on a :

$$\hat{F}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)e^{-i(\omega,x)}dx \qquad (6.4)$$

Typiquement en traitement d'images, on effectue des transformations de Fourier à deux dimensions.

Par ailleurs la transformée de Fourier d'une fonction radiale est radiale.

- Les situations types sont les suivantes :
  a. la variable primale x est le temps (s) ; dans ce cas, la variable duale ωa la dimension d'une fréquence (Hz). $\hat{F}(\omega)$représente alors le spectre fréquentiel du signal $F(x)$.
  b. la variable primale x est une position (m) ; dans ce cas, la variable duale ω a la dimension de l'inverse d'une longueur. ξ désigne ce que l'on appelle le vecteur d'onde.
  c. Un exemple physique remarquable sont les phénomènes de diffraction qui donnent une image de l'espace dual du réseau ; ils sont en quelque sorte une « machine naturelle à transformation de Fourier ».

6.2 La transformée inverse

Si $\hat{F}(\omega)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut on peut obtenir $F\ (\ x)$ à partir de $\hat{F}(\omega)$ par la transformation inverse (dite formule d'inversion de Fourier):

$$F(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{F})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\omega)e^{+ix}d\omega \qquad (6.5)$$

6.3 Propriétés de la transformée de Fourier

6.3.1 Linéarité

Par construction, l'opérateur transformé de Fourier $\mathcal{F}(\cdot)$ est linéaire. En effet, pour $(f,g)(x)$ fonctions satisfaisant les conditions d'existence de leurs transformées de Fourier respectives, et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{F}(af(x) + bg(x)) = a\mathcal{F}(f(x)) + b\mathcal{F}(g(x)) = a\hat{f} + b\hat{g} \tag{6.6}$$

6.3.2 Symétrie du graphe de $\left|\hat{F}(\omega)\right|$

On a

$$\left|\hat{F}(\omega)\right|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\cos\omega x\,dx\right|^2 + \left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\sin\omega x\,dx\right|^2 \tag{6.7}$$

$Donc\ \forall\omega \in \mathbb{R}, \left|\hat{F}(-\omega)\right|^2 = \left|\hat{F}(\omega)\right|^2$

Le module de $\hat{F}(\omega)$ est une fonction paire.

6.3.3 Translation

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{F}\big(F(x-a)\big)(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{F}(\omega) \tag{6.8}$$

A une translation de $F(x)$ correspond un déphasage de $\hat{F}(\omega)$; le terme $Im(e^{-i\omega a}) = -\sin\omega a$ étant un facteur de phase.

6.3.4 Modulation (translation fréquentielle)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{F}\left(e^{+iax}F(x)\right)(\omega) = \hat{F}(\omega - a) \tag{6.9}$$

6.3.5 Changement d'échelle - dilatation dans le « domaine temporel »

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\mathcal{F}\big(F(ax)\big)(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{F}\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{6.10}$$

6.3.6 Dérivation dans le domaine temporel

Si F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et dérivable, si sa dérivée F' est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors la transformée de Fourier de la dérivée de F est :

$$\widehat{F'}(\omega) = i\omega\hat{F}(\omega) \tag{6.11}$$

Par récurrence pour F de classe $\mathbb{C}^k$ et si chaque fonction dérivée est intégrable sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\widehat{F^{(k)}}(\omega) = (i\omega)^k\hat{F}(\omega) \tag{6.12}$$

6.3.7 Dérivation dans le domaine fréquentiel

Si $\hat{F}$ est dérivable, on a :

$$\hat{F}'(\omega) = -ix\widehat{F(x)}(\omega) \tag{6.13}$$

Par récurrence pour $\hat{F}$ de classe $\mathbb{C}^k$, on obtient :

$$\hat{F}^{(k)}(\omega) = (-i)^k x^k\widehat{F(x)}(\omega) \tag{6.14}$$

6.3.8 Convolution

Le produit de convolution des fonctions réelles ou complexes $f\ et\ g$ est la fonction $f * g$ définie comme suit :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(x-y)g(y)dy \tag{6.15}$$

On dit que f est convoluée avec g.

On voit que la convolution est commutative :

$$(f * g)(x) = (g\ *)(x) \tag{6.16}$$

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est le produit des transformées :

$$\mathcal{F}\big((f * g)(x)\big)(\omega) = \hat{f}(\omega).\hat{g}(\omega) \tag{6.17}$$

6.4 Tableau de transformées de Fourier usuelles

La plupart des transformées de Fourier peuvent être trouvées en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier de la section 6.3 À partir de des propriétés de la transformée de Fourier, une liste des paires de transformée de Fourier importantes est donnée dans le tableau suivant :

Fonction f	Transformée de Fourier
$f = \chi_{[-a,a]}$ $a \in \mathbf{R}_+,\ a < b$	$\dfrac{\sin(2\pi a p)}{\pi p}$
$f = \chi_{[a,b]}$ $a, b \in \mathbf{R},\ a < b$	$e^{-2i\pi p \frac{a+b}{2}} \dfrac{\sin\left(\pi(b-a)\right)}{\pi p}$
$f(x) = \dfrac{x^k}{k!} e^{-ax} \chi_{[0,+\infty[}(x)$ $a > 0$	$\dfrac{1}{(a + 2i\pi p)^{k+1}}$
$f(x) = \dfrac{x^k}{k!} e^{ax} \chi_{]-\infty,0[}(x)$ $a > 0$	$-\dfrac{1}{(2i\pi p - a)^{k+1}}$
$f(x) = e^{-a\lvert x\rvert}$ $a > 0$	$\dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2 p^2}$
$f(x) = (1 - \lvert x\rvert)\chi_{[-1,1]}(x)$	$\dfrac{\sin^2(\pi p)}{(\pi p)^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$	$e^{-\sigma^2 \pi^2 p^2}$

6.5 Application de la transformée de Fourier à la résolution des équations différentielles

6.5.1 Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $\mathcal{F}(f) = \hat{F}$ Alors on a :

$$\mathcal{F}\big(f'(x)\big) = i\omega\hat{F}(\omega) \quad et\, \mathcal{F}\big(f''(x)\big) = (i\omega)^2\hat{F}(\omega) \tag{6.17}$$

En générale :

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}(x)\right) = (i\omega)^k\hat{F}(\omega) \tag{6.18}$$

Exemple : En appliquant la transformée de Fourier trouver une solution de l'équation différentielle suivante :

$$-y"(x) + y(x) = e^{-x^2} \tag{6.19}$$

Appliquons la transformée de Fourier , on obtient

$$\mathcal{F}(-y"(x)) + \mathcal{F}(y(x)) = \mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)$$

Soit la transformée de Fourier de la fonction $y(x)$est

$$\mathcal{F}(y(x)) = \hat{Y}(\omega)\; alors\; \mathcal{F}(y"(x)) = (i\omega)^2\hat{Y}(\omega) \; = -\,\omega^2\hat{Y}(\omega)$$

L'équation (6.17) devient :

$$\Longrightarrow\; (\omega^2 + 1)\hat{Y}(\omega) = \mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)$$

$$\hat{Y}(\omega) = \frac{1}{(\omega^2 + 1)}\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)$$

Et on a $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{|x|}\right) = \frac{1}{(\omega^2+1)}$

Alors

$$\hat{Y}(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{|x|}\right).\mathcal{F}\left(\quad^{-x^2}\right)$$

Ainsi :

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{|x|}e^{-x^2}$$

6.6 Exercices

Exercice 6.1 : Montrer que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $\qquad a > 0$

Exercice 6.2 : Montrer que : $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$ $\qquad a > 0$

Exercice 6.3 :

a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte définie par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| < \dfrac{1}{2} \\ 0 & si\ |x| \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

b) Même question pour la fonction triangle

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - |x| & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

c) Exprimer $\Delta'(x)$ à l'aide de $\Pi(x)$.

d) En utilisant la relation obtenue dans c), retrouver le résultat de b}.

e) Déterminer le produit de convolution $\Pi * \Pi$et en déduire le résultat obtenu dans la question b).

Exercice 6.4 : sachant que la transformée de Fourier de la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ est donné par :

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \pi e^{-|\omega|}$$

Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

Exercice 6.5 : Résoudre l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad avec\ u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty \quad , t > 0$$

6.7 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 6.1 :

$$Soit\ I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx\ \ on\ peut\ ecrire$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy$$

On procède par changement de variables. Soit la substitution :

$$x = r\cos\theta \quad , y = r\sin\theta$$

D'où

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad , dxdy = drd\theta$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\ dydx$$

$$I^2 = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} e^{-ar^2}\, rdr\ d\theta = \int_{0}^{+\infty} e^{-ar^2}\, rdr \int_{0}^{2\pi} d\theta\ = \frac{\pi}{a}$$

Finalement on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx\ = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Solution de l'Exercice 6.2 :

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}. e^{-i\omega x} dx$$

Par intégration par partie on trouve :

$$\hat{F}(\omega) = \frac{-1}{i\omega} e^{-ax^2}.e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{i\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}.(-2ax)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$\hat{F}(\omega) = -\frac{2a}{\omega}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}.(-ix)e^{-i\omega x}\,dx}_{=\frac{\hat{F}}{d\omega}(\omega)}$$

$$\hat{F}(\omega) = \frac{-2a}{\omega}\frac{d\hat{F}}{d\omega}(\omega)$$

On obtient donc l'équation différentielle séparable :

$$\frac{d\hat{F}}{\hat{F}} = \frac{-1}{2a}\omega d\omega$$

$$\ln\hat{F} = \frac{-1}{4a}\omega^2 + k$$

$$\Longrightarrow \hat{F}(\omega) = ke^{\frac{-\omega^2}{4a}}$$

Pour déterminer la constante k on pose :

$$k = \hat{F}(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}.e^{-i0x}dx \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Solution de l'Exercice 6.3 :

a) On a :

$$\mathcal{F}(\Pi(x))(\omega) = \hat{\Pi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x).e^{-i\omega x}dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega x}dx = \frac{-1}{i\omega}\left(e^{-i\frac{\omega}{2}} - e^{+i\frac{\omega}{2}}\right) = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}$$

b) Notons que la fonction $\Delta(x)$est paire, on a pour $\omega \neq 0$,

$$\widehat{\Delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x).e^{-i\omega x}dx = \int_{-1}^{1}(1-|x|)e^{-i\omega x}dx = 2\int_{0}^{1}(1-x)\cos\omega x\,dx$$

On intégré par partie on trouve :

$$\widehat{\Delta}(\omega) = 2\left(\frac{(1-x)}{\omega}\sin\omega x\Big|_0^1 + \frac{1}{\omega}\int_0^1 \sin\omega x\,dx\right)$$

$$\widehat{\Delta}(\omega) = 2\left(\frac{-1}{\omega^2}\cos\omega x\Big|_0^1\right) = \frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega) = \frac{4}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

c) On vérifie aisément que: $\Delta'(x) = \Pi\left(x+\frac{1}{2}\right) - \Pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$

d) $\widehat{\Delta}'(\omega) = \mathcal{F}\big(\Delta'(x)\big) = \mathcal{F}\left(\Pi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) - \mathcal{F}\left(\Pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$$= e^{+i\frac{\omega}{2}}\mathcal{F}\big(\Pi(x)\big) - e^{-i\frac{\omega}{2}}\mathcal{F}\big(\Pi(x)\big)$$

$$= 2i\sin\frac{\omega}{2}\mathcal{F}\big(\Pi(x)\big)$$

$$\widehat{\Delta}'(\omega) = \frac{4i}{\omega}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

Or on a aussi : $\widehat{\Delta}'(\omega) = i\omega\mathcal{F}\big(\Delta(x)\big)$

$$\widehat{\Delta}'(\omega) = i\omega\left(\frac{4}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2}\right) = \frac{4i}{\omega}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

e)

$$\Pi * \Pi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(y).\Pi(x-y)dy$$

$$\Pi * \Pi(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Pi(x-y)dx$$

$$\Pi * \Pi(x) = \int_{x+\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \Pi(s)ds \qquad en\ posant\ s = x - y$$

$$\Pi * \Pi(x) = \begin{cases} 1 + x & si - 1 < x < 0 \\ 1 - x & si \quad 0 < x < 1 \\ \quad 0 & si|x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\Pi * \Pi(x) = \Delta(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

on sait aussi que :

$$\mathcal{F}(\Pi * \Pi(x)) = \mathcal{F}(\Pi(x))\mathcal{F}(\Pi(x))$$

$$\mathcal{F}(\Pi * \Pi(x)) = \mathcal{F}(\Delta(x)) = \frac{4}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

Solution de l'Exercice 6.4 :

On remarque que

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{-1}{2}\frac{x}{(1+x^2)^2}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right)$$

$$= \frac{-1}{2}\mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right) = \frac{-1}{2} \times\ i\omega\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{-i\omega\pi}{2}e^{-|\omega|}$$

Solution de l'Exercice 6.5 :

La transformée de Fourier de l'équation de la chaleur par rapport à la variable x est une équation différentielle séparable en t avec paramètre ω :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)(\omega) = c^2\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\omega)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\big(u(x,t)\big)(\omega) = c^2(-i\omega)^2\mathcal{F}\big(u(x,t)\big)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = c^2(-i\omega)\hat{u} \Longrightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\hat{u}} = -\omega^2c^2\partial t$$

$$\ln \hat{u} = -c^2\omega^2 t + k$$

$$\hat{u} = ke^{-c^2\omega^2 t}$$

On emploie la transformée de Fourier de la condition initiale :

$$u(x,0) = f(x) \Longrightarrow \hat{u}(x,0) = f(\omega) = k$$

On a donc :

$$\hat{u} = f(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}$$

Le second membre est le produit de deux fonctions de ω, donc sa transformée de Fourier inverse sera une convolution

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\big(f(\omega)\big) *. \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-c^2\omega^2 t}\right)$$

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\big(f(\omega)\big) *. \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-c^2\omega^2 t}\right)$$

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{4c^2 t}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y). e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}}\, dy$$

Bibliographie

[1] Ahmed Lesfari, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace Cours et exercices*, Ellipses, Paris, (2012).

[2] Claire David Pierre Gosselet, *Equationsaux dérivées partiellesCours et exercices corrigés*, DUNOD, Paris, (2012).

[3] MURRAYR.SPIEGEL, *THEORIE ET APPLICATIONS DE L'ANALYSE*, McGraw-Hil, Paris, (1973).

[4] مسعود حناشي شنيتي بن سلوى، دروس و تمارين في التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر (2001)