



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Thème

Étude une classe d'équations différentielles fractionnaires mixtes avec des conditions aux limites de type intégrales

Présentée par :
M^{elle} GENDOUZ Fatma

Devant le jury composé de :

Président :	<i>M^r GAGUI Bachir</i>	M.C.A, Université de M'sila
Encadreur :	<i>M^r NOUIRI Brahim</i>	M.C.A, Université de M'sila
Co-Encadreur :	<i>M^r DJRIOUKhayra</i>	M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

*Au départ ,grace et louanges a Dieu ,qu'il soit exalté,c'est a lui qu'est attribué tout la mérite de l'achevement et la perfection rest a Dieu seul cette oeuvre .Aprés tout ,Dieu soit loué,je m'adresse a mon professeur ,le Dr **Nouiri Brahim** le superviseur de la lettre avec des remerciement et une appréciation,qu'aucun mot ne remplira son droit .Sans sa persévérance et son soutien continu, ce le travail n'aurait pas été possible . Et puis , merci a tous mes professeurs qui m'ont appris a toutes les étapes de mes études.*

Dédicaces

Alhamdulillah. qu' il doit glorifié et exalté doit-il sur lui et son aide pour mener à bien cette recherche. A celui qui ma donné tout ce qu'il avait pour que je puisse réaliser ses espoires .à celui m'a poussé en-avant pour réaliser se que voulais.

Al'homme qui m'a possédait l'humanité de toutes ses forces ,à ce lui qui a veillé sur mon éducation .Avec d'innombrables sacrifices traduit dans sa santification et de la science.

Ama première école dans la vie

Mon chère père ,qui Dieu prolonge sa vie

A celle qui a doté la douceur de son foi de tout tendresse,à celle qui a été patient avec tout. Qui m'a parrainé avec le doit aux soins et à été mon soutien dans l'adversité et à été des pères pour mon succès

Maman est là chose la plus chère que j'ai

A eux je dédie cet humble travail pour apporter un peu de bonheur dans leur coeur. A mes frères et soeurs qui ont partagé avec moi la charge de la vie

Je dédie également le fruit de mes efforts à mon honorable professeur le DR.Nouiri Brahim .DR.Saad Abd Alkbir . Qui chaque fois je reste sur le chemin auquel je recourt et chaque fois que je demande une quantité de son temps précieux, il me garde malgré ses multiples responsabilités envers chaque professeur du département de mathématiques

A tous ceux qui m'ont aide de près ou de loin Radji Noureddine .Oussama Zahanni .

A tous ceux qui croient d'un changement réussi sont en nous- même.Avant qu'elle ne le soient dans d'autres choses...

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié une classe d'équations intégro-différentielles fractionnaires mixtes avec des conditions aux limites de type intégrale. nous présentons quelques résultats sur l'existence, l'unicité et la stabilité d'Ulam-Hyers de solution positive d'équations différentielles fractionnaires mixtes non linéaires avec frontière intégrale conditions en utilisant le théorème de point fixe de Guo-Krasnoselskii et la carte de contraction de Banach-principe de ping. Nous discutons de divers types de stabilité Ulam-Hyers. Cette étude peut être un nouvelle façon pour les chercheurs de discuter de problèmes intéressants dans le domaine de l'analyse mathématique.

Mots-Clés : calcul fractionnaire ,Équation intégro-différentielle fractionnaire de type Freedholm, Méthode de point fixe, stabilité de Ulam-Hyers

In this memoir, we have studied a new class of mixed fractional differential equations with integral boundary condition. First, In this paper, we present some results about existence, uniqueness and Ulam-Hyers stability of positive solution of nonlinear mixed fractional differential equations with integral boundary conditions by using Guo-Krasnoselskii's fixed point theorem and Banach's contraction mapping principle. We discuss various types of Ulam-Hyers stability. This study may provide a new way for the researchers to discuss interesting problems in the mathematical analysis area.

Keywords : calcul fractionnaire Fractional, freeholm integro-differential equation, Fixed point theorem, Ulam-Hyers stability

Table des matières

Introduction générale	7
Notations	9
1 Préliminaires	10
1.1 fonction de Gamma	11
1.2 fonction de Bêta	12
1.3 calcul fractionnaire	12
1.4 théorème de fubini	15
1.5 equation intégrale fredholm :	17
1.5.1 Types d'équation intégrales	17
1.5.2 Classification d'équation intégrale :	18
1.5.3 Linéarité et homogénéité d'équation intégrale de Fredholm :	18
2 Existence et Unicité	20
2.1 Position du problème	21
2.2 Probleme d'équivalence	21
2.3 Existence et Unicité	26
2.3.1 Existence d'une solution positive	26
2.3.2 Unicité de la solution positive	31
3 Stabilité	33
3.1 stabilité Ulam-Heysrs	34
3.2 Exemples	36
Bibliographie	39

Introduction générale

Le calcul fractionnaire a connu une croissance rapide ces dernières années et de plus en plus utilisé dans une variété de domaines de la science et de l'ingénierie (physique mathématique, biologie, bio-ingénierie, contrôle théorie, hydrologie, thermodynamique, mécanique et finance); voir [10]. La plupart d'entre eux utilisaient une forme intégrale pour la dérivée fractionnaire. Les plus populaires sont « Dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville » ou « Dérivé fractionnaire de Caputo ». Cependant, un nouveau dérivé fractionnaire a été introduit par Khalil et al. dans [9] à savoir "le conformé dérivé fractionnaire" qui satisfait à toutes les exigences du dérivé standard. Les conditions aux limites intégrales des problèmes fractionnaires sont abordées par divers chercheurs en appliquant différents théorèmes de point fixe, technique itérative et solutions supérieures et inférieures méthode. Nous renvoyons le lecteur à une série d'articles [12][13]. Un autre aspect de l'analyse de stabilité a été repris par un certain nombre de mathématiciens appelé « Stabilité Ulam-Hyers », ce concept a été introduit au milieu du 19^{ème} siècle et récemment, c'est l'un des sujets les plus importants dans le domaine de l'analyse mathématique. Pour détails, voir [10] et les références qui y sont citées. Récemment, des équations différentielles fractionnaires comprenant à la fois des dérivées fractionnaires gauche et droites attirent également beaucoup d'attention, il existe de nombreux résultats sur les problèmes de valeurs limites concernant les dérivés fractionnaires mixtes de différents types. Par exemple Ntouyas et al. [14] a étudié l'existence et l'unicité des solutions de frontière simple et multivaluée problèmes de valeur impliquant à la fois les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo, et non-conditions aux limites intégrales fractionnaires locales. Dans [11] les auteurs ont prouvé l'existence et l'unicité des solutions pour un problème aux limites impliquant à la fois Riemann-Liouville gauche et à droite les dérivées fractionnaires de Caputo en appliquant le théorème du point fixe de Krasnoselskii. Béchiret al. [3] ont étudié la théorie de l'existence de problèmes de valeurs limites non locaux à trois points pour équations différentielles et inclusions impliquant à la fois Caputo gauche et Riemann-Liouville droite dérivées fractionnaires en utilisant les théorèmes du point fixe de Banach et Krasnoselskii et l'Alternative non linéaire de Leray-Schauder. L'existence de solutions pour le problème multivalué concernant les cas semi-continu supérieur et Lipschitz est prouvée en appliquant l'alternative pour les cartes de Kakutani et le théorème du point fixe de Covitz et Nadler. Chatzarakis et Al. [5] a été présenté le premier travail sur conformable et Riemann-Liouville gauche dérivées fractionnaires apparaissant dans le problème d'oscillation d'ordre fractionnaire mixte non linéaire équations différentielles en utilisant la technique de Riccati généralisée et la moyenne intégrale méthode pour établir de nouveaux critères d'oscillation.

Dans cet recherche, nous étudions l'existence, l'unicité de la solution positive et la stabilité d'Ulam-Hyers. ité au problème de valeur limite fractionnaire mixte suivant (en abrégé MFBVP)

avec l'intégrale conditions aux limites :

$$D_{1-}^{\beta} = ({}^c D_{0+}^{\alpha} x)(t) = f(t, x(t)) \quad 0 < t < 1. \quad (1)$$

$$x(0) = \gamma \int_0^1 x(t) dt. \quad (2)$$

$${}^c D_{0+}^{\alpha} x(1) = 0 \quad (3)$$

où $\alpha, \beta \in]0, 1], \gamma \in]0, 1[$, D_{1-}^{β} désigne la dérivée fractionnaire conforme à droite, ${}^c D_{0+}^{\alpha}$ dénotons la dérivée fractionnaire de Caputo gauche, x est la fonction inconnue et $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue.

Notations

- \mathbb{R} : L'ensemble des nombres réelles.
- \mathbb{C} : L'ensemble des nombres complexes.
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $\dot{\mathbb{N}}$: L'ensemble des nombres réelles.
- $\Gamma(\bullet)$: la fonction de Gamma .
- $\beta(\cdot, \cdot)$: la fonction de Bêta .
- $K = 1, \dots, n - 1$.
- $L_p[a, b]$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [1, +\infty]$.
- $L_\infty[a, b]$: espace des fonctions mesurables essentiellement bornés sur $[a, b]$.
- $\mathbb{C}([a, b], X)$: espace des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans un espace de Banach X .
- $J_{b^-}^\alpha x$: intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha \leq 1$.
- $J_{a^+}^\alpha x$: intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha \leq 1$.
- $D_{a^+}^{(\beta)}$: dérivée fractionnaire à gauche conforme d'ordre $0 < \beta \leq 1$.
- $D_{b^-}^{(\beta)}$: dérivée fractionnaire à droite conforme d'ordre $0 < \beta \leq 1$.
- ${}^c D_{a^+}^\alpha$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $0 < \alpha \leq 1$.
- ${}^c D_{b^-}^\alpha$: dérivée fractionnaire à droite au sens de Caputo d'ordre $0 < \alpha \leq 1$.
- $I_{b^-}^\beta x$: intégrale fractionnaire à droite conforme d'ordre $0 < \beta \leq 1$.
- $I_{a^+}^\beta x$: intégrale fractionnaire à gauche conforme d'ordre $0 < \beta \leq 1$.

PRÉLIMINAIRES

Dans le premier chapitre intitulé "Préliminaire" nous rappelons quelques définitions et propriétés de base de calcul fractionnaire, la méthode de point fixe et le théorème de Fubini, l'équation intégrale de Fredholm.

1.1 fonction de Gamma

la fonction Gamma de (Euler) est fonction complexe qui généralise la fonction factorielle, Elle a été obtenue par Euler en 1729.

Définition 1.1. la fonction de Gamma est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt$$

ou x est nombre complexe quelque telque ($Re\ x > 0$)

Propriétés 1.1. Nous avons les propriétés suivants :

1. $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ ($Re\ x > 0$).
2. $\Gamma(1) = 1$.
3. $\Gamma(-m) = \pm\infty$.
4. si $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma(n + 1) = n!$ et $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{2n!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Exemple 1.1. montrez que :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

on par la définition

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

on pose

$$t = u^2$$

donc

$$dt = 2udu$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2udu \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

donc

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Lemme 1.1. la fonction de Gamma est fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* (respectivement holomorphe sur le demi plan $x \in \mathbb{C}, (Re(x) > 0)$) et $\forall K \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ (respectivement holomorphe sur le demi plan $x \in \mathbb{C}, (Re(x) > 0)$) :

$$\Gamma^K(x) = \int_0^\infty (\ln t) t^{x-t} e^{-t} dx$$

Corollaire 1.1. la détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatif non entiers par la formule :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} \quad 0 \leq x+n \leq 1$$

1.2 fonction de Bêta

Définition 1.2. la fonction de Bêta définie par :

$$\beta(x, w) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{w-t} dt \quad (Re x > 0; Re w > 0)$$

Remarque 1.1. la fonction de Bêta est liée à la fonction Gamma par :

$$\beta(x, w) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(w)}{\Gamma(x+w)} \quad (Re x > 0; Re w > 0)$$

1.3 calcul fractionnaire

Définition 1.3. – voir [1][9] la dérivé fractionnaire conformable gauche à partir d'une fonction $x : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ d'ordre $0 < \beta \leq 1$ est définie par :

$$D_{0+}^{(\beta)} x(t) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \epsilon(t^{1-\beta}) - x(t))}{\epsilon} \quad \text{pour tout } t > 0$$

· si $D_{0+}^{(\beta)} x(t)$ existe sur $]0, 1[$ alors $D_{0+}^{(\beta)} x(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} D_{0+}^{(\beta)} x(t)$
 – la dérivé fractionnaire droite d'ordre $0 < \beta \leq 1$ terminant 1 dex est par :

$$D_{1-}^{(\beta)} x(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \epsilon(1 - t^{1-\beta})) - x(t)}{\epsilon} \quad \text{pour tout } t > 0$$

· si $D_{1-}^{(\beta)} x(t)$ existe sur $]0, 1[$ alors $D_{1-}^{(\beta)} x(0) = \lim_{t \rightarrow 1-} D_{1-}^{(\beta)} x(t)$
 – l'intégrale fractionnaire conformable gauche et droite d'une fonction d'ordre $0 < \beta < 1$ définie respectivement par :

$$I_{0+}^\beta = \int_0^t (s-0)^{\beta-1} x(s) ds \quad (1.1)$$

$$I_{1-}^{(\beta)} = \int_0^t (1-s)^{\beta-1} x(s) ds \quad (1.2)$$

Définition 1.4. la dérivé fractionnaire de Caputo gauche d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ d'une fonction absolument continu $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est donné par :

$${}^c D_{0+}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} x'(s) ds \quad (1.3)$$

la dérivé fractionnaire de Caputo droite d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ terminant en 1 de x est définie par :

$${}^c D_{1-}^\alpha x(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^1 (t-s)^{-\alpha} x'(s) ds$$

les intégrale gauche et droite de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ d'une fonction x sont :

$$J_{0+}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds \quad (1.4)$$

$$J_{1-}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (s-t)^{\alpha-1} x(s) ds \quad (1.5)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma d'Euler

Lemme 1.2. voir [1][9][10] Nous avons : (i) Si x est fonction continue sur $]0, 1[$ alors :

$$D_{1-}^{(\beta)}(I_{1-}^\beta x(t)) = D_{0+}^{(\beta)}(I_{0+}^\beta x(t)) = {}^c D_{1-}^\alpha (J_{1-}^\alpha x(t)) = {}^c D_{0+}^\alpha (J_{0+}^\alpha x(t)) = x(t) \quad (1.6)$$

(ii) Si $D_{0+}^{(\beta)} x, D_{1-}^{(\beta)} x, {}^c D_{0+}^\alpha x, {}^c D_{1-}^\alpha x$ sont continues sur $]0, 1[$ alors :

$$I_{0+}^\beta (D_{0+}^{(\beta)} x(t)) = J_{0+}^\alpha ({}^c D_{0+}^\alpha x(t)) = x(t) - x(0) \quad (1.7)$$

$$I_{1-}^\beta (D_{1-}^{(\beta)} x(t)) = J_{1-}^\alpha ({}^c D_{1-}^\alpha x(t)) = x(t) - x(1) \quad (1.8)$$

(iii) Si x différentiable sur $]0, 1[$ alors :

$$D_{0+}^{(\beta)} x(t) = (t-0)^{1-\beta} x'(t). \quad (1.9)$$

$$D_{1-}^{(\beta)} x(t) = -(1-t)^{1-\beta} x'(t) \quad (1.10)$$

de plus nous représentons les théorèmes de point fixe suivants seront dans l'étude de nos principaux résultats.

Théorème 1.1. (Principe de cartographie de contraction [2][6]. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $P \subseteq E$ a sous ensemble fermé non vide. Si $T : P \rightarrow P$ est contraction strictement, c'est à-dire :

$$\exists L \in]0, 1[, \forall x, y \in P : \|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\|$$

Puis T est point fixe inique dans P .

Théorème 1.2. (Théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii's [8]). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. $P \subset E$ est cône et Ω_1 et Ω_2 sont deux-ensembles ouverts bornés dans E tel que $0 \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Soit l'opérateur $T : P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow P$ être complément continu. Supposons qu'une des deux conditions :

$$(H_1) \|Tx\| \leq \|x\| \forall x \in P \cap \partial\Omega_1 \text{ and } \|Tx\| \geq \|x\| \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$$

and

$$(H_2) \|Tx\| \geq \|x\| \forall x \in P \cap \partial\Omega_1 \text{ and } \|Tx\| \leq \|x\| \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$$

est satisfait. Alors τ moins un point fixe dans $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$. Soit ϵ un nombre réel positif, $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$:

Pour MFBVP(1)(3), nous avons les inégalités suivantes :

$$|D_{1-}^{(B)}({}^c D_{0+}^\beta y)(t) - f(t, y(t))| \leq \epsilon, t \in [0, 1]. \quad (1.11)$$

$$|D_{1-}^{(B)}({}^c D_{0+}^\beta y)(t) - f(t, y(t))| \leq \varphi(t), t \in [0, 1]. \quad (1.12)$$

$$|D_{1-}^{(B)}({}^c D_{0+}^\beta y)(t) - f(t, y(t))| \leq \epsilon \varphi(t), t \in [0, 1]. \quad (1.13)$$

Définition 1.5. (voir [16][19]) le MFBVP(1)(2)(3) Ulam-Heyers stable s'il existe les constants $\lambda < 0$ tel que pour tout chaque $\epsilon < 0$ et pour tout chaque solution $y \in E$ de l'inégalité (1.11) il existe un solution $x \in E$ du MFBVP(1)(2)(3) tel que :

$$|y(t) - x(t)| \leq \lambda \epsilon, t \in [0, 1]$$

Définition 1.6. (voir [16][19]) le MFBVP(1)(2)(3) est généralisé Ulam-Heyers stable s'il ya existe $\theta \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $\theta(0) = 0$ tel que pour chaque $\epsilon > 0$ et pour chaque solution $y \in E$ de l'inégalité (1.11), il existe une solution $x \in E$ du MFBVP(1)(2)(3) tel que ;

$$|y(t) - x(t)| \leq \theta(\epsilon), t \in [0, 1]$$

Définition 1.7. [16][19] le MFBVP(1)(2)(3) est Ulam-Heyers -Rassis stable par rapport à ϕ s'il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout chaque $\epsilon > 0$ et pour chaque solution $y \in E$ de l'inégalité (1.13) il existe un solution $x \in E$ du MFBVP(1)(2)(3) tel que :

$$|y(t) - x(t)| \leq c \epsilon \phi(t), t \in [0, 1]$$

Définition 1.8. voir ([16] [19]) le MFBVP(1)(3) est Ulam-Heyers-Rassis stable par rapport à ϕ s'il existe un réel $c > 0$ tel que pour chaque solution $y \in E$ de l'inégalité (1.12) il existe un solution $x \in E$ du MFBVP(1)(2)(3) tel que :

$$|y(t) - x(t)| \leq c \phi(t), t \in [0, 1]$$

Remarque 1.2. ([20]) il est clair que :

- (i) Définition 1.5 \Rightarrow Définition 1.6.
- (ii) Définition 1.7 \Rightarrow Définition 1.8.
- (iii) Définition 1.5 pour $\phi(\cdot) = 1 \Rightarrow$ Définition 1.5.

Remarque 1.3. (voir [16][19]) (1) une fonction $y \in E$ solution d'inégalité (1.11) si et seulement si il existe une fonction $w \in C([0, 1], \mathbb{R})$ tel que :

(a) $|w(t)| \leq \epsilon, t \in [0, 1].$

(b) $|D_{1-}^{(B)}({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) = f(t, y(t)) + w(t), t \in [0, 1]$

(2) Aussi une fonction $y \in E$ est une solution d'inégalité (1.12) si et seulement si, il existe $h \in C([0, 1], \mathbb{R})$ tel que :

(a) $|h(t)| \leq \phi(t), t \in [0, 1].$

$$(b) D_{1-}^{(\beta)}({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) = f(t, y(t)) + h(t), t \in [0, 1].$$

(3) de meme pour(1.13) il existe une fonction $\Phi \in C([0, 1], \mathbb{R})$ tel que :

$$(a) \Phi(t) \leq \epsilon \phi(t), t \in [0, 1]$$

$$(b) D_{1-}^{(\beta)}({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) = f(t, y(t)) + \Phi(t), t \in [0, 1].$$

1.4 théorème de fubini

Soit $\mathbb{R}[a, b] \times [c, d]$ ($a < b, c < d$) un rectangle fermé du plan \mathbb{R}^2 et f : Fubini une fonction continue. Pour $x \in [a, b]$ fixé, la fonction $f(x, \bullet) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, \bullet)(y) = f(x, y)$ est intégrable sur $[c, d]$. le nombre $\int_c^d f(x, \bullet)(t) dt$ depend de x . On a donc une fonction $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$A(x) = \int_c^d f(x, t) dt.$$

En intégrant la fonction A l'intervalle $[a, b]$, on a la formule

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (1.14)$$

Définition 1.9. Dans l'expression $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ de la formule (1.14) ci-dessus, on dit que l'on a d'abord intégré par rapport à y , et ensuite par rapport à x . De manière analogue, dans l'expression $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$ on dit que l'on a intégré d'abord par rapport à x , puis par rapport à y .

Exemple 1.2. considérons le rectangle $\mathbb{R} = [1, 2] \times [0, 3] \subset \mathbb{R}^2$ ($1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$) et la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x, y) = xy + y^2 + 1$. Ici, $a = 1, b = 2, c = 0$ et $d = 3$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \int_c^d f(x, y) dy &= \int_0^3 (xy + y^2 + 1) dy \\ &= \left[\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + y \right]_{y=0}^{y=3} \\ &= \frac{9}{2}x + 12 \end{aligned}$$

En intégrant d'abord par rapport à y :

Intégrant maintenant le résultat présent par rapport à x on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx &= \int_1^2 \left(\frac{9}{2}x + 12 \right) dx \\ &= \left[\frac{9}{4}x^2 + 12x \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= 33 - 12 - \frac{9}{4} \\ &= \frac{75}{4} \end{aligned}$$

Aprésent commonçons par intégrer cette même fonction par rapport à x , puis continuons le calcul en intégrant par rapport à y on :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x, y) dx &= \int_1^2 (xy + y^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 y + (y^2 + 1)x \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= y^2 + \frac{3}{2}y + 1\end{aligned}$$

En intégrant le résultat ci-dessus par rapport à y , on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^3 \left[\int_1^2 (xy + y^2 + 1) dy \right] &= \int_0^3 (y^2 + \frac{3}{2}y + 1) dy \\ &= \left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{4}y^2 + y \right]_{y=0}^{y=3} \\ &= 12 + \frac{27}{4} \\ &= \frac{75}{4}\end{aligned}$$

Dans l'exemple (1, 2) nous remarquons que les deux intégrations successives donnent le même résultat.

Ceci n'est pas le fait du hasard mais est dû au le théorème suivant que admettrons.

Théorème 1.3. (le théorème de Fubini pour les rectangle fermés) Soit $\mathbb{R} = [a, b] \times [c, d]$ ($a < b, c < d$) un rectangle fermé du plan \mathbb{R}^2 et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est intégrable sur \mathbb{R} et on a :

$$\int \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Exemple 1.3. Soit $\mathbb{R} = [1, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = ye^{xy}$.

Calculons $I = \int \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy$.

D'après le théorème de Fubini, on a $I = \int_0^2 \left[\int_1^2 (ye^{xy}) dx \right] dy$. Or :

$$\begin{aligned}\int_1^2 (ye^{xy}) dx &= \left[e^{xy} \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= e^{2y} - e^{1y} \\ &= \int_0^2 (e^{2y} - e^y) dy \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2y} - e^y \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} e^4 - e^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

1.5 equation intégrale fredholm :

L'équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue apparaît sous un ou plusieurs signes intégraux.

Une équation intégrale standard prend généralement la forme :

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\phi(t)dt \quad (1.15)$$

Où λ est un paramètre réel ou complexe, $k(x, t)$ est le noyau (noyau) du équation intégrale, $\Phi(x)$ est la fonction inconnue, α, β sont les limites de la la intégration ,qui peuvent être à la fois des constantes des varibeles ou mixites et elles peuvent être dans dimension dens ou plus .voir références[19][17][15]

1.5.1 Types d'équation intégrales

Pour équation intégrale :

$$h(x)\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\Phi(t)dt \quad (1.16)$$

il existe trois types d 'equation intégrales en fonction de la valeur de $h(x)$ voir références[17][15][18]

Equation intégrale de premier type :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\Phi(t)dt$$

la valeur de $h(x)$ dans (1.16) est égale à zéro.

Equation intégrale de deuxième type :

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\Phi(t)dt$$

la valeur de $h(x)$ dans (1.16) est égale à un.

Equation intégrale de troisième type :

$$h(x)\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\Phi(t)dt$$

la valeur de $h(x)$ dans (1.16) n'est zéro ni un.

1.5.2 Classification d'équation intégrale :

Ils' agit de classiffiction la plus courant pour les équation intégrales .Il ya de types sont Voltterra et Fredholm .voir réffrence [15][18]

Equation intégrale de Voltterra :

un équatuin intégrale standard de Voltterra prend forme :

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\Phi(t)dt$$

Ou' la limite superieure d'intégration est variable et la limite inferieure est constant .

Equation intégrale de Fredholm

:

un équatuin intégrale standard de fredholm prend généralement la forme :

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\Phi(t)dt$$

Ou' limites de l'intégration sont constants .

1.5.3 Linéarité et homogénietré d'équation intégrale de Fredholm :

l'équation intégrale de Fredholm être classées de pluisieurs .teles que la lineairité et homogénéité . voir les references [4],[17],[20],[15]

Linéarité des équation intégrales de Fredholm :

(i)l équation intégrale :

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\Phi(t)dt$$

est linéaire,ou' seules des opérateurs linéaires sont effectives sur l'inconnu fonction sous le signe intégrale

(ii)l'équation intégrale :

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\Phi(t)dt$$

Si la fonction inconu $\Phi(x)$ aun exposant non linéaire comme $\sinh \cosh \dots$ il est dit non linéaire.Pour explique ce concept consultez ce exemple :

$$\Phi(x) = \int_0^1 (x-1)e^{\Phi(x)}dt$$

est *ograveu* il agit d'un Fredholm non linéaire

Homogénéité des équation intégrales de Fredholm :

les équation intégrale de Fredholm de second types sont classées en homogènes et équation intégrale non homogène dépendant de la valeur de la fonction $f(x)$:

(i) si la fonction $f(x)$ dans l'équation intégrale du second est indiquée à zéro, l'équation est dite homogène. Pour plus d'observation ce exemple

$$\Phi(x) = \int_0^1 x\Phi(x)dt$$

est Fredholm homogène linéaire

(ii) si la fonction $f(x)$ dans l'équation intégrale du second n'est pas à zéro, l'équation est appelée non homogène. Pour plus d'observation ce exemple

$$\Phi(x) = x + \int_0^1 (x-1)^2 e^{\Phi(x)} dt$$

est Fredholm non homogène non linéaire

EXISTENCE ET UNICITÉ

Dans ce chapitre est consacrée à donner des résultats d'existence, d'unicité d'un résultat positif solution pour le MFBVP (1)(3).

2.1 Position du problème

nous étudions l'existence, l'unicité de la solution positive au problème de valeur limite fractionnaire mixte suivant (pour MFBVP court) avec intégrale conditions aux limites du problème :

$$\begin{aligned} D_{1-}^{(\beta)}({}^c D_{0+}^\alpha x)(t) &= f(t, x(t)), 0 < t < 1 \\ x(0) &= \gamma \int_0^1 x(t) dt, \\ ({}^c D_{0+}^\alpha x)(1) &= 0, \end{aligned}$$

où $\alpha, \beta \in]0, 1], \gamma \in]0, 1[$, $D_{1-}^{(\beta)}$ désigne la dérivée fractionnaire conforme droite, ${}^c D_{0+}^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo gauche, x est la fonction inconnue et $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue. nous définons l'espace de Banach $E = C([0, 1], \mathbb{R}_+)$ et la norme $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$

2.2 Probleme d'équivalence

Dans cet section, nous donnons le premier résultat principal qui concernant le problème d'équivalence du MFBVP (1)(2)(3).

Théorème 2.1. voir[7] Soit $\alpha, \beta \in]0, 1], \gamma \in]0, 1[$ et $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue. Alors, $x \in E$ est la solution du MFBVP (1)(2)(3) si, et seulement si, $x \in E$ satisfait la non-linéaire équation intégrale homogène de Fredholm du second type :

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds. \quad (2.1)$$

ou' G est une fonction de Grenn donné par :

$$G(t, s) = \begin{cases} \left[\frac{\gamma}{(1-\gamma)(\alpha+1)} (1 - (1-s)^{\alpha+1}) + t^\alpha - (t-s)^\alpha \right] \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)} & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \left[\frac{\gamma}{(1-\gamma)(\alpha+1)} (1 - (1-s)^{\alpha+1}) + t^\alpha \right] \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)} & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Preuve :

(i) Premièrement, nous prouvons la nécessité. On applique l'intégrale fractionnaire droite I_{1-}^β défini par (1.2) sur l'équation (1), en utilisant (1.8) et (3), on obtient :

$${}^c D_{0+}^\alpha x = I_{1-}^\beta f(t, x(t)) \quad (2.3)$$

et nous appliquons l'intégrale fractionnaire gauche J_{0+}^α défini par (1.4) on (2.3), en utilisant (1.8) et (1.8)

$$x(t) = \gamma \int_0^1 x(t) dt + J_{0+}^\alpha I_{1-}^\beta f(t, x(t))$$

.D'autre part, en utilisant(1.2) et (1.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
J_{0+}^{\alpha} I_{1-}^{\beta} f(t, x(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} I_{1-}^{\beta} f(r, x(r)) dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} \left[\int_r^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \right] dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} \left[\int_r^t (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_t^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \right] dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} \left[\int_r^t (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \right] dr \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_t^1 (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \right] dr
\end{aligned}$$

et avec le theoreme de Fubini,on obtient :

$$\begin{aligned}
J_{0+}^{\alpha} I_{1-}^{\beta} f(t, x(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\int_0^s (t-r)^{\alpha-1} dr \right) (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 \left(\int_0^t (t-r)^{\alpha-1} dr \right) (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t^{\alpha} - (t-s)^{\alpha}) (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_t^1 t^{\alpha} (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\int_0^1 t^{\alpha} (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds - \int_0^t (t-s)^{\alpha} (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \right]
\end{aligned}$$

qui donne :

$$x(t) = \gamma \int_0^1 x(t) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\int_0^1 t^{\alpha} (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds - \int_0^t (t-s)^{\alpha} (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \right] \quad (2.4)$$

Maintenant, nous intégrons (2.4) sur $[0, 1]$ des deux côtés et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1 - \gamma) \int_0^1 x(t) dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 \left[\int_0^1 t^\alpha (1 - s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \right] dt \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 \left[\int_0^t (t - s)^\alpha (1 - s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 \int_0^1 t^\alpha dt \int_0^1 (1 - s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 \left[\int_s^1 (1 - s)^\alpha dt \right] (1 - s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 [(1 - s)^{\beta-1} - (1 - s)^{\alpha+\beta}] f(s, x(s)) ds \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Remplacer (2.5) dans (2.4) donne :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t \left[\frac{\gamma}{(1 - \gamma)(\alpha + 1)} (1 - (1 - s)^{\alpha+1}) + t^\alpha - (1 - s)^\alpha \right] \frac{(1 - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha + 1)} f(s, x(s)) ds \\
&+ \int_t^1 \left[\frac{\gamma}{(1 - \gamma)(\alpha + 1)} (1 - (1 - s)^{\alpha+1}) + t^\alpha \right] \frac{(1 - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha + 1)} f(s, x(s)) ds \\
&= \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds
\end{aligned}$$

et ainsi la nécessité est prouvée.

(ii) Soit $x \in E$ la solution de l'intégrale homogène non linéaire de Fredholm (2.1). Montrons d'abord que x satisfait la condition aux limites (2). À partir de (2.1), (2.1) et théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}
x(0) - \gamma \int_0^1 x(t) dt &= \int_0^1 G(0, s) f(s, x(s)) ds \\
&- \gamma \int_0^1 \left[\int_0^t G(t, s) f(s, x(s)) ds + \int_t^1 G(t, s) f(s, x(s)) \right] dt \\
&= \int_0^1 G(0, s) f(s, x(s)) ds \\
&- \gamma \int_0^1 \left[\int_s^1 G(t, s) dt + \int_0^s G(t, s) dt \right] f(s, x(s)) ds \tag{2.6}
\end{aligned}$$

D'autre part et de (2.2), on a

$$\int_s^1 G(t, s) dt = \frac{\gamma(1 - s)}{(1 - \gamma)\Gamma(\alpha + 2)} [(1 - s)^{\beta-1} - (1 - s)^{\alpha+\beta}] \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} [1 - s^{\alpha+1} - (1 - s)^{\alpha+1}] (1 - s)^{\beta-1} \tag{2.7}$$

et

$$\int_0^s G(t, s) dt = \frac{\gamma s}{(1 - \gamma)\Gamma(\alpha + 2)} [(1 - s)^{\beta-1} - (1 - s)^{\alpha+\beta}] + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} s^{\alpha+1} (1 - s)^{\beta-1} \tag{2.8}$$

remplacer(2.7)et (2.8)dans(2.6) ;utilise(2.2)on obtient :

$$\begin{aligned}
 x(0) - \gamma \int_0^1 x(t)dt &= \int_0^1 G(0, s)f(s, x(s))ds \\
 &- \frac{\gamma}{(1-\gamma)\Gamma(\alpha+2)} \int_0^1 [1 - (1-s)^{\alpha+1}](1-s)^{\beta-1} f(s, x(s))ds \\
 &= \int_0^1 G(0, s)f(s, x(s))ds - \int_0^1 G(0, s)f(s, x(s))ds \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons que $x \in E$ satisfait la condition aux limites (3). Utiliser(2.1), (2.3) et(1.2) on a

$$\begin{aligned}
 {}^c D_{0^+}^\alpha x(1) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} x'(s) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} \int_0^s \frac{\partial G}{\partial s}(s, r) f(r, x(r)) dr ds \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_s^1 (1-s)^{-\alpha} \int_s^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s, r) f(r, x(r)) dr ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \int_0^s (1-s)^{-\alpha} [s^{\alpha-1} - (s-r)^{\alpha-1}] (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr ds \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \int_s^1 (1-s)^{-\alpha} s^{\alpha-1} (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^{\alpha-1} (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr ds \\
 &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \int_0^s (1-s)^{-\alpha} (s-r)^{\alpha-1} (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr ds
 \end{aligned}$$

utilise théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
 {}^c D_{0^+}^\alpha x(1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^{\alpha-1} ds \right] \left[\int_0^1 (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr \right] \\
 &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \left[\int_0^1 (1-s)^{-\alpha} (s-r)^{\alpha-1} ds \right] (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

utilise la relation entre Bêta et fonction de Euler Gamma, voir[10]p26

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (2.10)$$

et utilise le changement de variable $\mu = \frac{s-r}{1-r}$ on obtient :

$$\int_r^1 (1-s)^{-\alpha} (s-r)^{\alpha-1} ds = B(\alpha, 1-\alpha) \quad (2.11)$$

De (2.9),(2.10) et(2.11) on obtient (3).

Il reste à montrer que $x \in E$ satisfait l'équation (1). À partir de(2.3) , (2.1),(2.2) etThéorème de Fubini nous obtenons

$$\begin{aligned}
{}^c D_{0+}^\alpha x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{-\alpha} [s^{\alpha-1} - (s-r)^{\alpha-1}] (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_s^1 (t-s)^{-\alpha} s^{\alpha-1} (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_0^1 (t-s)^{-\alpha} s^{\alpha-1} (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{-\alpha} (s-r)^{-\alpha-1} (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \left[\int_0^t (t-s)^{-\alpha} (s-r)^{\alpha-1} ds \right] (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left[\int_r^t (t-s)^{-\alpha} (s-r)^{\alpha-1} ds \right] (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr \quad (2.12)
\end{aligned}$$

utilise le changement de variable $\mu = \frac{s}{t}$ et $\mu = \frac{s-r}{1-r}$ nous avons :

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{\alpha-1} ds = \int_r^t (t-s)^{-\alpha} (s-r)^{\alpha-1} ds = B(\alpha, 1-\alpha) \quad (2.13)$$

Par (2.12),(2.13)et(2.10)on obtient :

$${}^c D_{0+}^\alpha x(t) = \int_0^1 (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr - \int_0^t (1-r)^{\beta-1} f(r, x(r)) dr \quad (2.14)$$

En appliquant le bon dérivé conforme défini par (1.9) des deux côtés de(2.14) , on obtient (1). Ceci complète la preuve.

Maintenant, nous prouvons plusieurs propriétés importantes de la fonction de Green G dans(2.3) .

Lemme 2.1. voir[7] Pour tout $t \in]0, 1[$ et $s \in [0, 1[$ nous avons :

- (1) $G(t, s) > 0$
- (2) $t^\alpha G(1, s) \leq G(t, s) \leq G(1, s)$

Preuve :

(1) pour tout $t \in]0, 1[$ et par(2.2) nous avons :

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial t} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} & \text{si } 0 \leq s < t < 1 \\ t^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} & \text{si } 0 \leq t < s < 1 \end{cases}$$

Clairement que $\frac{\partial G(t, s)}{\partial t} \geq 0$ pour tout $t \in]0, 1[$ et $s \in [0, 1[$, alors $G(t, s)$ augmente avec par rapport à $t \in]0, 1[$. Donc, pour tout $t \in]0, 1[$ et $s \in [0, 1[$, on a :

$$G(t, s) \geq G(0, s) = \left[\frac{\gamma}{(1-\gamma)\Gamma(\alpha+2)} (1 - (1-s)^{\alpha+1}) (1-s)^{\beta-1} \right] > 0.$$

(2) En utilisant l'augmentation de la fonction de Green $G(t, s)$ par rapport à t , on obtient pour tout $t \in]0, 1[$ et $s \in [0, 1[$:

$$G(t, s) \leq G(1, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \left[\frac{\gamma}{(1 - \gamma)(\alpha + 1)} (1 - (1 - s)^{\alpha+1}) + 1 - (1 - s)^\alpha \right] (1 - s)^{\beta-1}$$

D'autre part, De (2.2) on :

$$\partial G(t, s) - t^\alpha G(1, s) = \begin{cases} \frac{\gamma(1-t^\alpha)(1-s)^{\beta-1}}{(1-\gamma)\Gamma(\alpha+2)} [1 - (1-s)^\alpha + 1] + \frac{t^\alpha(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)} [(1-s)^\alpha - (1 - \frac{s}{t})^\alpha] & \text{si } s \leq t \\ \frac{\gamma(1-t^\alpha)(1-s)^{\beta-1}}{(1-\gamma)\Gamma(\alpha+2)} [1 - (1-s)^{\alpha+1}] \frac{t^\alpha(1-s)^\alpha(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)} & \text{si } s \geq t \end{cases}$$

Par conséquent, $t^\alpha G(1, s) \leq G(t, s) \leq G(1, s)$

2.3 Existence et Unicité

2.3.1 Existence d'une solution positive

Dans cette sous-section, nous prouvons l'existence de solution du MFBVP (1) (3). A cet effet, soit $\Omega_r \in E$ est le sous-ensemble ouvert borné défini par :

$$\Omega_r := \{x \in E, \|x\| < r, r > 0\}$$

et P est le cône défini par :

$$P := \{x \in E, x(t) \geq t^\alpha x, t \in [0, 1]\}.$$

De plus, définissez l'opérateur $T : E \rightarrow E$ tel que :

$$Tx(t) := \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds \quad (2.15)$$

où G défini dans (2.2) L'opérateur T a les propriétés suivantes.

Lemme 2.2. voir[7] Nous avons :

- (1) $T(P) \subset P$
- (2) L'opérateur $T : P \rightarrow P$ est complètement continu.

Preuve :

- (1) Soit $x \in P$. D'après le lemme (3.1), on a :

$$\begin{aligned} Tx(t) &= \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds \\ &\geq t^\alpha \int_0^1 G(1, s) f(s, x(s)) ds \\ &\geq t^\alpha \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds \end{aligned}$$

Alors, pour tout $t \in [0, 1]$ on a :

$$Tx(t) \geq t^\alpha \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds = t^\alpha \|Tx\|$$

D' où $Tx \in P$

. (2) Soit $\Omega \subset P$ borné défini par :

$$\Omega := x \in P : x \leq M, M > 0$$

Définissez maintenant :

$$L_M := \max_{t \in [0,1], x \in \Omega} f(t, x).$$

Alors, pour tout $x \in \Omega$ on a :

$$\|Tx\| = \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds \leq L_M \int_0^1 G(1, s) ds$$

ce qui implique que $T(\Omega)$ est bornée dans P .

Pour chaque $x \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} |(Tx)'(t)| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) f(s, x(s)) ds \right| \\ &= |\Gamma(\alpha) \int_0^t [t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}] (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 t^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{L_M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds + \frac{L_M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{(\alpha + \beta)}{\beta \Gamma(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 < t_2$, on a :

$$|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} (Tx)'(s) ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |(Tx)'(s)| ds \leq \frac{(\alpha + \beta) L_M |t_2 - t_1|}{\beta \Gamma(\alpha + 1)}$$

Alors, $|Tx(t_2) - Tx(t_1)| \rightarrow 0$ comme $t_1 \rightarrow t_2$ ce qui implique que l'ensemble $T(\Omega)$ est équicontinuel.

Maintenant, à partir du théorème d'Arzel'a-Ascoli, voir [10], nous concluons que $T(\bar{\Omega})$ est compact, c'est-à-dire $T : P \rightarrow P$ est un opérateur complètement continu.

Nous donnons quelques notations importantes comme suit :

$$\begin{aligned}
f^0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x)}{X}, f^\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x)}{X}, \\
f_0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x)}{X}, f_\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x)}{X}. \\
\Lambda_1 &= \int_0^1 G(1, s) ds, \Lambda_2 = \rho^\alpha \int_\rho^{1-\rho} G(1, s) ds
\end{aligned}$$

où, $\rho \in]0, \frac{1}{2}[$ et la fonction G est définie comme dans (2.2). Maintenant, nous donnons le deuxième principal résultat.

Théorème 2.2. *Supposons que l'une des trois conditions suivantes :*

(i) *Il existe $r_2 > r_1 > 0$, tel que $\forall x \in [r_1, r_2], \forall t \in [0, 1] : \frac{r_1}{\Lambda_2} \leq f(t, x) \leq \frac{r_2}{\Lambda_1}$.*

(ii) $\Lambda_1 f^0 \leq \frac{1}{2} \epsilon t \Lambda_2 f_\infty \geq 2$.

(iii) $\Lambda_2 f_0 \geq 2 \epsilon t \Lambda_1 f_\infty \leq \frac{1}{4}$.

est accompli. Ensuite, le MFBVP (1) (3) a au moins une solution positive.

Preuve :

(i) *Soit $x \in P \cap \partial\Omega_{r_1}$, c'est-à-dire $x \in P$ et $\|x\| = r_1$. Utilisation du lemme (2.1), on a :*

$$\begin{aligned}
\|Tx\| = \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds &\geq \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds \\
&\geq t^\alpha \int_0^1 G(1, s) f(s, x(s)) ds \\
&\geq \frac{r_1}{\Lambda_2} t^\alpha \int_0^1 G(1, s) ds \\
&\geq \frac{r_1}{\Lambda_2} t^\alpha \left[\int_0^\rho G(1, s) ds + \int_\rho^{1-\rho} G(1, s) ds + \int_{1-\rho}^1 G(1, s) ds \right] \\
&\geq \frac{r_1}{\Lambda_2} t^\alpha \int_\rho^{1-\rho} G(1, s) ds \\
&\geq \frac{r_1}{\Lambda_2} \left(\frac{t}{\rho} \right)^\alpha \rho^\alpha \int_\rho^{1-\rho} G(1, s) ds, t \in [\rho, 1 - \rho] \\
&\geq \frac{r_1}{\Lambda_2} \rho^\alpha \int_\rho^{1-\rho} G(1, s) ds = r_1
\end{aligned}$$

alors $\|Tx\| \geq \|x\|$

Pour $x \in P \cap \partial\Omega_{r_2}$, c'est-à-dire $x \in P$ et $\|x\| = r_2$, en utilisant le lemme 3.1, on a :

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds \leq \int_0^1 G(1, s) f(s, x(s)) ds \leq \frac{r_2}{\Lambda_1} \int_0^1 G(1, s) ds = r_2$$

Alors, $\|Tx\| \leq \|x\|$. L'application du théorème 1.2 donne que T a au moins un point fixe $x \in P \cap (\Omega_{r_2}^- \setminus \Omega_{r_2})$ avec $r_1 \leq \|x\| \leq r_2$. Il découle du théorème 2.1 que le MFBVP(1) (3) a au moins une solution positive x .

(ii) *D'après la définition de f^0 , il existe $r_1 > 0$, tel que :*

$f(t, x) \leq (f^0 + \epsilon)x$, pour tout $t \in [0, 1]$, $0 < x \leq r_1$, où $\epsilon > 0$ vérifie $\Lambda_1 \epsilon \leq \frac{1}{2}$.

Soit $x \in P \cap \partial\Omega_{r_1}$, c'est-à-dire $x \in P$ et $\|x\| = r_1$. En utilisant le lemme 2.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Tx(t) &= \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds \leq \int_0^1 G(1, s)f(s, x(s))ds \\ &\leq (f^0 + \epsilon) \int_0^1 G(1, s)x(s)ds \\ &\leq (f^0 + \epsilon)\|x\| \int_0^1 G(1, s)ds \\ &\leq \Lambda_1(f^0 + \epsilon)\|x\| \\ &\leq \|x\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\|Tx\| \leq \|x\|$.

Par la définition de f_∞ , il existe $r_3 > 0$, tel que :

$$f(t, x) \geq (f_\infty - \epsilon)x, \text{ pour tout } t \in [0, 1], x \geq r_3, \text{ ou } \epsilon > 0 \text{ vérifie } \Lambda_2 \epsilon \leq 1 \quad (2.16)$$

Soit $x \in P \cap \partial\Omega_{r_2}$, soit $x \in P$ et $\|x\| = r_2$ avec $r_2 = \max(2r_{1,\rho} - \alpha r_3)$. Nous avons :

$$x(t) \geq t^\alpha \|x\| \geq \rho^\alpha r_2 \geq r_3, \text{ pour } t \in [\rho, 1 - \rho]$$

et donc, par l'inégalité (2.16) $f(t, x) \geq (f_\infty - \epsilon)x$, pour $t \in [\rho, 1 - \rho]$, $x \in P \cap \partial\Omega_{r_2}$ et $\Lambda_2 \epsilon \leq 1$. Utilisation du lemme 3.1, on a :

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds \\ &\geq \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds \\ &\geq t^\alpha \int_0^1 G(1, s)f(s, x(s))ds \\ &\geq t^\alpha \int_{\rho^2}^{1-\rho^2} G(1, s)f(s, x(s))ds \quad 0 < \rho < 1/2 \\ &\geq t^\alpha (f_\infty - \epsilon) \int_{\rho^2}^{1-\rho^2} G(1, s)x(s)ds \\ &\geq \frac{t^{2\alpha}}{\rho^{2\alpha}} (f_\infty - \epsilon)\|x\| \rho^{2\alpha} \int_{\rho^2}^{1-\rho^2} G(1, s)x(s)ds \\ &\geq \Lambda_2 (f_\infty - \epsilon)\|x\| \\ &\geq \|x\| \end{aligned}$$

D'après le théorème (1.2), l'opérateur T a au moins un point fixe $x \in P \cap (\bar{\Omega}_{r_2} \setminus \Omega_{r_1})$ avec $r_1 \leq \|x\| \leq r_2$.

Il découle du théorème (2.1) que le MFBVP (1)(3) a au moins une solution positive x .

(iii) D'après la définition de f_0 , il existe $r_1 > 0$, tel que :

$f(t, x) \geq (f_0 - \epsilon)x$, pour tout $t \in [0, 1]$, $0 < x \leq r_1$, ou $\epsilon > 0$ satisfait $\Lambda_2 \epsilon \leq 1$.

.Soit $x \in P \cap \partial\Omega_{r_1}$. c'est-à-dire $x \in P$ et $\|x\| = r_1$. Utilisation du lemme (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &\geq \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds \\
&\geq t^\alpha \int_0^1 G(1, s)f(s, x(s))ds \\
&\geq t^\alpha(f_0 - \epsilon) \int_0^1 G(1, s)x(s)ds \\
&\geq t^{2\alpha}(f_0 - \epsilon)\|x\| \int_0^1 G(1, s)ds \\
&\geq \frac{t^{2\alpha}}{\rho^{2\alpha}}(f_0 - \epsilon)\|x\|\rho^{2\alpha} \int_{\rho^2}^{1-\rho^2} G(1, s)dst \in [\rho, 1 - \rho] \\
&\geq \Lambda_2(f_0 - \epsilon)\|x\| \\
&\geq \|x\|
\end{aligned}$$

Par la définition de f^∞ , il existe $r_4 > 0$, tel que :

$f(t, x) \leq (f^\infty + \epsilon)x$, pour tout $t \in [0, 1]$, $x \geq r_4$, où $\epsilon > 0$ vérifie $\Lambda_1\epsilon \leq 1/4$.

Il s'ensuit qu'il existe $\delta > 0$, tel que :

$\sigma = \max_{t \in [0, 1]} f(t, r_4)$, pour tout $t \in [0, 1]$.

Puis :

$$f(t, x) \leq (f^\infty + \epsilon)x + \delta, \text{ pour tout } t \in [0, 1], x \geq r_4$$

Soit $x \in P \cap \partial\Omega_{r_2}$, c'est-à-dire $x \in P$ et $x = r_2$ avec $r_2 = \max(2r_1, 2\sigma\Lambda_1)$. Utilisant Lemme (2.1), on a

$$\begin{aligned}
Tx(t) &= \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds \\
&\leq \int_0^1 G(1, s)f(s, x(s))ds \\
&\leq \int_0^1 G(1, s)[(f^\infty + \epsilon) + x(s) + \delta]ds \\
&\leq (f^\infty + \epsilon) \int_0^1 G(1, s)x(s) + \delta \int_0^1 G(1, s)ds \\
&\leq \Lambda_1(f^\infty + \epsilon)\|x\| + \delta\Lambda_1 \\
&\leq \frac{\|x\|}{2} + \delta\Lambda_1 \\
&\leq \frac{\|x\|}{2} + \frac{r_2}{2} \\
&\leq \|x\|
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\|Tx\| \leq \|x\|$. L'application du théorème (1.2) donne que T a au moins un point $x \in P \cap (\Omega_{r_2} \setminus \Omega_{r_1})$ et le théorème (2.1) garantissent que le MFBVP (1) (3) à au moins une

solution positive x . Par les deux et trois parties du théorème (3.2), on obtient directement le corollaire suivant.

Corollaire 2.1. . Supposons que l'une des deux conditions suivantes :

(i) $f^0 = 0$ et $f_\infty = +\infty$

(ii) $f^0 = +\infty$ et $f_\infty = 0$.

est accompli. Ensuite, le MFBVP (1) (3) a au moins une solution positive.

Exemple 2.1. voir[7] Considérez le MFBVP suivant :

$$\begin{cases} D_{1-}^{(\beta)}({}^c D_{0+}^\alpha x)(t) = f(t, x(t)) & 0 < t < 1, \\ x(0) = \gamma \int_0^1 x(t) dt, D_{0+}^\beta x(1) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

où $\alpha = \beta = \gamma = 1/2$.

(i) Si $f(t, x) = (1 + t)x \ln(1 + x)$, on a :

$$f^0 = \lim_{x \rightarrow 0} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x)}{X} = 0 \text{ et } f_\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x)}{X} = +\infty$$

Ainsi, par la première partie du corollaire (2.1), nous pouvons comprendre que le problème (2.17) a au moins une solution positive.

(ii) Si $f(t, x) = (2t + 1)e^{-x} \cos x$, nous avons :

$$f_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x)}{X} = +\infty \text{ et } f_\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x)}{X} = 0$$

puis par la deuxième partie du corollaire (2.1), nous pouvons comprendre que le problème (2.17) a au moins une solution positive

2.3.2 Unicité de la solution positive

Dans cette sous-section, nous donnons le troisième résultat principal. Théorème (2.3). Supposons qu'il existe $L > 0$ tel que :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \text{ Pour presque tous les } t \in [0, 1] \text{ et tout } x, y \in P \quad (2.18)$$

Si :

$$0 < L\Lambda_1 < 1 \quad (2.19)$$

puis, le MFBVP(1)(3) Présente exactement une solution positive à P

. Preuve : Soit $x, y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+, x \neq y$, deux solutions positives du MFBVP (1)(3) . Utilisant (2.18) et le lemme (2.1), on a :

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &\leq \int_0^1 G(t,s) |(f(s,x(s)) - f(s,y(s)))| ds \\ &\leq L \int_0^1 G(1,s) |x(s) - y(s)| ds \\ &\leq L\Lambda_1 \|x - y\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\|Tx - Ty\| \leq L\Lambda_1 \|x - y\|$. Par la condition(2.19), l'opérateur T est un contraction. À partir du théorème (2.1) et du théorème(2.1), le MFBVP (1)(3) a exactement un solution positive à P.

STABILITÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilité de Ulam-Hyers pour le MFBVP(1) (3).

3.1 stabilité Ulam-Heys

Théorème 3.1. voir[7] Supposons que $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continu et satisfaisant (2.18) et (2.19). Ensuite nous avons :

(i) Le MFBVP(1) (3) est Ulam-Hyers stable et par conséquent généralisé Ulam-Hyers stable.

(ii) Si $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est fonction différentiable et croissante telle que $\varphi(0) \neq 0$, alors le MFBVP (1)(3) est stable à Ulam-Hyers-Rassias. Plus loin le MFBVP (1)(3) est écurie Ulam-Hyers-Rassias généralisé.

Preuve :

(i) Soit $y \in E$ toute solution de l'inégalité (1.11), puis par Remarque (1.2), on :

$$D_{1-}^{(\beta)} ({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) = f(t, y(t)) + \omega(t), t \in [0, 1].$$

Utilisation du théorème (2.1), nous pouvons écrire :

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, y(s)) ds + \int_0^1 G(t, s) \omega(s) ds.$$

qui donne :

$$y(t) - \int_0^1 G(t, s) f(s, y(s)) ds \leq \Lambda_1 \epsilon. \quad (3.1)$$

Maintenant, soit $x \in E$ une solution unique du MFBVP(1)(3), du Lemme (2.1) nous avoir pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= \left| y(t) - \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \left| y(t) - \int_0^1 G(t, s) f(t, y(s)) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_0^1 G(t, s) (f(s, y(s)) - f(s, x(s))) ds \right| \end{aligned}$$

De (3.1)(2.18) et le lemme (2.1) nous avons

$$\|y - x\| \leq \epsilon \Lambda_1 + L \Lambda_1 \|y - x\|$$

ce qui implique en outre :

$$\|y - x\| \leq \lambda \epsilon$$

où $\lambda = \frac{\Lambda_1}{1 - L \Lambda_1} > 0$. Ensuite, le MFBVP (1)(3) est stable à Ulam-Hyers. De plus, si nous posons $\theta(\epsilon) = \lambda \epsilon$, alors le MFBVP (1)(3) est une stabilité Ulam-Hyers généralisée.

(ii) Soit $y \in E$ toute solution de l'inégalité (1.13), puis par Remarque (1.2), on a :

$$D_{1-}^{(\beta)}({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) = f(t, y(t)) + \phi(t), t \in [0, 1]$$

Utilisation du théorème (2.1), on obtient :

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, y(s))ds + \int_0^1 G(t, s)\phi(s)ds$$

De la remarque (1.2) on a :

$$\begin{aligned} |y(t) - \int_0^1 G(t, s)f(s, y(s))ds| &\leq \int_0^1 G(t, s)|\phi(s)| \\ &\leq \epsilon \int_0^1 G(t, s)\varphi(s)ds \\ &\leq \epsilon \left[\int_0^t G(t, s)\varphi(s)ds + \int_t^1 G(t, s)\varphi(s)ds \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante, alors par le lemme (2.1) on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} s \leq t \implies \varphi(s) \leq \varphi(t) \\ G(t, s) \leq G(1, s) \end{array} \right\} \implies \int_0^t G(t, s)\varphi(s)ds \leq \varphi(t) \int_0^t G(1, s)ds \quad (3.3)$$

et

$$\left. \begin{array}{l} s \leq t \implies \varphi(s) \leq \varphi(t) \\ G(t, s) \leq G(1, s) \end{array} \right\} \implies \int_t^1 G(t, s)\varphi(s)ds \leq \varphi(1) \int_t^1 G(1, s)ds \quad (3.4)$$

De (3.2), (3.3) et (3.4), on obtient :

$$|y(t) - \int_0^1 G(t, s)f(s, y(s))ds| \leq \epsilon \left[\varphi(t) \int_0^t G(1, s)ds + \varphi(1) \int_t^1 G(1, s)ds \right]. \quad (3.5)$$

Soit $\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction définie par :

$$\mu(t) = \varphi(t) \int_0^1 G(1, s)ds + \varphi(1) \int_t^1 G(1, s)ds - \frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} \Lambda_1 \varphi(t)$$

La fonction μ est différentiable sur $]0, 1[$ et pour tout $t \in]0, 1[$, on a :

$$\mu'(t) = \varphi'(t) \left[\int_0^t G(1, s)ds - \frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} \Lambda_1 \right] + (\varphi(t) - \varphi(1))G(1, t)$$

φ est différentiable et croissant, alors $\mu'(t) \leq 0$. Par contre, on a $\mu(0) = 0$. Puis, de (3.5) on obtient :

$$|y(t) - \int_0^1 G(t, s)f(s, y(s))ds| \leq \frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} \epsilon \Lambda_1 \varphi(t). \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
|y(t) - x(t)| &= \left| y(t) - \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds \right| \\
&\leq \left| y(t) - \int_0^1 G(t, s) f(t, y(s)) ds \right| \\
&\quad + \left| \int_0^1 G(t, s) (f(s, y(s)) - f(s, x(s))) ds \right|.
\end{aligned}$$

De (3.6), (2.18) et le lemme (2.1) nous avons :

$$\|y - x\| \leq c\epsilon\varphi(t)$$

où $c = \frac{\Lambda_1\varphi(1)}{(1-L\Lambda_1)\varphi(0)} > 0$. Ensuite, le MFBVP (1) (3) est Ulam-Hyers-Rassias stable. Par conséquent, d'après la remarque 1, le MFBVP (3)(3) est généralisée Ulam-Hyers-Rassias stable, ce qui complète la preuve :

3.2 Exemples

voir[7] Dans cette sous-section, nous présentons deux exemples pour expliquer l'applicabilité de la résultats de stabilité.

Exemple 3.1. Considérez le MFBVP suivant :

$$\begin{cases} D_{1^-}^{(1/2)}({}^c D_{0^+}^{1/2} x)(t) = \frac{\cos(x(t))}{t+3} \quad 0 < t < 1 \\ , x(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 x(t) dt, {}^c D_{0^+}^{1/2} x(1) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

La fonction $f(t, x(t)) = \frac{\cos(x(t))}{t+3}$ est continue pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x > 0$. Alors, on a :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \frac{1}{3}|x - y|, L = \frac{1}{3}, \Lambda_1 = \int_0^1 G(1, s) ds = \frac{28 - 3\sqrt{\pi}}{6\sqrt{\pi}} \text{ et } L\Lambda_1 \approx 0,71 < 1.$$

D'après le théorème (2.3), le MFBVP (3.7) a exactement une solution positive x sur $[0, 1]$.

Maintenant, soit $y \in E$ une solution d'inégalité :

$$|D_{1^-}^{(1/2)}({}^c D_{0^+}^{1/2} y)(t) - \frac{\cos(y(t))}{t+3}| \leq \epsilon \quad t \in [0, 1].$$

Puis, selon le théorème (3.1), le MFBVP(3.7) est Ulma-Hyers stable avec :

$$\lambda = \frac{\Lambda_1}{1 - L\Lambda_1} = \frac{84 - 9\sqrt{\pi}}{21\sqrt{\pi} - 28} > 0$$

. D'un autre côté, considérons l'inégalité :

$$|D_{1^-}^{(1/2)}({}^c D_{0^+}^{1/2} y)(t) - \frac{\cos(y(t))}{t+3}| \leq \epsilon\varphi(t) \quad t \in [0, 1]$$

où $\varphi(t) = e^t$. Par le théorème (3.1) le MFBVP (3.7) est Ulam-Hyers-Rassias stable avec :

$$c = \frac{\varphi(1)\Lambda_1}{(1 - L\Lambda_1)\varphi(0)} = \frac{(84 - 9\sqrt{\pi})e}{21\sqrt{\pi} - 28} > 0$$

Exemple 3.2. voir[7] Considérez le MFBVP suivant :

$$\begin{cases} D_{1-}^{0,8}({}^c D_{0+}^{0,2}x)(t) = \frac{x(t)}{11\pi e^t + x(t)}, 0 < t < 1 \\ x(0) = \frac{98}{100} \int_0^1 x(t) d_s {}^c D_{0+}^{0,2}x(1) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

La fonction $f(t, x(t)) = \frac{x(t)}{11\pi e^t + x(t)}$ est continue pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x > 0$. Alors, on ont :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \frac{1}{11\pi} |x - y|, L = 1/11\pi \text{ et } \Lambda_1 = \int_0^1 G(1, s) ds \approx 33,63 \text{ et } L\Lambda_1 \approx 0,97$$

D'après le théorème (2.3), le MFBVP(3.8) a exactement une solution positive x sur $[0, 1]$. Soit $y \in E$ une solution de l'inégalité

$$|D_{1-}^{0,8}({}^c D_{0+}^{0,2}x)(t) - \frac{x(t)}{11\pi e^t + x(t)}| \leq \epsilon t \in [0, 1]$$

Utilisation du théorème (3.1), le MFBVP(3.8) est Ulma-Hyers stable avec :

$$\lambda = \Lambda_1(1 - L\Lambda_1) \approx 1121$$

Soit $y \in E$ une solution de l'inégalité :

$$|D_{1-}^{0,8}({}^c D_{0+}^{0,2}x)(t) - \frac{x(t)}{11\pi e^t + x(t)}| \leq \epsilon \varphi(t), t \in [0, 1]$$

où $\varphi(t) = e^t$. Par le théorème(3.1) le MFBVP (3.8) est Ulam-Hyers-Rassias stable avec :

$$c = \lambda \frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} = \lambda e > 0$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié une classe d'équations différentielles fractionnaires mixtes avec des conditions aux limites de type intégrales. Ce travail se déroule en deux étapes :

1. Existence et unicité : nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (1)(3) en utilisant le théorème de point fixe.
2. Stabilité : nous avons étudié la stabilité de Hlam-Heyers pour le MFBVP(1) (3) et nous avons donné quelques exemples.

Bibliographie

- [1] T. Abdeljawad. On conformable fractional calculus. *J. Comput. Appl. Math*, 269(13) :57–66, 2015.
- [2] R. Agarwal, M. Meehan, and D. O'Regan. *Theorie et applications des points fixes*. L'université de Cambridge Press, Cambridge, 2001.
- [3] B. Ahmad, S. Ntouyas, and A. Alsaedi. Existence theory for nonlocal boundary value problems involving mixed fractional derivatives. *nonlinear anal. Model. Control.*, 24.6(20) :937–957, 2019.
- [4] KENDALL E. ATKINSON. *"The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind "*. Cambridge University Press, New York, 2009.
- [5] G. Chatzarakis, M. Deepa, N. Nagajothi, and V. Sadhasivam. Oscillatory properties of a certain class of mixed fractional differential equations. *Appl. Math. Inf. Sci.*, 14.1(8) :109–117, 2020.
- [6] K. Deimling. *Analyse fonctionnelle non linéaire*. Springer, Berlin / Heidelberg, 1985.
- [7] D. SOMIA and N. BRAIM. Une nouvelle classe d'équations différentielles fractionnaires mixtes avec conditions aux limites intégrales. *Laboratoire de mathématiques pures et appliquées*, 7(2)(20) :227–247, 2021.
- [8] D. Guo and V. Lakshmikantham. *Problèmes non linéaires dans les espaces abstraits*. Presse académique, 1988.
- [9] R. Khalil, M. A. Horani, A. Yousef, and M. Sababheh. Une nouvelle définition de dérivée fractionnaire. *J. Comput. Appl. Math*, 34,2(76) :341–375, 2014.
- [10] A. Kilbas, H. Srivastava, and J. Trujillo. *Théorie et applications des équations différentielles fractionnaires*. Autre-voir : Amsterdam, Pays-Bas, 2006.
- [11] A. Lakoud, R. Khaldi, and A. Kilicman. Existence of solutions for a mixed fractional boundary value problem. *Adv. Difference Equ.* 2017., 1(164) :164, 2017.
- [12] S. Meng and Y. Cui. The extremal solution to conformable fractional differential equations involving integral boundary condition. *Mathematics* 2,7, page 186, 2019.
- [13] S. Meng and Y. Cui. Multiplicity results to a conformable fractional differential equations involving integral boundary condition. *Complexity* 2019, page 8, 2019.
- [14] S. Ntouyas, A. Alsaedi, and B. Ahmad. Existence theorems for mixed Riemann-Liouville and Caputo fractional differential equations and inclusions with nonlocal fractional integro-differential boundary conditions. *Fract. Fract.* 3, 2, page 21, 2019.
- [15] M. Rahman. *"Equations intégrales et leurs applications"*. Bibliothèque du Congrès, 2007.

- [16] RUS. La stabilité Ulam des équations différentielles ordinaires. *Univ. Babeş-Bolyai Math. LIV*, 4(8) :125–133, 2009.
- [17] Dr. Shanti Swarup. "Equations intégrales". Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [18] Cazakov VC Verlane AF. "Integral Equations". , NaukaDomka, Kiev, URSS, 1986.
- [19] J. Wang, J. Lv, and Y. Zhou. Ulam stabilité et dépendance des données pour les équations différentielles fractionnaires avec dérivé de Caputo. *Electron J. Qual. Différence de théorie. Equ*, 63(9) :1–10, 2011.
- [20] Abdul-Majid Wazwaz. « Intégrale linéaire et non linéaire Equations ». "Springer Science et Business Media", 2011.

ملخص: في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة صنف من المعادلات التفاضلية-التكاملية الكسرية من نوع فولتيرا مع شرط حدي غير محلي. لقد أثبتنا الوجود والوحدانية لهذه المسألة وذلك باستخدام نظرية النقطة الثابتة. اقترحنا مخطط عددي يعتمد على كثيرات الحدود لتشبيشاف من النوع الأول وذلك بكتابة الحل على شكل سلسلة تشبيشاف ذات m حد. تم اختزال المسألة إلى جملة معادلات جبرية خطية أو غير خطية حسب خطية الدالة F وباستعمال طريقة التكامل العددية ل غوص-تشبيشاف. قمنا بدراسة مسألة التقارب. في هذه الحالة، تم تطبيق طريقة نيوتن لحل هذه الجملة. أخيرًا ، تم تقديم أربعة أمثلة لتأكيد دقة وكفاءة هذا المخطط العددي.

كلمات مفتاحية: معادلة تفاضلية-تكاملية كسرية من نوع فولتيرا، نظرية النقطة الثابتة، طريقة نيوتن، طريقة غوص-تشبيشاف ، كثيرات الحدود لتشبيشاف.

Dans ce mémoire, nous avons étudié une classe d'équations intégral-différentielles fractionnaires mixtes avec des conditions aux limites de type intégrale. D'abord, nous présentons quelques résultats sur l'existence, l'unicité et la stabilité d'Ulam-Hyers de solution positive d'équations différentielles fractionnaires mixtes non linéaires avec frontière intégrale conditions en utilisant le théorème de point fixe de Guo-Krasnoselskii et la carte de contraction de Banach-principe de ping. Nous discutons de divers types de stabilité Ulam-Hyers. Cette étude peut être un nouvelle façon pour les chercheurs de discuter de problèmes intéressants dans le domaine de l'analyse mathématique.

Mots-Clés : calcul fractionnaire, Équation intégral-différentielle fractionnaire de type Freedholm, Théorème de point fixe , stabilité de Ulam-Hyers

In this memoir, we have studied a new class of mixed fractional differential equations with integral boundary conditions. First, In this paper, we present some results about existence, uniqueness and Ulam-Hyers stability of positive solution of nonlinear mixed fractional differential equations with integral boundary conditions by using Guo-Krasnoselskii's fixed point theorem and Banach's contraction mapping principle. We discuss various types of Ulam-Hyers stability. This study may provide a new way for the researchers to discuss interesting problems in the mathematical analysis area.

Keywords : calcul fractionnaire, Fractional Freedholm integro-differential equation, Fixed point theorem. Ulam-Hyers stability