



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Espaces d'opérateurs multilinéaires & Théorèmes de caractérisation.

Présentée par :

Ghellab nadia

Soutenu publiquement le : xx/xx/2024

Devant le jury composé de :

Mr. Rachid Yahi

Mr. Maatougui Belaala

Mr. Khalil Saadi

M.C.B.

M.C.B.

Prof.

Université de M'sila

Université de M'sila

Université de M'sila

Président

Encadreur

Examinateur

Année universitaire 2023/2024.

Dédicace

louange et merci à **Dieu** , qui m'a donné le succès .

Ensuite, je dédie ce travail À mon **père** , mon soutien et ma fierté qui a toujours cru en moi et a met à ma disposition tous les moyens nécessaires pour que je réussisse dans mes études.

À ma chère **mère** qui a cherché mon réconfort dès ma naissance et qui a soutenu mes études.

je demande à **Dieu** , de te compenser pour Ça .

A mes frères bein-aimés : **Amar,Kais,Sahli**
sans oublier ma seule et ma chère soeur : **Khadidja safa** .

A l'âme de mon **grand-père** et de ma **tante** maternelle, que **Dieu** vous fasse habiter au paradis .

À mes camarades de classe,à tous mes amis,àceux qui m'ont soutenu autrefois dans mes études,un mot gentil ,que **Dieu** vous récompense bien

A tous ceux qui m'ont appris une lettre, que **Dieu** vous récompense de la meilleure des récompenses.

Remerciement

Mes premiers et derniers remerciements vont à **Dieu** "Tout-Puissant" de m'avoir accordé la bénédiction de terminer ce travail. Ensuite je renouvelle ma gratitude à mes parents et aux membres de ma famille pour leur soutien.

Un grand merci à mon **Encadreur** :Blaala Maatougui pour ses conseils et son suivi durant la réalisation de mon travail .

J'ai également l'honneur de remercier les membres de l'estimé comité : le Docteur Yahi Rachid **Président** de jury et le Professeur Saadi Khalil **Examineur**.

Je vais également remercier toutes les collègues Chacune par son nom ,aussi mes amies surtout mon amie **Salmani Nada**.

En fin je remercie toutes les personnes que je connais et tout le personnel administratif du département des mathématiques .

Je ne termine pas sans avoir exprimé mes remerciements envers toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Symboles et Notations

$L(X, Y)$: Ensemble de tous les opérateurs linéaires de X dans Y .
$B(X, Y) = L(X, Y)$: Espace d'opérateurs linéaires bornés (continus) de X dans Y .
B_X	: Boule unité fermée de l'espace X .
B_{X^*}	: Boule unité fermée de l'espace X^* .
\mathbb{K}	: Corps des scalaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).
p^*	: L'exposant conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).
X^*	: Le dual topologique de X .
X^{**}	: Le bidual topologie de X .
T^*	: L'adjoint d'opérateur T .
$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$: Espace d'opérateurs m -linéaires de (X_1, \dots, X_m) dans Y .
$C(K)$: Espace des fonctions continues sur un compact K à valeurs réelles.
$X_1 \otimes \dots \otimes X_m$: Le produit tensoriel algébrique.
$X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m$: Le produit tensoriel projectif des espaces X_1, \dots, X_m .
$X_1 \hat{\otimes}_\epsilon \dots \hat{\otimes}_\epsilon X_m$: Le produit tensoriel injectif des espaces X_1, \dots, X_m .
$\mathcal{P}(^m X; Y)$: Espace des polynômes homogènes de degré m .
J_X	: Plongement canonique.
$\Pi_p(X, Y)$: Espace des opérateurs p -sommants de X dans Y .
$\text{Int}(X; Y)$: l'espace de Banach des opérateurs intégraux de X dans Y muni de la norme
\tilde{T}	: linéarisation de \hat{T} .
μ	: Mesure de probabilité régulière positive sur l'espace compact Ω .

Table des matières

Dédicace	2
remerciement	3
Symboles et Notations	i
introduction	i
1 Généralités et théorèmes fondamentaux	1
1.1 Introduction	1
1.2 Opérateurs linéaires bornés	1
1.3 Espaces de Banach classiques	2
1.3.1 Les espaces de suites ℓ_p	2
1.3.2 Espaces \mathcal{L}_p	4
1.4 Polynômes homogènes et opérateurs multilinéaires	5
1.4.1 Applications multilinéaires	5
1.4.2 Polynômes homogènes de degré m	8
2 Espaces réflexifs et théorèmes de James	12
2.1 Espaces réflexifs	12
2.2 Caractérisation topologique	14
2.2.1 Théorème linéaire de James	15
2.3 Version non linéaire du théorème de James	16
2.3.1 Version multilinéaire	16

2.3.2	Sur la réflexivité du produit tensoriel projectif	18
2.3.3	Version polynômiale	21
3	Caractérisation et factorisation multilinéaire et polynômiale de ces espaces \mathcal{L}_∞	24
3.1	Introduction	24
3.1.1	Sommabilités et définitions	24
3.2	Opérateur linéaire p -sommant	25
3.2.1	Opérateur linéaire intégral	27
3.2.2	Opérateur multilinéaire p -dominé	28
3.2.3	Opérateur m -linéaire multi p -sommant	29
3.3	Caractérisation multilinéaire des espaces \mathcal{L}_∞	30
3.4	Caractérisation des espaces \mathcal{L}_∞ en termes de polynômes	33
	Résumé	37
	Bibliographie	39

introduction

Les travaux de ce mémoire s'inscrivent dans le domaine de la théorie des espaces de Banach et se concentrent principalement sur les théorèmes de caractérisation de ces espaces. Il existe de nombreux théorèmes qui caractérisent certains types d'espaces de Banach. L'une des caractérisations les plus célèbres est celle de James pour les espaces réflexifs : un espace de Banach X est réflexif si, et seulement si, toute forme linéaire sur X^* atteint sa norme. Le théorème de Kwapien de 1970 fournit une caractérisation des espaces de Hilbert, basée sur la factorisation de Pietsch des opérateurs linéaires 2-sommants par un espace de Hilbert, cette factorisation étant la clé de la démonstration de Kwapien. Ce mémoire propose certaines généralisations non linéaires des théorèmes précédents ainsi qu'un autre théorème caractérisant les espaces de type Espaces \mathcal{L}_∞ . Les deux cas non linéaires considérés ici sont les cas multilinéaire et polynomial. Une caractérisation multilinéaire implique l'utilisation des opérateurs multilinéaires au lieu des opérateurs linéaires.

Le mémoire est structuré en trois chapitres.

Le premier chapitre offre un aperçu général des espaces de Banach, notamment les espaces ℓ_p et \mathcal{L}_p . Ensuite, il présente un panorama des opérateurs multilinéaires et des polynômes homogènes de degré m , en fournissant une série de propriétés et de résultats concernant ces deux types d'opérateurs.

Le deuxième chapitre traite des versions multilinéaires et polynomiales du théorème de James. Pour le cas multilinéaire, au lieu de considérer les formes linéaires, on examine

les formes multilinéaires qui se présentent comme produit de formes linéaires. Le théorème de James se formule alors ainsi : les espaces X_1, \dots, X_m sont réflexifs si, et seulement si, toute forme multilinéaire de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ de la forme $\varphi = x_1^* \otimes \dots \otimes x_m^*$ atteint sa norme. Pour les polynômes, deux versions sont proposées : la première considère les polynômes de la forme $P_{x^*}(x) = x^*(x)^m$ et la deuxième les polynômes de la forme $P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x) = x_1^*(x) \dots x_m^*(x)$.

Le troisième chapitre s'intéresse à la caractérisation des espaces \mathcal{L}_∞ . Un survol de certains concepts est donné, notamment les opérateurs linéaires intégraux, p-sommants, ainsi que les opérateurs multilinéaires multi p-sommants, intégraux et p-dominés. Dans le cas linéaire, un espace X est un \mathcal{L}_∞ si, et seulement si, pour tout espace de Banach Y et tout opérateur linéaire 1-sommant $T : X \rightarrow Y$, T est intégral. Pour le cas multilinéaire, deux types de théorèmes généralisent le cas linéaire. Le premier type utilise les opérateurs multilinéaires multi 1-sommants à la place des opérateurs linéaires 1-sommants. Le deuxième type utilise les opérateurs multilinéaires 1-dominés. Concernant le cas polynomial, les polynômes 1-dominés et intégraux sont utilisés.

Généralités et théo- rèmes fondamentaux

Chapitre
1

1.1. Introduction

Dans ce chapitre ,on présente quelques résultats principaux à propos des espaces vectoriels :

1.2. Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.

Soient \mathbb{K} un corps et X, Y deux \mathbb{K} – *espaces* de Banach et $T : X \rightarrow Y$ un Opérateur.

Elle est linéaire si :

1. $\forall x, y \in X : T(x + y) = T(x) + T(y)$.
2. $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

On note $L(E, F)$ l'ensemble des Opérateurs linéaires, on le muni de deux opérations algébriques suivantes

1. $\forall x \in X : (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$.
2. $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda T)(x) = \lambda T(x)$.

Si $Y = \mathbb{K}$, $L(E, K)$ est dit le dual algébrique de X et noté généralement X'

Définition 1.2.

Soit $T \in L(X, Y)$, T est continu s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E : \|T(x)\| \leq C\|x\|. \quad (1.2.1)$$

On note $\mathcal{B}(X, Y)$ l'espace de Banach des Opérateurs linéaires continues où sa norme des opérateurs est donnée par

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \end{aligned}$$

On a aussi

$$\forall x \in X : \|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Cas particulier

Si $Y = \mathbb{K}$, $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ est dit le dual topologique de X , on le note généralement X^* .

On a $X^* \subset X'$

1.3. Espaces de Banach classiques

Dans cette section, on fait rappel aux certains espaces de Banach qui sont les petits ℓ_p et les espaces \mathcal{L}_p (en anglais \mathcal{L}_p -espaces).

1.3.1. Les espaces de suites ℓ_p

Définition 1.3.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{R} et $1 < p < +\infty$. On définit l'ensemble ℓ_p par

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Si $p = \infty$, on définit ℓ_∞ par

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

On munit ℓ_p de la norme suivante

1) Si $1 \leq p < \infty$: $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

2) Si $p = \infty$, $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Théorème 1.

ℓ_2 est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$$

Théorème 2.

Soit H un espace de Hilbert séparable (i.e., admet une base orthonormale dénombrable) alors H est isomorphe à ℓ_2 .

Théorème 3.

(Espace dual). Soit $1 < p < +\infty$. On a

$$(\ell_p)^* = \ell_{p^*}$$

avec p^* est le conjugué de p , i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Proposition 1.

Soit $1 < p < +\infty$. L'espace ℓ_p est réflexif, i.e.,

$$(\ell_p)^* = \ell_{p^*}.$$

Proposition 2.

(Comparaison entre les espaces des suites)

Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Nous avons les inclusions suivantes

$$\ell_1 \subset \dots \subset \ell_p \subset \ell_q \subset \dots \subset \ell_\infty$$

1.3.2. Espaces \mathcal{L}_p

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $\lambda > 1$. Un espace de Banach X est dit espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ si pour tout sous espace de dimension finie $E \subset X$ contenu dans un sous espace de dimension finie $F \subset X$ il existe un isomorphisme $u : F \rightarrow l_p^{\dim F}$ satisfaisant $\|u\| \|u^{-1}\| < \lambda$.

On dit que X est un espace \mathcal{L}_p si c'est un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ pour un certain $\lambda > 1$.

Soit $(\Omega; \mu)$ un espace mesuré ; pour $1 \leq p \leq \infty$.

Par exemple : les espaces de Lebesgue $L_p(\mu)$ sont des espaces \mathcal{L}_p . L'espace $C(K)$ des fonctions continues sur un compact K est un espace \mathcal{L}_∞ .

Définition 1.4.

[LT77] Soit X un espace de Banach et Y un sous espace fermé de X . On dit que Y est complémenté de X s'il existe un sous espace fermé Z tel que

$$X = Y \oplus Z$$

Le sous espace fermé Z s'appelle le complément de Y .

Théorème 4.

Un sous espace ferme Y d'un espace de Banach X est complémenté de X si, et seulement si, il est l'image d'une projection continue de X .

Exemple 1.3.1.

1. Tout sous espace fermé d'un espace de Hilbert H est complémenté dans H .
2. Les l_p^n sont complémentés dans l_p .

Proposition 3.

[Bou81]

1. Si $1 < p < \infty$ et X est un espace \mathcal{L}_p , alors X est isomorphe à un sous espace complémenté de $L_p(\mu)$.
2. Si X est un espace \mathcal{L}_1 (resp. \mathcal{L}_∞), alors X^* est isomorphe à un sous espace complémenté de $L_1(\mu)$ (resp. $C(K)$).

Inversement, si X est un sous espace complétement de L_p ($1 < p < \infty$), alors X est un espace \mathcal{L}_p ou bien isomorphe à un espace de Hilbert.

Proposition 4.

[Bou81]

1. Si X est un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ pour tout $\lambda \geq 1$, alors X est un $L_p(\mu)$.
2. Tout espace de Hilbert est un espace $\mathcal{L}_{2,\lambda}$ pour tout $\lambda \geq 1$.

1.4. Polynômes homogènes et opérateurs multilinéaires

1.4.1. Applications multilinéaires

Soient X_1, \dots, X_m, Y des espaces de Banach. L'opérateur $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ est dit multilinéaire ou m -linéaire s'il est linéaire par rapport à chaque composante. Il est borné (continu) s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$,

on a

$$\|T(x_1, \dots, x_m)\| \leq C \|x_1\| \dots \|x_m\| \quad (1.4.1)$$

On note $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m -linéaires bornés lequel est un espace de Banach dont sa norme est la plus petite constante positive C vérifiant (1.4.1). Elle peut s'exprimer par

$$\|T\| = \sup_{\|x_j\| \leq 1; 1 \leq j \leq m} \|T(x_1, \dots, x_m)\|.$$

Opérateur adjoint

l'opérateur adjoint de l'opérateur multilinéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ est l'opérateur

$$T^* : Y^* \rightarrow \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$$

défini par

$$y^* \rightarrow T^*(y^*) : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow \mathbb{K}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Produit tensoriel projectif

[Bla97] Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. On note $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ le produit tensoriel algébrique de X_1, \dots, X_m . On définit la norme projective par

$$\|v\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\| \right\}$$

où l'infimum est porté sur toutes les représentations possibles de v de la forme

$$v = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m$$

On note $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ le produit tensoriel projectif des espaces X_1, \dots, X_m i.e. ; le complété de $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ pour cette norme. Si $X_1 = \dots = X_m = X$ on écrit simplement $\widehat{\otimes}_\pi^m X$.

Par $\otimes_s^m X = X \otimes_s^{(m)} \dots \otimes_s X$, on note le produit tensoriel symétrique et par $\widehat{\otimes}_{\pi,s} X$ on note la fermeture de $\otimes_s^m X$ dans $\widehat{\otimes}_\pi^m X$.

Produit tensoriel injectif

la norme injective est définie par

$$\|v\|_\varepsilon = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |x_j^*(x_i^j)| \right\},$$

où le supremum est porté sur toutes les représentations possibles de v de la forme

$$v = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m.$$

On note $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_m$ le produit tensoriel injectif des espaces X_1, \dots, X_m i.e. ; le complété de $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ pour cette norme. Si $X_1 = \dots = X_m = X$ on écrit simplement $\widehat{\otimes}_\varepsilon^m X$.

Produit tensoriel de Hilbert

Soient H_1, \dots, H_m des espaces de Hilbert, On peut munir le produit tensoriel algébrique $H_1 \otimes \dots \otimes H_m$ du produit scalaire défini par

$$\forall h = (h_1 \otimes \dots \otimes h_m), k = (k_1 \otimes \dots \otimes k_m) \in H_1 \otimes \dots \otimes H_m : \langle h, k \rangle = \langle h_1, k_1 \rangle \dots \langle h_m, k_m \rangle$$

On note $\|\cdot\|_2$ la norme correspondante et $H_1 \widehat{\otimes}_2 \dots \widehat{\otimes}_2 H_m$ l'espace de Hilbert complété de $H_1 \otimes \dots \otimes H_m$.

Soit $(e_{k_j})_{k_j \in I_j}$ une base orthonormale de $H_j (1 \leq j \leq m)$. On peut voir aisément que le système

$$\{e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_m}\}_{\substack{k_j \in I_j \\ 1 \leq j \leq m}},$$

forme une base orthonormale de $H_1 \widehat{\otimes}_2 \dots \widehat{\otimes}_2 H_m$.

Remarque 1.1. Les trois normes sont raisonnables et vérifient

$$\varepsilon(v) \leq \|v\|_2 \leq \pi(v)$$

pour tout $v \in H_1 \otimes \dots \otimes H_m$.

Opérateur linéarisé

La linéarisation de l'opérateur multilinéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ est l'opérateur linéaire $\tilde{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m \rightarrow Y$ défini par

$$\tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \right) = \sum_{i=1}^n T(x_i^1, \dots, x_i^m).$$

Il est bien défini, car il ne dépend pas de représentation choisie.

De plus, \tilde{T} est unique et $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. On a aussi

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{B}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y)$$

car l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) &\rightarrow \mathcal{B}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y) \\ T &\rightarrow \Phi(T) = \tilde{T} \end{aligned}$$

est une isométrie surjective.

Cas particulier

Le dual de $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ s'identifie à l'espace des formes multilinéaires bornées

$$(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^* = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m) \quad (1.4.2)$$
1.4.2. Polynômes homogènes de degré m

Dans ce paragraphe on présente tout d'abord les opérateurs multilinéaires symétriques.

Définition 1.5.

Soient X, Y deux espaces de Banach et $T : \underbrace{X \times \dots \times X}_m \rightarrow Y$ un opérateur multilinéaire ; T est dit symétrique si

$$T \circ \sigma(x_1, \dots, x_m) := T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = T(x_1, \dots, x_m)$$

pour toute permutation σ . On note $\mathcal{L}_S({}^m X; Y)$ l'espace des opérateurs multilinéaires symétriques.

A chaque opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}({}^m X; Y)$ on peut associer un opérateur symétrique $T_S \in \mathcal{L}_S({}^m X; Y)$. En effet, soit $T : \underbrace{X \times \dots \times X}_m \rightarrow Y$ un opérateur multilinéaire, posons

$$T_S = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} T \circ \sigma$$

L'opérateur T_S s'appelle opérateur symétré de T . On a

- (1) Si $T \in \mathcal{L}({}^m X; Y)$ alors $T_S \in \mathcal{L}_S({}^m X; Y)$.
- (2) $T_S = T$ si et seulement si T est symétrique.
- (3) L'opérateur linéaire $S : \mathcal{L}({}^m X; Y) \rightarrow \mathcal{L}_S({}^m X; Y) : T \rightarrow S(T) = T_S$ est une projection.

Définition 1.6.

Soient X, Y deux espaces de Banach. L'application $P : X \rightarrow Y$ est un polynôme

homogène de degré m , s'il existe un opérateur multilinéaire symétrique $\widehat{T} \in \mathcal{L}_S({}^m X; Y)$ tel que

$$P(x) = \widehat{T}(x, \dots^m, x).$$

On note $\mathcal{P}({}^m X; Y)$, l'espace des polynômes homogènes de degré m de X dans Y muni de la norme

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup\{\|P(x)\|/\|x\| \leq 1\} \\ &= \inf\{C : \|P(x)\| \leq C\|x\|^m \text{ pour tout } x \in X\} \end{aligned}$$

Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit simplement $\mathcal{P}({}^m X)$. Si $P \in \mathcal{P}({}^m X; Y)$, on définit sa linéarisation $\tilde{P} : \widehat{\Theta}_{\pi, s}^m X \rightarrow Y$ par

$$\tilde{P} \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes (m) \otimes x_i \right) = \sum_{i=1}^n P(x_i)$$

où $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in X$.

Exemple 1.4.1. L'opérateur bilinéaire

$$T : R \times R \rightarrow R \quad (x, y) \mapsto xy$$

est symétrique car :

$$\forall (x, y) \in R \times R, \quad T(x, y) = xy = yx = T(y, x)$$

D'où :

$$P(x) = T(x, x) = xx = x^2$$

est un polynôme homogène de degré 2

Proposition 5.

La correspondance $P \leftrightarrow \widehat{T}$ établit un isomorphisme entre $\mathcal{P}({}^m X; Y)$ et $\mathcal{L}_S({}^m X; Y)$.

Proposition 6.

(Formule de polarisation) pour tout $T \in \mathcal{L}_S({}^m X; Y)$

$$T(x^1, \dots, x^m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \epsilon_1 \dots \epsilon_m P_T \left(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x^j \right).$$

où P_T est le polynôme associé à T . De plus, P_T est borné sur la boule unité de X si et seulement si T est borné. Les deux normes vérifient l'inégalité suivante (cf, [Muj86]).

$$\|P_T\| \leq \|T\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P_T\|$$

Opérateurs diagonaux

On introduit les plongements naturels de X dans $\underbrace{X \times \dots \times X}_m$ et $\widehat{\otimes}_\pi^m X$, notés Δ_m et δ_m respectivement. Ils sont définis par

$$\begin{aligned} \Delta_m : X &\rightarrow X \times \dots \times X & \delta_m : X &\rightarrow \widehat{\otimes}_\pi^m X \\ x &\rightarrow (x, \dots, x) & x &\rightarrow x \otimes \dots \otimes x \end{aligned}$$

Il est clair que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \Delta_m \downarrow & \delta_m & \\ \underbrace{X \times \dots \times X}_m & \rightarrow & \widehat{\otimes}_\pi^m X \end{array}$$

i.e, $i_m \circ \Delta_m = \delta_m$, où i_m est l'opérateur multilinéaire canonique, de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ défini par

$$i_m(x_1, \dots, x_m) = x_1 \otimes \dots \otimes x_m$$

Avec cette notation nous avons aussi le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_m & & \\ i_m \downarrow & & \\ X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m & \xrightarrow{TY} & \widehat{T} \end{array}$$

Proposition 7.

Un opérateur $P : X \rightarrow Y$ est un polynôme de degré m , si et seulement si, il existe $T \in \mathcal{L}({}^m X; Y)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta_m} & X \times \dots \times X \\ \delta_m \downarrow & \searrow P & \downarrow T \\ \widehat{\otimes}_{\pi}^m X & \xrightarrow{\tilde{T}} & Y \end{array}$$

Preuve. Soit T_S l'opérateur symétrique de T . Par définition et le diagramme ci-dessus, on a

$$S_T(x, \dots, x) = T(x, \dots, x) = T \circ \Delta_m(x) = P(x)$$

■

Espaces réflexifs et théorèmes de James

Chapitre 2

On s'intéresse dans ce chapitre aux théorèmes de caractérisation de James version multilinéaire et polynomiale. Dans le cas linéaire, James a donné une caractérisation d'un espace réflexif en utilisant leurs formes linéaires, autrement dit, un espace X est réflexif si et seulement si toute forme linéaire de X^* atteint sa norme. Dans notre travail, pour la version multilinéaire on prend les formes multilinéaires qui s'écrivent comme produit des formes linéaires ainsi que le cas de polynôme.

2.1. Espaces réflexifs

Dans cette section, on présente les espaces réflexifs et ses caractérisations

Définition 2.1 (plongement canonique).

Soit X un espace normé sur le corps \mathbb{K} . On définit le plongement canonique noté J_X , de X dans son bidual X^{**} par :

$$J_X(x) : X^* \longrightarrow K$$

avec $J_X(x)(x^*) = x^*(x)$

L'application J_X est toujours isométrique. En effet, soit $x \in X$ alors :

$$\begin{aligned} \|J_X(x)\| &= \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{x^*}} |J_X(x)(x^*)| \\ &= \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{x^*}} |x^*(x)| \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

l'opérateur J_X n'est pas sûrement surjective.

si J_X est surjectif, nous présentons la définition suivante.

Définition 2.2.

Soit X un espace de Banach

L'espace X est réflexif si son plongement canonique J_X est surjectif

Remarque 2.1. Si X est réflexif, On obtient l'identification isométrique entre X et son bidual X^{**} . La réciproque n'est vraie. En effet, un contre exemple a été donné par [Jam51] montrant qu'il existe un espace non réflexif X admet une identification avec son bidual X^{**} . Pour cette raison, il est indispensable d'utiliser dans la définition d'une espace réflexif le plongement.

Exemple 1.

[DJT95]

1. Tout espace de Hilbert est réflexif.
2. Les espaces de Lebesgue $L_p(\Omega, \mu)$ et les petits ℓ_p pour $1 < p < \infty$ sont réflexifs.
3. Les espaces $L_1(\Omega, \mu)$, $L_\infty(\Omega, \mu)$, ℓ_1 , ℓ_∞ et $C(K)$ ne sont pas réflexifs.

Théorème 5.

L'espace X est réflexif si et seulement si X^ est réflexif.*

2.2. Caractérisation topologique

Définition 2.3 (topologie faible).

Soit X un espace de Banach et X^* son dual on définit la topologie faible de X comme étant la topologie la moins fine qui rend toutes les formes linéaires de X^* continues.

La convergence dans cette topologie se caractérise par :

$$x_n \text{ tend faiblement vers } x \Leftrightarrow \forall x^* \in X^* : \langle x^*, x_n \rangle \rightarrow \langle x^*, x \rangle.$$

Proposition 8.

Si X est réflexif, la boule unité de X^ est faiblement compacte .*

Voici maintenant un Théorème très important montre que cette propriété caractérise les espaces réflexifs .

Théorème 6 (KaKuTani).

Un espace de Banach est réflexif si et seulement sa boule d'unité fermée est compacte pour la topologie faible.

Démonstration : pour la preuve de ce Théorème voir [Bre87].

Définition 2.4 (topologie*-faible).

Soit X un espace de Banach, dans l'espace X^* on définit la topologie

*-faible comme étant la topologie la moins fine rendant continues les applications suivantes

$$\begin{aligned} x : X^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x^* &\longrightarrow x^*(x) \end{aligned}$$

La convergence dans cette topologie se caractérise par

$$x_n^* \text{ tend } *- \text{faiblement vers } x^* \Leftrightarrow \forall x \in X = \langle x, x_n^* \rangle \rightarrow \langle x, x^* \rangle$$

Théorème 7 (Banach-Alaoglu).

soit X un espace normé. la boule unité fermée de X^* est compacte pour la topologie $*$ -faible .

Remarque 2.2. Si l'espace de Banach X possède un pré-dual (ie $\exists G$ espace de Banach tel que $X = G^*$, généralement G n'est pas unique), on peut dans ce cas définir les trois topologies dans X , forte, faible et $*$ -faible. On note aussi que la topologie $*$ -faible est moins fine que la topologie faible et par conséquent, la convergence faible implique la convergence $*$ -faible.

Théorème 8.

[Jam63] Un sous ensemble C fermé et convexe d'un espace de Banach X est faiblement compact si et seulement si toute forme linéaire de X^* atteint sa norme sur C .

Théorème 9.

[Bre87] Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si sa boule d'unité fermée B_X est faiblement compacte.

Théorème 10.

Soit X un espace de Banach, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'espace X est réflexif.
- (b) La topologie faible et $*$ -faible . sont coïncides dans X^* et qui est l'unique préduel de X

2.2.1. Théorème linéaire de James

Définition 2.5.

Soit X un espace de Banach, la forme linéaire x^* de X^* atteint sa norme s'il existe x_0 de B_X tel que

$$\|x^*\| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)| = |x^*(x_0)|.$$

Le théorème suivant est une caractérisation de la réflexivité de James.

Théorème 11.

Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si toute forme linéaire de X^ atteint sa norme.*

Démonstration : Soit X un espace réflexif, donc, sa boule B_X est faiblement compacte. Soit $x^* \in X^*$ une forme linéaire, elle est continue pour la topologie faible, alors son *sup* sur la boule B_X est atteint

$$\|x^*\| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)| = |x^*(x_0)|.$$

Réciproquement, On suppose que toute forme linéaire x^* de X^* atteint sa norme. Et tant que $B_X \subset X$ fermée et convexe, on a B_X est faiblement compacte. D'où selon le Théorème 8, X est réflexif. Une forte version de ce théorème confirme que :

Théorème 12.

Un sous ensemble faiblement fermé C d'un espace de Banach X est faiblement compact si et seulement si toute forme linéaire x^ de X^* atteint son maximum sur C , i.e.,*

$$\forall x^* \in X^*; \exists x_0 \in C; |x^*(x_0)| = \sup_{x \in C} |x^*(x)|.$$

2.3. Version non linéaire du théorème de James

Dans cette section, on développe le travail de [AG04]

2.3.1. Version multilinéaire

Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ une forme multilinéaire. On dit que la norme de φ est atteinte s'il existe $x_1^0 \in B_{X_1}, \dots, x_m^0 \in B_{X_m}$

tels que

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &= \sup_{x_j \in B_{X_j}, i \leq j \leq m} |\varphi(x_1, \dots, x_m)| \\ &= |\varphi(x_1^0, \dots, x_m^0)|.\end{aligned}$$

Le théorème suivant généralise celle de James pour plusieurs espaces de Banach.

Théorème 13.

Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) Les espaces X_1, \dots, X_m sont réflexifs.
- (b) Toute forme multilinéaire de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ de la forme $\varphi = x_1^* \otimes \dots \otimes x_m^*$ atteint sa norme.

Démonstration

(a) \Rightarrow (b) : On suppose que X_1, \dots, X_m sont réflexifs. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ de la forme $\varphi = x_1^* \otimes \dots \otimes x_m^*$ où $x_j^* \in X_j^*$ ($1 \leq j \leq m$). Alors, d'après le Théorème de James x_j^* atteint sa norme, i.e., il existe $x_j^0 \in B_{X_j}$ tel que $\|x_j^*\| = |x_j^*(x_j^0)|$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &= \sup_{\substack{x_j \in B_{X_j} \\ 1 \leq j \leq m}} |x_1^*(x_1) \cdots x_m^*(x_m)| = \prod_{j=1}^m \sup_{x_j \in B_{X_j}} |x_j^*(x_j)| \\ &= \prod_{j=1}^m |x_j^*(x_j^0)| = |\varphi(x_1^0, \dots, x_m^0)|.\end{aligned}$$

(b) \Rightarrow (a) : Fixons $1 \leq j \leq m$. Pour tout $1 \leq k \leq m$, ($k \neq j$), on choisit $x_k^* \in B_{X_k^*}$ tels que $\|x_k^*\| = 1$. Soit maintenant $x^* \in X_j$, on pose la forme multilinéaire suivante

$$\varphi = x_1^* \otimes \dots \otimes x^* \otimes \dots \otimes x_m^* \in \mathcal{L}(X_1 \dots X_m).$$

Il est facile de voir que $\|\varphi\| = \|x^*\|$. D'après (b), φ atteint sa norme, i.e., il existe $x_1^0 \in B_{X_1}, \dots, x_m^0 \in B_{X_m}$ tels que

$$\begin{aligned}
 \|\varphi\| &= |\varphi(x_1^0, \dots, x_m^0)| \\
 &= |x_1^*(x_1^0) \dots x_j^*(x_j^0) \dots x_m^*(x_m^0)| \\
 &\leq |x_1^*| \dots |x_j^*(x_j^0)| \dots \|x_m^*\| = |x_j^*(x_j^0)|
 \end{aligned}$$

c'est à dire $\|x^*\| \leq |x_j^*(x_j^0)|$. D'autre part.

$$\|x^*\| = \sup_{x \in B_x} |x^*(x)| \geq |x^*(x_j^0)|$$

D'on $\|x^*\| = |x_j^*(x_j^0)|$. En déduire d'après le théorème de James que X_j est réflexif.

2.3.2. Sur la réflexivité du produit tensoriel projectif

Le Théorème 13, devient faux si on considère dans (b) toutes les formes multilinéaires de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$. Car, ça nous permettra de déduire, par l'identification 2.2, que le produit projectif des espaces réflexifs est réflexif, ce qui n'est pas vrai en général. On peut donc annoncer le corollaire suivant.

Corollaire 1.

Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'espace $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ est réflexif.
- (b) Toute forme multilinéaire de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ atteint sa norme.

Remarque 2.3. Si X n'est pas réflexif, pour tout espace de Banach Y , le produit projectif $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ n'est jamais réflexif. En effet, sinon, on peut construire une forme bilinéaire à partir d'une forme linéaire quelconque de X de la forme $x^* \otimes y^*$ avec $\|y^*\| = 1$. Par un argument similaire au Théorème 12 on conclut que x^* atteint sa norme.

D'une manière analogue, nous voudrions poser la question autrement : supposons que tous les opérateurs multilinéaires de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ atteignent leurs normes.

Lemme 1.

Pour tous espaces de Banach X_1, \dots, X_m, Y , or a l'identification isométrique :

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = (X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m \hat{\otimes}_\pi Y^*)^* \quad (2.3.1)$$

Démonstration Montrons cette identification pour deux espaces, c'est à dire, pour tous espaces de Banach X, Y on a

$$\mathcal{B}(X; Y) = (X \hat{\otimes}_\pi Y^*)^*$$

Soit $u \in \mathcal{B}(X; Y)$. On pose l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_u : X \bar{\otimes}_\pi Y &\rightarrow \mathbb{K} \\ v &\longrightarrow \Phi_u(v) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_u(v) &= \Phi_u \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i^* \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle u(x_i), y_i \rangle. \end{aligned}$$

Montrons que la correspondances. $u \leftrightarrow \Phi_u$ établi un isomorphisme isométrique entre les deux espaces $\mathcal{B}(X; Y)$ et $(X \hat{\otimes}_\pi Y^*)^*$.

Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{B}(X; Y)$ tels que $\Phi_{u_1} = \Phi_{u_2}$. Montrons que $u_1 = u_2$. Soit $x \in X$. Pour tout $y^* \in Y^*$ on a

$$\Phi_{u_1}(x \otimes y^*) = \Phi_{u_2}(x \otimes y^*),$$

ce qui implique que

$$\langle u_1(x), y^* \rangle = \langle u_2(x), y^* \rangle,$$

donc

$$u_1(x) = u_2(x)$$

Finalement on a $u_1 = u_2$.

Soit maintenant $\Psi \in (X \hat{\otimes}_\pi Y^*)^*$. Il existe un opérateur unique u tel que

$$\langle u(x), y^* \rangle = \Psi(x \otimes y^*).$$

En effet, supposons qu'il existe deux opérateurs u, u'

$$\langle u(x), y^* \rangle = \Psi(x \otimes y^*) = \langle u'(x), y^* \rangle$$

donc

$$\langle (u - u^*)(x), y^* \rangle = 0$$

ce qui implique que $(u - u')(x) = 0$, car y^* est linéaire.

Alors, on a $u(x) = u(x')$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle u(x_1 + x_2), y^* \rangle &= \Psi((x_1 + x_2) \otimes y^*) \\ &= \Psi(x_1 \otimes y^*) + \Psi(x_2 \otimes y^*) \\ &= \langle u(x_1), y^* \rangle + \langle u(x_2), y^* \rangle \\ &= \langle u(x_1) + u(x_2), y^* \rangle \end{aligned}$$

D'après l'isométrie surjective

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) &\rightarrow \mathcal{B}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y) \\ T &\rightarrow \Phi(T) = (\tilde{T}) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) &= \mathcal{B}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y) \\ &= (X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m \hat{\otimes}_\pi Y^*)^* \end{aligned}$$

Proposition 9.

Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'espace $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est réflexif :
2. Tout opérateur multilinéaire de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ atteint sa norme.

Démonstration Partons de l'identification suivante

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = (X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m \hat{\otimes}_\pi Y^*)^* \quad (2.3.2)$$

et le corollaire (1), on peut conclure la proposition Avec même argument de la Remarque 2.19, nous avons le corollaire suivante .

Corollaire 2.

Si $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m : Y)$ est réflexif, alors tous les espaces $X_1, \dots, X_m : Y$ sont réflexifs. Contrairement, si l'un de ces espaces est non réflexif alors l'espace $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m : Y)$ est non réflexif.

2.3.3. Version polynômiale

Soit X un espace de Banach. Soit $x^* \in X^*$, on définit le polynôme homogène de degré m suivant

$$P_{x^*}(x) = \underbrace{x^*(x) \dots x^*(x)}_{m \text{ fois}} = x^*(x)^m.$$

Dans ce cas, on a

$$\|P_{x^*}\| = \sup_{x \in B_X} |P_{x^*}(x)| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)^m| = \|x^*\|^m.$$

Le multilinéaire symétrique associé à ce polynôme est donné par

$$T = \underbrace{x^* \otimes \dots \otimes x^*}_{m \text{ fois}}$$

Définition 2.6.

[Gal04] Soit $P \in \mathcal{P}({}^m X)$ un polynôme de X dans \mathbb{K} . Ce polynôme est dit atteint sa norme s'il existe $x^0 \in B_X$ tel que

$$\|P\| = \sup_{x \in B_X} |P(x)| = |P(x^0)|.$$

Voici la première version polynômiale du Théorème de James.

Théorème 14 (Première version).

Soit X un espace de Banach. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'espace X est réflexif.
2. Tout polynôme de $\mathcal{P}({}^m X)$ de la forme P_{x^*} atteint sa norme.

Démonstration

(a) \implies (b). On suppose que X est réflexif. Soit $P \in \mathcal{P}(^m X)$ de la forme $P_{x^*} = \otimes^m x^*$ Ou $x^* \in X^*$ Alors, d'après le Théorème de James x^* atteint sa norme, i.e, $\exists x^0 \in B_X$ tel $\|x^*\| = |x^*(x^0)|$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|P_{x^*}\| &= \sup_{x \in B_X} |x^*(x)^m| \\ &= \sup_{x \in B_X} |x^*(x)|^m = |x^*(x^0)|^m = |P_{x^*}(x^0)|. \end{aligned}$$

Alors P_{x^*} sa norme

(b) \implies (a) : On suppose que P_{x^*} atteint sa norme.

Soit $x^* \in X^*$, on pose

$$P_{x^*}(x) = \underbrace{x^*(x) \dots x^*(x)}_{m \text{ fois}} \in \mathcal{P}(^m X).$$

Nous avons, $\|P_{x^*}\| = \|x^*\|^m$. D'après (b), P_{x^*} atteint sa norme, i.e., il existe $x^0 \in B_X$ tel que

$$\|P_{x^*}\| = |P_{x^*}(x^0)| = \|x^*\|^m,$$

ce qui implique que $\|x^*\| = |x^*(x^0)|$. En déduire d'après le Théorème de James que X est réflexif. Considérons maintenant $x_1^*, \dots, x_m^* \in X^*$, on définit le polynôme (n'est pas homogène) suivant

$$P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x) = x_1^*(x) \dots x_m^*(x)$$

La norme de ce polynôme est

$$\|P_{x_1^*, \dots, x_m^*}\| = \sup_{x \in B_X} |P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x)| = \sup_{x \in B_X} |x_1^*(x) \dots x_m^*(x)| = \prod_{j=1}^m \|x_j^*\|.$$

La deuxième version polynomiale de Théorème de James est donnée comme suit

Théorème 15 (Deuxième version).

Soit X un espace de Banach. Les deux assertions suivantes sont Équivalentes.

1. *L'espace X est réflexif.*
2. *pour tous $x_1^*, \dots, x_m^* \in X^*$ le Polynôme $P_{x_1^*, \dots, x_m^*}$ atteint sa norme*

(1) \Rightarrow (2). on suppose que X est réflexif . Soit $P \in \mathcal{P}({}^m X)$ de la forme $P_{x_1, \dots, x_m}(x) = x_1^*(x) \dots x_m^*(x)$ où $x_1^*, \dots, x_m^* \in X^*$. Alors, d'après le Théorème de James $x_i^* (1 \leq i \leq m)$ atteint sa norme i.e $\exists x^0 \in B_X$ tel que $\|x_i^*\| = |x_i^*(x^0)|$, nous avons

$$\begin{aligned} \|P_{x_1^*, \dots, x_m^*}\| &= \sup_{x \in B_X} |P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x)| \\ &= \sup_{x \in B_X} |x_1^*(x) \dots x_m^*(x)| \\ &= |x_1^*(x^0) \dots x_m^*(x^0)| \\ &= |P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x^0)| \end{aligned}$$

i.e. $P_{x_1^*, \dots, x_m^*}$ atteint sa norme.

(2) \implies (1) On suppose que $P_{x_1^*, \dots, x_m^*}$ atteint sa norme, soient $x_1^*, \dots, x_m^* \in X^*$, on pose $P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x) = x_1^*(x) \dots x_m^*(x)$, cela indique qu'il existe $x^0 \in B_X$ tel que

$$\|P_{x_1^*, \dots, x_m^*}\| = \sup_{x \in B_X} |P_{x_1^*, \dots, x_m^*}(x^0)| = |x_1^*(x^0) \dots x_m^*(x^0)| = \prod_{j=1}^m \|x_j^*\|,$$

ce qui implique que

$$\|x_i^*\| = |x_i^*(x^0)|$$

En déduire, selon le Théorème de James que X est réflexif. ■

Caractérisation et factorisation multili- néaire et polynômiale de ces espaces \mathcal{L}_∞

Chapitre
3

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, on présente une caractérisation multilinéaire, polynômiale, laquelle est une généralisation du cas linéaire de Stegall et Retherford, au début on donne un rappel sur les opérateurs linéaires p -sommants et opérateurs multilinéaires p -dominés multi- p -sommants et intégraux et en second, on énoncera les résultats de caractérisation des espaces \mathcal{L}_∞

3.1.1. Sommabilités et définitions

Tout d'abord, soit X un espace de Banach. Soit $1 \leq p < \infty$ On note $l_p^n(X)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans X muni de la norme

$$\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_p^n(X)} = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

puis savoir la norme de $l_p^{n\omega}(X)$ (l'espace de Banach des suites (x_i) dans X) :

$$\|(x_n)_{1 \leq i < n}\|_{l_p^n} w(X) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

3.2. Opérateur linéaire p-sommant

La définition des opérateurs linéaires p-sommants a été introduite par Grothendieck pour $p = 1$, et généralisée par Pietsch [Pie67].

Définition 3.1.

Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in B(X; Y)$.

On dit que T est p -sommant pour $1 \leq p < \infty$ si,

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists c \geq 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{i=1}^n \subset X \\ \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

On note

$$\Pi_p(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \text{ linéaires } p\text{-sommants}\}$$

et

$$\pi_p(T) = \inf\{C \text{ vérifiant (3.2.1)}\}.$$

Remarque 3.1. Pour tout $T \in \Pi_p(X; Y)$, l'inégalité (3.2.1) équivalente à

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall (x_i)_{i=1}^n \subset X$$

Proposition 10.

1. $\|T\| \leq \pi_p(T)$ pour tout $T \in \Pi_p(X; Y)$.
2. $(\pi_p(X; Y), \pi_p(\cdot))$ est un espace normé.

Théorème 16 (Factorisation de Pietsch).

Soient X, Y deux espaces de Banach, soit $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ et K un ensemble compact, $K = (B_{x^*}, \sigma(x^*, x))$ alors T est p -sommants ($1 \leq p \leq \infty$) si et seulement s'il existe une probabilité μ sur K .

telle que

$$\forall x \in X : \|T(x)\| \leq \pi_p(T) \|x\|_{L_p(B_{x^*}, \mu)}$$

Corollaire 3.

cas ($p = 2$), si $T \in \Pi_2(X; Y)$, alors T se factorise par un Hilbert C-à-dire, il existe un espace de Hilbert H et deux opérateurs linéaires $v_2 \in \Pi_p(X; H)$ et $v_1 \in B(H; Y)$ tels que : $T = v_1 v_2$

Théorème 17 (Théorème d'inclusion).

Si $1 \leq p < q < +\infty$, alors

$$\Pi_p(x; y) \subseteq \Pi_q(x; y).$$

De plus, on a $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$ pour tout $T \in \pi_p(x; y)$.

Théorème 18 (Grothendieck).

Si X un espace \mathcal{L}_1 et Y un espace de Hilbert, alors :

$$B(X; Y) = H_1(X; Y)$$

avec $\pi_1(T) \leq K_G \|T\|$, K_G est La constant inversible de Grothendieck .

Théorème 19 (Le petit théorème de Grothendieck).

Soient X un espace \mathcal{L}_∞ et Y un espace \mathcal{L}_p avec $1 \leq p \leq 2$. Tout opérateur borné de X dans Y est 2 -sommant. i.e.,

$$\mathcal{B}(X; Y) = \Pi_2(X; Y)$$

$$\text{avec } \pi_2(T) \leq k_G \|T\|.$$

3.2.1. Opérateur linéaire intégral

Définition 3.2.

Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{B}(X; Y)$. On dit que T est itégral s'il existe une constante $C > 0$, telle que pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ on a

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i^* \rangle \right| \leq C \sup_{\|x^*\|=1} \left\| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y_i^* \right\|_{Y^*}. \quad (3.2.2)$$

On note $\text{Int}(X; Y)$ l'espace de Banach des opérateurs intégraux de X dans Y muni de la norme

$$\text{Int}(u) = \inf\{C, \text{ vérifiant } 3.2.2\}.$$

Proposition 11.

Tout opérateur intégral est p -sommant pour tout $1 \leq p < \infty$.

Démonstration

Soit $u \in \text{Int}(X; Y)$. Du Théorème (16), nous avons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle u(x_i), y_i^* \rangle \right| &\leq C \sup_{\|x^*\|=1} \sup_{\|y\|=1} \sum_{i=1}^n |x^*(x_i) y_i^*(y)| \\ &\leq C \sup_{\|x^*\|=1} \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i^*(y)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq C \sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|y_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

Par prendre le sup sur toutes les suites $(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ qui vérifient $\left(\sum_{i=1}^n \|y_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq 1$, on trouve

$$\left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

3.2.2. Opérateur multilinéaire p -dominé

Définition 3.3.

Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ un opérateur m -linéaire borné. On dira que T est p -dominé ($1 \leq p < \infty$) s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i^j)_{1 \leq i \leq n} \subset X_j$ ($1 \leq j \leq m$), on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^{\frac{p}{m}} \right)^{\frac{m}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \left\| (x_i^j)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{l_p^{\omega}(X_j)} \quad (3.2.3)$$

On note $\mathcal{L}_d^p(X_1, \dots, X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m -linéaires p -dominés de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y . C'est un quasi-Banach pour la quasi-norme $\delta_p(T)$, définie par

$$\delta_p(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité 3.2.3}\}.$$

Si $p > m$, $\delta_p(T)$ est une norme sur $\mathcal{L}_d^p(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Théorème 20 (Factorisation et domination de Pietsch).

[Mat93] Soient $1 \leq p < \infty$, $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- a) L'opérateur T est p -dominé.
- b) Il existe une constante positive C et une probabilité de Radon μ_j sur $K_j = B_{X_j^*}$ ($1 \leq j \leq m$) telles que

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \prod_{j=1}^m \left(\int_{B_{X_j^*}} |x^j(x^*)|^p d\mu_j(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.2.4)$$

pour tout $x^j \in X_j$. De plus, on a

$$\delta_p(T) = \inf\{C > 0, \text{ vérifiant l'inégalité (3.2.4)}\}$$

3.2.3. Opérateur m -linéaire multi p -sommant

Définition 3.4.

Un opérateur m -linéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ est dit multi p -sommant ($1 \leq p < \infty$), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x_{i_1}^j, \dots, x_{i_m}^j \in X_j$ ($j = 1, \dots, m$)

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n_1, \dots, n_m} \|T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \left\| \left(x_{i_j}^j \right)_{i_j=1}^{n_j} \right\|_{l_p^{n_j}(X_j)} \quad (3.2.5)$$

On note $\Pi_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$, l'espace de Banach des opérateurs m -linéaires multi p -sommants, muni de la norme $\pi_p^m(T) = \inf\{C : C \text{ vérifie (3.2.5)}\}$.

Remarque

Cette classe d'opérateurs ne vérifie pas l'analogie du théorème de Pietsch, mais c'est une bonne généralisation des opérateurs linéaires p -sommants car elle conserve plusieurs propriétés du cas linéaire

Opérateur m -linéaire intégral

Définition 3.5.

Un opérateur m -linéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ est intégral s'il existe une constante positive C telle que pour tout $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$, ($j = 1, \dots, m$), et tout $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$,

on a

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle \right| \leq C \sup_{\|x_j^*\|=1; 1 \leq j \leq m} \left\| \sum_{i=1}^n x_1^*(x_i^1) \dots x_m^*(x_i^m) y_i^* \right\|_{Y^*}. \quad (3.2.6)$$

La classe des opérateurs m -linéaires intégraux de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y , notée $\text{Int}(X_1, \dots, X_m; Y)$, est un espace de Banach muni de la norme

$$\text{Int}(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité (3.2.6)}\}$$

Proposition 12.

Nous avons : $T \in \text{Int}(X_1, \dots, X_m; Y)$ si, et seulement si, $\tilde{T} \in \text{Int}(X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_m; Y)$ et on a

$$\text{Int}(T) = \text{Int}(\tilde{T})$$

3.3. Caractérisation multilinéaire des espaces \mathcal{L}_∞

Commençons cette section par rappeler le résultat de Stegall et Retherford.

Théorème 21.

Soit X un espace de Banach. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- (a) L'espace X est un espace \mathcal{L}_∞ .
- (b) Pour tout espace de Banach Y , on a

$$\Pi_1(X; Y) = \text{Int}(X; Y)$$

Le résultat suivant est une version multilinéaire de ce théorème en utilisant les opérateurs multi 1-sommant .

Théorème 22.

Fixons $m \geq 2$. Soient $X_j (1 \leq j \leq m)$ des espaces de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1) Les espaces X_1, \dots, X_m sont des espaces \mathcal{L}_∞ .
- 2) Pour tout espace de Banach Y , on a

$$\Pi_1^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subseteq \text{Int}(X_1, \dots, X_m; Y)$$

Démonstration

- (1) \implies (2)

Si X_1, \dots, X_m sont des espaces \mathcal{L}_∞ .

On prouve l'inclusion pour $n = 2$, puis on généralise par récurrence.

Soient X_1, X_2 deux espaces \mathcal{L}_∞ et Y un espace de Banach, on choisit un opérateur multi-1-sommant bilinéaire $T : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$

et $T_1 : X_1 \rightarrow \mathcal{L}(X_2; Y)$ son opérateur linéaire associé défini par

$$T_1(x)y = T(x, y)$$

On peut déduire que, si $T \in \pi_1^2(X_1, X_2; Y)$ alors $T_1 \in \pi_1(X_1, \pi_1(X_2; Y))$ d'où $T_1 \in \text{Int}(X_1, \text{Int}(X_2; Y))$, on conclut que T est intégral

- (1) \implies (2)

Soit $1 \leq j \leq m$. Soit $T \in \Pi_1(X_j; Y)$, on va montrer que $T \in \text{Int}(X_j; Y)$.

Pour $1 \leq k \leq m (k \neq j)$ on fixe $x^k \in B_{X_k}$ et $x_k^* \in B_{X_k^*}$ tels que $x_k^*(x^k) = 1$.

Vérifions que l'opérateur multilinéaire

$$T = x_1^* \otimes \dots \otimes u \otimes \dots \otimes x_m^* : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$$

appartient à $\Pi_1^m(X_1, \dots, X_m; Y)$

En effet

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n_1, \dots, n_m} \|T(g_{i_1}^1, \dots, g_{i_m}^m)\| &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n_1, \dots, n_m} |x_1^*(g_{i_1}^1)| \dots \|T(g_{i_j}^j)\| \dots |x_m^*(g_{i_m}^m)| \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1} |x_1^*(g_{i_1}^1)| \dots \sum_{i_j=1}^{n_j} \|T(g_{i_j}^j)\| \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} |x_m^*(g_{i_m}^1)|, \end{aligned}$$

comme T est 1-sommant, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n_1, \dots, n_m} \|T(g_{i_1}^1, \dots, g_{i_m}^m)\| &\leq \sum_{i_1=1}^{n_1} |x_1^*(g_{i_1}^1)| \dots \sup_{\|x_j^*\|_{=1}} \sum_{i_j=1}^{n_j} |x_j^*(g_{i_j}^j)| \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} |x_m^*(g_{i_m}^1)| \\ &\leq \prod_{j=1}^m \left\| \left(g_{i_j}^j \right)_{i_j=1}^{n_j} \right\|_{l_1^{n_j}(X_j)}. \end{aligned}$$

Donc d'après (3.2.5), $T \in \Pi_1^m(X_1, \dots, X_m; Y)$, et selon (2), T est intégral. D'après la Proposition (4), $\tilde{T} \in \text{Int}(X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_m; Y)$. Posons maintenant $v : X_j \rightarrow X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \dots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_m$, défini par

$$v = x^1 \otimes \dots \otimes id_{X_j} \otimes \dots \otimes x^m$$

Vérifions que, $T = \tilde{T} \circ v$. En effet, soit $x \in X_j$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{T} \circ v(x) &= \tilde{T}(x^1 \otimes \dots \otimes id_{X_j}(x) \otimes \dots \otimes x^m) \\ &= x_1^*(x^1) \dots T(x) \dots x_m^*(x^m) = T(x) \end{aligned}$$

Par la propriété d'idéal des opérateurs intégraux, on trouve que T est intégral et par conséquent X_j est un espace \mathcal{L}_∞ .

Dans le deuxième résultat de caractérisation on utilise les opérateurs multilinéaires 1-dominés.

Théorème 23.

Fixons $m \geq 2$. Soient $X_j (1 \leq j \leq m)$ des espaces de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Les espaces X_1, \dots, X_m sont des espaces \mathcal{L}_∞ .
2. Pour tout espace de Banach Y , on a

$$\mathcal{L}_d^1(X_1, \dots, X_m; Y) \subseteq \text{Int}(X_1, \dots, X_m; Y)$$

Démonstration

(1) \implies (2) Les mêmes techniques que celles du Theorème (24).

(2) \implies (1) Soient $1 \leq j \leq m$, $u \in \Pi_1(X_j; Y)$, on va montrer que $u \in \text{Int}(X_j; Y)$. Pour $1 \leq k \leq m (k \neq j)$, on fixe $x^k \in B_{X_k}$ et $x_k^* \in B_{X_k^*}$ tels que $x_k^*(x^k) = 1$. Vérifions que l'opérateur multilinéaire

$$T = x_1^* \otimes \dots \otimes u \otimes \dots \otimes x_m^* : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$$

appartient à $\mathcal{L}_d^1(X_1, \dots, X_m; Y)$. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|T(g_i^1, \dots, g_i^m)\|_{\frac{1}{m}} &= \sum_{i=1}^n |x_1^*(g_i^1)|_{\frac{1}{m}} \dots \|u(g_i^j)\|_{\frac{1}{m}} \dots |x_m^*(g_i^m)|_{\frac{1}{m}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_1^*(g_i^1)| \right)^{\frac{1}{m}} \dots \left(\sum_{i=1}^n \|u(g_i^j)\| \right)^{\frac{1}{m}} \dots \left(\sum_{i=1}^n |x_m^*(g_i^m)| \right)^{\frac{1}{m}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_1^*(g_i^1)| \dots \sup_{\|x_j^*\|=1} \sum_{i_j=1}^{n_j} |x_j^*(g_{i_j}^j)| \dots \sum_{i=1}^n |x_m^*(g_i^m)| \right)^{\frac{1}{m}} \\ &\leq \prod_{j=1}^m \left\| (g_j^j)_{j=1}^n \right\|_{l_1^{n\omega}(X_j)}^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

alors, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(g_i^1, \dots, g_i^m)\|_{\frac{1}{m}} \right)^m \leq \prod_{j=1}^m \left\| (g_j^j)_{j=1}^n \right\|_{l_1^{n\omega}(X_j)}^{\frac{1}{m}}.$$

Donc d'après (3.2.5), $T \in \Pi_1^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ et selon le Théorème (24), $T \in \text{Int}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Avec même argument du Théorème (24), on conclut que T est intégral et par conséquent X_j est un espace \mathcal{L}_∞ .

3.4. Caractérisation des espaces \mathcal{L}_∞ en termes de polynômes

Cette partie mentionnée dans [CD'AG02] vise est à fournir une version polynômiale de la caractérisation de l'espace \mathcal{L}_∞ . Avant cela, nous faisons un bref rappel sur les polynômes intégraux et les polynômes p -dominés.

Définition 3.6.

Soit $1 \leq p < \infty$. Un polynôme homogène de degré m , $P \in \mathcal{P}^m(X, Y)$ est intégral s'il existe une constante positive C telle que pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$, et tout $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle P(x_i), y_i^* \rangle \right| \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\| \sum_{i=1}^n [x^*(x_i)]^m y_i^* \right\|_{Y^*} \quad (3.4.1)$$

La classe des polynômes intègres de X dans Y , notée $\mathcal{P}_{\text{int}}({}^m X; Y)$, est un espace de Banach muni de la norme

$$\text{int}(P) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité 3.4.1}\}.$$

Proposition 13.

Le polynôme P est dans $\mathcal{P}_{\text{int}}({}^m X; Y)$ si, et seulement si, son opérateur linéaire symétrique associé $\hat{T} : X \times \dots \times X \rightarrow Y$ est aussi intégral.

Définition 3.7.

Soit $1 \leq p < \infty$. Un polynôme homogène de degré m , $P \in \mathcal{P}({}^m X, Y)$ est p -dominé s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in X$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \|P(x_i)\|_{\frac{p}{m}} \right)^{\frac{m}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{m}{p}} \quad (3.4.2)$$

On note $\mathcal{P}_d^p({}^m X, Y)$ l'espace des polyômes p -dominés $P : X \rightarrow Y$ et $\delta_p(P)$ la plus petite constante C positive vérifie l'inégalité (3.4.2). Pour $p \geq m$, $\delta_p(P)$ est une norme sur $\mathcal{P}_d^p({}^m X, Y)$, mais pour $p < m$ elle est seulement quasi-norme.

Remarque 3.2. Soit $P \in \mathcal{P}({}^m X, Y)$. Sur l'espace $\hat{\otimes}_{\pi, s}^m X$, les opérateurs \tilde{P} et $\tilde{\hat{T}}$ (linéarisation de \hat{T}) sont les mêmes, i.e,

$$\tilde{P} = \tilde{\hat{T}} \text{ sur } \hat{\otimes}_{\pi, s}^m X$$

En effet, soit $x \in X$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x \otimes \dots \otimes x) &= P(x) \\ &= \hat{T}(x, \dots, x) \\ &= \tilde{\hat{T}}(x \otimes \dots \otimes x) \end{aligned}$$

Par linéarité on trouve ce qu'on veut.

Remarque 3.3. Par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & Y \\ \delta_m \downarrow & & \uparrow \tilde{P}_\varepsilon \\ \hat{\otimes}_{\pi, s}^m X & \xrightarrow{i} & \hat{\otimes}_{\varepsilon, s}^m X \end{array}$$

où i est l'inclusion naturelle. On a

$$\tilde{P} = \tilde{P}_\varepsilon \circ i \quad (3.4.3)$$

c'est à dire, si \tilde{P}_ε est intégral, alors il en est de même pour \tilde{P} .

Théorème 24.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$, X, Y des espaces de Banach tels que $\mathcal{P}_d^1(mX, Y) \subseteq \mathcal{P}_{int}(mX, Y)$.

Alors $\Pi_1(X, Y) = \text{Int}(X, Y)$.

Démonstration

On suppose que $\mathcal{P}_d^1(mX, Y) \subseteq \mathcal{P}_{int}(mX, Y)$. Dans un premier lieu, on sait que $\text{int}(X, Y) \subset \Pi_1(X, Y)$ est toujours vérifiée. Il suffit donc de montrer l'inclusion réciproque.

Fixons $x_0 \in B_X$ et $x_0^* \in B_X^*$ tels que $x_0^*(x_0) = 1$. On définit l'opérateur

$$\pi_j : \widehat{\otimes}_{\pi, s}^{j+1} X \rightarrow \widehat{\otimes}_{\pi, s}^j X \quad (1 \leq j \leq m-1)$$

par

$$\pi_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes \overset{(j+1)}{\dots} \otimes x_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_0^*(x_i) x_i \otimes \overset{(j)}{\dots} \otimes x_i$$

$x_i (1 \leq i \leq n)$, il

pour tout $\lambda_j \in \mathbb{K}$, $x_i (1 \leq i \leq n)$, il existe des opérateurs

$$k_j : \widehat{\otimes}_\pi^j X \rightarrow \widehat{\otimes}_\pi^{j+1} X \quad (1 \leq j \leq m-1)$$

définis en terme de x_0^* et x_0 tels que $\pi_j \circ k_j$ est l'identité sur $\widehat{\otimes}_\pi^j X$.

Soit maintenant $T \in \Pi_1(X, Y)$.

Le polynôme $P := T \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-1} \circ \delta_m : X \rightarrow Y$ est 1-dominé, avec $\delta_m : X \rightarrow \widehat{\otimes}_\pi^j X$ est le polynôme canonique défini par

$$\delta_m(x) = x \otimes \overset{(m)}{\dots} \otimes x$$

On va montrer que P est 1-dominé par récurrence sur m . Pour $m = 1$, le cas est trivial. On suppose que

$$T \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-2} \circ \delta_{m-1} : X \rightarrow Y$$

est 1-dominé. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|P(x_i)\|_{\frac{1}{m}} &= \sum_{i=1}^n \|u \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-1} \circ \delta_m(x_i)\|_{\frac{1}{m}} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| T \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-1} \left(x_i \otimes \dots \otimes x_i \right) \right\|_{\frac{1}{m}} \\ &= \sum_{i=1}^n |x_0^*(x_i)|_{\frac{1}{m}} \left\| T \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-2} \left(x_i \otimes \dots \otimes x_i \right) \right\|_{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \|P(x_i)\|_{\frac{1}{m}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_0^*(x_i)| \right)^{\frac{1}{m}} \sum_{i=1}^n \left\| T \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-2} \left(x_i \otimes \dots \otimes x_i \right) \right\|_{\frac{1}{m-1}}^{\frac{m-1}{m}} \end{aligned}$$

On obtient par l'hypothèse et comme $x_0^* \in B_{X^*}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|P(x_i)\|_{\frac{1}{m}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_0^*(x_i)| \right)^{\frac{1}{m}} \left(C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^1 \right)^{\frac{m-1}{1}} \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= C^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^n |x_0^*(x_i)| \right)^{\frac{1}{m}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^1 \right)^{\frac{m-1}{m}} \\ &\leq C^{\frac{1}{m}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|. \end{aligned}$$

Par conséquent, P est 1-dominé et d'après la supposition P est integral. Alors, l'opérateur multilinéaire \hat{T} est intgral, par conséquent (d'après (Proposition 2.7)) $\tilde{\hat{T}}$ est integral. D'autre part, comme $\tilde{P} = \tilde{\hat{T}}$ sur $\hat{\otimes}_{\pi,s}^m X$, \tilde{P} est intégral sur $\hat{\otimes}_{\pi,s}^m X$. La décomposition $P = \tilde{P} \circ \delta_m$ donne que $\tilde{P} = T \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-1}$ qui est intégral et par une conséquence rapide on a

$$T = T \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-1} \circ k_{j-1} \circ \dots \circ k_1 : X \rightarrow Y$$

qui est intégral (par la propriété d'idéal)

Théorème 25.

Soit X un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. X est un espace \mathcal{L}_∞ .
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, et pour tout espace de Banach Y , on a

$$\mathcal{P}_d^1({}^m X, Y) = \mathcal{P}_{int}({}^m X, Y)$$

3. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et pour tout espace de Banach Y , on a

$$\mathcal{P}_d^1({}^m X, Y) = \mathcal{P}_{int}({}^m X, Y)$$

Démonstration.

- (1) \Rightarrow (2) Immédiate
- (2) \Rightarrow (3) Facile.
- (3) \Rightarrow (1) Il suffit d'appeler les Théorèmes (23) et (26).

■

Résumé

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié l'extension non linéaire des théorèmes de caractérisation des espaces de Banach. Nous avons également traité les espaces réflexifs, le théorème de James et ses versions linéaires et multilinéaires de ces espaces, en donnant à la fin la caractérisation et la factorisation multilinéaire et polynomiale de ces espaces \mathcal{L}_∞ .

Mots clés: Opérateur linéaire, opérateur multilinéaire, espace réflexif, produit tensoriel, théorème de James, polynôme homogène ...

Abstract

In this work, we have studied the nonlinear extension of the theorems of characterization of Banach spaces. We also treated the reflexive spaces, James theorem and its linear and multilinear versions of these spaces, giving at the end the characterization and factorization multilinear and polynomial of these spaces \mathcal{L}_∞ .

Key words: Linear operator, multilinear operator, reflexive space, tensor product, James theorem, homogeneous polynomial...

Bibliographie

- [AG04] M.D. Acosta, J.B. Guerrero, and G.M. Ruiz, *James type results for polynomials and symmetric multilinear forms*, Arc. Mat. 42 (2004), 1-11.
- [Bla97] F. Blasco, *Complementation in spaces of symmetric tensor products and polynomials*, Studia Math. 123 (1997), 165-173.
- [Bou81] J. Bourgain, *New Classes of \mathcal{L}_p -spaces*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1981).
- [Bre87] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, MASSON, Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo (1987).
- [CD'AG02] R. Cilia, M.D'Anna, and J. Gutiérrez, *Polynomial characterization of \mathcal{L}_∞ -spaces*, J. Math. Anal. Appl. 275 (2002), 900-912.
- [DJT95] J.Diestel, H.Jarchow, A.Tonge. *Absolutely summing operators*. Cambridge University Press, (1995).
- [Gal04] M.R. Galán, *Polynomials, Symmetric Multilinear Forms and Weak Compactness*, Positivity 8 (2004), 297-304.
- [Jam63] R.C. James(1), *American Mathematical Society*, Vol. 11 (1963). Weakly Compact Sets.
- [Jam51] R.C. James. *A non reflexive Banach spaces isometric with its second conjugate space*, *proc ; Nat, acad, sc USA*, 37(1951)p.174-177.
- [LT77] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces*, Berlin Heidelberg New York (1977).

- [Mat93] M.C. Matos, *On multilinear mappings of nuclear type*, Rev. Mat. Complut. 6 (1993), 61-81.
- [MB2011] M.BELAALA. *Extention non linéaire des théorèmes de caractérisation des espaces de Banach*, univ .M'sila. 16-29,32-41 (Magister).
- [Muj86] J.Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces.Math.Studies*, Vol. 120,North Holland,Amsterdam,(1986).
- [Pie67] A.Pietsch. *Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math.28,(1967).333-353.