REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

Problème de la digue associé à un lois de darcy non linéaire

Présentée par :

Toumiat ahmed

Soutenue le :18/06/2023

Devant le jury composé de :

MOKHTARI Abdelhak	MCA,	Université de M'sila	**Président**.
SAADI Abderachid	MCA,	Université de M'sila	**Encadreur**.
KHADRAOUI Abdelmalek	MAA,	Université de M'sila	**Examinateur**.
YAHIAOUI Mohamed Al Adel	MAA,	Université de Blida	**Examinateur**.

Année universitaire : 2022/2023

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement, à **Allah** le tout puissant de m'avoir donné courage et patience durant toutes ces années d'études.

Je suis heureux d'exprimer au Dr. **Saadi Abdelrachid**, ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordé. Je le remercie pour sa disponibilité et pour ses conseils très éclairés.

Aux membres de jury, nous vous remercions de l'honneur que vous nous avez fait en acceptant de siéger dans le jury de notre mémoire.

Je tiens à remercier mes amis Soufiane ziani, Mouhamed bounuiga, et Youcef messad , qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragement ont été d'une grande aide.

Enfin, je ne saurais jamais suffisant remercie mon père et ma mère, que je porte toujours avec moi dans ma pensée. Sans leurs confiances immenses en moi, sans leurs aides, je n'aurais pas pu aller au bout de mes projets.
toute personne ayant participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Notations

Ω : ouvert de $\mathbb{R}$.

$C(\Omega, \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont indéfiniment dérivables.

$L^p(\Omega), L^\infty(\Omega)$: espaces de Lebesgue sur Ω.

$W^{1,p}(\Omega)$: espaces de Sobolev de base $L^p(\Omega)$.

$H^1(\Omega)$: espaces de Sobolev de base $L^2(\Omega)$.

Introduction

Herni Philibert Gaspard Darcy, né en 1803 à Dijon, était un ingénieur général des ponts et chaussées connu pour avoir établi la loi de Darcy et l'équation de Darcy-Weisbach.

Les équations de Navier-Stokes sont pratiquement inapplicables dans les milieux poreux en raison du manque de connaissance des phénomènes microscopiques qui s'y produisent. Cependant, il est possible de les modifier en éliminant certains termes négligeables pour obtenir une loi plus simple, connue sous le nom de loi de Darcy.

On s'intéresse dans notre travail à traiter le problème en supposant que la vitesse du fluide v est liée à sa pression p à travers la loi dite de darcy

$$v = -a\nabla(p(x) + x_n), x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$$

.

On considère un domaine borné Ω avec une frontiére $\partial\Omega = S$, continue localement lipschitzienne. (Ω) représente la partie de milieu poreux) et $S_1, S_2, S_3 = (S_{3,i})_{1\leq i\leq N}$ des sous ensembles de S.

On a le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} \text{Trouver} \quad (u,g) \in W^{1,q}(\Omega) \times L^\infty(\Omega), 1 < q \quad telque \\ u \geq x_n, \quad 0 \leq g \leq 1, \quad g \times (u - x_n) = 0 \quad a.e \quad in \quad \Omega, \\ u = x_n \quad on \quad S_2 \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{q-2}\,\nabla u.\nabla\xi - g\xi_{x_n}\,dx \leq \int_{S_3} \beta(x, \psi - u).\xi d\sigma(x) \\ \qquad \forall \xi \in W^{1,q}(\Omega), \quad \xi \geq 0 \quad on \quad S_2. \end{cases}$$

Pour traiter ce problème, on va suivre la méthodologie suivante :

- Dans le premier chapitre,rappels et définitions.

- Dans le second chapitre, déclaration du problème, et démontrons l'existence de la solution de problème (P).

-Dans le troisième chapitre, nous donnons quelques résultats préliminaires concernant la solution du problème faible. Enfin, on donne une conclusion et quelques références.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente quelques notions fondamentales, espaces fonctionnels et des inégalités qui sera utilisées dans ce mémoire.
Dans la suite, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.1 Espaces de Banach

Définition 1.1 *Tout couple* $(E, \|.\|)$ *ou* E *est une* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel , s'appele un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé.*
$(E, \|.\|)$ *est un Banach si toute suite de couchy de* E *est convergante(dans* E*).*

Définition 1.2 *Soit* J *l'injection canonique de* E *dans*E''*. on dit que* E *est réflexif si* $J(E) = E''$.

Définition 1.3 *On dit que* $(E, \|.\|)$ *est séparable s'il existe un soue-ensemble* $D \subset E$ *dénombrable et dense dans* $(E, \|.\|)$.

Théorème 1.1 *(Point fixe de Schouder) Soient* $(E, \|.\|)$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé, et* C *un convexe fermé non vide de* E*. Si* T *est un application continue de* C *dans* C *telle que* $T(C)$ *soit relativement compact, alors* T *admet un point fixe.*

Théorème 1.2 *(Point fixe Brouwer) Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé de dimonsion finie. Toute application continue d'une boule fermé de* E *dans elle-méme admet un point fixe.*

Définition 1.4 *Soit* V *un espace de Banach réflexif et séparable,* A *une application de* V *dans* V' *(en génerale non linéaire). On dit que*

1. *A est borné : si* $(A(u), u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in H$
2. *A est monotone si*

$$\forall u, v \in V, \langle A(u), u - v \rangle \geq 0$$

3. *A est strictement monotone si de plus* $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle > 0 \forall u, v \in V$, *avec* $u \neq v$.
4. *A est hémicontiue si pour tous* $u, v \in V$,*l'application* $t \longrightarrow \langle A(u+tv), v\rangle$ *est continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
5. *Coersif : si* $\lim\limits_{\|v\| \to +\infty} \dfrac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} = +\infty$.

Théorème 1.3 *Soit* V *un espace de Banach réflexive et séparable et* $A : V \to V'$ *un opérateur borné, monotone, hemi-continu, coercif. Alors, pour tout* $f \in V'$, *il existe* $u \in V$ *tel que* $Au = f$.

Définition 1.5 *Soit* $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction numérique. L'épigraphe de* φ *est l'ensemble*

$$epi\varphi = [x, y] \in E \times \mathbb{R}; \varphi \leq \lambda.$$

Définition 1.6 *une fonction* $\varphi : E \longmapsto]-\infty, +\infty[$ *est dite convexe si*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \forall x, y \in E, \forall t \in]0, 1[$$

Proposition 1.1 *on a des propriétés élémentaire des fonctions convexes :*

1. *Si* φ *est une fonction convexe, alors epi* φ *est un ensemble convexe dans* $E \times \mathbb{R}$, *et réciproquement*
2. *Si* φ *est une fonction convexe, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *l'ensemble* $[\varphi \leq \lambda]$ *est convexe,mais la réciproque n'est pas vraie.*
3. *Si* φ_1 *et* φ_2 *sont des fonction convexe, alors* $\varphi_1 + \varphi_2$ *est convexe.*
4. *Si* $(\varphi_i)_{i \in I}$ *est des famille des fonctions convexe alors l'enveloppe supérieure des* (φ_i) *est convexe.*

Définition 1.7 *Soit* E *une espace de Banach,* E'*son dual. La topologie faible* $\sigma(E, E')$ *sur*E *est la topologie la moins fine sur* E *telle que toute les applications,*

$$\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longrightarrow \varphi_f(x) = < f, x >$$

avec $f \in E'$,*soient continues.*

Définition 1.8 *La topologie faible* désignée aussi par* $\sigma(E', E)$ *est la topologie la moins fine sur* E' *telle que toute les applications,*

$$\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \longrightarrow \varphi_x(f) = < f, x >$$

vec $x \in E$,*soient continues.*

Théorème 1.4 *Soit $C \subset E$ convexe. Alors C est faiblement fermé pour $\sigma(E, E')$ si et seulement s'il est fortement fermé.*

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.9 *Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

1. *Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive c'est-à-dire $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$.*
2. *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé aspace pré-hilpertien.*
3. *Un espace pré-hilpertien et complet est un espace de Hilbert.*
4. *On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe une constante C telle que*
$$a(u, v) \leq C\,|u|\,|v|\,, \forall u, v \in H.$$
5. *On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est elliptique (coercive) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*
$$a(u, u) \geq \alpha\,|u|^2\,, \forall u \in H.$$

Théorème 1.5 *(Stampacchia) Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et elliptique,*
K un convexe, fermé et non vide de H.
Etant donné $\varphi \in H'$ Il existe $u \in K$ unique tel que

$$a(u, v - u) \geq (\varphi, v - u), \forall v \in H$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u, v \in K : \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, u \rangle = min \left\{ \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, u \rangle \right\}.$$

Théorème 1.6 *(Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert,muni d'un produit scalaire $(\ ,\ )$,$F \in H'$,et $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue, elliptique dans H. Alors,il existe usolution unique $\in K$ $!u \in k$ de*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle\,, \forall v \in H$$

1.3 Espaces $L^P(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.10 $L^1(\Omega)$ *est L'ensemble des fonctions intégrables sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*tels que* $\int_\Omega |f(x)| < \infty$.
on note

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|.$$

Définition 1.11 *Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq P \leq \infty$, *on pose*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \quad msurableet \quad |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

$$\|f\|_L^p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} . L^p(\Omega) \quad \text{muni de la norme} \|.\|_{L^p} \text{ est un espace de Banach.}$$

Définition 1.12 $L^\infty(\Omega)$ *est ensemble des fonctions sur* $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *; f mesurable, et il existe une constante C telle que* $|f(x)| < C$ *p.p sur* Ω
on note :
$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = supess_{x\in\Omega} |f(x)|$.

Théorème 1.7 *(Théoréme de convergence dominée de Lebesgue) : Soit* $(X; \sigma)$ *un espace mésuré, et soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'applications mesurable* $f_n : X \longrightarrow \bar{R}$*,on suppose que*
1. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge presque partout vers une fonction mesurable* $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$
2. Il existe une fonction intégrable $g : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ *positive,telle que l'on ait la condition de domination* $|f_n| < g \quad p.p. \quad \forall n \geq 1$.
Alors, les fonctions f_n *et* f *sont intégrables et* $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$. *En particulier,on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\sigma = \int \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\sigma = \int f d\sigma$$

Inégalité de Hölder :

Soient $f \in L^P(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p, q \leq +\infty$, on pose $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors :
$f, g \in L^r$,et

$$\|f.g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|q\|_q\,,$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz :

Soit $(E, (,))$ un espace pré-hilbertien réel.Alors,pour tout $u, v \in E$

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.13 *l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est un sous-espace de $L^p(\Omega)$ définie par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \middle| \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\ \forall i = 1, ..., n \right\}$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ *sont au sens de distribution.*
On définie $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$ *la fermeture de* $D(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$, *et on peut démontrer que*

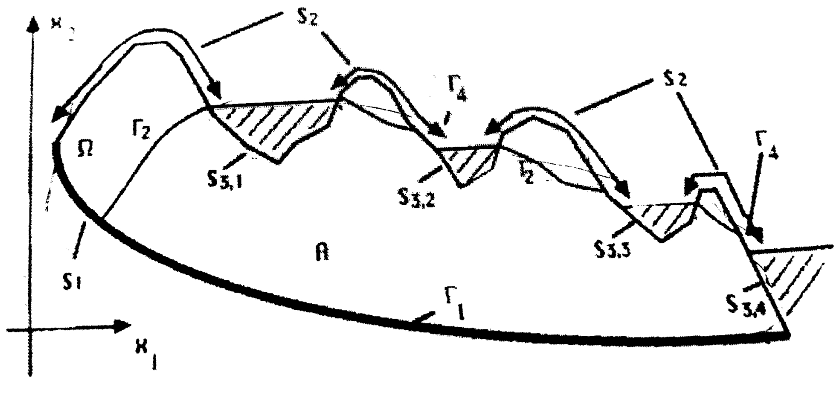
$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \,|u = 0 \ sur\ \partial\Omega \right\}.$$

Inégalité de Poincaré : Soit p tel que $1 \leq p \leq \infty$ et un ouvert des largeur finie (borné dans une direction). Alors il existe une constante C, dépendant uniquement de Ω et p, tel que, pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

1.4 Position du Probléme

Soit Ω un domaine borné, localement lipschitzien de R^2(dans la nature, Ω représente une section d'une digue),la frontiére $\partial\Omega = S$ continue ,subdivisée oux sous-ensembles suivants(voir la digue) :



S_1 :la partie imperméable de la digue.

S_2 : la partie de la frontiéres $\partial\Omega = S$ de Ω on contact avec l'aire.

S_3 : la partie du digue sous l'eau (sous réservoir).

Supposant que S_1 est un sous-ensemble fermé de $\partial\Omega$, et que S_3 est ouvert dans le complément

de S_1 dans S.
De plus, dans le cas de plusieurs réservoirs, nous noterons également $S_{3,1}$,$S_{3,2}$....,$S_{3,n}$ les différentes composantes connectées deS_3(dans la figure) $S_3 = S_{3,1} \cup S_{3,2} \cup S_{3,3} \cup S_{3,4}$...
Supposantes aussi que le domaine Ω est verticalement convexe ,c'est-à-dire :

$$\forall (x,y),(x,Y^{'}) \in \Omega, \text{le segment}\{x\} * [y,y^{'}] \subset \Omega.$$

Plus de sa, on suppose que :
S_1 est un sous-ensemble fermé convexe dans S, qui entoures sous Ω.
$S_2 \cup S_3$ entoure Ω en haut pour plus précise, si on note par π_x la projection deR^2 sur l'axe x pour $x \in \pi_x$,

$$S^{+}(x) = sup\{y(x,y) \in \Omega\}, S^{-}(x) = inf\{Y(x,y) \in \Omega\},$$

Donc

$$\Omega = \{(x,y)x \in \pi_x(\Omega), S^{-}(x) < y < S^{+}(x)\}$$

Maintenant, S_1 est un morceau connexe de S qui contient tous les points (x,y) de S, telle que $y \geq S^{+}(x,y)$.
le problème fondamental est maintenant de trouver la pression $p = p(x,y)$ du fluide dans Ω, et la partie de Ω,qui est mouillée- c'est-à-dire l'ensemble humide A.

1.5 Formulation forte

La frontiére ∂A est divisée a quatre parties :une partie imperméable Γ_1, la frontiére libre Γ_2, une partie recouverte par la fluide Γ_3,et enfin Γ_4 est l'humide partie de la digue qui touche l'air ,ou le fluide s'exterieur deΩ mais n'y reste pas en quantité significative pour modifier la pression. La vitesse v de fluide dans$A$ est donnée ,selon la loi de Darcy,par :

$$|v|^{m-1} v = -a\nabla(p + x_n), \tag{1.1}$$

m, a nombres positifs ,$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ désigne des points dans R^n paramétré
$u = p + x_n, q = 1/m + 1$,(1.1) devient

$$\mid v \mid^{m-1} v = -a\nabla u$$

$$\Rightarrow v^m = -a\nabla u$$

$$\Rightarrow v = -a^{1/m}\nabla u^{1/m}$$

$$\Rightarrow v = -a^{1/m}\nabla u^{q-1}$$

$$\Rightarrow v = -a^{1/m} \mid \nabla u \mid^{q-2} \nabla u. \tag{1.2}$$

Notons que nous recherchons un $p \geq 0$ ou de manière équivalente $u \geq x_n$,si le fluide est incompressibles,nous avons :

$div(v) = 0$ dans A

mais

$$div(|\nabla u|^{q-2}\nabla u) = 0 \quad \text{dans} \quad A, \tag{1.3}$$

alors, on $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ il n'y a pas de flux de fluide à travers cette partie de la frontiére, donc

$v.\nu = 0 \quad$ sur $\quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ou par (1.2)

$$|\nabla u|^{q-2}\frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \tag{1.4}$$

Si l'on suppose la pression extérieure normalisée à 0,i.e.$p = 0$ in $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$,alors

$$u = x_n \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \tag{1.5}$$

De plus, sur Γ_4 le fluide est libre de sortir du milieu poreux et on a donc

$v.\nu \geq 0 \quad$ on $\quad \Gamma_4$

ce qui conduit,toujours par (1.2) à

$$|\nabla u|^{q-2}\frac{\partial u}{\partial v} \leq 0 \quad on \quad \Gamma_4 \tag{1.6}$$

Soit φ une fonction continue de Lipschitz non négative représentant la pression sur $S_2 \cup S_3$. on note φ une fonction continue de Lipschitz définie sur tout le domaine Ω qui s'accorde avec φ on $S_2 \cup S_3$;

généralement φ est donné par :

$$\varphi(x', x_n) = \begin{cases} 0 & si(x^{'}, x_n) \in S_2, \\ h_i - x_n & if(x^{'}, x_n) \in S_{3,i}, i = 1, ...N, \end{cases}$$

ou h_i désigne le niveau du réservoir recouvrant $S_{3,i}$.Posons $\psi = \varphi + x_n$, on voudrait considérer un modèle ou le flux d'eau entrant dans notre milieu poreux est lié à la différence de pression aà l'interieur et à l'exterieur de ce milieu par une formula du type $-v.v = \beta(x, \varphi - p)$ on S_3. En supposant que $a = 1$, cela se lit aussi

$$|\nabla u|^{q-2} \frac{\partial u}{\partial v} = \beta(x, \psi - u). \quad \text{on} \quad S_3 \tag{1.7}$$

une telle condition aux limites est appelée 'conditions de fuite' (voir[5],[9],[16]). Supposerons que β est une fonction définie sur $S_3 \times \mathbb{R}$ avec des valeurs dans R telles que :

$$x \mapsto \beta(x, 0) \in L^{q'}(S_3) = L^{q'}(S_3, d\sigma(x)) \tag{1.8}$$

$$\text{ou} q' \text{est le conjugué de} q, i.e \quad (1/q) + (1/q') = 1,$$

$$x \mapsto \beta(x, u) \quad \text{est mesurable} \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

$\exists \quad c, \alpha > 0, \alpha \leq (q-1) \wedge 1 =min(q-1, 1)$ tel que

$$|\beta(x, u_1) - \beta(x, u_2)| \leq c\,|(u_1 - u_2)|^{\alpha}\, a, ex \in S_3, \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

$$u \mapsto \beta(x, u) \quad \text{est non décroissante pour a,e} \quad x \in S_3, \tag{1.11}$$

$$\beta(x, u) \geq 0 \quad a, e.x \in S_3 \quad \forall u \geq 0 \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{q-2} \nabla u) = 0 & \text{dans } A, \\ \|\nabla u\|^{q-2} \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ u = x_n & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \\ \|\nabla u)\|^{q-2} \dfrac{\partial u}{\partial v} \geqslant 0 & \text{on } \Gamma_4, \\ \|\nabla u\|^{q-2} \dfrac{\partial u}{\partial v} \geqslant 0 \end{cases} \tag{F}$$

Donc, le problème que nous voudrions aborder est de trouver (u, A) tel que (1.3)-(1.7) tienne dans ce but,nous transformons d'abord nos équation en une forme faible.

1.6 Formulation faible

Le but est de trouver le couple (P, A) équivaut à trouver (P, χ_{A^C}), ou χ_{A^C} désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A^c le complémentaire de A dans Ω.

Suivante la référence [2], [3], [6], [8] et [9] pour toute fonction lisse ,nous avons

$$\int_A |\, \nabla u\,|^{q-2}\, \nabla u . \nabla \xi dx = -\int_A \operatorname{div}(|\, \nabla u\,|^{q-2}\, \nabla u).\xi dx + \int_{\partial A} |\, \nabla u\,|^{q-2}\, \frac{\partial u}{\partial v}.\xi d\sigma(x).$$

Donc, si on suppose que u est une fonction lisse vérifiant (1.1)-(1.7), on obtient

$$\int_A \mid \nabla u \mid^{q-2} \nabla u.\nabla \xi dx = \int_{S_3} \beta(x, \psi - u).\xi d\sigma(x). + \int_{\Gamma_4} \mid \nabla u \mid^{q-2} \frac{\partial u}{\partial v}.\xi d\sigma(x).$$

Si on suppos que

$$\xi \geq 0 \quad on \quad \Gamma_4 \tag{1.13}$$

alors

$$\int_{\Gamma_4} \mid \nabla u \mid^{q-2} \frac{\partial u}{\partial v}.\xi d\sigma(x) \leq 0.$$

Alors, on obtient d'aprés (1.6)

$$\int_A \mid \nabla u \mid^{q-2} \nabla u.\nabla \xi dx \leq \int_{S_3} \beta(x, \psi - u).\xi d\sigma(x). \tag{1.14}$$

Maintenant, nous étendons u par x_n en extérieur de A, et on désigne toujours cette extension par u,si u est lisse on Γ_2 on déduire, de (1.14)

$$\int_\Omega \mid \nabla u \mid^{q-2} \nabla u.\nabla \xi dx \leq \int_{S_3} \beta(x, \psi - u).\xi d\sigma(x) + \int_{A^c} \xi_{x_n} dx$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{q-2} \nabla u.\nabla \xi - \chi(A^c)\xi_{x_n} dx \leq \int_{S_3} \beta(x, \psi - u).\xi\sigma(x). \tag{1.15}$$

On est donc amené à chercher un couple $(u, g) = (u, \chi(A^c))$ satisfaisant (1.15). refondre cela avec un espace approprié,le problème devient

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad (u, g) \in W^{1,q}(\Omega) \times L^\infty(\Omega), 1 < q \quad \text{tel que} \\ u \geq x_n, \quad 0 \leq g \leq 1, \quad g \times (u - x_n) = 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \\ u = x_n \quad \text{sur} \quad S_2 \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{q-2} \nabla u.\nabla \xi - g\xi_{x_n} dx \leq \int_{S_3} \beta(x, \psi - u).\xi d\sigma(x) \\ \qquad \forall \xi \in W^{1,q}(\Omega), \quad \xi \geq 0 \quad \text{sur} \quad S_2. \end{cases} \tag{P}$$

Chapitre 2

Existence d'une solution

Dans ce chapitre, on va donner des résultats concernant l'existence de solution de problème (P).

2.1 Problème approximatif

Nous introduisons d'abord le problème approximatif suivant :

$$(P_\epsilon)\begin{cases}\text{Trouver} \quad (u_\epsilon) \in W^{1,q}(\Omega) \quad \text{tel que}\\ u_\epsilon = x_n \quad \text{sur} \quad S_2,\\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{q-2}\nabla u_\epsilon.\nabla\xi - G_\epsilon(u_\epsilon)\xi_{x_n}dx = \int_{S_3}\beta(x,\psi-u).\xi d\sigma(x)\\ \qquad \forall\xi \in W^{1,q}, \quad \xi > 0 \quad sur \quad S_2,\end{cases}$$

où $G_\epsilon : L^q(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ est définie par :

$$G_\epsilon(\upsilon) = \begin{cases} 0 \qquad si \quad \upsilon - x_n \geq \epsilon,\\ 1 - \dfrac{(\upsilon - x_n)}{\epsilon} \quad si \quad 0 \leq \upsilon - x_n \leq \epsilon,\\ 1 \qquad si \quad \upsilon - x_n \leq 0.\end{cases} \tag{2.1}$$

Théorème 2.1 *Supposons que $\beta(X,u)$ est une fonction vérifiant (1.8)-(1.12).Alors,sous les hypothèses ci-dessus, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une solution unique p_ϵ à (p_ϵ). De plus, nous avons*
$u_\epsilon \geq x_n \quad sur \quad \Omega.$

Démonstration. On va suivre la démonstration trouvée dans [4].
Soit l'ensemble V, donné par
$V = \{\upsilon \in W^{1,q}(\Omega)/\upsilon = 0 \quad \text{in} S_2\}$ et $K = \{\upsilon \in W^{1,q}(\Omega)/\upsilon = x_n \quad \text{dans} S_2\}$
On suppose que V est muni de la topologie induite par $W^{1,q}(\Omega)$.
pour $u \in V$, on considére l'application :

$$A(u) : W^{1,q}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\xi \longmapsto < A(u), \xi >= \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2} \nabla u . \nabla \xi dx - \int_{S_3} \beta(x, \psi - u) . \xi d\sigma(x).$$

$A(u)$ **est bien définie :**

En effet, $|\nabla u| . \nabla u \in L^{q'}(\Omega), \nabla \xi \in L^q(\Omega)$ donc $|\nabla u| . \nabla u . \nabla \xi \in L^1(\Omega)$,$(L^q(\Omega))$ désigne l'espace des fonctions à valeures vectorielles avec des entrées dans $L^q(\Omega)$.

De plus,

$$\begin{aligned} |\beta(x, \psi - u) \cdot \xi| &\leq |\beta(x, \psi - u) - \beta(x, 0)| \cdot |\xi| + |\beta(x, 0)| \cdot |\xi| , \\ &\leq c |\psi - u|^{\alpha} \cdot |\xi| + |\beta(x, 0)| \cdot |\xi| . \end{aligned}$$

D'après (1.8)(1.10) :

$$|\psi - u|^{\alpha} \in L^{q'}(S_3), |\beta(x, 0)| \in L^{q'}(S_3), \xi \in L^q(S_3).$$

On a $\beta(x, \psi - u)\xi \in L^1(S_3)$.

pour tout $u \in K, A(u) \in (W^{1,q}(\Omega))'$. On note $(W^{1,q}(\Omega))'$ l'aspace dual de $W^{1,q}(\Omega)$, en effet

$$\langle A(u), \xi \rangle \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-1} . |\nabla \xi| \, dx + \int_{S_3} |\beta(x, \psi - u)| . |\xi| \, d\sigma(x).$$

D'aprés Inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} | \langle A(u), \xi \rangle | \leq & \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{q'} dx \right)^{1/q'} . \left(\int_{\Omega} |\nabla \xi|^q dx \right)^{1/q} \\ & + \int_{S_3} |\beta(x, \psi - u) - \beta(x, 0)| . |\xi| \, d\sigma(x) + \int_{S_3} |\beta(x, 0)| . |\xi| \, d\sigma(x). \end{aligned}$$

Mais si l'on note $|.|_{r,S_3}$, $((resp). |.|_r)$ la norme usual L^r sur $S_3, ((resp), \Omega)$:

$$\begin{aligned} & \int_{S_3} |\beta(x, \psi - u) - \beta(x, 0)| . |\xi| \, d\sigma(x) \\ & \leq c \int_{S_3} |\psi - u|^{\alpha} . |\xi| \, d\sigma(x) \leq c \, \| |\psi - u|^{\alpha} \|_{L^q(S_3)} \cdot \|\xi\|_{L^q(S_3)} . \end{aligned}$$

i.e

$$\int_{S_3} |\beta(x, \psi - u) - \beta(x, 0)| . |\xi| \, d\sigma(x) \leq c \left(\int_{S_3} |\psi - u|^{\alpha q'} d\sigma(x) \right)^{1/q'} . \|\xi\|_{L^q(S_3)} . \tag{2.2}$$

Maintenant, $\alpha q' = \alpha \, [q/(q-1)] \leq q$. Donc :

$$\int_{S_3} |\psi - u|^{\alpha q'} d\sigma(x) \leq \left(\int_{S_3} |\psi - u|^{\alpha q'^{1/r}} d\sigma(x) \right)^r \left(\int_{S_3} (1)^{1-r} \right)^{1/(1-r)} ,$$

où $r = \dfrac{\alpha q'}{q}$.

$$\int_{S_3} |\psi - u|^{\alpha q'} \, d\sigma(x) \leq \left(\int_{S_3} |\psi - u|^q \, d\sigma(x) \right)^{\alpha q'/q} |S_3|^{(1-\alpha(q'-1))}, \tag{2.3}$$

tel que $|S_3|$ désigne la mesure superficielle de S_3.

D'aprés (2.3) et (2.2) on obtient :

$$\int_{S_3} |\beta(x, \psi - u) - \beta(x, 0)| \,.\, |\xi| \, d\sigma(x) \leq C(S_3, \alpha, q). \|\psi - u\|^{\alpha}_{L^q(S_3)} \,.\, \|\xi\|_{L^q(S_3)} \,. \tag{2.4}$$

De (2.1), (2.4) et d'aprés la théorème de trace :

$$|\langle A(u), \xi \rangle| \leq c(u) \|\xi\|_{W^{1,q}} \,,$$

telle que $\|.\|_{W^{1q}}$ désigne la norme usuel $(W^{1,q}(\Omega))$. ■

2.2 Existence d'une solution du problème $((P_\epsilon))$

Théorème 2.2 *Le problème (P_ϵ) admet au moins une solution.*

On commence par les lemmes suivants

Lemme 2.1 *A est continue de K dans* $(W^{1q}(\Omega))'$

Démonstration. On définie F par

$F : L^q(\Omega) \to L^{q'}(\Omega),$

$\upsilon \mapsto |\upsilon|^{q-2} \upsilon,$

tel que $\upsilon = (\upsilon_1, ..., \upsilon_n), |\upsilon| = (\upsilon_1^2 + ... + \upsilon_n^2)^{1/2}$

Il est bien connu que F est continue avec son inverse :

$$F^{-1} : L^{q'}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

$\upsilon \mapsto |\upsilon|^{q'-2} \upsilon$

Soit $(u_k)_k$ une suite de k telle que u_k converge vers un élément u de $W^{1,q}(\Omega)$

$$\begin{aligned} |\langle A(u_k) - A(u), \xi \rangle| &= \left| \int_\Omega (F(\nabla u_k) - F(\nabla u)).\nabla \xi dx - \int_{S_3} (\beta(x, \psi - u_k) - \beta(x, \psi - u))\xi d\sigma(x) \right| \\ &\leq \|F(\nabla u_k) - F(\nabla u)\|_{L^{q'}} \,.\, \|\nabla \xi\|_{L^q} + C \|u_k - u\|^{\alpha}_{L^q(S_3)} \,.\, \|\xi\|_{L^q(S_3)} \ by (1.10) \\ &\leq (\|F(\nabla u_k) - F(\nabla u)\|_{L^{q'}} + C' \|u_k - u\|^{\alpha}_{W^{1,q}}). \|\xi\|_{W^{1,q}} \,. \end{aligned}$$

Si $\|.\|_{(W^{1,q})'}$ désigne la norme duale forte usuelle sur $(W^{1,q})'$:

$$\|A(u_k) - A(u)\|_{(W^{1,q})'} \leq \|F(\nabla u_k) - F(\nabla u)\|_{L^{q'}} + C' \|u_k - u\|^{\alpha}_{W^{1,q}} \,.$$

On en déduit

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} A(u_k) = A(u) \quad \text{dans} \quad (W^{1,q}(\Omega))'$$

et la continuité de A suite. ∎

Lemme 2.2 *A est monotone et coercive.*

Démonstration. Nous avons besoin du lemme suivant, qui se trouve dans [11], p 264.

Lemme 2.3 *Supposons que $q > 1$, il existe $\mu > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ on a*

i) *Si $q \geq 2$ alors :*

$$\mu |x_y|^q \leq (|x|^{q-2} x - |y|^{q-2} y, x - y),$$

ii) *Si $1 < q < 2$ alors :*

$$\mu |x - y|^2 \leq (|x| + |y|)^{2-q}(|x|^{q-2} x - |y|^{q-2} y, x - y).$$

Comme conséquence du lemme 2.3 et la monotone de β, on voit que A est monotone (en fait cela n'utilise que $(|x|^{q-2} x - |y|^{q-2} y, x - y) \geq 0$).

Soit $u \in K$

$$\langle Au, u - \psi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{q-2} \nabla u.\nabla(u - \psi)dx + \int_{S_3} \beta(x, \psi - u)(\psi - u)d\sigma(x)$$

$$\begin{aligned}\langle Au, u - \psi\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^q dx - \int_\Omega |\nabla u|^{q-2} \nabla u.\nabla\psi dx \\ &+ \int_{S_3} \beta(x, \psi - u)(\psi - u)d\sigma(x).\end{aligned} \tag{2.5}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\int_{S_3} \beta(x, \psi - u)(\psi - u)d\sigma(x) &= \int_{S_3} (\beta(x, \psi - u)\beta(x, 0) + \beta(x, 0))(\psi - u)d\sigma(x) \\ &= \int_{S_3} (\beta(x, \psi - u) - \beta(x, 0))(\psi - u)d\sigma(x) \\ &+ \int_{S_3} \beta(x, 0)\psi d\sigma(x) - \int_{S_3} \beta(x, 0)ud\sigma(x)\end{aligned} . \tag{2.6}$$

On a aussi les inégalités suivantes pour certaines constantes c_i :

$$\int_{S_3} (\beta(x, \psi - u) - \beta(x, 0))(\psi - u)d\sigma(x) \geq 0 \quad \text{grâce à} \quad (1.11)$$

$$\int_{S_3} \beta(x,0)ud\sigma(x) \leq \|\beta(x,0)\|_{L^{q'}(S_3)} \|u\|_{L^q(S_3)} \leq c_1 \|u\|_{W^{1,q}} \quad \text{de} \quad (1.8)$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{q-2} \nabla u.\nabla\psi \mathrm{dx} \leq \|\nabla u\|_{L^q}^{q/q'} . \|\nabla\psi\|_{L^q} \leq c_2 \|u\|_{W^{1,q}}^{q/q'} = c_2 \|u\|_{W^{1,q}}^{q-1},$$

$$2^{q-1} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^q \, dx + \int_\Omega |\nabla \psi|^q \, dx \right\}$$

$$\geq \int_\Omega |\nabla(u-\psi)|^q \, dx \geq c_3 \|u-\psi\|_{W^{1,q}}^q \geq c_3 \|u\|_{W^{1,q}}^q - c_4.$$

En combinant (2.5) ,(2.6) et on tenant compte des inégalités ci-dessus ,on a pour différentes constantes $c_i, c_i^{'}$:

$$\langle Au, u-\psi \rangle \geq c_1^{'} \|u\|_{W^{1,q}}^q - c_2 \|u\|_{W^{1,q}}^{q-1} - c_1 \|u\|_{W^{1,q}} + c_2^{'},$$

ainsi

$$\frac{\langle Au, u-\psi \rangle}{\|u\|_{W^{1,q}}} \geq \frac{c_1^{'} \|u\|_{W^{1,q}}^q}{\|u\|_{W^{1,q}}} - \frac{c_2 \|u\|_{W^{1,q}}^{q-1}}{\|u\|_{W^{1,q}}} - \frac{c_1 \|u\|_{W^{1,q}}}{\|u\|_{W^{1,q}}} + \frac{c_2^{'}}{\|u\|_{W^{1,q}}}$$

$$\geq c_1^{'} \|u\|_{W^{1,q}}^{q-1} - c_2 \|u\|_{W^{1,q}}^{q-2} - c_1 + \frac{c_2^{'}}{\|u\|_{W^{1,q}}}.$$

Alors :

$$\lim_{\|u\|_{W^{1,q}} \longrightarrow +\infty} \frac{\langle Au, u-\psi \rangle}{\|u\|_{W^{1,q}}} = +\infty$$

depuis $q > 1$, alors A est coercive . ■

Démonstration. de théorème 2.2 :

On a A restreint à un espace de dimension finie est clairement continue.

Soit $v \in L^q(\Omega)$ et considérons l'applaication

$$f_v : W^{1,q}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\xi \longmapsto \int_\Omega G_\epsilon(v)\xi_{x_n} dx.$$

f_v est clairement une linéaire continue sur $W^{1,q}(\Omega)$. puisque A est continue ,coercitif,monotone on en (cf.[10], [13]) déduit que pour $v \in L^q(\Omega)$ il existe une unique solution u_ϵ solution de l'inégalité variationnelle

$u_\epsilon \in K$

$$\langle Au_\epsilon, w-u_\epsilon \rangle \geq \langle f_v, w-u_\epsilon \rangle \quad \forall w \in K.$$

En prenant dans l'inégalité ci-dessus, $w = u_\epsilon \pm \xi \quad o\breve{u} \quad \xi \in V$, on obtient

$$\langle Au_\epsilon, \xi \rangle = \langle f_v, \xi \rangle \quad \forall \xi \in V. \tag{2.7}$$

Point fixe Pour prouver qu'il existe une solution à (P_ϵ) il suffit de montrer que l'application F_ϵ définie par

$F_\epsilon : L^q(\Omega) \to K,$

$\upsilon \longmapsto u_\epsilon$

a une point fixe . Pour cela ,nous allons utiliser le théorème du point fixe de Schouder, nous prouverons que F_ϵ est continue et qu'il existe $R > 0$ tel que $F_\epsilon(B(0,R) \subset B(0,R)$ et $F_\epsilon(B(0,R)$ soit relativement compact en $L^q(\Omega)$,oŭ $B(0,R)$ est la boule en $L^q(\Omega)$ de centre 0 et de rayon R.

$\exists R > 0/F_\epsilon(B(0,R) \subset B(0,R)$: notez que $u_\epsilon - \psi$ est une fonction de test appropriée pour (2.8).

Donc :

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon| \nabla u_\epsilon . \nabla(u_\epsilon - \psi) - G_\epsilon(\upsilon)(u_\epsilon - \psi)_{x_n} dx = \int_{s3} \beta(x, \psi - u_\epsilon).(u_\epsilon - \psi) d\sigma(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon - |\nabla \psi|^{q-2} \nabla \psi).\nabla(u_\epsilon - \psi) dx &= \int_\Omega - |\nabla \psi|^{q-2} \nabla \psi.\nabla(u_\epsilon - \psi) dx + \int_\Omega G_\epsilon(\upsilon)(u_\epsilon - \psi)_x \\ &+ \int_{S_3} (\beta(x, \psi - u_\epsilon) - \beta(x,0)).(0 - (\psi - u_\epsilon)) d\sigma(x) \\ &+ \int_{S_3} (\beta(x,0).(u_\epsilon - \psi) d\sigma(x). \end{aligned} \tag{2.8}$$

On a pour certaines constantes c_1 et c_2 indépendantes de ϵ :

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \nabla \psi \right|^{q-2} |\nabla \psi . \nabla(u_\epsilon - \psi) dx| &\leq \left(\int_\Omega |\nabla \psi|^q \, dx \right)^{1/q'} . \left(\int_\Omega |\nabla(u_\epsilon - \psi)|^q \, dx \right)^{1/q} \\ &\leq c_1 \, |u_\epsilon - \psi|_{W^{1.q}} , \end{aligned}$$

$$\left| \int_\Omega G_\epsilon(\upsilon)(u_\epsilon - \psi)_{x_n} \right| dx \leq \int_\Omega |G_\epsilon(\upsilon)| \, . \, |u_\epsilon - \psi)_{x_n}| \, dx \leq \left| \Omega^{1/q'} \right| |u_\epsilon - \psi|_{W^{1.q}} ,$$

$$\int_{S_3} (\beta(x, \psi - u_\epsilon) - \beta(x,0)).(0 - (\psi - u_\epsilon)) d\sigma(x) \leq 0 \text{ voir } (1.11),$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_3} (\beta(x,0).(u_\epsilon - \psi) d\sigma(x) \right| &\leq |\beta(x,0)|_{L^{q'}} . \, |u_\epsilon - \psi|_{L^q} . \\ &\leq c_2 . \, |u_\epsilon - \psi|_{W^{1,q}} . \end{aligned}$$

De (2.8) et des estimations ci- dessus on déduit

$$\int_\Omega (|\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon - |\nabla \psi|^{q-2} \nabla \psi).\nabla(u_\epsilon - \psi) dx \leq c_3 . \, |u_\epsilon - \psi|_{W^{1.q}} , \tag{2.9}$$

où c_3 est une constante indépendante de ϵ.

On distingue alors deux cas :

(i) $q \geq 2$: par le lemme 2.3 (i) , on a

$$\mu \int_\Omega |\nabla(u_\epsilon - \psi)|^q \, dx \leq \int_\Omega (|\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon - |\nabla \psi|^{q-2} \nabla \psi).\nabla(u_\epsilon - \psi) dx. \tag{2.10}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré ,(2.9)et (2.10), on obtient pour une constante c indépendante de ϵ

$|u_\epsilon - \psi|^q_{W^{1,q}} \leq C \, |u_\epsilon - \psi|_{W^{1,q}}$,

Ainsi

$|u_\epsilon - \psi|_{W^{1,q}} \leq C^{1/q-1}$.

Plus

$|u_\epsilon|_{W^{1,q}} \leq |u_\epsilon - \psi|_{W^{1,q}} + |\psi|_{W^{1,q}} \leq \mathbb{R}$,

Oŭ $\mathbb{R}$ est une constante indépendante de ϵ.

(ii) $1 \leq q \leq 2$: Remarquer que $q' > 2$, donc d'aprés le lemme 2.3 oŭ μ' est la constante correspondant $\acute{a}$ $q = q'$:

$$\begin{aligned}
&\mu' \int_\Omega |F(\nabla u_\epsilon) - F(\nabla \psi)|^{q'} \, dx \\
&\leq \int_\Omega (|F(\nabla u_\epsilon)|^{q'-2} F(\nabla u_\epsilon) - |(\nabla \psi)|^{q'-2} F(\nabla \psi)).(F(\nabla u_\epsilon) - F(\nabla \psi)) dx \\
&= \int_\Omega (F(\nabla u_\epsilon) - F(\nabla \psi)).(\nabla u_\epsilon - \nabla \psi)) dx.
\end{aligned}$$

(rappeler que $|F(w)|^{q'-2} F(w) = |w|^{(q'-2)(q-1)+(q-2)} w = w \forall w \in L^q(\Omega).$) cela ci aussi :

$$\begin{aligned}
\mu' \, |F(\nabla u_\epsilon) - F(\nabla \psi)|^{q'}_{L'} &\leq \int (|\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon - |\nabla \psi|^{q-2} \nabla \psi).\nabla(u_\epsilon - \psi) dx \\
&\leq c_3 \, |u_\epsilon - \psi|_{W^{1,q}} \;\; de \; (2.9)
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\mu' \, |F(\nabla u_\epsilon) - F(\nabla \psi)|^{q'}_{L^{q'}} \leq c_3 (|u_\epsilon - \psi|_{W^{1,q}} \quad de (2.9). \tag{2.11}$$

Maintenant, nous avons

$$\begin{aligned}
|\nabla u_\epsilon|^q_{L^q} = |F(\nabla u_\epsilon)|^{q'}_{L^{q'}} &\leq (|F(\nabla u_\epsilon) - F(\nabla \psi)|_{L^{q'}} + |F(\nabla \psi)|_{L^{q'}})^{q'} \\
&\leq 2^{q'-1} (|F(\nabla u_\epsilon) - F(\nabla \psi)|^{q'}_{L^{q'}} + |F(\nabla \psi)|^{q'}_{L^{q'}}).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

La dernière inégalité est due à la convexité de la fonction $x \longmapsto |x|^{q'}$ puisque $q' > 1$.
On obtient par (2.11) et (2.12) pour certaines constantes c_1', c_2' :

$$|\nabla u_\epsilon|^q_{L^{q'}} \leq c_1' \, |u_\epsilon|_{W^{1,q}} + c_2'.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré pour $u_\epsilon - x_n$, on en déduit

$$|u_\epsilon|^q_{W^{1,q}} \leq c_1'' \, |u_\epsilon|_{W^{1,q}} + c_2''.$$

Ainsi,$|u_\epsilon|_{W^{1,q}} \leq R$(puisque $q > 1$) oŭR est une constante indépendante de ϵ.
On a prouvé qu'il existe $R > 0$, indépendante de ϵ tel que $F_\epsilon(B(O, R)) \subset B(0, R)$:
$F_\epsilon : L^q(\Omega) \to L^q(\Omega)$ est continue .
Soit $(v_k)_k$ une suite en $L^q(\Omega)$ qui converge vers v en $L^q(\Omega)$.
définir $u_\epsilon^k = F_\epsilon(v_k)$ et $u_\epsilon = F_\epsilon(v)$.
puisque $u_\epsilon^k - u_\epsilon$ une fonction de test appropriée pour (2.7), on a

$$\int_\Omega \left|\nabla u_\epsilon^k\right|^{q-2} \nabla u_\epsilon^k . \nabla(u_\epsilon^k - u_\epsilon) dx$$

$$= \int_\Omega G_\epsilon(v_k)(u_\epsilon^k - u_\epsilon)_{x_n} dx + \int_{S_3} \beta(x, \psi - u_\epsilon^k).(u_\epsilon^k - u_\epsilon) d\sigma(x) \tag{2.13}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon . \nabla(u_\epsilon^k - u_\epsilon) dx$$

$$= \int_\Omega G_\epsilon(v)(u_\epsilon^k - u_\epsilon)_{x_n} dx + \int_{S_3} \beta(x, \psi - u_\epsilon).(u_\epsilon^k - u_\epsilon) d\sigma(x) \tag{2.14}$$

En soustrayant (2.14) de (2.13) , on déduit

$$\int_\Omega (\left|\nabla u_\epsilon^k\right|^{q-2} \nabla u_\epsilon^k - |\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon).\nabla(u_\epsilon^k - u_\epsilon) dx$$

$$= \int_\Omega (G_\epsilon(v_k) - G_\epsilon(v))(u_\epsilon^k - u_\epsilon)_{x_n} dx$$

$$+ \int_{S_3} (\beta(x, \psi - u_\epsilon^k) - \beta(x, \psi - u_\epsilon)).(u_\epsilon^k - u_\epsilon) d\sigma(x)$$

et

$$\int_\Omega (\left|\nabla u_\epsilon^k\right|^{q-2} \nabla u_\epsilon^k - |\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon).\nabla(u_\epsilon^k - u_\epsilon) dx$$

$$\leq \int_\Omega (G_\epsilon(v_k) - G_\epsilon(v))(u_\epsilon^k - u_\epsilon)_{xn} dx \tag{2.15}$$

(voir (1.11)).

On distingue alors deux case :

(i) $q \geq 2$: par le lemme 2.3, on dérive de (2.15) :

$$\mu \int_\Omega \left|\nabla(u_\epsilon^k - u_\epsilon)\right|^q dx \leq \int_\Omega (G_\epsilon(\upsilon_k) - G_\epsilon(\upsilon))(u_\epsilon^k - u_\epsilon)_{x_n} dx$$

et par inégalité de Hôlder

$$\mu \int_\Omega \left|\nabla(u_\epsilon^k - u_\epsilon)\right|^q dx \leq \left(\int_\Omega \left|G_\epsilon(\upsilon_k) - G_\epsilon(\upsilon)\right|^{q'} dx\right)^{1/q'} . \left(\int_\Omega \left|\nabla(u_\epsilon^k - u_\epsilon)\right|^q\right)^{1/q}$$

qui conduit à

$$\mu^{q'} \int_\Omega \left|\nabla(u_\epsilon^k - u_\epsilon)\right|^q dx \leq \int_\Omega \left|G_\epsilon(\upsilon_k) - G_\epsilon(\upsilon)\right|^{q'} dx \tag{2.16}$$

mais

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|G_\epsilon(\upsilon_k) - G_\epsilon(\upsilon)\right|^{q'} dx &= \int_\Omega \left|G_\epsilon(\upsilon_k) - G_\epsilon(\upsilon)\right|^{q'-1} . \left|G_\epsilon(\upsilon_k) - G_\epsilon(\upsilon)\right| dx \\ &\leq \int_\Omega 2^{q'-1} . \left|G_\epsilon(\upsilon_k) - G_\epsilon(\upsilon)\right| dx \quad (\text{car } \left|G_\epsilon(\upsilon)\right| \leq 1) \\ &\leq 2^{(q'-1)} . \left|\Omega\right|^{q-1/q} . \frac{1}{\epsilon} \left(\int_\Omega \left|\upsilon_k - \upsilon\right|^q dx\right)^{1/q} \qquad (2.17)\end{aligned}$$

(perce que $\left|G_\epsilon(w_1) - G_\epsilon(w_2)\right| \leq (1/\epsilon)\left|w_1 - w_2\right|$).

En utilisant (2.16),(2.17) et en appliquant l'inégalité de Poincaré on obtient, pour une constante c

$$\left|F_\epsilon(\upsilon^k) - F_\epsilon(\upsilon)\right|_{W^{1,q}} \leq c\left|\upsilon_k - \upsilon\right|_{L^q}^{1/q},$$

et la continuité tient dans ce cas.

(ii) $1 < q < 2$: on a $q' > 2$, donc , de lemme 2.3,

$$\begin{aligned}\mu' \int_\Omega \left|F(\nabla u_\epsilon^k) - F(\nabla u_\epsilon)\right|^{q'} dx &\leq \int_\Omega (\left|F(\nabla u_\epsilon^k)^{q'-2} F(\nabla u_\epsilon^k)\right| - \left|F(\nabla u_\epsilon)\right|^{q'-2} F(\nabla u_\epsilon)|)(F(\nabla u_\epsilon^k) - (F(\nabla u_\epsilon))dx \\ &= \int_\Omega (\left|\nabla u_\epsilon^k\right|^{q-2} \nabla u_\epsilon^k - \left|\nabla u_\epsilon\right|^{q-2} \nabla u_\epsilon).\nabla(u_\epsilon^k - u_\epsilon)dx\end{aligned}$$

Donc ,par (2.15) nous arrivons

$$\begin{aligned}\mu' \left|F(\nabla u_\epsilon^k) - F(\nabla u_\epsilon)\right|_{L^{q'}(\Omega)}^{q'} &\leq \int_\Omega (G_\epsilon(\upsilon_k) - G_\epsilon(\upsilon))(u_\epsilon^k - u_\epsilon)_{x_n} dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \left|G_\epsilon(\upsilon_k) - G_\epsilon(\upsilon)\right|^{q'} dx\right)^{1/q'} . \left(\int_\Omega \left|\nabla(u_\epsilon^k - u_\epsilon)\right|^q dx\right)^{1/q}\end{aligned}$$

$$\leq c\left(\int_\Omega |G_\epsilon(v_k) - G_\epsilon(v)|^{q'}\,dx\right)^{1/q'}$$

(puisque u_ϵ^k et u_ϵ sont bornés dans $W^{1,q}(\Omega)$).

$$\leq c'\left(\int_\Omega |v_k - v|^q\,dx\right)^{1/q} (voir 2.17).$$

On en déduit que $F(\nabla u_\epsilon^k \to F(\nabla u_\epsilon)$ dans $L^{q'}(\Omega)$ et donc $F^{-1}\circ F(\nabla u_\epsilon^k) \to F^{-1}\circ F(\nabla u_\epsilon)$ dans $L^q(\Omega)$ (puisque F^{-1} est continue sur $L^{q'}(\Omega)$, i, e.

$\nabla u_\epsilon^k \to \nabla u_\epsilon$ dans $\mathbb{L}^q(\Omega)$.

Par l'inégalité de Poincaré il s'ensuit que $u_\epsilon^k \to u_\epsilon$ dans L^q et la continuité de F_ϵ est prouvée.

De plus , on sait que $F_\epsilon(B(0,R) \subset B(0,R') \subset W^{1,q}$ oǜ $B(0,R')$ est une boule dans $W^{1,q}$. Donc $F_\epsilon(B(0,R))$ est relativement compact en L^q puisque l'injection $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est complétement continue (voir[1]).

À ce point,en appliquant le théorème du point fixe de Schouder sur $B(0,R)$,(voir[14]),nous avons établi que F_ϵ admet un point fixe ,donc (P_ϵ) a une solution .montrons maintenant que $u_\epsilon \leq x_n$.

Ensemble $\xi = (u_\epsilon - x_n)^-$, oǜ $(.)^-$ désigne la partie négative d'une fonction .Puisque ξ est une fonction de test pour (P_ϵ),on a

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{q-2}\,\nabla u_\epsilon.\nabla(u_\epsilon - x_n)^- dx$$

$$= \int_\Omega G_\epsilon(u_\epsilon).(u_\epsilon - x_n)^-_{x_n} dx + \int_{S_3} \beta(x,\psi - u_\epsilon).(u_\epsilon - x_n)^- d\sigma(x).$$

Mais

$$\int_\Omega G_\epsilon(u_\epsilon).(-u_\epsilon - x_n)^-_{x_n} dx = \int_\Omega (u_\epsilon - x_n)^-_{x_n} dx$$

et par (1.12)

$$\int_{S_3} \beta(x,\psi - u_\epsilon).(u_\epsilon - x_n)^- d\sigma(x) \geq 0$$

Puisque $u_\epsilon \leq x_n$ implique $u_\epsilon \leq \psi$. Donc ,si $[u_\epsilon \leq x_n]$ désigne l'ensemble oǜ $u_\epsilon \leq x_n$ on obtient

$$\int_{[u_\epsilon \leq x_n]} |\nabla u_\epsilon|^{q-2}\,\nabla u_\epsilon.\nabla(u_\epsilon - x_n)dx \leq \int_{[u_\epsilon \leq x_n]} (u_\epsilon - x_n)_{x_n} dx. \tag{2.18}$$

Puisque

$$\int_{[u_\epsilon \leq x_n]} |\nabla x_n|^{q-2}\,\nabla x_n.\nabla(u_\epsilon - x_n)dx = \int_{[u_\epsilon \leq x_n]} (u_\epsilon - x_n)_{x_n} dx. \tag{2.19}$$

On en déduit en soustrayant (2.19) de (2.18)

$$\int_{[u_\epsilon \leq x_n]} (|\nabla u_\epsilon|^{q-2}\,\nabla u_\epsilon - |\nabla x_n|^{q-2}\,\nabla x_n).\nabla(u_\epsilon - x_n)dx \leq 0. \tag{2.20}$$

En utilisant le lemme 2.3 et (2.20) on obtient

$$(i) \int_{[u_\epsilon \leq x_n]} |\nabla(u_\epsilon - x_n)|^q \, dx \leq 0 \quad \text{si} \quad q \geq 2,$$

$$(ii) \int_{[u_\epsilon \leq x_n]} \frac{|\nabla(u_\epsilon - x_n)|^2}{(|\nabla u_\epsilon| + |\nabla x_n|)^{q-2}} dx \leq 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq q \leq 2.$$

Cela implique que $u_\epsilon \geq x_n$. En Ω et le théorème (2.1) nous a prouvé.

En remarquant que $G_\epsilon(u_\epsilon)$ est uniformément borné $(0 \leq G_\epsilon(u_\epsilon) \leq 1)$;

voir(2.1) et u_ϵ est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$,donc on a pour une constante c indépendante de ϵ $|G_\epsilon(u_\epsilon)|_{L^q} \leq C, |u_\epsilon|_{W^{1,q}} \leq C.$ ■

2.3 Existence de solution de problème (P)

Théorème 2.3 *Le problème (P) admet au moins une solution.*

Démonstration. D'aprés théorème de Rellich et de la continuité complété de l'operateur de trace il existe une sous-suite ϵ_k et $u \in W^{1,q}(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ telle que

$$G_\epsilon(u_{\epsilon_k}) \rightharpoonup g \quad \text{dans} \quad L^q(\Omega) \tag{2.21}$$

$$u_{\epsilon_k} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W^{1,q}(\Omega), u_{\epsilon_k} \to u \quad \text{dans} \quad L^q(\Omega) \quad \text{et p.p dans} \quad \Omega. \tag{2.22}$$

$$u_{\epsilon_k} \to u \quad \text{dans} \quad L^q(S_3) \quad et \quad a, e, dans \quad S_3. \tag{2.23}$$

On va montrer que (u, g) est solution de (P). Soit l'ensemble $K_1 = \{v \in K / v \geq x_n\}$ a.e dans Ω Puisque K_1 est fermé et convexe en $W^{1,q}$, il est faiblement fermé ,donc $u_{\epsilon_k} \in k_1$, u est dans cet ensemble de sorte que

$$u \geq x_n \quad \text{a.e dans} \quad \Omega, u = x_n \quad \text{dans} S_2. \tag{2.24}$$

Ensuite, l'ensemble

$$K_2 = \{v \in L^q(\Omega) / 0 \leq v \leq 1 \quad \text{a.e dans} \quad \Omega\}$$

Etant fermé et convexe il est faiblement fermé en $L^q(\Omega)$, et donc

$$0 \leq g \leq 1 \quad \text{a.e dans } \Omega. \tag{2.25}$$

De plus ,par le théorème de Lebesgue

$$G_{\epsilon_k}(u_{\epsilon\epsilon_k}) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^q([u > x_n])$$

Puisque , par (2.21) on a aussi

$$G_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}) \rightharpoonup g \quad \text{dans} \quad L^q([u > x_n])$$

On en déduit

$$g = 0 \quad \text{a.e dans} \quad [u > x_n] \tag{2.26}$$

Et donc (P) (i) (ii) suivre ,il reste à prouvé (P) (iii).

Note

$$\forall \upsilon \in L^q(\Omega) \quad G_{\epsilon_k}(\upsilon(x)) = 1 - H_{\epsilon_k}(\upsilon(x) - x_n) \quad a.ex \in \Omega, \tag{2.27}$$

Où H_ϵ est définie par

$$H_\epsilon(s) = \begin{cases} 1 & si \quad s \geq \epsilon, \\ s/\epsilon & si \quad 0 \leq s \leq \epsilon, \\ 0 & si \quad s \leq 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Soit $\xi \in W^{1,q}(\Omega), \xi \geq 0$ sur S_2. Pour tout $\delta > 0, (p_\epsilon/\delta \wedge \xi), p_\epsilon = u_\epsilon - x_n$, est une fonction de test pour $(P_\epsilon$,($\wedge$ désigne le min de deux nombres). Donc on peut écrire en tentant compte

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon.\nabla \left(\frac{p_\epsilon}{\delta} \wedge \xi\right) - |\nabla x_n|^{q-2} \nabla x_n.\nabla \left(\frac{p_\epsilon}{\delta} \wedge \xi\right) dx$$
$$+ \int_\Omega H_\epsilon(u_\epsilon - x_n) \left(\frac{p_\epsilon}{\delta} \wedge \xi\right)_{x_n} dx - \int_{S_3} \beta(x, \psi - u_\epsilon) \left(\frac{p_\epsilon}{\delta} \wedge \xi\right) d\sigma(x) = 0$$

Le premier terme si la somme ci-dessus peut être écrite, avec une notation évidente pour les ensemble où l'intégration est effectuée ,comme

$$\int_{[u_\epsilon - x_n \leq \delta\xi]} (|\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon - |\nabla x_n|^{q-2} \nabla X_n).\nabla \frac{u_\epsilon - x_n}{\delta} dx$$
$$+ \int_{[u_\epsilon - x_n > \delta\xi]} (|\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon - |\nabla x_n|^{q-2} \nabla X_n).\nabla \xi dx.$$

Mais par lemme 2.3

$$\int_{[u_\epsilon - x_n \leq \delta\xi]} (|\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon - |\nabla x_n|^{q-2} \nabla X_n).\nabla \frac{u_\epsilon - x_n}{\delta} dx \geq 0,$$

Et en obtient

$$\int_{[u_\epsilon - x_n > \delta\xi]} (|\nabla u_\epsilon|^{q-2} \nabla u_\epsilon - |\nabla x_n|^{q-2} \nabla X_n).\nabla \xi dx.$$
$$+ \int_\Omega H_\epsilon(u_\epsilon - x_n) \left(\frac{p_\epsilon}{\delta} \wedge \xi\right)_{x_n} dx - \int_{S_3} \beta(x, \psi - u_\epsilon) \left(\frac{p_\epsilon}{\delta} \wedge \xi\right) d\sigma(x) \leq 0 \tag{2.29}$$

Lorsque $\delta \to 0$, le premier terme de (2.29) converge vers

$$\int_{\Omega}(|\nabla u_{\epsilon}|^{q-2}\nabla u_{\epsilon} - |\nabla x_n|^{q-2}\nabla X_n).\nabla\xi dx. \tag{2.30}$$

De plus, montrons que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\Omega} H_{\epsilon}(u_{\epsilon}-x_n)\left(\frac{u_{\epsilon}-x_n}{\delta}\wedge\xi\right)_{x_n} dx = \int_{\Omega} H_{\epsilon}(u_{\epsilon}-x_n)\xi_{x_n}dx \tag{2.31}$$

$$\lim_{\delta\to 0} sup\int_{S_3}\beta(X-\psi-u_{\epsilon})\left(\frac{u_{\epsilon}-x_n}{\delta}\wedge\xi\right)d\sigma(x) \leq \int_{S_3}\beta(x,\psi-\psi u_{\epsilon})\xi d\sigma(x). \tag{2.32}$$

En effet, en utilisant la formule de divergence , notez que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\Omega} H_{\epsilon}(u_{\epsilon}-x_n)\left(\frac{u_{\epsilon}-x_n}{\delta}\wedge\xi\right)_{x_n} dx = -\int_{\Omega}(H_{\epsilon}(u_{\epsilon}-x_n))_{x_n}.\left(\frac{u_{\epsilon}-x_n}{\delta}\wedge\xi\right)dx$$
$$+\int_{\partial\Omega} H_{\epsilon}(u_{\epsilon}-x_n).\nu_n.\left(\frac{u_{\epsilon}-x_n}{\delta}\wedge\xi\right)d\sigma(x),$$

ν_n désignant la dernière entrée de l'unité extérieure normale ν à $\partial\Omega$

En laissant $\delta \to 0$ et puisque $\xi\wedge(u_{\epsilon}-x_n)/\delta \to \xi$ a.e On $[u_{\epsilon > x_n}]$ on obtient ,par la théorème de Lebesgue :

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\Omega} H_{\epsilon}(u_{\epsilon}-x_n)\left(\frac{u_{\epsilon}-x_n}{\delta}\wedge\xi\right)_{x_n} dx = -\int_{\Omega}(H_{\epsilon}(u_{\epsilon}-x_n))_{x_n}.\xi dx$$
$$+\int_{\partial\Omega} H_{\epsilon}(u_{\epsilon}-x_n).\nu_n.\xi d\sigma(x)$$
$$= \int_{\Omega} H_{\epsilon}(u_{\epsilon}-x_n).\xi_{x_n}dx,$$

ce qui prouve (2.31),passons ensuite à la prouve de (2.32)

Notons que

$$\int_{S_3}\beta(x,\psi-u_{\epsilon})\left(\frac{u_{\epsilon}-x_n}{\delta}\wedge\xi\right)d\sigma(x)$$
$$= \int_{S_3\cap[u_{\epsilon}>x_n]}\beta(x,\psi-u_{\epsilon})\left(\frac{u_{\epsilon}-x_n}{\delta}\wedge\xi\right)d\sigma(x)$$
$$+\int_{S_3\cap[u_{\epsilon}>x_n]}\beta(x,\psi-x_n)(0\wedge\xi)d\sigma(x)$$
$$\leq \int_{S_3\cap[u_{\epsilon}>x_n]}\beta(x,\psi-u_{\epsilon})\left(\frac{u_{\epsilon}-x_n}{\delta}\wedge\xi\right)d\sigma(x) + \int_{S_3\cap[u_{\epsilon}>x_n]}\beta(x,\psi-x_n).\xi d\sigma(x)$$

Depuis $\beta(x,\psi-x_n)=\beta(x,\varphi)\geq 0$ de (1.12)

En passant au Limsup on obtient :

$$\limsup_{\delta\to 0}\int_{S_3}\beta(x,\psi-u_\epsilon).\left(\frac{u_\epsilon\epsilon-x_n}{\delta}\wedge\xi\right)d\sigma(x)\leq\int_{S_3\cap[u_\epsilon>x_n]}\beta(x,\psi\psi-x_n).\xi d\sigma(x)$$
$$+\int_{S_3\cap[u_\epsilon>x_n]}\beta(x,\psi-x_n).\xi d\sigma(x)=\int_{S_3}\beta(x,\psi-u_\epsilon).\xi d\sigma(x),$$

et (2.32) suite

En combinant (2.30)-(2.32) et en laissant $\delta\to 0$ dans (2.29) on obtient

$$\int_\Omega(|\nabla u_\epsilon|^{q-2}\nabla u_\epsilon-|\nabla x_n|^{q-2}\nabla x_n).\nabla\xi dx$$
$$+\int_{\Omega\Omega}H_\epsilon(u_\epsilon-x_n)\xi_{x_n}dx-\int_{S_3}\beta(x,\varphi-p_\epsilon).\xi d\sigma(x)\leq 0.$$

Donc pour tout solution u_ϵ à (P_ϵ) on a :

$$\int_\Omega|\nabla u_\epsilon|^{q-2}\nabla u_\epsilon.\nabla\xi-G_\epsilon(u_\epsilon).\xi_{x_n}dx-\int S_3\beta(x,\psi-u_\epsilon).\xi d\sigma(x)\leq 0$$
$$\forall\xi\in W^{1,q}(\Omega),\xi\geq 0\quad\text{sur } S_2. \tag{2.33}$$

Pour conclure, nous avons besoin de montrer que :

(u_{ϵ_k}) **converge fortement vers** u **en** $W^{1,q}$.

Montrons que ∇u_{ϵ_k} ,converge vers ∇u dans $\mathbb{L}^q(\Omega)$.Pour cela il suffit de prouver que

$$\limsup_{\delta\to+\infty}|\nabla u_{\epsilon_k}|_{L^q(\Omega)}\leq|\nabla u|_{L^q(\Omega)}. \tag{2.34}$$

En effet $\mathbb{L}^q(\Omega)$ étant uniformément convexe($q>1$) et puisque $\nabla u_{\epsilon_k}\rightharpoonup\nabla u$ dans $\mathbb{L}^q(\Omega)$,on aura (voir[7])

$$\lim_{k\to+\infty}\nabla u_{\epsilon_k}=\nabla u\quad\text{fortement dans}\quad\mathbb{L}^q(\Omega)$$

Puisque $\xi=u_{\epsilon_k}-u$ estune fonction test pour (P_{ϵ_k}) ona

$$\int_\Omega|\nabla u_{\epsilon_k}|^{q-2}\nabla u_{\epsilon_k}.\nabla(u_{\epsilon_k}-u)dx=\int_\Omega G_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}).(u_{\epsilon_k}-u)_{x_n}dx$$
$$+\int_{S_3}\beta(x,\psi-u_{\epsilon_k}).(u_{\epsilon_k}-u)d\sigma(x).$$

Ainsi

$$\int_\Omega|\nabla u_{\epsilon_k}|^{q-2}dx=\int_\Omega|\nabla u_{\epsilon_k}|^{q-2}\nabla u_{\epsilon_k}.\nabla udx+\int_\Omega G_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k})(u_{\epsilon_k}-u)_{x_n}dx$$

$$+\int_{S_3}\beta(x,\psi-u_{\epsilon_k})-\beta(x,\psi-u).(u_{\epsilon_k}-u)d\sigma(x)$$
$$+\int_{S_3}\beta(x,\psi-u).(u_{\epsilon_k}-u)d\sigma(x). \tag{2.35}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder ,on a

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_{\epsilon_k}|^{q-2}\nabla u_{\epsilon_k}.\nabla u\; dx\right| \leq \left(\int_\Omega |\nabla u_{\epsilon_k}|^k\, dx\right)^{1/q'}.\left(\int_\Omega |\nabla u|^q\right)^{1/q}, \tag{2.36}$$

et par monotonie de β (voir(1.11) :

$$\int_{S_3}(\beta(x,\psi-u_{\epsilon_k})-\beta(x,\psi-u)).(u_{\epsilon_k}-u)d\sigma(x)\leq 0 \tag{2.37}$$

De (2.23),on déduit

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{S_3}\beta(x,\psi-u).(u_{\epsilon_k}-u)d\sigma(x)=0. \tag{2.38}$$

Montrons que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega G_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}).(u_{\epsilon_k}-u)_{x_n}dx=0. \tag{2.39}$$

Nous avons d'adord

$$\int_\Omega G_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}).(u_{\epsilon_k-u})_{x_n}dx$$
$$\int_\Omega (u_{\epsilon_k-u})_{x_n}dx-\int_\Omega H_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)(u_{\epsilon_k}-x_n)_{x_n}-(u-x_n)_{x_n}dx$$
$$+\int_\Omega (H_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)-1)(u-x_n)_{x_n}dx.$$

Ensuite,de (2.22) on déduit

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega (u_{\epsilon_k}-u)_{x_n}dx=0 \quad \text{car} \quad u_{\epsilon_k}\rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W^{1,q}(\Omega)$$

Or $H_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)\to 1$ a.e , dans $[u>x_n]$, alors par le théorème de Lebesgue on a

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega (H_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)-1)(u-x_n)_{x_n}dx=0.$$

Alors pour avoir (2.39),il reste à prouver que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega (H_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)-1)(u-x_n)_{x_n}dx=\int_\Omega (u-x_n)_{x_n}dx. \tag{2.40}$$

$H_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)(u_{\epsilon_k}-x_n)_{x_n}$ apparrient à une boule fermé de $L^q(\Omega)$ faiblement compacte. Il suffit donc de prouver que $H_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)(u_{\epsilon_k}-x_n)_{x_n}$ admet $(u-x_n)_{x_n}$,comme unique limite faible indiquer.Ensemble

$$E_{\epsilon_k}(s)=\int_0^s H_{\epsilon_k}(t)dt \qquad \forall s\in\mathbb{R}.$$

Ensuite, nous avons

$$H_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)(u_{\epsilon_k}-x_n)_{x_n}=(E_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n))_{x_n}$$

$$E_{\epsilon_k}(s)\to s^+ \quad \text{a.e dans} \quad \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
&|E_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)-(u-x_n)|^q\\
&\leq (|E_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)-E_{\epsilon_k}(u-x_n)|+|E_{\epsilon_k}(u-x_n)-(u-x_n)|)^q\\
&\leq 2^{q-1}\,|E_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)-E_{\epsilon_k}(u-x_n)|^q+2^{q-1}\,|E_{\epsilon_k}(u-x_n)-(u-x_n)|^q\\
&\leq 2^{q-1}(|u_{\epsilon_k}-x_n-u-x_n|^q+|E_{\epsilon_k}(u-x_n)-(u-x_n)|^q).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Puisque $E_{\epsilon_k}(s)\to s^+$ a.e dans $\mathbb{R}$,alors par le théorème de Lebesgue on a

$$E_{\epsilon_k}(u-x_n)\to(u-x_n) \quad \text{dans} L^q(\Omega).$$

Donc :de (2.22) et (2.41) on déduit

$$E_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)\to(u-x_n) \quad \text{dans} L^q(\Omega).$$

Alors : $u-x_n$ est l'unique point limite de $(E_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n))$ dans $\mathbb{D}^{'}(\Omega)$,ce qui prouve que $(u-x_n)_{x_n}$ est l'unique point limite de $(E_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n))_{x_n}$ dans $\mathbb{D}^{'}(\Omega)$.

Ainsi $(u-x_n)_{x_n}$ est l'unique point limite de $H_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}-x_n)(u_{\epsilon_k}-x_n)_{x_n}$ dans $L^q(\Omega)$ et (2.40),(2.39) sont valable .

En passant au limsup en k dans 2.35 et en rappellent (2.36)-(2.39) on obtient

$$\limsup_{k\to+\infty}\int_\Omega |\nabla u_{\epsilon_k}|^q\,dx\leq \limsup_{k\to+\infty}\left(\int_\Omega|\nabla u_{\epsilon_k}|^q\right)^{1/q^{'}}.\left(\int_\Omega|\nabla u|^q\,dx\right)^{1/q}$$

Ainsi (2.34) est vérifiée .

Ceci achève la prouve de lemme précédent

fin de la prouve du théorème (2.1).

On déduit du lemme précedente que

$$F(\nabla u_{\epsilon_k})\to F(\nabla u) \quad \text{dans} \quad \mathbb{L}^{q^{'}}(\Omega) \tag{2.42}$$

Puis, en particuller,faiblement dans $\mathbb{L}^{q^{'}}(\Omega)$

Soit alors $\xi\in W^{1,q}\in(\Omega)$, $\xi\geq 0$ on S_2,on a d'pré (2.33) :

$$\int_\Omega F(\nabla u_{\epsilon_k}.\nabla\xi-G_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k})\xi_{x_n}dx\leq\int_{S_3}\beta(x,\psi-u_{\epsilon_k}).\xi d\sigma(x).$$

Soit $k \to +\infty$, on obtient par (2.21),(2.23) et (2.42) et le théorème de Lebesgue ,

$$\int_{\Omega} F(\nabla u).\nabla\xi - g\xi_{x_n} dx \leq \int_{S_3} \beta(x, \psi - u).\xi d\sigma(x),$$

Donc : (P) (iii) et le théorème est prouvé.

■

Chapitre 3

Etude d'un exemple

Dans ce chapitre, on va étudier l'unicté dans une cas simple. Si nous avons que le problème (P) admet une solution , il est plus difficile d'établir son unicité . Dans la cas particulier où $q = 2$ nous renvoyons le lecteur à [15].
Dans ce chapitre, nous aimerions aborder cette question sur un exemple .
Donnons d'abord une propriété générale pour la solution de (P).

3.1 Résultat important

Proposition 3.1 *Soit (u, g) un couple de solution de (P) .Alors*

$$div(|\nabla u|^{q-2} \nabla u) - g_{x_n} = 0 \tag{3.1}$$

ou sans distributionnel

Démonstration. Soit $\xi \in \mathbb{D}(\Omega)$, où $\mathbb{D}(\Omega)$ est l'espace des fonction C à support compact . Puisque est une fonction test ,on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{q-2} \nabla u.\nabla \xi - g\xi_{x_n} dx = 0. \tag{3.2}$$

Donc

$div(|\nabla u|^{q-2} \nabla u) - g_{x_n} = 0$ Alors,tournons -nous maintenant vers un exemple particulier et supposons que

$$n = 2, \quad \Omega = (0, L) \times (0, D).$$

De plus,on peut facilement vérifier que

$$\int_\Omega |\nabla x_2| \nabla x_2.\nabla(u' - x_2)^+ + (\beta(h) - 1)(u' - x_2)^+_{x_2} dx$$

$$= \int_{S_3} \beta(\psi - D)(u\prime - x_2)^+ d\sigma(x). \tag{3.3}$$

En soustrayant(3.3) de (3.1) , on obtient

$$\int_{\Omega}(\left|\nabla u^{'}\right|^{q-2}\nabla u^{'}-|\nabla x_2|^{q-2}\nabla x_2).\nabla(u^{'}-x_2)^{+}dx$$

$$\leq\int_{S_3}(\beta(\psi-u^{'})-\beta(\psi-D))(u^{'}-D)^{+}d\sigma(x)$$
$$+\int_{S_3}(\beta(h)-1)(u\prime-D)^{+}d\sigma(x)\leq 0$$

Puisque β est non décroissant et $0\leq\beta(h)\leq 1$.(Rappelons que continuer sur $u^{'}>2$)

Ainsi de lemme 2.3 on en deduit

$$(i)\quad\int_{\Omega}\left|\nabla(u^{'}-x_2)^{+}\right|^{q}dx\leq 0\quad\text{si}\quad q>2,$$

$$(ii)\quad\int_{\Omega}\frac{\left|\nabla(u^{'}-x_2)^{+}\right|^{2}}{(|\nabla u^{'}|+|\nabla x_2|)^{2-q}}dx\leq 0\quad\text{si}\quad 1<q\leq 2$$

On en déduit que $\nabla(u^{'}-x_2)^{+}=0$ et $u^{'}\leq x_2$ a.e .en Ω .

Puisque $u^{'}\geq x_2$ on a nécessairement

$$u^{'}=x_2\quad\text{a.e dans}\quad\Omega\tag{3.4}$$

De (3.1) et (3.4) on déduit

$$g^{'}_{x_2}=0\quad\text{et}\quad g^{'}=g^{'}(x_1).\tag{3.5}$$

Soit alors $\xi\in W^{1,q}(\Omega),\xi=0$ sur S_2. $\pm\xi$ est une fonction de test pour (P) . Donc en tenant compte de (3.4) et (3.5) on a

$$\int_{\Omega}\xi_{x_2}-g^{'}\xi_{x_2}dx=\int_{S_3}\beta(h).\xi d\sigma(x)\Leftrightarrow\int_{\Omega}((1-g^{'}(x_1))\xi)_{x_2}dx$$
$$=\int_{S_3}\beta(h).\xi d\sigma(x).$$

Alors,en intégrant en x_2,

$$\int_{S_3}(1-g^{'}(x_1))\xi d\sigma(x)=\int_{S_3}\beta(h).\xi d\sigma(x)\quad\forall\xi\in W^{1,q}(\Omega),\xi=0\quad\text{sur}\quad S_2.$$

Il s'ensuit que $g^{'}=1-\beta(h)$.

Considérez la situation oὺ

$\varphi(x_1, x_2) = D + h - x_2$ de sorte que $\psi(x_1, x_2) = D + h$,

$\beta(x, u) = \beta(u), \quad \beta(0) = 0$

$S_1 = (\{0\} \times [0, D]) \cup (\{L\} [0, D]), \quad S_2 = [0, L] \times \{0\}, \quad S_3 = (0, L) \times \{D\}$. ■

3.2 Unicité dans une cas particulière

On considère aue $n = 2$ et que Ω est la figure suivante :

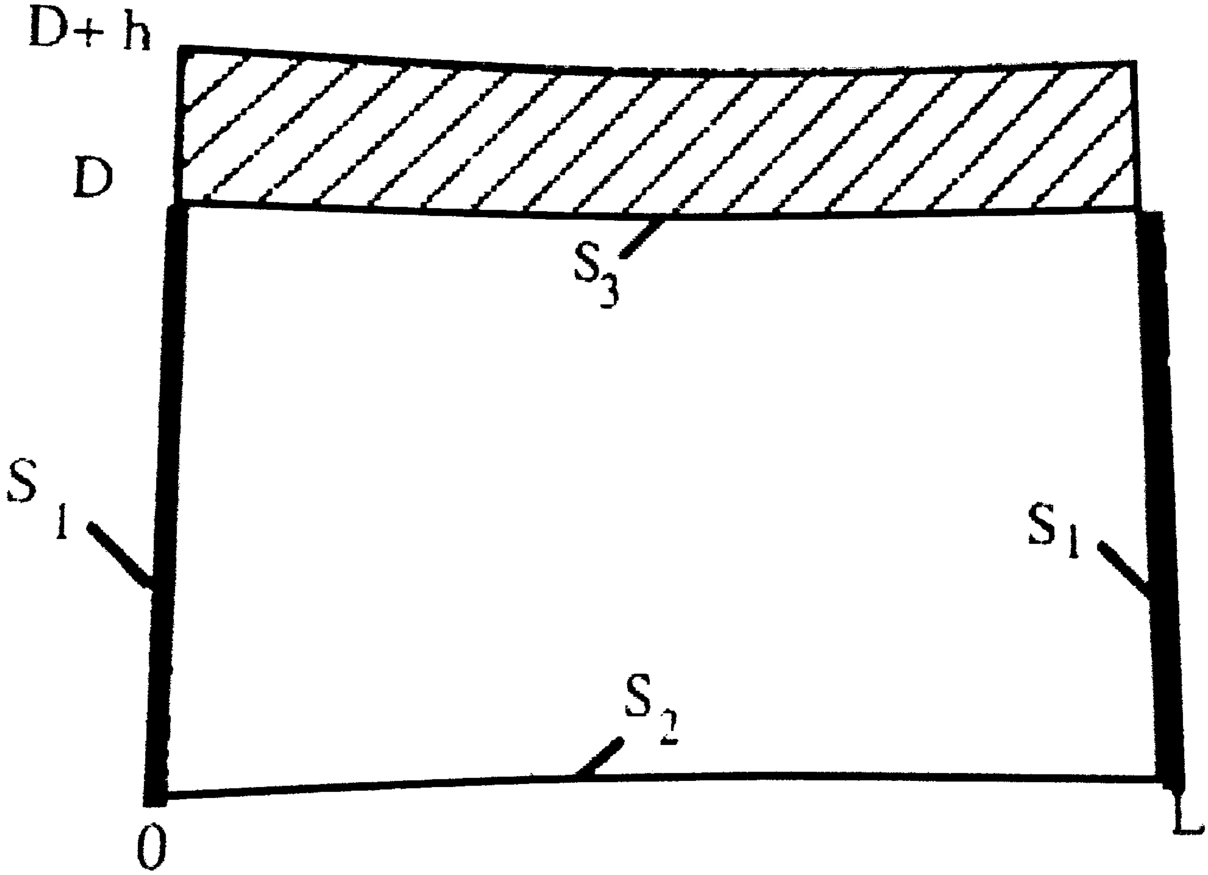


FIGURE 3.1 –

On va montrer :

Théorème 3.1 *Supposons que l'on soit aussi sous les hypothèses du théorème 2.1,alors il existe une seule solution (u, g) à (P) . Il est donné par*

(i) si $0 \leq \beta(h) \leq 1 (u, g) = (x_2, 1 - \beta(h))$

(ii) si $\beta(h) > 1 (u, g) = ((\alpha + 1)x_2, 0)$

où est le réel dans $(0, h/D)$ *tel que* $\beta(h-\alpha D) = (\alpha+1)^{q-1}$.*(Notez que g n'est pas toujours une fonction caractéristique d'un ensemble).*

Démonstration. On suppose que $0 \leq \beta(h) \leq 1$.
Soit $\xi \in W^{1,q}(\Omega), \xi \geq 0$ sur S_2,alors si $(u, g) = (x_2, 1-\beta(h))$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{q-2} \nabla u.\nabla\xi - g\xi_{x_2} dx - \int_{S_2} \beta(h, u).\xi d\sigma(x)$$

$$= \int_\Omega \beta(h).\xi_{x_2} d\sigma(x) - \int_{S_3} \beta(h)\xi d\sigma(x) = -\int_{S_3} \beta(h)\xi d\sigma(x) \leq 0.$$

Donc $(x_2, 1-\beta(h))$ est une solution de (P).
Soit (u', g') une outre solution.Si $(.)^+$ désigne la partie positive d'une fonction ,$\pm(u' - x_2)^+$ est une fonction de test pour (P),alors

$$\int_\Omega \left|\nabla u'\right|^{q-2} \nabla u'.\nabla(u' - x_2)^+ - g'(u' - x_2)^+_{x_2} dx$$

$$= \int_{S_3} \beta(\psi - u')(u' - x_2)^+ d\sigma(x).$$

(ii) Nous supposant $\beta(h) > 1$. Ensuite , on considéré l'application
$f : t \longmapsto \beta(h - tD) - (1+t)^{q-1}$,
nous avons
$f(0) = \beta(h) - 1 > 0, \quad f(\frac{h}{D}) = -(1+\frac{h}{D})^{q-1} < 0.$
Donc,il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$, i,e $\beta(h-\alpha D) = (\alpha+1)^{q-1}$,
Vérifions que $((\alpha+1)x_2, 0)$ est une solution de (P).
Soit $\xi \in W^{q-1}(\Omega), \xi \geq 0$ sur S_2.Alors

$$\int_\Omega |\nabla((\alpha+1)x_2)|^{q-2} \nabla((\alpha+1)x_2).\nabla\xi dx - \int_{S_3} \beta(\psi - (\alpha+1)D).\xi d\sigma(x)$$

$$= \int_\Omega (\alpha+1)^{q-1}\xi_{x_2} dx - \int_{S_3} \beta(h-\alpha D).\xi d\sigma(x)$$

$$= \int_{S_3} ((\alpha+1)^{q-1}\xi_{x_2} - \beta(h-\alpha D)).\xi d\sigma(x) - \int_{S_2} (\alpha+1)^{q-1}\xi d\sigma(x) \leq 0.$$

Montrons que $((\alpha+1)_{x_2}, 0)$ est unique solution de (P).
On note de (u', g') une outre solution . $\xi = \pm(u' - (\alpha+1)x_2)$ est une fonction de test pour (P),donc

$$\int_\Omega \left|\nabla u'\right|^{q-2} \nabla u'.\nabla(u' - (\alpha+1)x_2) - g'(u' - (\alpha+1)x_2)_{x_2} dx$$

$$= \int_{S_3} \beta(\xi - u').(u' - (\alpha+1)x_2) d\sigma(x). \tag{3.6}$$

De plus, on peut vérifier que

$$\int_\Omega |\nabla((\alpha+1)x_2)|^{q-2}\,\nabla((\alpha+1)x_2).\nabla(u^{'}-(\alpha+1)x_2)dx$$

$$=\int_{S_3}\beta(\psi-(\alpha+1)x_2).(u^{'}-(\alpha+1)x_2)d\sigma(x) \qquad (3.7)$$

En soustrayant (3.7) de (3.6) ,nous obtenons(rappelons que $g^{'}=0$ sur $u^{'}>x_n$) :

$$\int_\Omega(|\nabla u'|^{q-2}\nabla u'-|\nabla((\alpha+1)x_2)|^{q-2}\nabla((\alpha+1)x_2)).\nabla(u'-(\alpha+1)x_2)dx$$

$$\leq\int_\Omega g^{'}(-\alpha)dx+\int_{S_3}(\beta(\psi-u^{'})-\beta(\psi-(\alpha+1)x_2)).$$

$(u^{'}-(\alpha+1)x_2)d\sigma(x)\leq 0.$

D'aprés le lemme (2.3) on obtient

$$(i)\qquad \int_\Omega\left|\nabla(u^{'}-(\alpha+1)x_2)\right|^q dx\leq 0\quad \text{si}\quad q>2,$$

$$(ii)\qquad \int_\Omega\frac{\left|\nabla(u^{'}-(\alpha+1)x_2)\right|^2}{(|\nabla u^{'}|+|\nabla(\alpha+1)x_2|)^{2-q}}dx\leq 0\quad \text{si}\quad 1<q\leq 2.$$

Donc : $\nabla(u^{'}-(\alpha+1)x_2)=0$ a,e dans Ω et

$$u^{'}=(\alpha+1)x_2 \quad \text{a.e dans}\Omega \qquad (3.8)$$

Maintenant de (3.1) et (3.8) on obtient :

$$g^{'}_{x_2}=0 \quad \text{et } g^{'}=g^{'}(x_1). \qquad (3.9)$$

Soit $\xi\in W^{1.q}(\Omega),\xi=0$sur S_2. $\pm\xi$ est une fonction de test pour (P).

Donc ,en utilisant (3.8) et (3.9) on abtenir

$$\int_\Omega(\alpha+1)^{q-1}\xi_{x_2}-g^{'}(x_1)\xi_{x_2}dx=\int_{S_3}\beta(h-\alpha D).\xi d\sigma(x)$$

$$\text{Alors}\quad \int_\Omega((\alpha+1)^{q-1}-g^{'}(x_1)\xi)-x_2dx=\int_{S_3}\beta(h-\alpha D).\xi d\sigma(x).$$

Puis en intégrant en x_2,

$$\int_{S_3}\left((\alpha+1)^{q-1}-g^{'}(x_1)\right)\xi d\sigma(x)=\int_{S_3}\beta(h-\alpha D).\xi d\sigma(x).$$

Ceci tentant pour tout $\xi\in W^{1,q}(\Omega),\xi=0$ sur S_2,on obtient

$$(\alpha+1)^{q-1}-g^{'}(x_1)=\beta(h-\alpha D)\quad \text{et}\quad g^{'}(x_1)=0.$$

Ainsi $(u^{'},g^{'})=((\alpha+1)_{x_2},0)$. Ceci complète la prouve d'unicité dans ce cas. ■

Conclusion

Nous avons présenté une étude sur un problème de barrage avec des conditions de fuite. Cette étude a été abordée dans le deuxième chapitre, tandis que la base de l'article se trouve dans la référence [9]. Bien que notre étude ne couvre qu'une partie du problème, elle constitue une avancée significative et ouvre la voie à de futures recherches dans ce domaine.

Bibliographie

[1] Adams, R.A., Sobolove Space.Acadimice Press, New York, 1975.

[2] Alt, H.W.,A free boundary problem associated with the follow of ground water',Arch .Rat.Mech.Anal., 64,111-126(1977).

[3] Alt ,H.W., Stromunger durch inhomogene porose Medien mit freiem Rand',J.Reine Angewandte Math .**305**, 89-115(1979) .

[4] Bsaiocchi,C., Free boundary problems in the theoryof fluid flow through porous media',Proc.Int.Congr.of Mathematicians, Vancouver,pp.237-243,1979 .

[5] Bsaiocchi,C., Free boundary problems in fluid folows through porous median and variational inequalites',in :Free boundary problems-Proc.Seminar held in Pavia,Sept.-Oct.1979,Vol 1, Roma, 1980, 175-191.

[6] Brezis,H., Kinderlehrer, D. and Stampacchia,G.,'Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue, C.R.Acd.Sci Paris Ser.A.**287** ,711-714(1978) .

[7] Brezis,H.,Analyse fonctionnelle .Théorie et applications.Masson,Paris ,1987 .

[8] Carrillo,J.and Chipot,M.,'On the dam problem ',J,Differentiel Equations,**45**,234-271(1982).

[9] Carrillo,J.and Chipot,M.,'The dam problem with leaky boundary conditions, Appl.Math.Optim.,**28**,57-85(1993).

[10] Chipote,M.,Variational Inequalites and Flow in Porous Media,Springer,Berline,1984.

[11] Diaz,J.I.,'Non Linear Partial Diffirential Equations and Free Boundaries.Vol I :Elliptic Equations,Pitman Research Notes in Mathematics,Pitman, 1985.

[12] Dongming Wei,'An existence theorem for weak solution of a nonlinear dam problem',preprint.

[13] Friedman,A.,Variational Principles and Free-Boundary Problems,Robert E.Krieger Publishing Company, Malabar,FL,1988.

[14] Gilbarg,D and Trudinger, N.S.,Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,Springer,New York,1977 .

[15] Lyaghfouri, A., Sur quelques problèmes d'écoulements dans les milieux poreux',Thesis, University of Metz ,June 1994.

[16] Rodrigues,J.F., On the dam problem with leaky boundary condition, Portugaliae Math.,**39**,Facs 1-4,399-411(1980).

ملخص

نعتبر مسألة السد الترابي، المتعلقة بقانون دارسي غير الخطي، في ميدان محدود من $\mathbb{R}^n$. نهتم وجود حل لهذه المسألة وذلك بدراسة مسألة تقريبية لها، باستعمال نظرية النقطة الصامدة لشاودر، ثم المرور إلى النهاية. وفي الأخير ندرس الوحدانية في حالة خاصة.

كلمات مفتاحية: مسألة السد الترابي، قانون دارسي، وجود ووحدانية.

Résumé

On considère un problème de la digue, associé à un lois de Darcy non linéaire, dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. On s'interress à étudier l'existence de ce problème en étudiant un problème approché, l'existence est prouvé d'après un théorème de point fixe de Schauder, puis on passe à la limite. Enfin, on traite l'unicité dans une cas particulière.

Mots clés : Problème de la digue, lois de Darcy, existence et unicité

Abstract

We consider a problem of a dam, associated with a nonlinear Darcy law, in a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. We aim to study the existence of this problem by investigating an approximate problem, whose existence is proven using a fixed-point theorem of Schauder, and then taking the limit. Finally, we address uniqueness in a specific case.

Keywords: Dam problem, Darcy laws, existence and uniqueness.