Résolution numérique d'une équation diff érenntielle parune méthode spectrale

REDAOUI MERIEM

Table des matières

Introduction **v**

1 Equations différentielles ordinaires **1**
- 1.1 Définitions générales . . . 1
- 1.2 Le problème de Cauchy . . . 2
- 1.3 Problèmes aux limites . . . 3
  - 1.3.1 Le problèmede Dirichlet (premier problème aux limites) 3
  - 1.3.2 Le problème de Neumann (deuxième problème aux limites) . . . 4
  - 1.3.3 Le problème mixte de Dirichlet-Neumann (troisième problème aux limites) . . . 4
- 1.4 EDO à variables séparées . . . 4
  - 1.4.1 Résolution de l'équation à variable séparée : . . . 5
- 1.5 Équations différentielles linéaires : . . . 5
- 1.6 EDO du 1^{er} ordre : . . . 7
  - 1.6.1 Résolution d'une EDO du 1^{er} ordre . . . 8
  - 1.6.2 Équations de Bernoulli et équations de Riccati . . . 9
- 1.7 EDO 2^{nd} ordre à coefficients constants . . . 11
  - 1.7.1 Résolution d'une EDO 2^{nd} ordre . . . 12

2 les Polynômes orthogonaux **15**
- 2.1 Introduction : . . . 15
- 2.2 Polynômes orthogonaux . . . 16
  - 2.2.1 Relation de récurrence . . . 17
- 2.3 Polynôme de Legendre . . . 18
  - 2.3.1 Quelques propriétés : . . . 21
- 2.4 Quadrature de Gauss-Lobatto . . . 23

2.5 l'approximation d'une fonction en série de legendre . . . 24

3 Méthodes d'approximations spectrale 27

3.1 Introdction 27

3.2 Analyse de la convergence : 28

3.3 Application de la méthode spectrale-collocation dans EDO 28

3.4 Illustration par des exemple : 30

conclusion 35

Bibliographie 36

Introduction

Les équations différentielles interviennent dans plusieurs domaines de science et de technologie, un nombre de lois naturelles inclus plusieurs formes de physique clasique, chimique et economique, peuvent être formulées sous la forme d'une équation différentielle

Une équation différentielle est une équation mathematique pour une fonction inconnue d'une ou plusieurs variables qui regroupe les valeurs de la fonction elle même et les dérivées.

Exemples :

$$m\frac{dv}{dm} + v = v^2 \tag{1}$$

cette équation se produit dans les problèmes sur la fausée et l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

est la fameuse l'équation de Laplace qui modèlise les phénomènes de la chaleur, l'électricité, la théorie de potentiel, de gravitation, et aérodynamique,et l'équation suivante se pose dans la théorie de la conduction de chaleur, également dans la diffusion des neutrons dans une pile atomique pour la production d'énergie nucléaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

$$my^{''} + cy^{'} + ky = 0 \tag{4}$$

et cette équation peut s'étendre à des applications larges dans le domaine de la mécanique ,en ce que concerne un mouvement harmonique simple ,comme dans les petites oscillations du pendule simple :

$$y^{''} - 2xy^{'} + 2\lambda y = 0, \qquad \left(1 - x^2\right) y^{''} - 2xy^{'} + \lambda(\lambda + 1)\, y = 0$$

$$\left(1-x^{2}\right)y^{''}-xy^{'}+\lambda^{2}y=0$$

sont connus comme équation de Hermite, équation de Legendre ,et équation de Chebyshev, respectivement.

le but de ce projet est l'étude les équations mathematiques

$$A\varphi = f$$

par la méthode spectrale ,telle que A est un operateur différentiel, la solution φ est géneralement difficile a trouver, donc on cherche un solution approchée $\tilde{\varphi}$ c'est à dire $(\tilde{\varphi} \simeq \varphi)$.

$$\forall \tilde{\varphi} \in P_n \quad : \tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_i(x)$$

la base $\{1, t, t^2, ..., t^n\}$ est la base canonique de P_n (l'espace de polynômes), et admet plusiuers bases comme par exemple : *jacobi,Bernstein,legendre ,etc,.....*

Ce mémoire se compose de trois chapitres uniquement. Dans le premier chapitre on donne une petite introduction sur les équations différentielles du premier et sec-ond ordre, le problème de Cauchy et les problèmes aux limites. Dans le deuxiéme chapitre on donne la définition des polynômes de legendre, bien sûr avec leurs propriétés, on présente les quadratures de Gauss-Lobatto, enfin l'approximation d'une fonction continue en série de legendre.

Dans le troisième chapitre, on a donné quelques exemples numériques pour vérifier la précision entre le solution et les solutions approchées

Chapitre 1

Equations différentielles ordinaires

1.1 Définitions générales

On appelle équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante x et la fonction inconnue $y = \varphi(x)$ et ses dérivées $y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}$.

Symboliquement

Définition 1 *l'équation différentielle d'ordre n est représentée comme suit*

$$F(x, y, y^{'}...., y^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables. Nous ne considérons que le cas où x et y sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une solution por une telle équation différentielle sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y \in C^n(I; \mathbb{R})$ (une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois continûment dérivable) telle que pour tout $x \in I$, on ait $F(x, y(x), y^{'}(x)...., y^{(n)}(x)) = 0$

Définition 2 *On appelle ordre d'une l'équation différentielle l'ordre le plus élevé de la dérivée dans cette équation*

Ainsi,

$$y^{'} - 2xy^2 + 5 = 0$$

est une équation du premier ordre.et

$$y^{''} + ky^{'} - by - \sin x = 0$$

est une équation du second ordre, etc.

1.2 Le problème de Cauchy

Le problème de Cauchy (aussi appelé problème aux valeurs initiales) consiste à trouver la solution d'une EDO, scalaire ou vectorielle, satisfaisant aux conditions initiales, pour exemple, dans le cas scalaire, si I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant le point x_0, le problème de Cauchy associé à une EDO du premier ordre s'écrit :

trouver une fonction réelle $y \in C^1(I)$ telle que

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

où $f(x, y)$ est une fonction donnée à valeur réelle définie sur le produit $S = I \times \left]-\infty, +\infty\right[$ et continue par rapport aux deux variables. Si f ne dépend pas explicitement de x (i.e.$f(x, y) = f(y)$), l'équation différentielle est dite autonome

On obtient en intégrant (1.2) entre x_0 et x

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau \tag{1.3}$$

La solution de (1.2) est donc de classe C^1 sur I et satisfait l'équation intégrale (1.3). Inversement, si y est définie par (1.3), alors elle est continue sur I et $y(x_0) = y_0$. De plus, en tant que primitive de la fonction continue $f(\cdot, y(\cdot)), y \in C^1(I)$ et satisfait l'équation différentielle $y'(x) = f(x, y(x))$.

Ainsi, si f est continue, le problème de Cauchy (1.2) est équivalent à l'équation intégrale (1.3). Nous verrons plus loin comment tirer parti de cette équivalence pour les méthodes numériques.

Rappelons maintenant deux résultats d'existence et d'unicité pour l'équation (1.2)

1. **Existence locale et unicité :** On suppose $f(x, y)$ localement lipschitzienne en (x_0, y_0) par rapport à y, ce qui signifie qu'il existe une boule ouverte $J \subseteq I$ centrée en x_0 de rayon r_J ,et une boule ouverte K centrée en y_0 de rayon r_K et une constante $L > 0$ telles que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,, \quad \forall x \in J, \forall y_1, y_2 \in K \tag{1.4}$$

Sous cette hypothèse, le problème de Cauchy (1.2) admet une unique solution dans une boule ouverte de centre x_0 et de rayon r_0 avec $0 < r_0 <$

$\min\left(r_J, \frac{r_K}{M}, \frac{1}{L}\right)$, où M est le maximum de $|f(x,y)|$ sur $J \times K$. Cette solution est appelée solution locale.

Remarquer que la condition (1.4) est automatiquement vérifiée si la dérivée de f par rapport à y est continue : en effet, dans ce cas, il suffit de prendre pour L le maximum de $|\partial f(x,y)/\partial y|$ sur $\overline{J \times K}$.

2. Existence globale et unicité : Le problème de Cauchy admet une solution globale unique si on peut prendre dans (1.4)

$$J = I, K = \mathbb{R},$$

c'est-à-dire, si f est uniformément lipschitzienne par rapport à y.

1.3 Problèmes aux limites

Soit $[-1,1]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\{-1,1\}$ les bords de cet intevalle. On considère un opérateur différentiel A et l'équation

$$\begin{array}{rcl} Au & = & f \\ A & : & X \longrightarrow X \end{array}$$

Pour résoudre cette équation dans laquelle u est l'inconnue et f une donnée sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$, on lui associe des conditions aux limites

1.3.1 Le problèmede Dirichlet (premier problème aux limites)

On cherche une solution de l'équation qui prend des valeurs données sur les bords de $[-1,1]$. Ce qui revient à chercher donc la solution du système

$$\begin{cases} Au = f & x \in [-1,1] \\ u = g & x \in \{-1,1\} \end{cases}$$

f est une fonction continue.

1.3.2 Le problème de Neumann (deuxième problème aux limites)

On cherche une solution de l'équation différentielle dont on connaît la valeur du gradient sur le bord du domaine de résolution. Notant n la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de $[-1, 1]$, on cherche donc à résoudre le problème

$$\begin{cases} Au = f & x \in [-1,1] \\ D_n u = g & x \in \{-1,1\} \end{cases}$$

expression dans laquelle on a noté $D_n = \dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n.$

1.3.3 Le problème mixte de Dirichlet-Neumann (troisième problème aux limites)

On cherche une fonction qui vérifie la troisième condition au bord

$$\begin{cases} Au = f & x \in [-1,1] \\ u + D_n u = g & x \in \{-1,1\} \end{cases}$$

Remarque 3 *l'equations différentielle a des solutions analytiques y par la méthode de séparation des variables.*

$$y = u(x)v(x)$$

1.4 EDO à variables séparées

Définition 4 *Une équation différentielle de* 1^{er} *ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme*

$$f(y)y' = g(x)$$

par exemple

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{x+2}$$

1.4.1 Résolution de l'équation à variable séparée :

Une telle équation différentielle peut être intégrer facilement en effet, on écrit $y^{'} = \dfrac{dy}{dx}$, puis, symboliquement

$$f(y).dy = g(x).dx \iff \int f(y).dy = \int g(x).dx + C$$

On écrit ici explicitement la constante d'intégration arbitraire $C \in \mathbb{R}$

Il s'agit donc d'abord de trouver les primitives F et G de f et de g, et en suite d'exprimer y en terme de x (et de C) :

$$F(y) = G(x) + C \iff y = F^{-1}(G(x) + C)$$

C'est pour cette raison que l'on dit aussi intégrer pour résoudre une équation différentielle.

Remarque 5 *Une équation de la forme*

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

est appelée une équation à variables séparables. Elle peut être ramenée à une équation à variables séparées en divisant les deux membres par l'expression $N_1(y)M_2(x)$

1.5 Équations différentielles linéaires :

Définition 6 *Une équation différentielle d'ordre* n *est linéaire ssi elle est de la forme*

$$L(y) = f(x) \tag{1.5}$$

avec

$$L(y) = a_0(x)y + a_1(x)y^{'} + a_2(x)y^{''} + ... + a_n(x)y^{(n)} \tag{1.6}$$

Proposition 7 *L'application* $L : C^n \to C^0$ *qui à la fonction* y *associe la nouvelle fonction* $L(y)$*, est une application linéaire.*

En effet

$$\begin{aligned} L(y+z) &= \sum_{i=0}^{n} a_i(x)(y+z)^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} \sum_{i=0}^{n} a_i(x)z^{(i)} \\ &= L(y) + L(z) \end{aligned}$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(\lambda y) &= \sum_{i=0}^{n} a_i(x)(\lambda y)^{(i)} \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} \\ &= \lambda L(y) \end{aligned}$$

Définition 8 *L'équation différentielle*

$$L(y) = 0 \tag{1.7}$$

s'appelle équation homogéne associée à équation différentielle linéaire

Proposition 9 *L'ensemble S_0 des solutions de (1.7) est le noyau de l'application linéaire L, c'est donc un sous-espace vectoriel de $C^n(\mathbb{R})$. L'ensemble S des solutions de (1.5) est donné par*

$$S = y_p + S_0 = \{y_p + y_h; y_h \in S_0\} \quad \text{avec } L(y_p) = f(x)$$

c'est à dire les solutions sont de la forme $y = y_p + y_h$, ou y_p est une solution particulière de équation linéaire, et y_h parcourt toutes les solutions de l'équation homogène

Remarque 10 *Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de (1.5), alors $y_1 - y_2$ est solution de (1.7), et la solution générale de (1.5) est*

$$y = y_1 - c(y_1 - y_2), \qquad c \in \mathbb{R}$$

On ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles. On se concentre dans ce chapitre sur deux types d'équations : les équations différentielles linéaires du premier ordre et celles du second ordre à coefficients constants.

1.6 EDO du 1^{er} ordre :

Définition 11 *Une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme*

$$a(x)y^{'} + b(x)y = c(x) \tag{1.8}$$

ou a, b, c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et on demande $\forall x \in I; a(x) \neq 0$.

A cette équation différentielle on peut associer la même équation avec $c = 0$:

$$a(x)y^{'} + b(x)y = 0 \tag{1.9}$$

C'est l'équation homogène associée à l'équation différentielle linéaire, ou équation sans second membre.

par exemple

$$y^{'} + y \tan x = \cos^2 x$$

l'équation différentielle homogène correspondante est

$$y^{'} + y \tan x = 0$$

Théorème 12 (existence de Peano's) *soit $R(a, b)$ est une rectangle dans plan xy et le point (x_0, y_0) est intérieur, tels que*

$$R(a, b) = \{(x, y) : |x - x_0| < a, |y - y_0 < b|\}$$

si $f(x, y)$ est continue et $|f(x, y)| < M$ en tout points $(x, y) \in \mathbb{R}$, puis le problème aux valeurs initiales a $y(x)$ un solution, que est définie pour tout x sur l'intervalle $|x - x_0| < c$, où $c = \min\{a, b/M\}$

Démonstration. voir [5 ; p :12] ■

Théorème 13 (unicité de picard et lindelöf) *Sous les hypothèses du théorème de Peano et si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est continue et bornée pour tout points (x, y) dans R, alors le problème aux valeurs initiales a une solution unique $y(x)$, qui est difinie pour tout x sur un intervalle $|x - x_0| < c$*

Démonstration. voir [5 ; p :12] ■

Proposition 14 *:L'ensemble des solutions S_0 de (1.9) est un s.e.v. des fonctions $C^1(I)$ L'ensemble des solutions S de (1.8) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (1.9) une solution particuliére quelconque de (1.8).*

1.6.1 Résolution d'une EDO du 1^{er} ordre

La procédure se fait en deux étapes :

Résolution de l'équation homogène

En effet, l'équation homogène est une équation différentielle à variables séparées, en l'écrivant $\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$. En l'intégrant, on obtient

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \int -\frac{b(x)}{a(x)} dx + C \\ y &= K\exp(F(x)) \quad , K \in \mathbb{R} \quad , F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)} \end{aligned}$$

avec $K \in \{\pm \exp C\}$

Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante.

Cette méthode est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitive

La solution générale de l'équation homogène est donnée par $y = K\exp(F(x))$ avec $K \in \mathbb{R}$ une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y = K(x)\exp(F(x))$, avec K une fonction à déterminer pour que y soit une solution de l'équation linéaire.

Puisque $F' = \frac{-b}{a}$ on a :

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{b(x)}{a(x)} K(x)\exp F(x) + K'(x)\exp F(x) \\ &= -\frac{b(x)}{a(x)} y(x) + K'(x)\exp F(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$y^{'}(x) + \frac{b(x)}{a(x)}y(x) = K^{'}(x)\exp F(x)$$

On trouve que y est une solution si et suelment si

$$K^{'}(x)\exp\left(F(x)\right) = \frac{c(x)}{a(x)}$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad K^{'}(x) = \frac{c(x)}{a(x)}\exp\left(-F(x)\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)}\exp\left(-F(x)\right)dx \end{aligned}$$

Une solution particulière est donc

$$y = \exp F(x) \int \frac{c(x)}{a(x)}\exp(-F(x))dx$$

et la solution générale est donc

$$y = \exp F(x)\left(K + \int \frac{c(x)}{a(x)}\exp(-F(x))dx\right) \quad , \quad K \in \mathbb{R} \quad ,$$
$$F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx$$

1.6.2 Équations de Bernoulli et équations de Riccati

Équations de Bernoulli :

on appelle équations de Bernoulli toute équations différentielles de la forme

$$y^{'} + a(x)y = b(x)y^n \tag{1.10}$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues de x (ou des constantes), avec la condition

$$n \neq 0 \quad \text{et} \quad n \neq 1$$

bien entendu, si $n = 0$ l'equation (1.10) devient un équation linéaire avec second membre

$$y' + a(x)y = b(x)$$

et, si $n = 1$ l'equation (1.10) devient un équation linéaire avec second membre

$$y' + (a(x) - b(x))y = 0$$

se ramène à une équation linéaire par la transformation suivante :

- Divisant tous les termes de l'équation par y^n, on obtient

$$y^{-n}y' + a(x)y^{1-n} = b(x)$$

- Faisons le changement de variables suivant

$$z = y^{1-n} \quad \text{alors} \quad z' = (1-n)y^{-n}y'$$

- On obtient en substituant dans l'équation

$$z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$$

C'est une équation linéaire.

Équations de Riccati :

on appelle équations de Riccati toute équations différentielles de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)y^2 + c(x)$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions continues de x (où des constantes), avec la condition

$$b(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad c(x) \neq 0$$

se ramène à une équation linéaire par la transformation suivante :

- Connaissons une solution particuliere $y_1(x)$ de équation de Riccati
- Substituons le changement de variable

$$y = y_1(x) + \frac{1}{z}$$

pour aboutir à une équation différentielle linéaire de la forme

$$z' + A(x)z = b(x)$$

où $A(x)$ est une fonction continue donnée par

$$A(x) = 2b(x)y_1(x) - a(x)$$

1.7 EDO 2^{nd} ordre à coefficients constants

On s'intéresse maintenant aux équations différentielles du 2^{nd} ordre, mais seules aux équations différentielles linéaires où les coefficients $a_{0,}a_1, a_2$ sont des constantes réelles.

Définition 15 *Équations différentielles linéaires du 2^{nd} ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme*

$$ay^{''} + by^{'} + c = f(x) \tag{1.11}$$

ou $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$, et $f \in C^0(I)$ (I ouvert de $\mathbb{R}$). L'équation homogène associée est

$$ay^{''} + by^{'} + c = 0 \tag{1.12}$$

Théorème 16 *Si dans l'équation*

$$y^{''} = f(x, y, y^{'})$$

la fonction $f(x, y, y^{'})$ et ses dérivées pàrtielles par rapport à'$y, y^{'}$sont continues dans un certain domaine contenant les valeurs $x = x_0, y = y_0, y^{'} = y_0^{'}$ il existe une solution et unè seule $y = y(x)$

Démonstration. voir[8 ; p :62] ■

Proposition 17 *: [6 ; p :20]*

•Les solutions à (1.12) sur I forment un e.v. de dimension 2 (sur$\mathbb{R}$), noté $S_2(I)$.

•Si y_1, y_2 sont deux solutions indépendantes de (1.12) ($\{y_1, y_2\}$ libre dans $S_2(I)$), alors $\{y_1, y_2\}$ est une base de $S_2(I)$, c'est à dire $S_2(I) = \{\alpha y_1 + \beta y_2; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 18 *Pour $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, le déterminant*

$$x \mapsto \omega(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) \end{vmatrix} \equiv y_1(x)y_2^{'}(x) - y_1^{'}(x)y_2(x)$$

est appelé le déterminant de Wronski ou wronskien des fonctions données

Théorème 19 *Si le déterminant de Wronski $\omega(x)$ des solutions y_1 et y_2 de l'équation linéaire homogène n'est pas nul en un point $x = x_0$ pour un $x_0 \in I$, alors $\omega(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, pour que $\{y_1, y_2\}$ soit linéairement indépendant et donc une base de $S_2(I)$*

Démonstration. voir[8 ; p :78] ■

1.7.1 Résolution d'une EDO 2^{nd} ordre

La procédure se fait eu deux étapes :

Résolution de l'équation homogène

On cherche la solution sous la forme $y = e^{rx}, r \in \mathbb{R}$, On a donc $y^{'} = ry$ et $y^{''} = r^2 y$, donc (1.11) devient

$$y(ar^2 + br + c) = 0$$

Définition 20 *L'´equation*

$$ar^2 + br + c = 0$$

s'appelle équation caractéristique de l'équation homogène

par exemple

$$y^{''} + y = x + \cos 3x$$

l'équation différentielle homogène correspondante est

$$y^{''} + y = 0$$

l'équation caractéristique de l'équation homogène.

$$r^2 + 1 = 0$$

Proposition 21 *Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants :*

$\Delta > 0$ *: l'équation caractéristique admet* 2 *racines réelles distinctes* $r_1 \neq r_2$, *et*

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad , \quad y_2(x) = e^{r_2 x} \qquad \textit{est une base de} S_2(I).$$

$\Delta = 0$ *: l'équation caractéristique admet* 1*racine double* $r \in \mathbb{R}$, *et*

$$y_1(x) = e^{rx} \quad , \quad y_2(x) = xe^{rx} \qquad \textit{est une base de} S_2(I)$$

$\Delta < 0$ *: l'équation caractéristique admet* 2 *racines complexes conjuguées* $r_1 = \alpha + i\beta$ *et* $r_2 = \alpha - i\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$, *et*

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad , \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \qquad \textit{est une base de} S_2(I)$$

Dans chacun des cas, la solution générale à (1.12) est donc $y = Ay_1 + By_2$ *avec* $A, B \in \mathbb{R}$.

Démonstration. voir[6 ; p :11] ■

Solution particulière :

On distingue encore 2 cas particuliers et une méthode générale :

$f(x) = e^{\alpha x} P(x)$ ou $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ (un polynôme).

On cherche la solution sous la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$, ou Q est un polynôme. dont on peut préciser le degré :

- ♣ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors $degQ = degP$
- ♣ si α est l'une des deux racines de l'équation caractéristique, alors $degQ = degP + 1$
- ♣ si α est racine double de l'équation caractéristique, alors $degQ = degP + 2$

Remarque 22 *:*

1. *Cette méthode s'applique notamment pour* $\alpha = 0$*, c-'à-d.* $f(x) = P(x)$
2. *.On peut aussi chercher une solution sous la forme* $y(x) = z(x) \exp \alpha x$*, où* z *est une fonction à déterminer , en remplaçant ceci dans (1.11), on obtient une équation différentielle pour* z*, dans laquelle on tire* z*. Ce procédé est en fait équivalent à la méthode de la variation de la constante.*

$$f(x) = M \cos \omega x + N \sin \omega x \qquad \text{où } \omega, M, N \in \mathbb{R}$$

On distingue encore une fois deux cas :

i. ω *n'est pas racine de l'équation caractéristique : Dans ce cas, les fonctions* $x \mapsto \cos \omega x, x \mapsto \sin \omega x$ *ne sont pas solutions de l'équation homogène. Une solution particuliére de (1.11) sera de la forme*

$$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

où les constantes $A, B \in \mathbb{R}$ *se déterminent par identification*

ii. ω *est racine de l'équation caractéristique, donc les fonctions* $x \mapsto \cos \omega x, x \mapsto \sin \omega x$ *sont solutions de l'équation homogène. Une solution particuliére de (1.11) sera de la forme*

$$y = x \left(A \cos \omega x + B \sin \omega x \right)$$

où les constantes $A, B \in \mathbb{R}$ *se déterminent par identification.*

Chapitre 2

les Polynômes orthogonaux

2.1 Introduction :

Les méthodes spectrales ont été utilisées pour l'approximation des solutions d'équations différentielles. Elles furent initialement introduites par l'utilisation des séries de Fourier tronquées qui ont été essentiellement utilisées pour l'approximation des problèmes avec des conditions aux limites périodiques, ensuite par l'utilisation des polynômes de haut degré formant des bases tensorisées des espaces d'approximations qui est une propriété fondamentale dans la construction des méthodes spectrales. L'approximation par les méthodes spectrales généralement fait appel à des polynômes de la famille des polynômes de Jacobi,

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k+\alpha}{l}\binom{k+\beta}{k-l}(x-1)^l(x+1)^{k-1}, \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{2.1}$$

par rapport à la fonction poids

$$\omega(x) = (x-1)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

Bien sûr, la nature et le choix des polynômes d'approximation dépendent particuliérement du domaine sur lequel on cherche la solution. On fait appel par exemple aux polynômes de Legendre (pour $\alpha = 0$ et $\beta = 0$),ou aux polynômes de Tchebycheff de premiére espéce (pour $\alpha = \frac{-1}{2}$ et $\beta = \frac{-1}{2}$) si on se place sur le segment $A = [-1, 1]$ dans le cas $1 - D$ et si on se place sur le carré $\Omega = [-1, 1]^2$ dans le cas $2 - D$.

En ce qui nous concerne, on ne va considérer que des problémes en $1 - d$. Cependant, le choix des polynômes, et la méthode d'approximation sont également soumis à certaines conditions qui dépendent dans la majorité des cas de la nature du problème à résoudre numériquement.

2.2 Polynômes orthogonaux

Soit $\omega(x)$, une fonction mesurable au sens de Lebesgue sur le domaine Ω, tel que $\displaystyle\int_\Omega \omega(x)dx > 0$ et on note par $L^2_\omega(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables telle que leur norme induite par le produit scalaire défini sur le même espace doit être borné. On définit la norme sur $L^2_\omega(\Omega)$ par

$$\|u\|_\omega = \left(\int_\Omega |u(x)|\,\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

qui est la norme induite par le produit scalaire défini sur le même espace par l'intégrale de Lebesgue- Steiltjes :

$$\langle u, v\rangle_\omega = \int_\Omega u(x)v(x)\omega(x)dx \tag{2.3}$$

un ensemble de polynômes $\{p_k\}_k$ est dit orthonormal si la relation

$$\begin{aligned} \langle p_i, p_j\rangle_\omega &= \int_\Omega p_i(x)p_j(x)\omega(x)dx \\ &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.4}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker

est vérifiée pour tout polynôme $p_i(x)$ dans $\{p_k\}_k$, Par suite, on dit que les polynômes $p_i \in \{p_k\}_k$, sont des polynômes orthogonaux (dans ce cas on dit orthonormaux) par rapport à la fonction poids $\omega(x)$, où, la famille des polynômes $\{p_k\}_k$ peut être construite par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à partir de la suite des polynômes $1, x, x^2, ..., x^n$. On note par la suite$P_N(A)$ l'espace des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à N et où A est l'intervalle$[-1, 1]$

Définition 23 *on dit que la famille de polynômes* $(p_i)_{i\geq 0}$ *est une famille de polynômes orthogonaux si :*
- *le degré de* P_i*est* i *pour tout entier* i
- $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \quad i \neq j \implies \langle p_i, p_j \rangle = 0$

2.2.1 Relation de récurrence

Pour toute suite de polynômes orthogonaux, il existe une relation de récurrence relativement à trois polynômes consécutifs

$$P_{n+1} = (x - a_n)P_n - b_n P_{n-1} \tag{2.5}$$

avac

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\displaystyle\int_\Omega x P_n^2(x)\omega(x)dx}{\displaystyle\int_\Omega P_n^2(x)\omega(x)dx} \\ b_n &= \frac{\displaystyle\int_\Omega x P_n(x) P_{n-1}(x)\omega(x)dx}{\displaystyle\int_\Omega P_{n-1}^2(x)\omega(x)dx} \end{aligned}$$

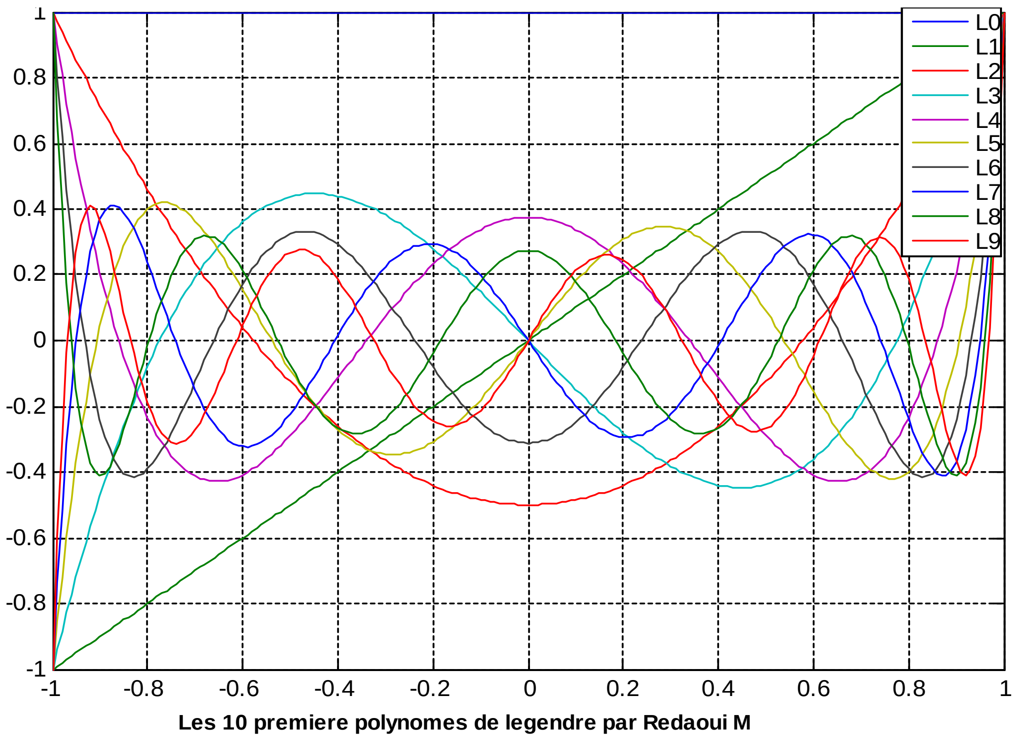
2.3 Polynôme de Legendre

Sur l'intervalle $[-1, 1]$, on appelle polynôme de Legendre ou le polynôme sphérique de degré n, le polynôme défini par la relation de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{cc} (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) & \\ L_0(x) = 1 & L_1(x) = x \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Les 10 premiers polynômes :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1 \\
L_1(x) &= x \\
L_2(x) &= (3x^2 - 1)/2 \\
L_3(x) &= (5x^3 - 3x)/2 \\
L_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \\
L_5(x) &= (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8 \\
L_6(x) &= (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16 \\
L_7(x) &= (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)/16 \\
L_8(x) &= (6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)/128 \\
L_9(x) &= (12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)/128
\end{aligned}$$



Figure(1)

Il existe une fonction MATLAB, de syntaxe d'appel

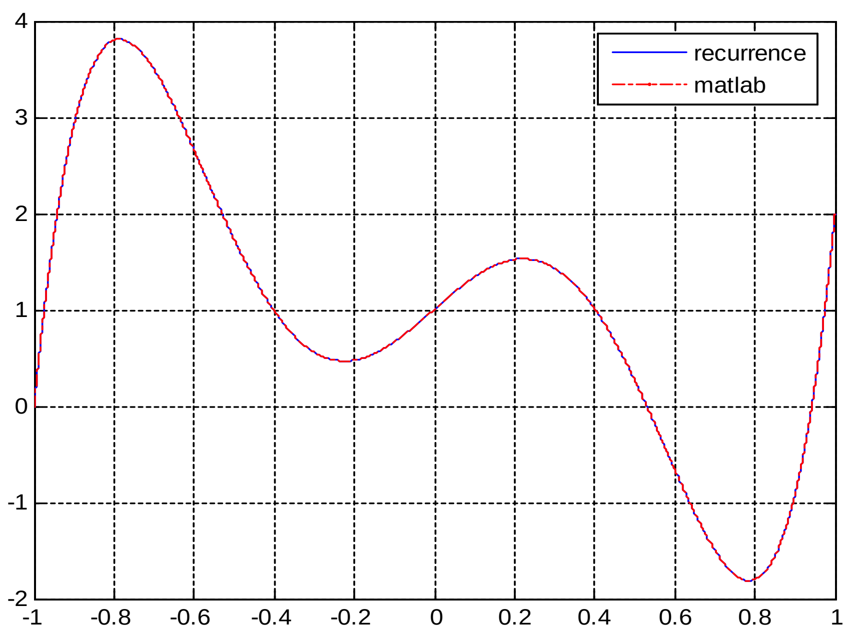
```
>>L=legendre(n,x)
```

qui renvoie un tableau L de $n+1$ lignes, dont la $(m+1)^{ième}$ ligne contient les valeurs de la function de legendre L_n^m définie par

$$L_n^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}L_n(x)$$

aux points spécifiés dans le vecteur x. Donc on peut calculer les valeurs du polynôme de Legendre avec cette fonction, en n'utilisant que la première ligne du tableau renvoyéen sortie. Une autre méthode d'évaluation de la combinaison linéaire consiste alors à appeler la fonction legendre pour tous les degrés de 0 à p, à extraire la première ligne de l'argument renvoyé et à le multiplier par le coefficient de la combinaison linéaire correspondant

```
>> c=[1;-2;0;0;0;3]          %les coefficient de la combinaison lineaire
>> L=legendre(0,x) ;         %polynome de Legendre de degre 0
>> y=c(1)*L(1,:) ;
%constraction que calcule la combinaison lineaire d'ordre 5
>> for i=1:5
>> L=legendre(i,x) ;
>> y=y+c(i+1)*L(1,:) ;
>> end
```



Figure(2) :graphe de la fonction $f(x) = L_0 - 2L_1 + 3L_5$

avec

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= x \\ L_5(x) &= (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8 \end{aligned}$$

2.3.1 Quelques propriétés :

1. Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y^{''} - 2xy^{'} + n(n+1)y = 0 \tag{2.7}$$

2. Les polynômes de Legendre satisfont la relation de récurrence

$$(1-x^2)L_n^{'}(x) = -nxL_n(x) + nL_{n-1}(x) \tag{2.8}$$

3. Formule de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n \tag{2.9}$$

4. Majorations :

$$\begin{aligned}
\forall x &\in [-1,+1]\,, |L_n(x)| \leq 1 & (2.10)\\
\forall x &\in [-1,+1]\,, \left|L_n^{'}(x)\right| \leq \frac{n(n+1)}{2}\\
\forall x &\in [-1,+1]\,, |L_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{8\pi n(1-x^2)}}\\
\frac{1-L_n^2(x)}{(2n-1)(n+1)} &\leq L_n^2(x) - L_{n-1}(x)L_{n+1}(x) \leq \frac{2n+1}{3n(n+1)}
\end{aligned}$$

5. Orthogonalité

Les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $\omega(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1,+1]$

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}\ , \qquad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \tag{2.11}$$

En particulier, la norme dans $L_2\left([-1,+1]\right)$.est

$$\|L_n\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

6. Symétrique

$$L_n(-x) = (-1)^n L_n(x), \quad \text{on particulier,} \;\; L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n \tag{2.12}$$

7. Relations de récurrence dérivées :

$$\begin{aligned}
(2n+1)L_n(x) &= L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x) \;, n \geq 1 \qquad (2.13)\\
L'_n(x) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \;impaur}}^{n-1} (2k+1)L_k(x)\\
L''_n(x) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \;impaur}}^{n-1} (k+\frac{1}{2})(n(n+1) - k(k+1)L_k(x)\\
(1-x^2)L'_n(x) &= \frac{n(n+1)}{2n+1}(L_{n-1}(x) - L_{n+1}(x))
\end{aligned}$$

8. Les valeurs limites des dérivés :

$$\begin{aligned}
L'_n(\pm 1) &= \frac{1}{2}(\pm 1)^{n-1} n(n+1) \qquad (2.14)\\
L''_n(\pm 1) &= (\pm 1)^n (n-1)n(n+1)(n+2)/8
\end{aligned}$$

9. Les polynômes de Legendre vérifient la relation

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2^{3/2}}{3n+1}$$

2.4 Quadrature de Gauss-Lobatto

D'une façon générale, les méthodes d'intégration numérique permettent de calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction quand on ne connaît pas sa primitive mais qu'on peut évaluer les valeurs de la fonction elle-même en un certain nombre de points.

Théorème 24 *:soit* $\{x_i;\omega_i\}_{i=0}^{N}$ *sont les zéros et les poids de Gauss-Lobatto*

$$\{x_i\}_{i=1}^{n} \text{ sont les zéros du polynôme} (1-x^2)L_N'$$

et les poids $\{\omega_i\}_{i=0}^{N}$*sont donnés par la relation :*

$$\omega_i(x) = \frac{2}{N(N+1)\left[L_N(x_i)\right]^2} \quad 0 \leq i \leq N \tag{2.15}$$

ensuite nous avons :

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i)\omega_i \ ; \ \forall p \in P_{2N-1} \tag{2.16}$$

Démonstration. voir [4,p96] ■

Les zéros$\{x_i\}_{i=1}^{n}$ sont les valeures propres de la matrice tridiagonal symétrique :

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & & & \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \sqrt{b_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{b_{m-1}} & a_{m-1} & \sqrt{b_m} \\ & & & \sqrt{b_m} & a_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_j &= 0 \\ b_j &= \frac{j(j+2)}{(2j+1)(2j+3)} \quad m = N-2 \end{aligned}$$

2.5 l'approximation d'une fonction en série de legendre

Pour une fonction $f \in L^2(-1,1)$, on définit

$$f(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + ... + a_n L_n(x) + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x)$$

En multipliant de $L_m(x)$ et en s'intégrant sur $[-1,1]$ (plus précisément, en formant l'intérieur le produit avec $L_m(x)$)donne

$$\int_{-1}^{1} f(x) L_m(x) dx = \int_{-1}^{1} L_m(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x) dx$$

le fait d'échanger l'ordre de sommation et d'intégration mène à

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x) L_m(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x) dx \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{2}{2m+1} \delta_{mn} \\ &= \frac{2a_m}{2m+1} \end{aligned}$$

l'utilisation de la propriété orthogonality, (2. 11). Cela le signifie

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) L_m(x) dx$$

et nous écrivons la série comme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) L(x) dx \right\} L_n(x)$$

On définit une approximation de la fonction f par sa série tronquée à l'ordre N

$$\mathcal{L}_N(f) = \sum_{n=0}^{N} a_n L_n \tag{2.17}$$

Cette approximation est exacte pour les polynômes de degré inférieurs à N puisque les $(L_n)_{n=0}^N$ forment une base orthogonale de P_n. Le calcul des coefficients a_n doit se faire par une formule de Gauss-Lobatto approchée.

Exemple 25 *:*
Soit $f(x) = \sin(6x)\exp(-x)$
dans cette exemple on comparé la fonctuon f *avec les série des legendre* $\mathcal{L}_6(f)$ *et* $\mathcal{L}_9(f)$

$$a_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1}\sin(6x)\exp(-x)L_m(x)dx$$

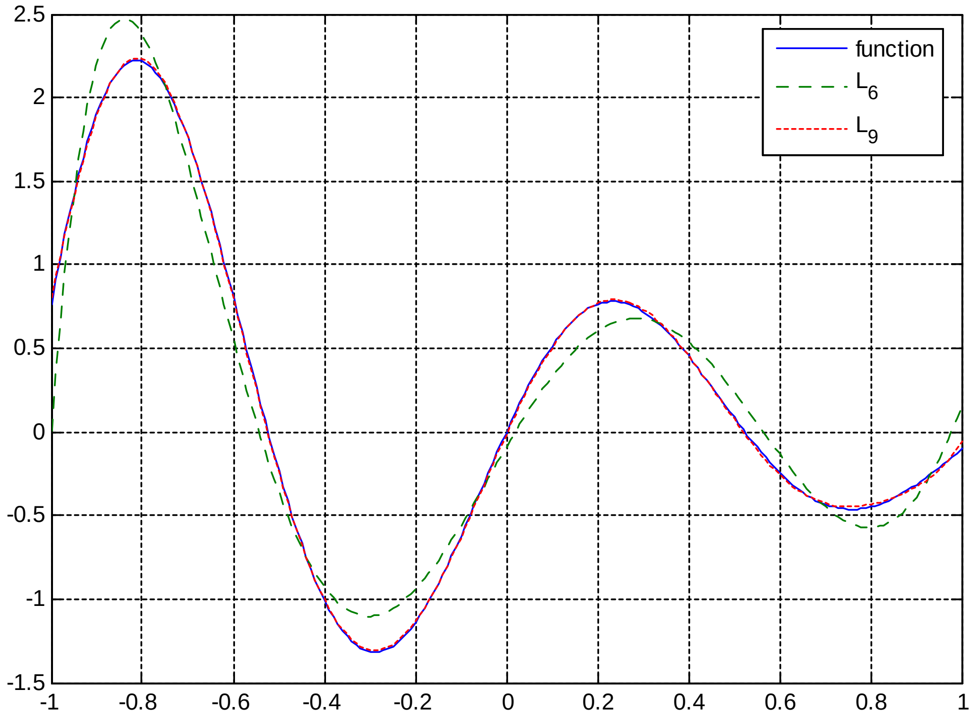
```
>> f=@(x) sin(6.*x).*exp(-x);
>> a0=1/2*quadl(f,-1,1)
```

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin(6x)\exp(-x)\cdot 1dx = 0.1947$$

$$a_1 = \frac{(2\cdot 1)+1}{2}\int_{-1}^{1}\sin(6x)\exp(-x)\cdot xdx = 0.75075$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{(2\cdot 2)+1}{2}\int_{-1}^{1}\sin(6x)\exp(-x)\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)dx \\ &= 0.8245 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \dots \\ a_4 &= \dots. \\ &\vdots \end{aligned}$$



Figure(3): Approximations de la fonction
$f(x) = sin(6x)exp(-x)$ *par* $\mathcal{L}_6(f)$ *et* $\mathcal{L}_9(f)$.

la série $\mathcal{L}_9(x)$ est très proche de la fonction $f(x)$ taudis que la série $\mathcal{L}_6(x)$ s'approche dans quelque points et éloigné d'autres

$$\mathcal{L}_6(f) = \sum_{n=0}^{6} a_n L_n$$
$$\mathcal{L}_9(f) = \sum_{n=0}^{9} a_n L_n$$

on remarque que plus qu'on augmente le nombre N plus qu'on une a meilleure précision

Chapitre 3

Méthodes d'approximations spectrale

3.1 Introdction

les méthodes spectrales sont des méthodes d'approximations des fonctions solutions d'équations différentielles et équations aux dérivées partielles.

Pour les fonctions périodiques on utilise les séries de fourier, et pour les fonctions non périodiques on utilise les polynômes orthogonaux :

les polynômes de jacobi, Legendre et Tchebychev dans $[a, b]$

les polynômes d'Hermite et les fonctions sinc dans $[-\infty, +\infty]$

les polynômes de laguerre sont utiles dans $[0, +\infty]$

En général l'approximation spectrale est de la forme :

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i p_i(x)$$

où les coefficients α_i sont à chercher

une méthode spectrale est caractérisée par une manière spécifique pour déterminer ces coefficients.

Pour la détermination des coefficients d'approximations par les méthodes spectrale, il y a en général trois techniques basées sur les méthodes d'approximation qui sont : la méthode d'approximation de Tau, la méthode d'approximation de Galerkin et la méthode d'approximation pseudo-spectrale (**méthode de collocation**).

3.2 Analyse de la convergence :

Théorème 26 ***erreur de troncation de legendre :***
suppose $f \in H^s(-1,1)$ pour environ $s \geq 1$. alors pour chaque nombre entier positif n

$$\|f - \mathcal{L}_N(f)\|_0 \leq cn^{-s} \|f\|_s$$

Démonstration. voir[10 ; p :246] ■

Théorème 27 ***troncation de legendre errer pour*** $H_0^s(\mathbf{-1}, \mathbf{1})$.
suppose $s \geq 1$ et $f \in H_0^1(-1,1) \cap H^s(-1,1)$. alors pour chaque nombre entier positif n

$$\left\|f - \mathcal{L}_{N,0}^1(f)\right\|_r \leq cn^{r-s} \|f\|_s \ , \qquad r = 0, 1$$

Démonstration. voir[10 ; p :252] ■

3.3 Application de la méthode spectrale-collocation dans EDO

nous considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned} Au(x) &= f \qquad x \in [-1,1] \\ B_\pm u(\pm 1) &= g_\pm \end{aligned} \tag{3.1}$$

où A un opérateur différentiel, et $B_\pm$ sont des opérateurs liéaires correspondant aux conditions aux limites Dirichlet, Neumann ou mixte, et les données f et $g_\pm$ sont donnés tels que le problème est bien posé

comme mentionné précédemment, la méthode de collocation force les résidus disparaissent point sagement à un ensemble de points déjà attribués, plus précisémet, que $\{x_j\}_{j=0}^N$ (avec $x_0 = -1$ et $x_N = 1$) soit un ensemble de points Gauss-Lobatto, et que P_N soit l'ensemble de tous les polynômes réels algébriques de degre $\leq N$. L'ideé principale de la méthode de collocation-spectrale est chercher la solution $u_N \in P_N$ dans quelques points tel que :

a. le résidu $R_N(x) = Au_N(x) - f(x)$ est égal à zéro aux points de collocation intérieur, à savoir

$$R_N(x_k) = Au_N(x_k) - f(x_k) = 0, \qquad 1 \leq k \leq N-1, \tag{3.2}$$

b. u_N remplit exactement les conditions aux limites c'est à dire

$$\begin{aligned} B_- u_N(x_0) &= g_- \\ B_+ u_N(x_N) &= g_+ \end{aligned} \tag{3.3}$$

la métode spectrale-collocation est généralementée dans l'espace physique en cherchant une solution approchée sous la forme

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i L_i(x) \tag{3.4}$$

où $\{L_i\}$ sont les polynômes de base legendre i.e.$L_i \in P_N$, par conséquent, insérant (3.4)dans(3.2) et(3.3) conduit au système linéaire

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N} [AL_i(x_k)]\, \alpha_i &= f(x_k), \qquad 1 \leq k \leq N-1, \\ \sum_{i=0}^{N} [B_- L_i(x_0)]\, \alpha_i &= g_- \\ \sum_{i=0}^{N} [B_+ L_i(x_N)]\, \alpha_i &= g_+ \end{aligned} \tag{3.5}$$

le systéme ci-dessus contient $N+1$ équations et $N+1$ unknowns, donc nous pouvons réécrire sous une forme matricielle.

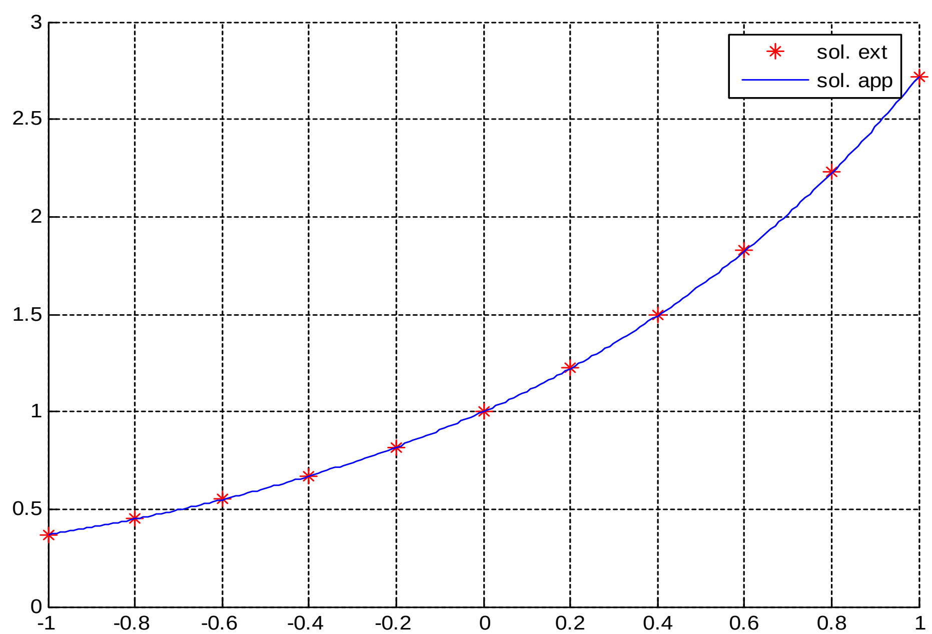
3.4 Illustration par des exemple :

Exemple 28 *Soit le problème suivante :*

$$\begin{cases} u' - u = 0 \\ u(-1) = e^{-1} \\ u(1) = e^{1} \end{cases}$$

la solution exacte est $u(x) = e^x$

x	$sol.ext$	$sol.app$	err
-1	0.3679	0.3679	0.0000
-0.8	0.4493	0.4503	0.0010
-0.6	0.5488	0.5503	0.0014
-0.4	0.6703	0.6716	0.0013
-0.2	0.8187	0.8196	0.0008
0	1.0000	1.0007	0.0007
0.2	1.2214	1.2226	0.0012
0.4	1.4918	1.4945	0.0026
0.6	1.8221	1.8264	0.0043
0.8	2.2255	2.2301	0.0046
1	2.7183	2.7183	0.0000

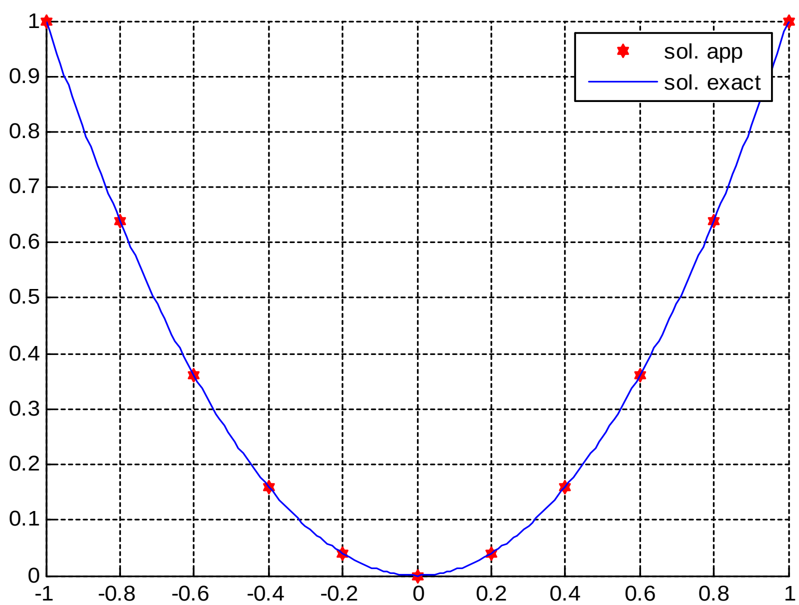


Exemple 29 *:*

$$\begin{cases} u^{''} + u^{'} = 2(2x+1) \\ u(-1) = u(1) = 1 \end{cases}$$

la solution exacte est $u(x) = x^2$

x	sol_ext	sol_app	err
-1	1.0000	1.0000	0
-0.8	0.6400	0.6400	0
-0.6	0.3600	0.3600	$0.0555e-015$
-0.4	0.1600	0.1600	0
-0.2	0.0400	0.0400	$0.0555e-015$
0	0	-0.0000	$0.0617e-015$
0.2	0.0400	0.0400	$0.0694e-015$
0.4	0.1600	0.1600	$0.1110e-015$
0.6	0.3600	0.3600	$0.1665e-015$
0.8	0.6400	0.6400	$0.2220e-015$
1	1.0000	1.0000	$0.2220e-015$

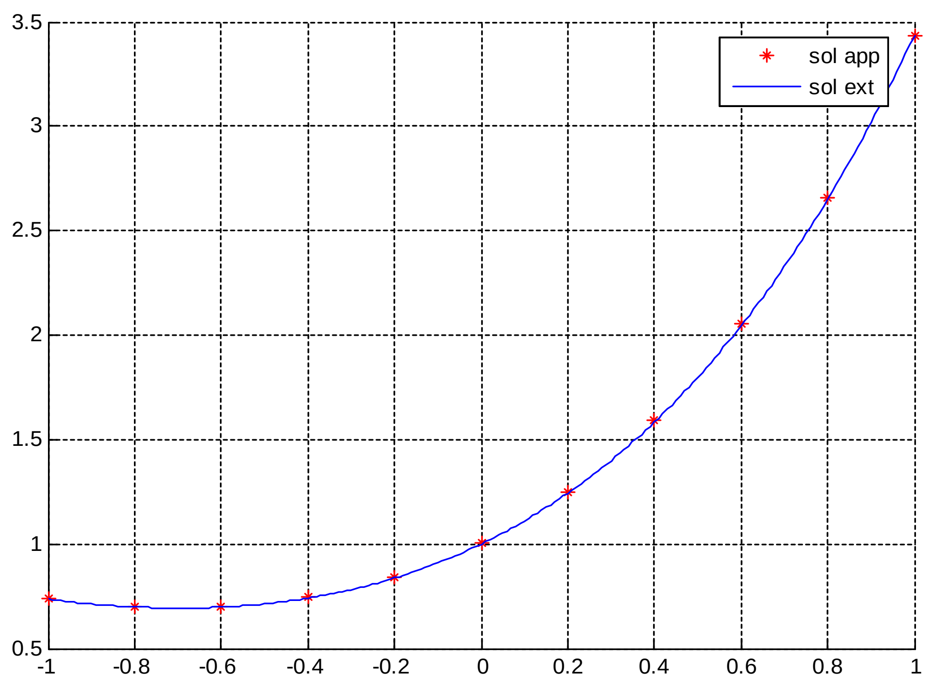


Exemple 30

$$\begin{cases} u - u' = x \\ u(-1) = 0.73 \\ u(1) = 3.43 \end{cases}$$

la solution exacte est $u(x) = 2\exp x - x - 1$

x	sol_ext	sol_app	err
-1	0.7358	0.7358	-0.0000
-0.8	0.6987	0.7007	0.0020
-0.6	0.6976	0.7005	0.0029
-0.4	0.7406	0.7432	0.0025
-0.2	0.8375	0.8391	0.0017
0	1.0000	1.0013	0.0013
0.2	1.2428	1.2452	0.0024
0.4	1.5836	1.5889	0.0053
0.6	2.0442	2.0529	0.0087
0.8	2.6511	2.6603	0.0092
1	3.4366	3.4366	0.0000



Exemple 31

$$\begin{cases} u^{''} = -\cos(x) \\ u(-1) = 0.54 \\ u(1) = 0.54 \end{cases}$$

la solution exacte est $u(x) = \cos(x)$

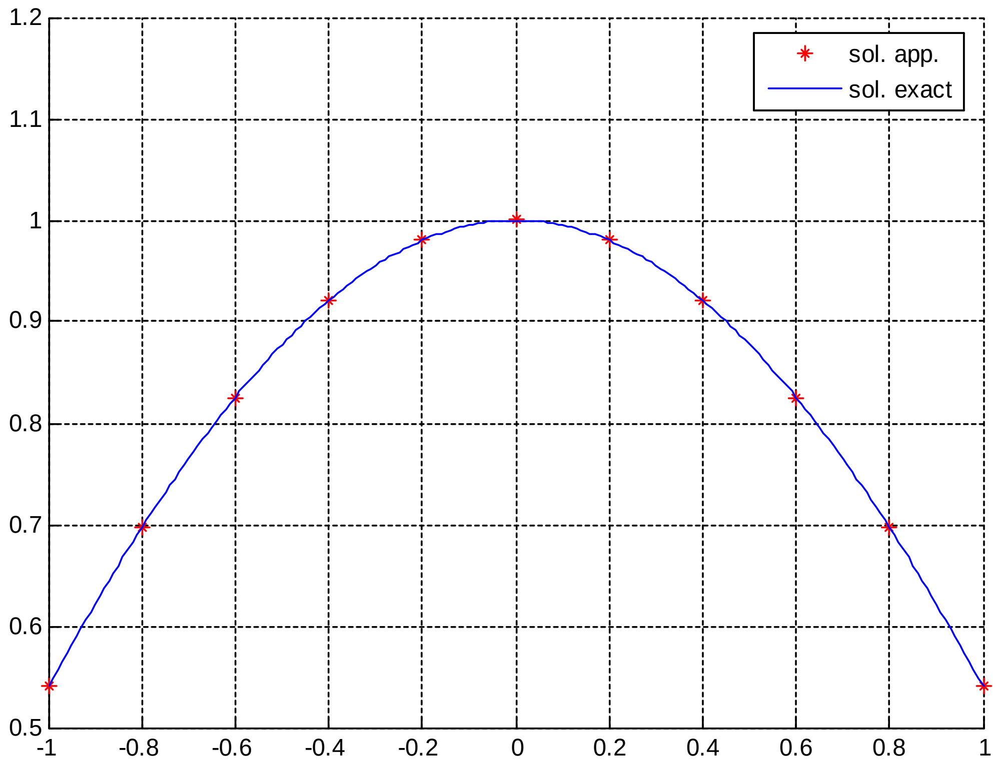
en approxime la fonction $f(x) = -\cos(x)$ *par l'approximations d'une fonction en série de legendre*

$$\mathcal{L}_4(f) = \mathcal{L}_4(-\cos(x)) = \sum_{n=0}^{4} a_n L_n = -0.8415 + 0.3102\left(\frac{3x^2-1}{2}\right) - 0.009\left(\frac{35x^4-30x^2+3}{8}\right)$$

donc

$$-\cos(x) \simeq \mathcal{L}_4(f)$$

x	*sol.ext*	*sol.app*	*err*
-1	0.5403	0.5403	0
-0.8	0.6967	0.6966	$0.1383e-003$
-0.6	0.8253	0.8253	$0.0231e-003$
-0.4	0.9211	0.9211	$0.0708e-003$
-0.2	0.9801	0.9802	$0.1004e-003$
0	1.0000	1.0001	$0.1026e-003$
0.2	0.9801	0.9802	$0.1004e-003$
0.4	0.9211	0.9211	$0.0708e-003$
0.6	0.8253	0.8253	$0.0231e-003$
0.8	0.6967	0.6966	$0.1383e-003$
1	0.5403	0.5403	0



Remarque 32 *:*

Dans les graphes les 2 types de solutions nous paraisseut égales .
Mais les tableaus montre qu'elles sont differents eu quelques points

Conclusion

Pour toutes les raisons évoquées précédemment, les méthodes spectrales sont très attractives et leur grande précision s'étend à tous les types d'équations différentielles. Le seul défaut est peut-être la difficulté à traiter les géométries complexes. Ces méthodes sont caractérisées par la simplicité a niveau de leurs implémentaions sur ordinatuer. Elles sont meilleurs pour l'approximation par des polynômes de haut degré avec des précision très très précise.

Bibliographie

[1] **A.C. King, J. Billingham et S.R. Otto**, " Differential Equations ", Université Cambridge Press 2003

[2] **A. Quarteroni et R.Sacco et F.Saleri**, "Méthodes Numériques", Springer 2004

[3] **I.Danaila et P. Joly et S. Mahmoud Kaber et M. Postel**, "Introduction au calcul scientifique par la pratique",Dunod, Paris, 2005

[4] **Jie Shen et Tao Tang et Li-Lian Wang**, "Spectral Methods", Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011,

[5] **Martin Hermann et Masoud Saravi**, "A First Course in Ordinary Differential Equations", Springer India, 2014

[6] **Maximilian F. Hasler**, "Cours de Mathématiques 2", D´epartement Scientifique Interfacultaire,2002

[7] **M.Nadir**, "Cours Equations différentielles ordinaires ",Université de M'sila, 2015

[8] **N.Piskounov**, " Calcule differentiel et integral ", Moscou.Ed MIR,1970

[9] **S. H. Lui,"**Numerical Analysis of Partial Differential Equations**",** John Wiley & Sons, Inc. 2011