

République Algérienne Démocratique Et Populaire

Université Mohamed Boudiaf De M'sila

Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine :Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Spécialité :Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Par

AMROUNE Wahiba

Sujet

Sur les opérateurs non bornés dans les espaces de Banach

Date de soutenance : 04/06/2017.

Devant le jury :

Mr. GAGUI Bachir MCB. Univ de M'sila Président

Mr. NADIR Mostefa Prof. Univ de M'sila Rapporteur

Mr. KHIRANI Amina MCB. Univ de M'sila Examineur

Promotion:2016/2017

Dédicace

*Je dédie ce travail à mes chers parents, qu'ils trouvent
ici le témoignage de ma profonde gratitude pour leur amour,
leur encourage et leur soutien tout au long de mes études, que ALLAH les bénisse.*

*A mes chers sœurs
et mes chers frères
et surtout à mon frère Abd EL MALEK.*

A tous mes sympathiques amis.

A tous mes chères amies.

A tous mes collègues de promotion

A tous ceux que j'aime.

A tous ceux qui m'aiment.

Je dédie le fruit de mes efforts.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout premièrement ALLAH le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Ainsi, je tiens également à exprimer ma vifs remerciements à notre encadreur NADIR Mostefa, ancien professeur de mathématiques pour suivi continuél tout le long de la réalisation de ce mémoire, ses conseils, ses encouragement.

Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury GAGUI Bachir, KHIRANI Amina, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Je remercie monsieur SMATI Abdelatif pour son aidé à élaborer et réaliser ce mémoire.

Je remercie aussi monsieur GAGUI Bachir pour ses efforts et ses instructions pour les étudiants.

Également, un remerciement à tous mes collègues de promotion 2017 pour les bons moments qui

nous avons passé ensemble.

Table des matières

Notations	1
Introduction	2
1 Opérateurs bornés	3
1.1 Rappels et notions fondamentales	3
1.2 Opérateurs linéaires continus	4
1.2.1 L'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$	5
1.3 Opérateurs bornés	6
1.3.1 Inversibilité des opérateurs bornés	7
1.3.2 Convergence des opérateurs	8
1.3.3 Opérateurs adjoints	8
1.3.4 Opérateurs compacts	11
1.3.5 Opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, auto-adjoints .	12
2 Opérateurs non bornés	15
2.1 Opérateur non borné	15
2.1.1 Opérations sur les opérateurs non bornés	16
2.2 Opérateurs fermés	17
2.2.1 Le graphe d'un opérateur	17
2.2.2 Opérateurs fermés	18
2.2.3 Opérateurs extensions	18
2.2.4 Opérateurs fermables	19

2.3	Adjoint des opérateurs non bornés	20
2.3.1	Opérateurs symétriques, auto-adjoints	22
2.4	Opérateurs normaux	24
2.5	Inversibilité des opérateurs non bornés	25
3	Théorie spectrale des opérateurs	27
3.1	Théorie spectrale des opérateurs bornés	27
3.1.1	Propriétés spectrales de l'adjoint	31
3.1.2	Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints	32
3.1.3	Spectre des opérateurs compacts	34
3.1.4	Spectre des opérateurs normaux	35
3.2	Spectre des opérateurs non bornés	36
3.2.1	Spectre des opérateurs fermés	39
	Conclusion	40
	Bibliographie	41

Notations

$L(E, F)$	L'ensemble des applications linéaires de E dans F .
$\mathcal{L}(E, F)$	L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .
$C([a, b])$	L'espace des fonctions continues sur $[a, b]$.
$C^1([a, b])$	L'espace des fonctions continûment dérivables (de classe C^1 sur $[a, b]$).
$L^2([a, b])$	L'espace des fonctions de carrés intégrables sur $[a, b]$, i.e. $\int_a^b f(x) ^2 dx < \infty$.
$\ell^2(\mathbb{R})$	L'espaces des suites réelles $(x_n)_n$ de carrés sommables, i.e. vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} x_n ^2 < \infty$.
T^{-1}	L'inverse de l'opérateur T .
T^*	L'adjoint de l'opérateur T .
$\text{Im}(T)$	L'image de l'opérateur T .
$\ker(T)$	Le noyau de l'opérateur T .
$D(T)$	Le domaine de l'opérateur T .
$K(E), K(E, F)$	L'espace des opérateurs compacts de E , ou de E dans F .
$CL(E), CL(E, F)$	L'espace des opérateurs fermés de E , ou de E dans F .
$\mathcal{GL}(E)$	L'espace des opérateurs inversibles de E dans E .
$G(T)$	Le graphe de l'opérateur T .
$\ \cdot\ '_{D(T)}$	La norme de graphe de l'opérateur T .
\bar{T}	La fermeture de l'opérateur T .
$\rho(T)$	L'ensemble résolvante de l'opérateur T .
$R_\lambda(T)$	La résolvante de l'opérateur T .
$\sigma(T)$	Le spectre de l'opérateur T .
$\sigma_p(T)$	Le spectre ponctuel de l'opérateur T .
$\sigma_r(T)$	Le spectre résiduel de l'opérateur T .
$\sigma_c(T)$	Le spectre continu de l'opérateur T .
$r(T)$	Le rayon spectral de l'opérateur T .

Introduction

Depuis un siècle déjà, la théorie des opérateurs non bornés a connu un immense progrès et des efforts sans relâche pour mettre à l'œuvre des outils permettant de dégager toutes les difficultés liées à cette classe. Les opérateurs fermés, sujets d'investigation, viennent souvent de domaines différents (mécanique quantique, EDO, EDP,...) mais rassemblent les propriétés mathématiques liées à la terminologie théorie des opérateurs.

Le prototype de l'opérateur non borné est l'application linéaire $T : E \longrightarrow F$ d'un sous espace linéaire $D(T) \subseteq E$ le domaine de T à l'espace F . Contrairement à la convention habituelle, ne peut pas être défini l'opérateur T sur tout l'espace E : le but de ce mémoire est de développer une théorie générale de ce genre des opérateurs.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre on va donner les éléments de base de l'Analyse Fonctionnelle : espaces de Banach et espaces de Hilbert, les opérateurs linéaires continus, les opérateurs bornés avec leurs propriétés, leur adjoint, leurs classifications.

Dans le deuxième chapitre on présente la théorie élémentaire des opérateurs non bornés et leurs propriétés, en particulier celle des opérateurs fermés, fermables et aussi l'opérateur adjoint, auto-adjoint d'un opérateur non borné.

Dans le troisième chapitre on présente la notion de spectre des opérateurs bornés et non bornés d'un espace E (Banach ou Hilbert) dans lui même.

Chapitre 1

Opérateurs bornés

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Le chapitre est composé de trois sections, la première section, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces de Banach et les espaces de Hilbert, La deuxième section, contient un aperçu sur les opérateurs linéaires continus. La dernière section, nous donnons quelques définitions et résultats sur les opérateurs bornés.

1.1 Rappels et notions fondamentales

Définition 1.1.1 (*Espace de Banach*)

On appelle **espace de Banach** $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme $d(x, y) = \|x - y\|$.

Lemme 1.1.1 *Tout espace normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie est complet.*

Définition 1.1.2 (*Espace Euclidien (préhilbertien)*)

Un espace vectoriel H sur \mathbb{k} muni d'un produit scalaire est dit **espace Euclidien** ou **préhilbertien**.

Proposition 1.1.1 *Toute espace préhilbertien est un espace vectoriel normé, la norme est donnée par*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition 1.1.3 (*Identité du parallélogramme*)

Soient x et $y \in E$ avec E est un espace préhilbertien alors :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Remarque 1.1.1 *Un espace vectoriel normé est un espace préhilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.*

Exemple 1.1.1 $(C[0, 1], \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé mais n'est pas un espace préhilbertien car : si

$$f(x) = 1, g(x) = x, \text{ avec } x \in [0, 1] \quad \|f(x)\|_\infty = 1, \|g(x)\|_\infty = 1.$$

Alors :

$$\|f + g\|_\infty = \sup |1 + x| = 2, \|f - g\|_\infty = \sup |1 - x| = 1.$$

Et donc :

$$\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 \neq 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2.$$

Définition 1.1.4 (*Espace de Hilbert*)

Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle x, y \rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle x, x \rangle^{1/2}$.

Définition 1.1.5 *Un espace de Hilbert est un espace de Banach (donc complet) dont la norme découle d'un produit scalaire ou hermitien par le signe \langle, \rangle . C'est la généralisation en dimension quelconque d'un espace Euclidien ou hermitien.*

Remarque 1.1.2 *Un espace de Banach est un espace de Hilbert si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.*

1.2 Opérateurs linéaires continus

Soit T un **opérateur linéaire** de E dans F , E et F étant des Banach. On note $D(T)$ le domaine de définition, qui est donc un sous-espace de E , et on note $\text{Im}(T)$ le domaine des valeurs qui est un sous espace de F tel que $\text{Im}(T) = \{Tu : u \in E\}$. Enfin, on note $\text{ker}(T)$ le noyau de T tel que $\text{ker}(T) = \{u \in E; Tu = 0\}$.

Définition 1.2.1 (*Continuité des opérateurs en un point*)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, un opérateur linéaire T défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si :

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $T(x_n)$ converge vers $T(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = T(x_0).$$

Remarque 1.2.1 L'opérateur linéaire T est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Théorème 1.2.1 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire T défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G .

Corollaire 1.2.1 En dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues. De façon précise, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie et si F est un espace vectoriel normé, alors toute application linéaire $T : E \rightarrow F$ est continue.

1.2.1 L'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les applications linéaires continues de E dans F . Lorsque $E = F$, on écrit $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$.

Théorème 1.2.2 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose que l'espace F est complet. Alors l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

Corollaire 1.2.2 Si E est un espace vectoriel normé, alors $\mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ est un espace de Banach.

Théorème 1.2.3 Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Définition 1.2.2 (*Dual topologique*)

On appelle **dual topologique** de l'espace E et que l'on note E^* l'espace de Banach des fonctionnelles linéaires continues $\mathcal{L}(E, \mathbb{k})$.

Remarque 1.2.2 L'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus $\mathcal{L}(E, F)$ de E dans F , est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires sur E dans F . En particulier le dual topologique $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est inclus dans le dual algébrique $E^+ = L(E, \mathbb{K})$.

1.3 Opérateurs bornés

Définition 1.3.1 (Opérateur borné)

Un opérateur linéaire T défini sur E dans F est dit **borné** s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E \quad \forall x \in E. \quad (1)$$

Proposition 1.3.1 (Norme d'un opérateur)

La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1) est appelée norme de T notée $\|T\|$ et donnée par:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|T(x)\|_F .$$

Théorème 1.3.1 Un opérateur linéaire T est continu, si et seulement s'il est borné.

Corollaire 1.3.1 Si $S \in \mathcal{L}(H)$ et $T \in \mathcal{L}(H)$ avec, H un \mathbb{C} – Hilbert et si

$$\langle Sx, x \rangle = \langle Tx, x \rangle$$

pour tout $x \in H$, alors :

$$S = T.$$

Proposition 1.3.2 soient E et F deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. L'opérateur T est continu sur E .
2. L'opérateur T est continu au point 0_E .
3. L'opérateur T est borné.

1.3.1 Inversibilité des opérateurs bornés

Dans cette section, on regroupe certains résultats sur les opérateurs inversibles. En particulier, on donne une caractérisation de l'inversibilité d'un opérateur qui s'avérera très utile pour la suite.

Corollaire 1.3.2 (*Théorème d'isomorphisme de Banach*)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue bijective entre deux espaces de Banach. Alors f^{-1} est continue.

Définition 1.3.2 (*Opérateur inverse*)

L'opérateur T est dit **inversible**, si pour tout $y \in \text{Im}(T)$ l'équation

$$Tx = y,$$

a une solution et une seule.

Si T est inversible, à chaque $y \in \text{Im}(T)$ on peut faire correspondre un élément et un seul $x \in D(T)$ à savoir la solution de l'équation $Tx = y$. L'opérateur qui réalise cette correspondance s'appelle **inverse** de T et se note T^{-1} . On note $G\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs $T \in \mathcal{L}(E)$ inversibles.

Théorème 1.3.2 L'opérateur T^{-1} , inverse d'un opérateur linéaire T , est aussi linéaire.

Proposition 1.3.3 Soit E un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$. Si $\|T\| < 1$ alors $(I - T) \in G\mathcal{L}(E)$ et on a

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n \geq 0} T^n.$$

De plus, $G\mathcal{L}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ et l'application $T \longrightarrow T^{-1}$ est continue sur $G\mathcal{L}(E)$.

Preuve. Voir [13] ■

1.3.2 Convergence des opérateurs

Définition 1.3.3 (Convergence des opérateurs)

Soient H un espace de Hilbert et $\{T_n\}_n$ une suite des opérateurs bornés de $\mathcal{L}(H)$. On dit que T_n est **convergente** vers T dans $\mathcal{L}(H)$ si et seulement si : $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(H)}$ est convergente vers 0 dans \mathbb{R} . Autrement dit :

$$T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathcal{L}(H) \Leftrightarrow \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(H)} \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathbb{R}.$$

1.3.3 Opérateurs adjoints

Théorème 1.3.3 (Représentation de Riesz)

Soit H un espace de Hilbert. Alors

$$\forall f \in \mathcal{L}(H, \mathbb{k}), \exists ! y \in H : f(x) = \langle y, x \rangle, \forall x \in H.$$

Proposition 1.3.4 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tel que, pour tout $x \in H_1$ et tout $y \in H_2$, on ait :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

Définition 1.3.4 (Opérateur adjoint)

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. L'unique application linéaire $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tel que pour tous $x \in H_1$, $y \in H_2$ on ait :

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1}$$

est appelée **l'adjoint** de T .

Exemple 1.3.1 On considère l'opérateur Shift $S : \ell^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{C})$ défini par :

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Soient (x_n) et (y_n) dans $\ell^2(\mathbb{C})$, alors

$$\begin{aligned} \langle S^*x_n, y_n \rangle &= \langle x_n, Sy_n \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, \dots), (0, y_1, y_2, \dots) \rangle \\ &= x_2\overline{y_1} + x_3\overline{y_2} + \dots \\ &= \langle (x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle \end{aligned}$$

donc S^* est défini par :

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Exemple 1.3.2 *I* l'opérateur de l'identité : Soit $x, y \in H$. C'est clair que :

$$\langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, I^*y \rangle$$

d'où $I^* = I$.

Exemple 1.3.3 Soit

$$M = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 2i \end{pmatrix},$$

alors

$$M^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}.$$

Dans le cas général soit la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors son adjoint est :

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.3.5 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors, on a

1. $\ker(T) = (\text{Im}(T^*))^\perp$.
2. $\overline{\text{Im}(T)} = \ker(T^*)^\perp$

Preuve. Voir [6]

■

Théorème 1.3.4 Soit $T, S \in \mathcal{L}(H)$, T^*, S^* leurs adjoints (respectivement), alors on a les propriétés suivantes :

- 1) $(T^*)^* = T$.
- 2) $(T + S)^* = T^* + S^*$.
- 3) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.
- 4) $\|T^*\| = \|T\|$.
- 5) $(TS)^* = S^* T^*$.

Preuve. Voir [17] ■

Corollaire 1.3.3 Pour $T \in \mathcal{L}(H)$ on a :

- 1) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$;
- 2) $T^*T = 0 \iff T = 0$.

Preuve. Voir [17] ■

Lemme 1.3.1 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est inversible, alors T^* est inversible et on a :

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}.$$

Preuve. $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ (T est inversible) d'où :

$$\begin{aligned} (TT^{-1})^* &= (T^{-1}T)^* = I^* = I \\ (T^{-1})^* T^* &= T^* (T^{-1})^* = I \end{aligned}$$

alors : T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

■

1.3.4 Opérateurs compacts

Définition 1.3.5 (*Opérateurs linéaires compacts*)

Soit T un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que T est un **opérateur compact** s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $T(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{T(G)}$ est compacte. On note $K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F . On pose $K(E) = K(E, E)$.

Définition 1.3.6 (*Ensembles relativement compacts*)

Un ensemble $G \subset E$ est **relativement compact** si pour toute suite $\{u_n\}$ de G , il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F .

Théorème 1.3.5 (*Critère de compacité*)

Un opérateur linéaire $T : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E , la suite $T\varphi_n$ contient une sous suite convergente de F .

Définition 1.3.7 (*Opérateur complètement continu*)

L'opérateur T est dit **complètement continu**, si elle est continue et compacte.

Théorème 1.3.6 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Preuve. En effet, si on désigne par

$$B(0, 1) = \{x \in E, \|x\| \leq 1\},$$

la boule fermée de rayon l'unité, alors l'ensemble $\overline{T(B(0, 1))}$ est compact, donc borné, c'est à dire

$$\|Tx\| < \infty \text{ et par conséquent, } \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty, \forall x \in B(0, 1).$$

Ce qui signifie que l'opérateur T est borné.

Réciproquement, l'opérateur identique I de E dans E est borné, mais il n'est pas compact car $I(B(0, 1)) = B(0, 1)$, n'est pas relativement compacte sauf si E est de dimension finie.

■

Théorème 1.3.7 Une combinaison linéaire $T = \alpha T_1 + \beta T_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Théorème 1.3.8 Le produit $T_1 T_2$ de deux opérateurs bornés T_1 et T_2 est compact si l'un des opérateurs T_1 ou T_2 est compact.

Théorème 1.3.9 Soit E un espace normé, F un espace de Banach, et soit $\{T_n\}$ une suite des opérateurs compacts de E dans F .

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Alors, T est compact.

Théorème 1.3.10 Soit T un opérateur borné de E dans F , à image $T(E)$ de dimension finie. Alors T est compact.

Corollaire 1.3.4 Dans un espace E de dimension infinie l'inverse d'un opérateur compact ne peut pas être borné.

En effet, dans le cas contraire, l'opérateur identique $I = T^{-1}T$ serait compact dans E , ce qui est impossible.

1.3.5 Opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, auto-adjoints

Définition 1.3.8 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert.

1. Un opérateur $S \in \mathcal{L}(H_1)$ est appelé **hermitien** ou **auto-adjoint** si :

$$S = S^*.$$

2. Un opérateur $N \in \mathcal{L}(H_1)$ est appelé **normal** si :

$$NN^* = N^*N.$$

3. Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est appelé **unitaire** si :

$$U^*U = Id_{H_1},$$

et

$$UU^* = Id_{H_2}.$$

4. Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est appelé **isométrique** si :

$$\|U(x)\| = \|x\|$$

pour tout $x \in H_1$.

5. Un opérateur $P \in \mathcal{L}(H_1)$ est appelé **positif** (notation : $P \geq 0$) si P est auto-adjoint et si pour tout $x \in H_1$

$$\langle P(x), x \rangle \geq 0, \forall x \in H_1.$$

Exemple 1.3.4 L'opérateur Shift S sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est isométrique, l'opérateur Shift S sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ est unitaire.

Remarque 1.3.1 Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $T^*T \in \mathcal{L}(H_1)$ est hermitien car :

$$(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T .$$

Il est même positif car :

$$\forall x \in H_1, \langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0.$$

Lemme 1.3.2 Un opérateur borné T est auto-adjoint si et seulement si : $\langle Tx, x \rangle$ est réel pour tout x dans H .

Preuve.

$$\langle T^*x, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle Tx, x \rangle,$$

i.e. $T = T^*$. ■

Lemme 1.3.3 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Alors

$$\ker T = \ker T^*.$$

Preuve. Soit $x \in \ker T$. Alors

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = 0,$$

en utilisant pour la deuxième égalité le fait que T est normal donc

$$TT^* = T^*T.$$

Ceci prouve donc que

$$\ker T \subset \ker T^*.$$

Maintenant remarquons que si T est normal, alors T^* est normal et en appliquant l'inclusion qu'on vient de démontrer à T^* , on obtient

$$\ker T^* \subset \ker T^{**} = \ker T,$$

car

$$T^{**} = T.$$

Finalement

$$\ker T = \ker T^*.$$

■

Chapitre 2

Opérateurs non bornés

Dans le chapitre précédent, nous avons vu dans le cas d'un opérateur borné, on pouvait toujours supposer que son domaine était l'espace de départ. Dans le cas d'un opérateur non borné il n'en est pas de même, le domaine de l'opérateur devra toujours être précisé et, lorsqu'on effectuera des opérations algébriques sur des opérateurs non bornés, les questions de domaine devront être examinées avec soin.

2.1 Opérateur non borné

Définition 2.1.1 (*Opérateur non borné*)

Un **opérateur non borné** sur un espace de Hilbert H est un couple $(D(T), T)$ où $D(T)$ est un sous espace vectoriel de H et T est un opérateur linéaire définie de $D(T)$ dans H , on dit que T est un **opérateur non borné** de domaine $D(T)$. Dans la suite, on suppose que $D(T)$ est dense dans H .

Exemple 2.1.1 Soit T l'opérateur de multiplication par x défini de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ par

$$Tf(x) = xf(x)$$

T a pour domaine

$$D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

tel que le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$ est

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Alors :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2(\mathbb{R})$$

mais $xf(x) \notin L^2(\mathbb{R})$ car $\int xf(x)dx$ est divergente, alors T est un opérateur non borné.

2.1.1 Opérations sur les opérateurs non bornés

Définition 2.1.2 Si S et T sont des opérateurs dans E à valeurs dans F , et R est un opérateur de F dans Z tel que E , F et Z sont des espaces de Banach. Alors

1. La somme $S + T$ est défini par :

$$\begin{aligned} D(S + T) &= D(S) \cap D(T), \\ (S + T)x &= Sx + Tx, \forall x \in D(S + T). \end{aligned}$$

2. L'opérateur produit (ou composition) RT est défini par :

$$\begin{aligned} D(RT) &= \{x \in D(T) \mid Tx \in D(R)\}, \\ (RT)x &= R(Tx), \forall x \in D(RT). \end{aligned}$$

3. La multiplication de T par un scalaire λ est définie comme l'opérateur :

$$\begin{aligned} \lambda T : D(T) &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow \lambda Tx. \end{aligned}$$

Tel que :

$$\begin{aligned} \text{si } \lambda &= 0, \text{ alors } D(\lambda T) = E, \\ \text{si } \lambda &\neq 0, \text{ alors } D(\lambda T) = D(T). \end{aligned}$$

4. *Associativité :*

$$(R + S) + T = R + (S + T), S + T = T + S; (TS)R = T(SR).$$

5. *La distributivité :*

$$(R + S)T = RT + ST, T(R + S) \supset TR + TS.$$

2.2 Opérateurs fermés

2.2.1 Le graphe d'un opérateur

Définition 2.2.1 (*Grappe d'un opérateur*)

Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H , le **graphe** de T est le sous espace vectoriel noté : $G(T)$ de $H \times H$ défini par :

$$G(T) = \{(x, Tx), x \in D(T)\}.$$

Définition 2.2.2 (*Norme du graphe*)

Soit $T : D(T) \subset E \longrightarrow F$. La topologie des normes nous pouvons fournir $D(T)$ avec le soi-disant graphe topologie. Pour les espaces de Banach, il est habituellement défini par la **norme de graphe** suivante:

$$\|x\|'_{D(T)} = \|x\|_E + \|Tx\|_F,$$

et pour les espaces de Hilbert par la norme équivalente (aussi appelée la norme de graphe)

$$\|x\|_{D(T)} = (\|x\|_{H_1}^2 + \|Tx\|_{H_2}^2)^{\frac{1}{2}},$$

qui a le produit scalaire associé

$$\langle x, y \rangle_{D(T)} = \langle x, y \rangle_{H_1} + \langle Tx, Ty \rangle_{H_2}.$$

Remarque 2.2.1 Il n'est pas vrai que tout sous espace de $H \times H$ est le graphe d'un opérateur.

Proposition 2.2.1 Un sous espace $G \subset H \times H$ est le graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si

$$(0, y) \in G \implies y = 0.$$

2.2.2 Opérateurs fermés

Définition 2.2.3 (*Opérateur fermé*)

Soient E et F deux espaces de Banach. On dit que T est un **opérateur fermé** si son graphe $G(T)$ est fermé dans $E \times F$. On note $CL(E, F)$, l'espace des opérateurs fermés de E dans F .

Proposition 2.2.2 Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est fermé.
2. $\forall (x_n) \subset D(T)$ et $\{x_n \rightarrow x_0 \text{ dans } E, Tx_n \rightarrow y_0 \text{ dans } F\}$ alors : $x_0 \in D(T), y_0 = Tx_0$.
3. $(D(T), \|x\|'_{D(T)})$ est complet.

Exemple 2.2.1 Soit T un opérateur non borné défini sur $H^1(]0, 1[)$ avec $T = -i \frac{d}{dx}$ où : $H^1(]0, 1[)$ est l'espace de Sobolev d'indice 1

$$H^1(]0, 1[) : \left\{ f \in L^2(]0, 1[), f' \in L^2(]0, 1[) \right\}.$$

Alors : T est un opérateur fermé.

Théorème 2.2.1 (*Théorème du graphe fermé*)

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. On suppose que le graphe de T est fermé de $E \times F$. Alors T est continue.

Proposition 2.2.3 Soient E et F deux espaces de Banach, si $T \in CL(E, F)$ et $D(T) = E$, alors $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

2.2.3 Opérateurs extensions

Définition 2.2.4 (*Extension*)

Soient E et F deux espaces de Banach. On dit que $B \subset D(B) : E \rightarrow F$ **extension** de $A \subset D(A) : E \rightarrow F$ et on note $A \subset B$ si :

1. $D(A) \subset D(B)$.
2. $Bx = Ax, \forall x \in D(A)$.
3. Si $A \subset B \implies \mathbf{G}(A) \subset \mathbf{G}(B)$.

2.2.4 Opérateurs fermables

Définition 2.2.5 (*Opérateur fermable*)

Un opérateur T linéaire est dit **fermable** si T admet une extension fermée.

Proposition 2.2.4 *La plus petite extension fermée d'un opérateur fermable est appelée la fermeture de T notée \overline{T} .*

Proposition 2.2.5 *Si A est fermable, B fermé et $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset B$.*

Preuve. \overline{A} est une extension fermée de A . Soit B extension fermée de A .

$$A \subset B, G(A) \subset G(B) \implies \overline{G(A)} \subset \overline{G(B)} = G(B),$$

d'où :

$$\overline{A} \subset B.$$

■

Remarque 2.2.2 *Si T est fermable alors :*

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)}.$$

Remarque 2.2.3 *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur non borné alors : T est fermable si et seulement si*

$$\forall (f_n)_n \subset D(T), f_n \longrightarrow 0 \text{ si } Tf_n \text{ converge} \implies Tf_n \longrightarrow 0.$$

Exemple 2.2.2 $T : C([0, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$Tf = f'(0)$, $D(T) = C^1([0, 1])$ alors T n'est pas fermable car : si

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{1}{n} \sin nt \\ \|f_n\|_\infty &= \frac{1}{n} \longrightarrow 0, \\ \|Af_n\|_\infty &= 1. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.4 *Tout opérateur fermé est fermable mais l'inverse est faux.*

Exemple 2.2.3

$$T = \frac{d}{dt} : L^2[-1, 1] \longrightarrow L^2[-1, 1]$$

$D(T) = C^1([-1, 1])$ n'est pas fermé mais fermable.

Remarque 2.2.5 Il existe évidemment des opérateurs non fermables. Mais nous allons voir que beaucoup des opérateurs différentiels sont fermables. Il n'est pas souvent possible de déterminer explicitement le domaine $D(\overline{T})$ de la fermeture. C'est une des raisons qui nous oblige à introduire un appareil théorique assez élaboré.

2.3 Adjoint des opérateurs non bornés

Nous étendons la notion d'adjoint pour les opérateurs linéaires non bornés dont le domaine est dense.

Pour un opérateur T de H_1 dans H_2 , il y a en général un grand nombre des opérateurs adjoints, mais si T a un domaine dense, il existe un adjoint maximal unique T^* . On dira que T^* est "l'adjoint" de T et tout autre adjoint ne sera qu'une restriction de T^* .

Définition 2.3.1 (Opérateur densément défini)

Soient E et F deux espaces de Banach, un opérateur T de E dans F est dit **densément défini** si son domaine $D(T)$ est dense dans E , i.e.

$$\overline{D(T)} = E.$$

Définition 2.3.2 (Domaine de l'adjoint)

Soit $T : D(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur dont le domaine est dense dans H . Le **domaine de l'adjoint** T^* de T est par définition :

$$D(T^*) = \{y \in H_2 \mid \text{il existe } C \geq 0 \text{ tel que } |\langle Tx, y \rangle_{H_2}| \leq C \|x\| \text{ pour tout } x \in D(T)\}.$$

Proposition 2.3.1 Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné sur H de domaine $D(T)$ dense. On définit l'adjoint T^* de T par :

$$\forall x \in D(T), \forall y \in D(T^*), \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

Si l'application $x \longrightarrow \langle Tx, y \rangle$ est continue de $D(T)$ dans \mathbb{C} elle possède alors une extension continue à H ce qui permet de définir l'élément T^*y dans H par le théorème de Riesz.

Propriétés 2.3.1 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $S : H_1 \longrightarrow H_2$, $T : H_1 \longrightarrow H_2$ et $R : H_1 \longrightarrow H_2$ trois opérateurs non bornés densément défini, avec $D(S + T)$ et $D(RT)$ dense dans H_1 . Alors :

1. $S^* + T^* \subset (S + T)^*$ et $T^*R^* \subset (RT)^*$;
2. $(T + \alpha I)^* = T^* + \bar{\alpha}I$, et $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
(Mais $(0T)^* = 0 \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ est différent de $0T^*$ lorsque $D(T^*) \neq H_2$).
3. Si $S \subset T$, alors $S^* \supset T^*$.

Lemme 2.3.1 Soit $(D(T), T)$ un opérateur à domaine dense. Alors

$$G(T^*) = [V(G(T))]^\perp \text{ ou de façon équivalent } \overline{VG(T)} = (G(T^*))^\perp.$$

Ou V est un opérateur unitaire défini par $V : H \times H \longrightarrow H \times H$ tel que :

$$V(x, y) = (-y, x)$$

et pour tout sous espace vectoriel E de $H \times H$ on a :

$$V(E^\perp) = (V(E))^\perp$$

Preuve. On va démontrer que :

$$G(T^*) = [V(G(T))]^\perp$$

On a :

$$G(T^*) = \{(k, T^*k) : k \in D(T^*)\}$$

Alors : si $k \in D(T^*)$ et $h \in D(T)$

$$\begin{aligned} \langle (k, T^*k), V(h, Th) \rangle &= \langle (k, T^*k), (-Th, h) \rangle \\ &= -\langle k, Th \rangle + \langle T^*k, h \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors : $G(T^*) \subseteq [V(G(T))]^\perp$.

Réciproquement : Si $(k, f) \in [V(G(T))]^\perp$. Alors : pour tout $h \in D(T)$

$$0 = \langle (k, f), (-Th, h) \rangle = \langle k, Th \rangle + \langle f, h \rangle.$$

Alors : $\langle Th, k \rangle = \langle h, f \rangle$ par définition : $k \in D(T^*)$ et $T^*k = f$. Et on a

$$\overline{VG(T)} = V(G(T)^\perp)^\perp = (VG(T)^\perp)^\perp = (G(T^*))^\perp.$$

■

Théorème 2.3.1 Soit $(D(T), T)$ un opérateur à domaine dense. Alors

1. T^* est fermé.
2. T est fermable si et seulement si $D(T^*)$ est dense.
3. Si T est fermable alors $\overline{T} = T^{**}$ et $(\overline{T})^* = T^*$.

Preuve. Voir [1] ■

2.3.1 Opérateurs symétriques, auto-adjoints

Nous introduisons dans cette sous section les notions des opérateurs symétriques et des opérateurs auto-adjoints dans le cadre général. Il est remarquable qu'il faille distinguer ces deux notions dans ce cadre alors qu'elles se trouvent confondues dans le cas des opérateurs bornés.

Définition 2.3.3 (Opérateur symétrique)

Nous appelons **opérateur symétrique** sur H un opérateur T dont le domaine est dense dans H et tel que :

$$T \subseteq T^*.$$

Si T est un opérateur symétrique, alors le domaine de son adjoint est également dense dans H car :

$$D(T) = D(T^*) \subseteq H.$$

Définition 2.3.4 (Opérateur auto-adjoint)

Un **opérateur auto-adjoint** sur H est un opérateur dont le domaine est dense dans H tel que :

$$T = T^*.$$

Remarque 2.3.1 *Tout opérateur non borné auto-adjoint est symétrique par contre un symétrique n'est pas forcément auto-adjoint.*

Exemple 2.3.1 (L'opérateur de multiplication) *Soit (E, μ) un espace mesuré avec μ une mesure positive sur E et α fonction mesurable de E dans \mathbb{C} on définit l'opérateur T sur $L^2(E)$ par :*

$$T\varphi = \alpha.\varphi$$

$$D(T) = \{\varphi \in L^2(E) / \alpha.\varphi \in L^2(E)\}$$

T est symétrique si et seulement si α est réelle μ presque partout dans ce cas T est auto-adjoint.

Remarque 2.3.2 *1. $(D(T), T)$ opérateur non borné symétrique sur H alors , T^* est une extension fermée de T et puisque $D(T) \subset D(T^*)$ et $D(T)$ dense dans H alors , $D(T^*)$ est aussi dense dans H et on a par conséquent T fermable $\bar{T} = (T^*)^*$ or \bar{T} est la plus petite extension fermée de T , alors :*

$$T \subset (T^*)^* \subset T^*.$$

2. Si T auto-adjoint alors : T est fermé. On en déduit alors qu'un opérateur non borné symétrique, fermé est auto-adjoint si et seulement si : son adjoint est symétrique.

3. Si T symétrique fermé alors : T auto adjoint si T^ symétrique.*

Remarque 2.3.3 *Soit T un opérateur symétrique on a :*

1. Si $\text{Im}(T)$ est dense, alors T est injectif.

2. Si T est auto-adjoint, et T est injectif, alors : $\text{Im}(T)$ est dense et T^{-1} est auto-adjoint.

Définition 2.3.5 *(Essentiellement auto-adjoint)*

*Soit $(D(T), T)$ opérateur non borné sur H symétrique de domaine $D(T)$ dense dans H . T est dit **essentiellement auto-adjoint** si \bar{T} est auto-adjoint.*

Remarque 2.3.4 *Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint. La réciproque est fausse.*

Si T est essentiellement auto-adjoint alors : T^ est la plus petite extension fermée de T .*

Lemme 2.3.2 *Si T est essentiellement auto-adjoint T à une unique extension auto-adjointe \overline{T} .*

Preuve. Par définition \overline{T} est une extension auto-adjointe de T .

Soit B une deuxième extension auto-adjointe de T alors :

$$T \subset B \implies \overline{T} \subset B.$$

Donc

$$B^* \subset (\overline{T})^* \implies B \subset \overline{T}.$$

Alors

$$B = \overline{T}.$$

■

Corollaire 2.3.1 *Soit T un opérateur symétrique dans H . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. T est auto-adjoint.
2. T est fermé et $\ker(T^* \pm I) = \{0\}$.
3. $\text{Im}(T \pm I) = H$.

Preuve. Voir [1] ■

2.4 Opérateurs normaux

Définition 2.4.1 (*Opérateur normal*)

Soit N un opérateur non borné de domaine $D(N)$ dense. On dit que N est un **opérateur normal** si : N est fermé et $NN^* = N^*N$.

Proposition 2.4.1 *Si N est un opérateur normal, alors*

$$D(N) = D(N^*) \text{ et } \|Nf\| = \|N^*f\| \text{ pour tout } f \in D(N).$$

Corollaire 2.4.1 *Tout opérateur auto-adjoint est normal.*

Proposition 2.4.2 1. *Tout opérateur normal est fermé.*

2. *Soit T un opérateur fermé, densément défini. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- a) T est normal.
- b) T^* est normal.
- c) $T^*T = TT^*$.

3. *Si T est normal, alors $T + z$ est aussi normal pour tout $z \in \mathbb{k}$.*

Théorème 2.4.1 *Si N est un opérateur normal non borné et si K un opérateur auto adjoint tel que $D(N) \subset D(K)$ alors :*

$$KN \subset N^*K \implies KN^* \subset NK$$

2.5 Inversibilité des opérateurs non bornés

Nous étendons également le concept d'inverse à notre notion générale d'opérateur.

Si un opérateur $T : D(T) \longrightarrow H$ est injectif, i.e. si pour tous $x, y \in D(T)$, $Tx = Ty$ implique $x = y$, nous appelons l'inverse de T l'application T^{-1} définie par :

$$T^{-1} : \text{Im}(T) \longrightarrow H$$

$$Tx \longrightarrow x$$

Observez que ce nouveau sens du concept d'inverse associe à certains opérateurs, même bornés, un inverse qui n'est pas défini partout. De manière générale, si T est injectif, alors :

$$TT^{-1} \subseteq I \quad \text{et} \quad T^{-1}T \subseteq I .$$

Définition 2.5.1 (*Inverse d'un opérateur non borné*)

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : D(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur linéaire bijectif. On définit l'opérateur T^{-1} défini de H_2 dans H_1 tel que :

$$TT^{-1}g = g, \forall g \in H_2 \quad \text{et} \quad T^{-1}Tf = f, \forall f \in D(T).$$

L'opérateur T^{-1} est dit l'*inverse* de T .

Soient E, F deux espaces de Banach et F' est un sous espace de F .

Proposition 2.5.1 *Si $T : D(T) \subset E \longrightarrow F' \subset F$ est fermé et injectif, alors T^{-1} est aussi fermé.*

Preuve. En effet, le graphe de T et T^{-1} est le même. Directement : soit $y_n \longrightarrow y$ et $T^{-1}y_n = x_n$. Ceci veut dire cela $Tx_n \longrightarrow y$ et $x_n \longrightarrow x$, et donc $Tx = y$ qui implique $x = T^{-1}y$. ■

Corollaire 2.5.1 *Si $T \in CL(E, F)$, T inversible et $\text{Im}(T) = F$ alors, $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Proposition 2.5.2 *Soit $T : D(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur densément défini tel que son inverse est borné, alors*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Chapitre 3

Théorie spectrale des opérateurs

Nous présentons dans ce chapitre les fondements de la théorie spectrale des opérateurs. Cette théorie est particulièrement utile et importante dans l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, un des buts premiers de l'étude d'un opérateur est la détermination de son spectre, qui est la généralisation en dimension infinie de l'ensemble des valeurs propres d'une matrice. Dans les cas les plus agréables, notamment pour les opérateurs dits compacts on peut déterminer de manière qualitative le spectre d'un opérateur. Ceci permet de résoudre complètement des problèmes d'évolution en mécanique, physique, etc. Comme l'équation de la chaleur, l'équations des ondes, ou l'équation de Schrödinger.

3.1 Théorie spectrale des opérateurs bornés

Dans cette section nous étudions le spectre d'un opérateur dans la plus grande généralité. Il est important par contre que le corps de base soit \mathbb{C} . Soit donc E un \mathbb{C} -espace de Banach et $T : E \longrightarrow E$ un opérateur borné.

Définition 3.1.1 (*Valeur propre*)

On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** de T si $\lambda I - T$ n'est pas injectif. Autrement dit, l'ensemble des valeurs propres $Vp(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$. $\ker(\lambda I - T)$ est l'espace propre associé à λ .

Définition 3.1.2 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.

1. On appelle **ensemble résolvante** de T l'ensemble

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ est inversible}\}.$$

Un élément de $\rho(T)$, est appelé **valeur résolvante** de T .

2. Si $\lambda \in \rho(T)$, on définit **la résolvante** $R_\lambda(T)$ de T au point λ par

$$R_\lambda(T) := (\lambda I - T)^{-1}.$$

La résolvante $R_\lambda(T)$ est simplement notée R_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur T .

3. Le **spectre** $\sigma(T)$ de T est l'ensemble

$$\begin{aligned} \sigma(T) & : = \mathbb{C} \setminus \rho(T) \\ & = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ non inversible}\}. \end{aligned}$$

Un élément $\sigma(T)$ est une **valeur spectrale** de T .

Remarque 3.1.1

$$\begin{aligned} \sigma(T) \cup \rho(T) & = \mathbb{C}. \\ \sigma(T) \cap \rho(T) & = \emptyset. \end{aligned}$$

Définition 3.1.3 (Spectre ponctuel)

On appelle **spectre ponctuel** de T l'ensemble des valeurs propres de T , noté $\sigma_p(T)$ tel que

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ non injectif}\}.$$

Définition 3.1.4 (Spectre continu)

On appelle **spectre continu** de T et on note par $\sigma_c(T)$, l'ensemble

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ injectif et } \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} = E \right\}.$$

Définition 3.1.5 (Spectre résiduel)

On appelle **spectre résiduel** de T et on note par $\sigma_r(T)$, l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} \neq E \right\}.$$

Définition 3.1.6 (Le spectre)

Le **spectre** $\sigma(T)$ est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Définition 3.1.7 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.

1. Si T est inversible, alors $\sigma(T^{-1}) = \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$.
2. $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$ pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$.

Preuve. Voir [5] ■

Remarque 3.1.2 1. Les définitions ci-dessus restent valables même si E n'est pas un Banach.

2. L'ensemble des valeurs propres est aussi appelé spectre ponctuel et est parfois noté $\sigma_p(T)$.

3. Si E est de dimension finie, $\lambda I - T$ est inversible si et seulement si $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$. En particulier, on en déduit $Vp(T) = \sigma(T)$. La situation est plus délicate en dimension infinie comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 3.1.1 Soient $E := C([0, 1]; \mathbb{k})$ et T l'opérateur de Volterra défini sur E par

$$\forall f \in E, Tf(x) := \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0, 1].$$

Alors, on a $\ker(T) = \{0\}$ et $\text{Im}(T) = \{g \in C^1([0, 1]; \mathbb{k}) \mid g(0) = 0\}$. En particulier, T est injectif donc $0 \notin Vp(T)$ mais non surjective donc $0 \in \sigma(T)$.

Proposition 3.1.1 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $|\lambda| > \|T\|$ alors $\lambda \in \rho(T)$. En particulier, on a $\sigma(T) \subset \overline{D(0, \|T\|)}$.
2. $\rho(T)$ est un ouvert non vide de \mathbb{k} .
3. $\sigma(T)$ est un compact de \mathbb{k} .
4. $\overline{Vp(T)} \subset \sigma(T)$.

Preuve.

1. Si $|\lambda| > \|T\|$ alors $\lambda \neq 0$ et $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ donc, d'après le **Proposition 1.3.3**, $(I - \lambda^{-1}T)$ est inversible, i.e. $\lambda \in \rho(T)$.

2. D'après le 1., $\rho(T)$ est non vide. Soit φ l'application définie de \mathbb{k} dans $\mathcal{L}(E)$ par

$$\forall \lambda \in \mathbb{k}, \quad \varphi(\lambda) := \lambda I - T.$$

Alors, $\rho(T) = \varphi^{-1}(G\mathcal{L}(E))$. De plus, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$, on a

$$\|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)I\| \leq |\lambda - \mu|,$$

donc φ est continue. Or, d'après la **Proposition 1.3.3**, $G\mathcal{L}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Ainsi $\rho(T) = \varphi^{-1}(G\mathcal{L}(E))$ est un ouvert de \mathbb{k} .

3. D'après le 2., $\sigma(T) = \mathbb{k} \setminus \rho(T)$ est fermé, or il est borné d'après le 1., donc compact.

4. D'après la **Remarque 3.1.2** $Vp(T) \subset \sigma(T)$. De plus, $\sigma(T)$ est fermé donc $\overline{Vp(T)} \subset \sigma(T)$.

■

Lemme 3.1.1 *Soit T un opérateur linéaire. Alors $\sigma(T)$ est fermé dans \mathbb{C} .*

Théorème 3.1.1 *(Identité de la résolvante)*

Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Alors, on a

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda.$$

De plus, l'application $\lambda \longrightarrow R_\lambda$ est dérivable sur $\rho(T)$ et sa dérivée est donnée par

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = -R_\lambda^2.$$

Preuve. Voir [13] ■

Définition 3.1.8 *(Rayon spectral)*

*Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On définit le **rayon spectral** $r(T)$ de T par*

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Si $\sigma(T) = \emptyset$, par convention, on pose $r(T) := 0$.

Remarque 3.1.3 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.

1. On a $r(T) \in [0, \|T\|]$ car, d'après la **Proposition 3.1.1**, $\sigma(T) \subset \overline{D(0, \|T\|)}$. La définition est plus précise : $\overline{D(0, r(T))}$ est le plus petit disque fermé, centré en 0, contenant $\sigma(T)$.
2. En particulier, $\rho(T)$ contient la couronne ouverte $\mathbb{k} \setminus \overline{D(0, r(T))}$ et l'application $\lambda \longrightarrow R_\lambda = R_\lambda(T)$ est définie et dérivable sur cette couronne.

Proposition 3.1.2 Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, la suite $\left(\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans \mathbb{R}_+ et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|.$$

3.1.1 Propriétés spectrales de l'adjoint

Proposition 3.1.3 Soit H un espace de Hilbert complexe, $T \in \mathcal{L}(H)$ et $T^* \in \mathcal{L}(H)$ l'adjoint de T . Alors :

1. $\rho(T^*) = \rho(T)^* = \{\lambda \in \mathbb{k} \mid \bar{\lambda} \in \rho(T)\}$ et $\sigma(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{k} \mid \bar{\lambda} \in \sigma(T)\}$.
2. Pour tout $\lambda \in \rho(T^*)$, $R_\lambda(T^*) = (R_{\bar{\lambda}}(T))^*$.
3. $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.
4. $\sigma_r(T) = \sigma_p(T^*)$.

Preuve.

1. On a l'équation $\lambda I - T^*$ est inversible si et seulement si $(\lambda I - T^*)^*$ est inversible.

Or $(\lambda I - T^*)^* = \bar{\lambda} I - T$ donc

$$\begin{aligned} \rho(T^*) &= \{\lambda \in \mathbb{k} \mid \lambda I - T^* \text{ est inversible}\} = \{\lambda \in \mathbb{k} \mid \bar{\lambda} I - T \text{ est inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{k} \mid \bar{\lambda} I \in \rho(T)\}. \end{aligned}$$

De plus, $\sigma(T^*) = \mathbb{k} \setminus \rho(T^*)$, se que donne le résultat.

2. Si $\lambda \in \rho(T^*)$ alors :

$$\begin{aligned} R_\lambda(T^*) &= (\lambda I - T^*)^{-1} = ((\bar{\lambda} I - T)^*)^{-1} \\ &= ((\bar{\lambda} I - T)^{-1})^* \\ &= (R_{\bar{\lambda}}(T))^*, \end{aligned}$$

qui est l'égalité attendue.

3., 4., voir [23] ■

Remarque 3.1.4 *La notion d'opérateur adjoint se généralise au cas d'espaces de Banach E . Pour cela, on introduit le dual topologique E' de E , i.e. l'espace des formes linéaires continues sur E et, pour $f \in E'$ et $x \in E$, on note $\langle f, x \rangle_{E',E}$ au lieu de $f(x)$. On appelle $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E',E}$ le **crochet de dualité** de E', E . Alors, le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E',E}$ a de nombreuses similarités avec le produit scalaire d'espace de Hilbert. En particulier, si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on peut montrer qu'il existe $T' \in \mathcal{L}(E', F')$ tel que*

$$\forall x \in E, \forall f \in F', \langle T'f, x \rangle_{E',E} = \langle f, Tx \rangle_{F',F}.$$

Il s'agit bien d'une généralisation puisque si E est un espace de Hilbert alors E' peut être identifié avec E d'après le théorème de représentation de Riesz. Le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E',E}$ est alors simplement le produit scalaire de E .

3.1.2 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints

On suppose dans la suite que $E = H$ est un espace de Hilbert et que $T \in \mathcal{L}(H)$.

Proposition 3.1.4 *(Valeurs propres des opérateurs auto-adjoints)*

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors,

1. $Vp(T) \subset \mathbb{R}$.
2. $\lambda \in Vp(T)$ si et seulement si $\overline{\text{Im}(\lambda I - T)} \neq H$.
3. Si $\lambda, \mu \in Vp(T), \lambda \neq \mu$, alors $\ker(\lambda I - T) \perp \ker(\mu I - T)$, i.e. les sous espaces propres de T sont orthogonaux deux à deux.

Preuve.

1. Si $\lambda \in Vp(T), \lambda \neq \mu$, alors il existe $x \in H \setminus \{0\}$ tel que $Tx = \lambda x$. Donc

$$\lambda = \frac{\langle \lambda x, Tx \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle Tx, Tx \rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

2. D'après la **Proposition 1.3.5** on a

$$\overline{\text{Im}(\lambda I - T)} = (\ker(\lambda I - T)^*)^\perp = (\ker(\bar{\lambda} I - T))^\perp.$$

Puisque $Vp(T) \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in Vp(T)$ si et seulement si $\bar{\lambda} \in Vp(T)$, ce qui est équivalent à $\ker(\bar{\lambda}I - T) \neq \{0\}$, soit encore $(\ker(\bar{\lambda}I - T))^\perp \neq H$. Donc $\lambda \in Vp(T)$ si et seulement si $\overline{\text{Im}(\lambda I - T)} \neq H$.

3. Si $x \in \ker(\lambda I - T)$ et $y \in \ker(\mu I - T)$, alors

$$Tx = \lambda x \quad \text{et} \quad Ty = \mu y.$$

Comme $T = T^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle &= \langle \lambda x, y \rangle - \langle x, \mu y \rangle \\ &= \langle Tx, y \rangle - \langle x, Ty \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où $\langle x, y \rangle = 0$ car $\lambda \neq \mu$. Autrement dit, $\ker(\lambda I - T) \perp \ker(\mu I - T)$. ■

Théorème 3.1.2 *Soit T un opérateur linéaire auto-adjoint défini dans un espace de Hilbert H .*

1. *Son spectre résiduel est vide.*
2. *Son spectre continu est réel.*

Théorème 3.1.3 *(Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints)*

On suppose $H \neq \{0\}$. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose

$$m := \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} \langle Tx, x \rangle \quad \text{et} \quad M = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} \langle Tx, x \rangle .$$

Alors,

1. $m, M \in [-\|T\|, \|T\|] \subset \mathbb{R}$.
2. $m, M \in \sigma(T)$.
3. $\sigma(T) \subset [m, M]$.
4. $\|T\| = \sup \{ |\langle Tx, x \rangle|, x \in H \text{ et } \|x\| = 1 \}$. *En particulier, $\|T\| = \max(|m|, |M|)$.*

Les points 2., 3. et 4. entraînent immédiatement.

Preuve. Voir [13] ■

Si T est auto-adjoint positif alors $m \geq 0$. On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 3.1.1 *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto adjoint, alors*

$$\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = r(T).$$

Corollaire 3.1.2 *Un opérateur auto adjoint T sur H est positif si et seulement si son spectre $\sigma(T)$ est contenu dans \mathbb{R}^+ .*

Corollaire 3.1.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors $T = 0$.*

Preuve. Voir [4] ■

3.1.3 Spectre des opérateurs compacts

Proposition 3.1.5 *Soient E un espace de Banach, et $T \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre $\sigma(T)$ est un ensemble compact, et*

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|].$$

Preuve. Voir [22] ■

Remarque 3.1.5 *Il est clair que $Vp(T) \subset \sigma(T)$. En général l'inclusion est stricte : il peut exister λ tel que*

$$\ker(T - \lambda I) = \{0\} \quad \text{et} \quad \text{Im}(T - \lambda I) \neq E$$

(Un tel λ appartient au spectre mais n'est pas valeur propre). Par exemple prenons dans $E = \ell^2$, $Tu = (0, u_1, u_2, \dots)$ où $u = (u_1, u_2, \dots)$ (i.e. T est le Shift à droite). Alors $0 \in \sigma(T)$ et $0 \notin Vp(T)$.

Théorème 3.1.4 Soit E un espace de Banach, $T \in K(E)$ avec $\dim E = \infty$. Alors on a :

1. $0 \in \sigma(T)$,
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = Vp(T) \setminus \{0\}$,
3. l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(T) = 0$,
 - ou bien $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est fini,
 - ou bien $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Preuve. Voir [4] ■

Lemme 3.1.2 Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels tous distincts telle que

$$\begin{aligned} \lambda_n &\longrightarrow \lambda \\ \text{et} \quad \lambda_n &\in \sigma(T) \setminus \{0\} \quad \forall n. \end{aligned}$$

Alors $\lambda = 0$.

Autrement dit, **tous les points de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ sont isolés.**

Preuve. Voir [4] ■

Remarque 3.1.6 Étant donnée une suite (α_n) qui tend vers 0 on peut construire un opérateur compact T tel que $\sigma(T) = (\alpha_n) \cup \{0\}$. Il suffit de considérer dans $E = \ell^2$ l'opérateur $T : u = (u_n) \longrightarrow Tu = (\alpha_n u_n)$. Noter que T est compact car il existe une suite (T_n) des opérateurs de rangs finis telle que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. Sur cet exemple on voit aussi que 0 peut appartenir, ou ne pas appartenir, à $Vp(T)$; de plus, si $0 \in Vp(T)$ il peut arriver que l'espace propre associé, i.e. $\ker(T)$ soit de dimension infinie.

3.1.4 Spectre des opérateurs normaux

Lemme 3.1.3 Soit H un espace de Hilbert complexe. Le rayon spectral d'un opérateur normal $T \in \mathcal{L}(H)$ est égal à sa norme $r(T) = \|T\|$.

Preuve. Voir [15] ■

Proposition 3.1.6 *Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.*

Preuve. Voir [15] ■

Définition 3.1.9 λ est une valeur propre approché de T s'il existe une suite des fonctions $\psi_n \in H$, telles que $\|\psi_n\| = 1$ pour tout n , et

$$\|T\psi_n - \lambda\psi_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Proposition 3.1.7 *Le spectre d'un opérateur normal est l'ensemble de ses valeurs propres approchées.*

3.2 Spectre des opérateurs non bornés

Beaucoup de définitions et de résultats exposés dans la section précédente sont encore valables pour des opérateurs non bornés, à condition qu'ils soient fermés.

Définition 3.2.1 Soit $(D(T), T)$ opérateur non borné sur un Hilbert H de domaine dense. On définit :

- l'ensemble résolvante de T

$$\rho(T) := \{ \lambda \in \mathbb{C} / (T - \lambda I) : D(T) \rightarrow H \text{ bijection d'inverse borné} \}$$

- le spectre de T

$$\sigma(T) := \mathbb{C} - \rho(T)$$

- la résolvante de T

$$R_\lambda(T) : \rho(T) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$

$$\lambda \longrightarrow (T - \lambda I)^{-1}$$

Remarque 3.2.1 $R_\lambda(T)$ est borné de $\text{Im}(T - \lambda I)$ dans $D(T)$ c'est-à-dire $\exists C \geq 0$ tel que :

$$\|R_\lambda(T)u\| \leq C \|u\|, \quad \forall u \in \text{Im}(T - \lambda I).$$

Définition 3.2.2 Soit T un opérateur linéaire dont le domaine est dense et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour l'opérateur $S = (T - \lambda I) : D(T) \longrightarrow H$, on a l'arbre d'alternatives suivant :

1. Si S **n'est pas injectif** sur $D(T)$, on dit que est une **valeur propre** de T , on parle de **spectre ponctuel** de T qu'on notera $\sigma_p(T)$, i.e.

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\},$$

2. sinon S **est injectif** sur $D(T)$ et

– si S n'est pas surjectif et,

* si l'image de S est dense dans H , on parle de **spectre continu** de T qu'on notera $\sigma_c(T)$, i.e.

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) = \{0\} \text{ et } \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} = H; R_\lambda(T) \text{ n'est pas borné} \right\},$$

* sinon l'image de S n'est pas dense dans H , on parle de **spectre résiduel** de T qu'on notera $\sigma_r(T)$, i.e.

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) = \{0\} \text{ et } \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} \neq H \right\},$$

– sinon S est bijectif et,

* si S^{-1} n'est pas borné, on parle de **spectre résiduel de type 2** de T qu'on notera $\sigma'_r(T)$;

* sinon S^{-1} est borné et $\lambda \in \rho(T)$ est un **point résolvant** de T .

On déduit que le spectre $\sigma(T)$ d'un opérateur non borné est comme le cas d'un opérateur borné, i.e. l'union disjointe de trois sous ensembles

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Théorème 3.2.1 Soit $(D(T), T)$ opérateur fermé sur un Hilbert H de domaine dense alors:

1. $\rho(T)$ est un ouvert dans \mathbb{C} .
2. L'application $R_\lambda(T)$ de $\rho(T)$ dans $\mathcal{L}(H)$ est holomorphe sur $\rho(T)$.
3. Identité de la résolvante :

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu).R_\lambda(T).R_\mu(T).$$

En effet :

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)^{-1} - (T - \mu I)^{-1} &= (T - \lambda I)^{-1} \cdot [I - (T - \lambda I) \cdot (T - \mu I)^{-1}] \\ &= R_\lambda(T) [(T - \mu I) - (T - \lambda I)] \cdot R_\mu(T). \end{aligned}$$

Exemple 3.2.1 Soit T un opérateur (opérateur de multiplication) non borné et $H = L^2(\mathbb{R})$ définit par :

$$Tf(x) = xf(x).$$

De domaine

$$D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Alors $D(T)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et T est auto-adjoint, donc on a :

$$\sigma_p(T) = \emptyset, \sigma_c(T) = \mathbb{R}, \sigma_r(T) = \emptyset, \rho(T) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Corollaire 3.2.1 Si T est un opérateur fermé symétrique et $\sigma(T)$ ne contient pas \mathbb{R} , alors T est auto adjoint.

Proposition 3.2.1 Soit H un espace de Hilbert, T un opérateur borné, ou non borné fermé de domaine dense, et U un opérateur unitaire. On considère l'opérateur (fermé) de domaine dense

$$T_U = UTU^{-1} = UTU^*.$$

Alors $\sigma(T_U) = \sigma(T)$, et si T est auto adjoint, T_U l'est aussi.

3.2.1 Spectre des opérateurs fermés

Proposition 3.2.2 *Soit E, F deux espaces de Banach et $T : D(T) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur fermé.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est injectif, d'inverse $T^{-1} : \text{Im}(T) \longrightarrow D(T)$ borné,
2. il existe $m > 0$ tel que $\|Tx\|_F \geq m \|x\|_E$ pour tout $x \in D(T)$,
3. $\text{Im}(T)$ est fermé dans F et $\ker(T) = \{0\}$.

Lemme 3.2.1 *Soient T un opérateur injectif fermé d'un espace de Banach E dans lui même et λ une valeur régulière de T non nulle, alors λ^{-1} est une valeur régulière de T^{-1} et on a*

$$R_{\lambda^{-1}}(T^{-1}) = -\lambda T R_{\lambda}(T) = \lambda I_E - \lambda^2 R(T).$$

Proposition 3.2.3 *Le spectre d'un opérateur fermé T d'un espace de Banach complexe E dans lui même est une partie fermée de \mathbb{C} , et l'application $\lambda \longrightarrow R_{\lambda}(T)$ est analytique, du complémentaire du spectre dans $\mathcal{L}(E)$.*

Preuve. Voir [15]

■

Corollaire 3.2.2 *Soit T un opérateur linéaire fermé. Alors $\sigma'_r(T) = \emptyset$.*

Lemme 3.2.2 *Soit T un opérateur linéaire. Si T n'est pas fermé, alors $\sigma(T) = \mathbb{C}$. (Ou, de manière équivalente, si $\rho(T) \neq \emptyset$, alors T est fermé).*

Preuve. Supposons que $\rho(T) \neq \emptyset$ et soit $z \in \rho(T)$. $(T - zI)^{-1}$ est borné donc fermé et il en va de même pour $(T - zI)$ et T . ■

Conclusion

En analyse fonctionnelle, les opérateurs non bornés sont des opérateurs partiellement définie sur l'espace de départ. En plus, l'existence du domaine $D(A)$ qui est un opérateur non borné constitue à lui seul une raison pour laquelle l'étude des opérateurs reste incomplète et souvent difficile. Aussi bien que, le domaine d'un opérateur non borné doit être dense pour définir l'adjoint de cet opérateur, puisque la densité assure l'unicité.

Tout opérateur non borné auto-adjoint est symétrique par contre un symétrique n'est pas forcément auto-adjoint.

Le graphe d'une transformation linéaire représente l'un des outils puissants dans l'étude des opérateurs linéaires en particulier ceux non bornés sur des espaces de Hilbert, le graphe d'un opérateur permet à ce stade de caractériser une classe des opérateurs non bornés appelés opérateurs fermés qui occupe une place importante dans le domaine de la théorie spectrale et de l'analyse fonctionnelle.

Beaucoup des opérateurs linéaires importants qui ne sont pas bornés sont fermés, comme l'opérateur de dérivation et bon nombre des opérateurs différentiels.

On dit qu'un opérateur non borné est fermé quand son graphe l'est. Le théorème du graphe fermé s'applique donc, et l'opérateur est continu si et seulement s'il est fermé si et seulement s'il est borné.

Beaucoup de définitions et de résultats exposés sur le spectre des opérateurs bornés sont encore valables pour des opérateurs non bornés, à condition qu'ils soient fermés.

En théorie des opérateurs et en mécanique quantique, la notion de spectre s'étend aux opérateurs non bornés fermés.

Bibliographie

- [1] Z. AMMARI, *Analyse microlocale et théorie spectrale (Master 2)*, perso.univ-rennes1.
- [2] A. AZZOUZ, *Sur la Somme, le Produit et Passage à l'adjoint dans la Classe des Opérateurs Fermés sur un Espace de Hilbert* (Thèse doctorat, Université d'Oran), 2011.
- [3] N. BOCCARA, *Analyse fonctionnelle une introduction pour physicien*, ellipses.
- [4] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [5] I. CHALENDAR, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs*, 2011.
- [6] C. CHERIFA, *Sur le théorème de Fuglede-Putnam* (Mémoire magister, Université D'Oran Es-Senia), 2011.
- [7] E. FRICAIN, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs cours et exercices*, 2009-2010.
- [8] M. GUESBA, *Sur quelques équations intégrales non linéaires* (Mémoire Magister, Université Kasdi Merbah Ourgla), 2012.
- [9] G. GRUBB, *Distributions and Operators, Lecture notes, Spring 2007*.
- [10] F. HELEIN, *Notes pour le cours de théorie spectrale*, Université Paris 7, Master 1 de Mathématiques, 2008-2009.
- [11] G. IOOSS, *Bifurcation et Stabilité*, UNIVERSITÉ PARIS XI, 1972-1973.

-
- [12] A. KOLMOGOROV, S. FOMINE, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, 2^e édition, ÉDITIONS MIR. MOSCOU, Décembre 1973.
- [13] S. MAINGOT ET D.MANCEAU, *Théorie spectrale*, Université de Harve, 2011.
- [14] E. MATHERON, *Topologie, Analyse Fonctionnelle, notes de cours*, 2008-2009.
- [15] B. MAUREY, *Analyse fonctionnelle et théorie spectrale*, MT404, 2001-2002.
- [16] M. NADIR, *Cours d'analyse fonctionnelle*, Université de M'sila, 2004.
- [17] O. NOURA, *Spectre étendu d'un opérateur et quelques applications* (Mémoire magister, Université Hamma Lakhdar D'Eloued), 2014-2015.
- [18] A. PASQUALE, *Mathématiques avancées : Analyse fonctionnelle*, Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université Paul Verlaine-Metz, 2009-2010.
- [19] Y. PEQUIGNOT, B. BUFFONI ET F. GENOUD, *Théorie spectrale et évolution en mécanique quantique*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2008.
- [20] C. PORTENIER, *Analyse fonctionnelle*, 2000-2001.
- [21] A. Y. RAKIA, *Sur une classe de problèmes non standards décrits par des équations différentielles* (Mémoire magister, université Mentouri de Constantine).
- [22] L. SAINT-RAYMOND, *Analyse fonctionnelle*, Université Paris VI and DMA Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, FRANCE,2013-2014.
- [23] S. SCHNAUBELT, *Lecture Notes Spectral theory*, Kharlsruhe, 06 Août 2012.
- [24] R. VIDIAN, *Notion de spectre d'opérateur linéaire non borné* (première partie), Séminaire Caribou du 31/01/2005.
- [25] M. ZINSMEISTER, *Théorie Spectrale*, Travaux Dirigés: Athanasios BATAKIS, 2012-2013.

Résumé:

Dans ce mémoire, nous étudions les opérateurs non bornés et leurs propriétés (l'adjoint, le spectre, etc.) dans les espaces de Banach, et de Hilbert pour le développement de cette théorie, on étudier les propriétés des opérateurs bornés puis on essaie de généraliser cette théorie aux opérateurs non bornés tel que les opérateurs fermés.

Mots clés:

Espaces de Banach, opérateurs bornés, opérateurs non bornés, opérateurs fermés, spectre des opérateurs bornés, spectre des opérateurs non bornés.

Abstract:

In this memory, we study the unbounded operators and their properties (the adjoint, the spectrum, etc.) in the spaces of Banach, and Hilbert for the development of this theory, we study the properties of bounded operators and then try to generalize this theory to unbounded operators such as closed operators.

Key words:

Banach spaces, bounded operators, unbounded operators, closed operators, spectrum of bounded operators, spectrum of unbounded operators.