



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse mathématique et numérique

Par

Boufateh Kelthoum

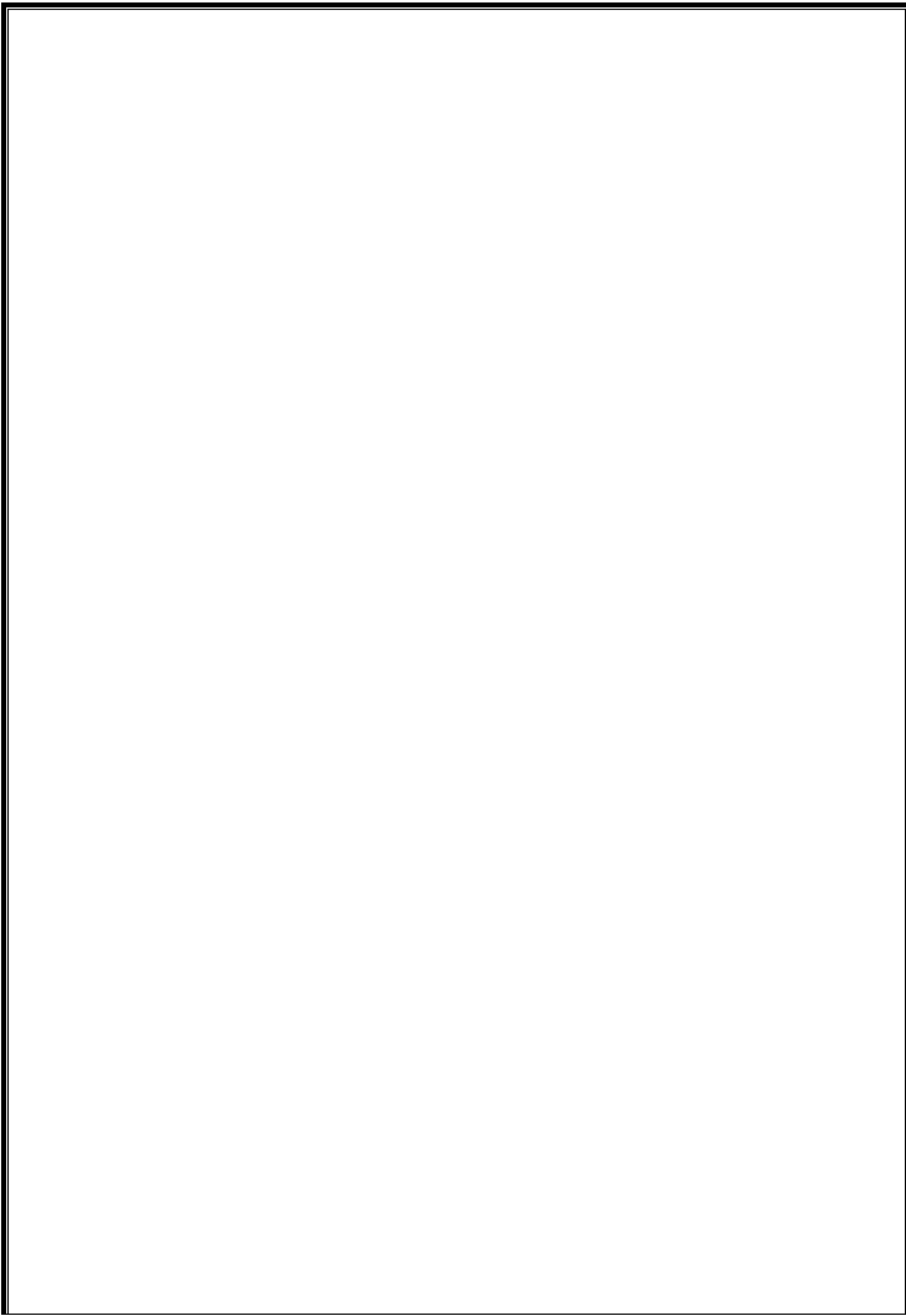
Sujet

Résolution approchée de quelques types d'équation Intégro-Différentielles

Devant le jury :

Mr. Miloud Moussai	M.C.B. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. Selt Omar	M .C.A. Univ de M'sila	Président
Mrs. Khirani Amina	M .C.A. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2019 / 2020



Remerciements

Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux

Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je t'en à remercier notre encadreur Mr : Miloud MOUSSAI directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail. remerciement vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail, et de l'enrichir par leurs propositions.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublies aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A mes sœurs.

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma
promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont
chers.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة المعادلات التكاملية و المعادلات التفاضلية – التفاضلية, حيث تطرقنا إلى ذكر مختلف أنواعها , والهدف هو حل هذه المعادلات بالطرق التحليلية إن أمكن وإذا تعذر الأمر نلجأ إلى الطرق التقريبية العددية باستعمال مختلف طرق الحل .

الكلمات المفتاحية:

- المعادلات التكاملية و المعادلات التفاضلية – التفاضلية.
- المعادلات التكاملية – التفاضلية لفولتيرا و لفريدهولم.
- طرق الحل التحليلية.
- طرق الحل التقريبية.

Résumé

Dans ce mémoire nous avons étudié les équations intégrale et les équations intégral-différentielles, où nous avons la mention de leurs différents types, et le but de résoudre ces équation par des méthodes analytiques ,si elles peuvent être résolues et si ce n'est pas possible, nous recourons à des méthodes numérique approchées utilisant diverses méthode de résolution.

Mots-clés :

- Les équations intégrale et les équations intégral-différentielles.
- Équations intégral-différentielles de Volterra et Fredholm
- Méthode de solution analytique
- Méthode de solution approchée.

Abstract

In this work, we have studied the integral equations and the integro-differential equations ,where we worked touched upon mentioning their various types, and the goal is to solve these equations by analytical methods if they can be solved, and if this is not possible , we resort to numerical approximations using various methods of solution.

Key words :

- The integral equations and the integro-differential equations.
- Volterra and Fredholm integro-differential equations.
- Analytical solution methods.
- Approximate solution methods.

Table des matières

NOTATIONS

$C([a, b])$: L'espace de fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

$[a, b]$: Intervalle réel.

A : Opérateur intégral compact.

H : Espace de Hilbert.

X : Espace normé.

I : Opérateur d'identité.

φ : Fonction inconnue.

$k(x, y)$: Noyau de l'opérateur intégral A .

f, g : Fonction donnée.

$\mathcal{L}$: transformation de Laplace.

$f * g$: produit de convolution entre f et g .

Introduction

Parmi les branches les plus importantes en mathématiques, dans les temps anciens et récents ; les types des équations différentielles et des équations intégrales qui sont considérés comme l'épine dorsale de la majeure partie de la science actuelle si pas tous.

est apparu une autre branche d'équations embrasser différentielle et intégrale dans la même équation ,elle a été introduite par Volterra pour la première fois en 1900, il l'a appelé les équations intégro-différentielles .

Ainsi notre mémoire se compose de quatre chapitres :

Premier chapitre: aborde des notions et résultats préliminaires sur quelques définitions, et rappel sur les équations intégrales.

Deuxième chapitre: donne une introduction sur les (E.I-D) ainsi que les classifications, le théorème de point fixe assure que certaines conditions de l'opérateur T admettent un point fixe unique où l'équation intégro-différentielle admet une solution unique.

Troisième chapitre: est consacré à l'étude des méthodes analytiques de résolution exacte de l'équation intégro-différentielle de Volterra et Fredholm linéaire, avec des exemples.

Quatrième chapitre: est consacré aux méthodes de résolution numérique où nous sommes basés sur la méthode de collocation en utilisant les polynômes de Legendre et les polynômes de Bessel et les polynômes de Taylor .

On termine notre mémoire par une conclusion générale.

introduction à la théorie des équations intégrales et intégréo-différentielles

Notons tout d'abord qu'on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace $C[a; b]$ des fonctions continues de l'intervalle $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire

• Opérateur intégral

Définition 0.0.1 Soit $K : C[a; b] \times C[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur $C[a; b]$ est défini par la formule suivante :

$$\begin{aligned} A & : \quad \varphi \in C[a; b] \rightarrow A\varphi \in C[a; b] \\ (A\varphi)(x) & = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \end{aligned}$$

Dans ce contexte la fonction K s'appelle noyau de l'opérateur intégral A .

• Opérateur adjoint :

On dit que deux opérateurs $A : C[a; b] \rightarrow C[a; b]$ et $B : C[a; b] \rightarrow C[a; b]$ sont adjoints s'ils vérifient

$$\forall \langle u, v \rangle \in C[a; b]^2 : \langle Au, v \rangle = \langle u, Bv \rangle$$

et on note l'adjoint de A par A^* .

• Opérateur compact:

Définition 0.0.2 soit A un opérateur d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans E à un ensemble relativement compact dans F .

Théorème 0.0.1 (Arzela-Ascoli)

Un ensemble, $A \subset C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un relativement compact si et seulement si:

1) bornée i.e s'il existe une constante M telle que :

$$|\varphi(x) - \varphi(t)| \leq M, \forall x \in G, \forall \varphi \in A$$

Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que $\forall \varphi \in A$, nous avons

$$|\varphi(x) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad \forall x, t \in G \text{ et } |x - t| < \delta$$

• Espace de Banach

Définition 0.0.3 (*Espace vectoriel normé*)

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$; on appelle norme sur l'espace E toute application notée $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ si seulement si :

1. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (*homogénéité*).
2. $\forall x, y \in E, N(x, y) \leq N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*).
2. $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$ (*définit*)
4. $\forall x \in E, N(x) \succ 0$ (*positivité*).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 0.0.4 (*Espace métrique complet*)

un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy X est convergente dans E .

Définition 0.0.5 *un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet .*

• Produit scalaire:

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $\langle ., . \rangle$ possédant les propriétés suivantes:

pour tout x, y, z dans E et α, β dans $\mathbb{R}$,

$$1-\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle .$$

$$2-\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle .$$

$$3-\langle x, x \rangle \geq 0.$$

$$4-\langle x, x \rangle = 0 \text{ implique } x = 0.$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un espace préhilbertien.

Remarque 0.0.1 *Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante*

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Définition 0.0.6 (*Espace de Hilbert*)

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

- Espace de L^2 :

Définition 0.0.7 on note $L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur Ω . une fonction f définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } |f|^2 \in L^1(\Omega)\}$$

l'espace $L^2(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f \cdot g \, dx \quad ; \quad f, g \in L^2(\Omega)$$

et de la norme associée :

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \forall f \in L^2(\Omega)$$

- Espace de $C^L([a, b])$:

Définition 0.0.8 les éléments de cet espace $C^L([a, b])$ sont les fonctions définies sur $[a, b]$ et qui ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre l ($f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(l)}$ existe) ou $f^{(0)} = f$.

Remarque 0.0.2 la norme d'un élément $f(x) \in C^{(l)}([a, b])$ se définit par

$$\|f\|_{C^{(l)}([a, b])} = \sum_{k=0}^l \max_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)|, \quad f^{(0)} = f$$

- La règle de Leibniz:

Soit g est fonction différentiable en y .

la règle de Leibniz est donnée par la formule:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b g(t, y) dt = \int_a^b \frac{dg(t, y)}{dy} dt$$

En général

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)}^{B(t)} f(t, s) ds = \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\delta f(t, s)}{\delta t} ds + f(t, B(t)) \frac{dB}{dt} - f(t, A(t)) \frac{dA(t)}{dt}$$

Chapitre 1

Équations intégrales

Définition 1.0.9 *Toute équation fonctionnelle de la forme:*

$$\lambda\varphi(x) + f(x) = \int_E K(x, t, \varphi(t))dt \quad (1.1)$$

est appelée équation intégrale , où φ est l'inconnue , f est une fonction donnée , $\lambda \in \mathbb{R}$ (où $\mathbb{C}$), E est un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien et K le noyau , on prend :

$$K(x, t, \varphi(t)) = K(x, t)\varphi(t)$$

L'équation intégrale (1.1) devient:

$$f(x) = -\lambda\varphi(x) + \int_E K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.2)$$

qui est dite équation intégrale linéaire.

Le type général d'une équation intégrale linéaire est :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E K(x, t)\varphi(t)dt$$

la fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation.

1.1 Classifications des équations intégrales

Les équations intégrales linéaires les plus fréquemment utilisées relèvent de deux classes principales ,équations intégrales de Fredholm et Volterra dans ce texte nous donnerons une liste des équations intégrales de Fredholm et Volterra :

1.1.1 Équation intégrale de Volterra:

Définition 1.1.1 on appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce une équation de la forme:

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt \quad (1.3)$$

où φ est une fonction inconnue , $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonction connues et λ est un paramètre réel .

1) une équation de la forme :

$$f(x) = \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt$$

est appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce .

2) on appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce est de la forme :

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

3) si $f(x) = 0$,l'équation s'écrit:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

elle est dite équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce.

4) une équation à une inconnue $\varphi(x)$,de la forme :

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt$$

est dite équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

Exemple 1.1.1 Equations intégrales linéaires non homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \lambda \int_0^x (x^2 - 1)\varphi(t)dt &= x^2 + \sin(x) + 1 \\ -\lambda \int_0^x (x^2 - 1)\varphi(t)dt &= x^2 + \sin(x) + 1\end{aligned}$$

Equations intégrales linéaires homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^x (x^2 - 1)\varphi(t)dt &= \varphi(x) \\ \lambda \int_0^x (x^2 - 1)\varphi(t)dt &= 0\end{aligned}$$

1.1.2 Équation intégrale de Fredholm:

Définition 1.1.2 on appelle équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce une équation de la forme:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))dt = f(x), x \in [a, b] \quad (1.4)$$

où φ est une fonction inconnue, $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonction connues et λ est un paramètre réel.

- si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, x \in [a, b]$$

L'équation est dite équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de second espèce si dans le cas contraire.

- si $f(x) \neq 0$ elle est dite équation intégrale de Fredholm de seconde espèce non homogène.

1) on appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x), x \in [a, b]$$

où φ est une fonction inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonction connues et λ est un paramètre réel.

2) une équation intégrale de la forme:

$$-\lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x), x \in [a, b]$$

est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

Exemple 1.1.2

Equations intégrales linéaires non homogènes de Fredholm de seconde et première espèce

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t) \varphi(t) dt &= x^2 + \sin(x) + 1, x \in [-1, 1] \\ -\lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t) \varphi(t) dt &= x^2 + \sin(x) + 1, x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Equations intégrales linéaires homogènes de Fredholm de seconde et première espèce

$$\begin{aligned} \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t) \varphi(t) dt &= \varphi(x), x \in [-1, 1] \\ \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t) \varphi(t) dt &= 0, x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

1.2 Relation entre les équations intégrales de Volterra et les équations différentielles ordinaires linéaires

Il y a une relation fondamentale entre les équations intégrales de Volterra et les équations différentielles ordinaires.

Soit l'équation différentielle de type:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x) \quad (1.5)$$

avec des coefficients continus, et les conditions initiales

$$y(a) = q_0, y'(a) = q_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = q_{n-1}$$

L'équation (1.5) peut être réduite à une équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) + \int_a^x K(x, y) \varphi(t) dt = f(x)$$

Pour arriver à cette équation intégrale, on utilise la transformation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(x)$$

d'où, par intégration par rapport à x de a à x on obtient

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_a^x \varphi(t)dt + q_{n-1}$$

et les intégrales successives sont

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} &= \int_a^x \int_a^{x_1} \varphi(x)dx dx_1 + q_{n-1}x + q_{n-2} \\ \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} &= \int_a^x \int_a^{x_2} \int_a^{x_1} \varphi(x)dx dx_1 dx_2 + q_{n-1} \frac{x^2}{2!} + q_{n-2}x + q_{n-3} \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

et en procédant de la même manière, on obtient

$$y(x) = \int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} \varphi(x_1)dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)dt$$

En retournant à l'équation différentielle (1.5), on voit qu'on peut l'écrire comme suit

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

ou

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

et

$$f(x) = F(x) - q_{n-1}a_1(x) - [(x-a)q_{n-1} + q_{n-2}]a_2(x) - \dots - (q_{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + q_1(x-a) + q_0)a_n(x)$$

voir[18]

Chapitre 2

Équations intégro-différentielles

Définition 2.0.1 soit l'équation intégro - différentielle linéaire (voir[06], [07])

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1\varphi^{(n-1)}(x) \dots a_n\varphi(x) + \sum_{m=0}^s \int_0^x k_m(x, t)\varphi^{(m)}(t)dt = f(x) \quad (2.1)$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes , $f(x), k_m(x) (m = 0, 1, \dots, s)$ des fonctions données , $\varphi(x)$ la fonction cherchée .

La fonction $\varphi(x)$ est soumis à des condition initiales de la forme

$$\varphi(0) = \varphi_0 \text{ , } \varphi'(0) = \varphi'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)}$$

2.1 Classifications des équations intégro-différentielles

2.1.1 Équations intégro-différentielles de Fredholm.

Définition 2.1.1 L'équation intégro - différentielle de Fredholm est de la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.2)$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la dérivée n -ième de $\varphi(x)$. autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec φ^n sur le côté gauche .

Exemple 2.1.1

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 x\varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 0$$

et

$$\varphi''(x) + \varphi'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt\varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$$

2.1.2 Équations intégral-différentielles de Volterra

Définition 2.1.2 L'équation intégral-différentielle de Volterra est de la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.3)$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la dérivée n -ième de $\varphi(x)$. autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec φ^n sur le côté gauche.

Exemple 2.1.2

$$\varphi'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - x \exp(x) - \int_0^x t\varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 0$$

et

$$\varphi''(x) + \varphi'(x) = 1 - x - (\sin x + \cos x) - \int_0^x t\varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = -1, \quad \varphi'(0) = 1$$

2.1.3 Équations intégral-différentielles de Volterra-Fredholm

L'équation intégral-différentielle de Volterra-Fredholm linéaire est de la forme:

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.4)$$

et

$$\varphi^{(n)}(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t, \xi, \tau, \varphi(\xi, \tau))d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T]$$

où $f(x, t)$ et $\int_{\Omega} F(x, t, \xi, \tau, \varphi(\xi, \tau))$ sont des fonction analytiques sur $D \in \Omega \times [0, T]$ et Ω est une partie fermée de $\mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3$.

Exemple 2.1.3

$$\begin{cases} \varphi'(x) = 24x + x^4 + 3 - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt - \int_0^1 t\varphi(t)dt \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varphi'(x, t) = 1 + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \xi)d\xi d\tau \\ \varphi(0, t) = t^3 \end{cases}$$

2.2 Équations intégro-différentielles singulières

Une équation intégro-différentielle est dite singulière si :

- 1- L'un ou les deux bornes de l'intégration sont infinies.
- 2- Le noyau devient infini au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle de l'intégration.

Exemple 2.2.1 voir [08]

$$u(x) = \pi^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{v(t)}{t-x} dt, \quad 0 \leq x \leq +\infty$$

avec

$$\begin{aligned} u &= a_n \frac{d^n \varphi}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} \varphi}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 \varphi \\ v &= b_n \frac{d^n \varphi}{dx^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} \varphi}{dx^{n-1}} + \dots + b_0 \varphi \end{aligned}$$

2.3 Convertissement d'une (E.I-D) linéaire de haut ordre à un système d'E.I-D linéaire de premier ordre

On considère l'équation intégro-différentielle linéaire d'ordre n .

$$\varphi^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \varphi^{(n-i)}(x) + \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = g(x)$$

Avec les conditions initiales

$$\varphi(a) = \alpha_1, \varphi'(a) = \alpha_2, \varphi''(a) = \alpha_3, \dots, \varphi^{(n-1)}(a) = \alpha_n$$

Pour convertir une (E.I-D) d'ordre n à un système de (E.I-D) de premier ordre on pose : $\phi_1(x) = \varphi(x)$, $\phi_2(x) = \varphi'(x)$, $\dots$, $\phi_n(x) = \varphi^{(n-1)}(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1'(x) = \phi_2(x) \\ \phi_2'(x) = \phi_3(x) \\ \phi_3'(x) = \phi_4(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-1}'(x) = \phi_n(x) \\ \phi_n'(x) = g(x) - \sum_{i=1}^n a_i(x) \phi_{n+1-i}(x) - \int_a^b K(x, t) \phi_1(t) dt \end{array} \right.$$

Avec les conditions initiales : $\phi_1(a) = \alpha_1, \phi_2(a) = \alpha_2, \dots, \phi_n(a) = \alpha_n$. voir[12]

2.4 Théorème de point fixe

Théorème 2.4.1 (de point fixe de Banach) voir[05]

Soit T un opérateur contractant sur un espace de Banach X , alors T admet un point fixe unique.

Preuve.

On pose $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_n$ n fois.

Soit φ un élément fixé arbitraire de X , et soit la suite $(T^n(\varphi))_{n \geq 1}$.

On pose

$$\varphi_n = T^n(\varphi) \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

On note que :

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_m\| &= \|\varphi_n - \varphi_{n-1} + \varphi_{n-1} - \varphi_{n-2} + \dots + \varphi_{m+1} - \varphi_m\| \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| + \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\| + \dots + \|\varphi_{m+1} - \varphi_m\| \\ &= \|T(\varphi_{n-1}) - T(\varphi_{n-2})\| + \|T(\varphi_{n-2}) - T(\varphi_{n-3})\| + \dots + \|T(\varphi_m) - T(\varphi_{m-1})\| \\ &\leq L \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\| + L \|\varphi_{n-2} - \varphi_{n-3}\| + \dots + L \|\varphi_m - \varphi_{m-1}\| \\ &\vdots \\ &\leq (L^{n-1} + L^{n-2} + \dots + L^{m-1}) \|\varphi_1 - \varphi\| \\ &\leq \frac{L^{m-1}}{1-L} \|\varphi_1 - \varphi\| \end{aligned}$$

Pour $n > m \geq 1$, on a $\|\varphi_n - \varphi_m\| \longrightarrow 0$ quand $n, m \rightarrow +\infty$. Alors la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy.

Le fait que X espace de Banach, alors la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ est convergente i.e. Il existe $\alpha \in X$ telle que $\varphi_n \rightarrow \alpha$, quand $n \rightarrow +\infty$.

Il suffit de montrer que α est un point fixe de T , alors faisons deux revendications .

1. α est un point fixe de T , c'est-à-dire : $T(\alpha) = \alpha$.
2. α est un point fixe unique de T dans X .

Pour 1. nous prenons la limite des deux côtés des récurrences : $\varphi_n = T(\varphi_{n-1})$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(\varphi_{n-1})$$

Comme T est contractant, alors il est continu donc on peut prendre la limite à l'intérieure.

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{n-1}\right) = T(\alpha)$$

Pour montrer 2. on suppose que T admet deux point fixe α_1 et α_2 distincts :

$$T(\alpha_1) = \alpha_1 \text{ et } T(\alpha_2) = \alpha_2, \text{ avec } \alpha_1 \neq \alpha_2$$

Comme T est contractant on a :

$$\begin{aligned} \|\alpha_1 - \alpha_2\| &= \|T(\alpha_1) - T(\alpha_2)\| \\ &\leq L \|\alpha_1 - \alpha_2\| \end{aligned}$$

Alors

$$(1 - L) \|\alpha_1 - \alpha_2\| \leq 0$$

On a $\|\alpha_1 - \alpha_2\| \neq 0$, Ce qui implique $L \geq 1$. ce qui contredit le fait que $L < 1$, donc α est unique. ■

Théorème 2.4.2 voir[05]

Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach X , telle que T^n est contractant sur X , pour un entier positif n . Alors T a un point fixe unique.

Preuve. Le théorème du point fixe implique qu'il existe un point fixe unique pour l'opérateur T^n , on note φ_0 de cette point fixe.

Notons que :

$$\begin{aligned} \|T(\varphi_0) - \varphi_0\| &= \|T(T^n(\varphi_0)) - T^n(\varphi_0)\| \\ &= \|T^n(T(\varphi_0)) - T^n(\varphi_0)\| \\ &\leq L \|T(\varphi_0) - \varphi_0\| \end{aligned}$$

Pour $0 < L < 1$, on a $T(\varphi_0) = \varphi_0$.

L'unicité est claire du faite qu'un point fixe de T est aussi un point fixe de T^n . ■

2.5 L'application sur (E.I-D) de Fredholm de premier ordre

Soit l'équation intégral-différentielle non linéaire de premier ordre

$$\begin{cases} \varphi'(x) = g(x) + \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt, & x \in [a, b] \\ \varphi(a) = \alpha \end{cases} \quad (2.5)$$

Où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont fonctions continues. Le cas linéaire : $K(x, t, \varphi) = h(x, t)\varphi(t)$, tel que $h : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, est un cas particulier évident de l'équation (2.5).

En intégrant (2.5) entre a et x on obtient :

$$\varphi(x) = \alpha + \int_a^x g(s) ds + \int_a^x \int_a^b K(s, t, \varphi(t)) dt ds, \quad x \in [a, b] \quad (2.6)$$

Réciproquement si $\varphi \in C^1([a, b])$ on retrouve bien (2.5), en dérivant (2.6) et on retrouve la condition initiale $\varphi(a) = \alpha$ en faisant $x = a$. Ainsi l'équation intégral-différentielle caractérise la solution du problème de Cauchy (2.5) et on s'intéresse donc à φ vérifiant (2.6).

On définit ainsi un opérateur T de $C([a, b])$ dans $C([a, b])$

$$T(\varphi)(x) = \alpha + \int_a^x g(s) ds + \int_a^x \int_a^b K(s, t, \varphi(t)) dt ds, \quad x \in [a, b]$$

La fonction cherchée est une solution de $\varphi = T(\varphi)$, c'est une équation de type point fixe.

On se donne $\varphi_0 \in X$, et on construit la suite itérée associée $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$\varphi_1 = T(\varphi_0), \quad \varphi_2 = T(\varphi_1), \quad \dots, \quad \varphi_n = T(\varphi_{n-1})$$

On a aussi $\varphi_n = T^n(\varphi)$.

On veut appliquer le théorème du point fixe à T^p (pour p bien choisi).

Lemme 2.5.1 voir[02]

Soit u et $v \in C([a, b])$ et $L \in \mathbb{R}_+^*$ est le constant de Lipschitz de la fonction continue

$K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au troisième variable de (2.5)

Alors :

$$\|T^p(u) - T^p(v)\|_\infty \leq \frac{L^p(b-a)^{2p}}{p!} \|u - v\|_\infty \quad (2.7)$$

Preuve. On pose $T^p = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_p$ p fois

On prouve l'inégalité

$$p \geq 1, x \in [a, b] \implies |T^p(u)(x) - T^p(v)(x)| \leq \frac{L^p(b-a)^p(x-a)^p}{p!} \|u - v\|_\infty$$

On va prouver par récurrence pour $p = 1$ on a :

$$\begin{aligned} |T(u)(x) - T(v)(x)| &= \left| \int_a^x \left(\int_a^b (K(s, t, u(t)) - K(s, t, v(t))) dt \right) ds \right| \\ &\leq \int_a^x \left(\int_a^b |K(s, t, u(t)) - K(s, t, v(t))| dt \right) ds \end{aligned}$$

Le fait que K est Lipschitzienne au troisième variable avec le constant de Lipschitz $L > 0$ pour tout $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \int_a^x \left(\int_a^b |K(s, t, u(t)) - K(s, t, v(t))| dt \right) ds &\leq \int_a^x \left(\int_a^b L |u(t) - v(t)| dt \right) ds \\ &\leq \int_a^x \left(\int_a^b L \|u - v\|_\infty dt \right) ds \\ &= L \|u - v\|_\infty (b-a)(x-a) \\ &\leq L \|u - v\|_\infty (b-a)^2 \end{aligned}$$

On suppose que l'inégalité proposée est valable pour $(p-1)$ et on va prouver pour $p, \forall \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |T^p(u)(x) - T^p(v)(x)| &= \left| \int_a^x \left(\int_a^b (K(s, t, T^{p-1}(u)(t)) - K(s, t, T^{p-1}(v)(t))) dt \right) ds \right| \\ &\leq \int_a^x \left(\int_a^b L |T^{p-1}(u)(t) - T^{p-1}(v)(t)| dt \right) ds \\ &\leq \int_a^x \left(\int_a^b L \cdot L^{p-1} \|u - v\|_\infty \frac{(b-a)^{p-1}}{(b-a)!} (s-a)^{p-1} dt \right) ds \\ &= \frac{L^p(b-a)^p(x-a)^p}{p!} \|u - v\|_\infty \\ &\leq \frac{L^p(b-a)^{2p}}{p!} \|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

Donc T^p est lipschitzienne de rapport $\frac{(L(b-a)^2)^p}{p!}$, on a :

$$\sum_{p \geq 0}^{\infty} \frac{(L(b-a)^2)^p}{p!} = e^{L(b-a)^2}$$

Il résulte que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(L(b-a)^2)^p}{p!} = 0$$

.

Alors il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\frac{(L(b-a)^2)^p}{p!} < 1$. Donc pour $n \geq p$, T^n est contractant. On déduit du théorème (2.4.1) que T^n admet un unique point fixe φ , de plus :

$$T^n(T(\varphi)) = T(T^n(\varphi)) = T(\varphi)$$

Donc $T(\varphi)$ est un point fixe de T^n , et par unicité du point fixe de T^n on a : $T(\varphi) = \varphi$. Comme les points fixes de T sont des points fixes de T^n on en déduit que φ est l'unique point fixe de T .

Finalement, φ est l'unique solution de (2.5). ■

Chapitre 3

Résolution analytique de quelques types d'équations intégrales-différentielles

3.1 Équations intégrales-différentielles de Volterra linéaire de deuxième type

Définition 3.1.1 les équations intégrales-différentielles de Volterra linéaire le deuxième type sont données sous la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.1)$$

Où $\varphi^{(n)}(x) = \frac{d^n \varphi}{dx^n}$. Parce que l'équation a entraîné dans (3.1) la combinaison de l'opérateur différentiel et l'opérateur intégral, alors il est nécessaire de définir les conditions initiales

$\varphi(0), \varphi'(0), \dots, \varphi^{(n-1)}(0)$ pour la détermination de la $\varphi(x)$ solution particulière de l'équation intégrale-différentielle de Volterra (3.1). Toute équation intégrale-différentielle de Volterra se caractérise par l'existence d'une ou de plusieurs des dérivées $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots$ dehors du signe intégral. on peut observer des équations intégrales-différentielles de Volterra lorsque nous convertissons un problème de valeur initiale à une équation intégrale à l'aide de la règle de Leibnitz .

Les conditions initiales sont nécessaires pour déterminer la solution exacte.

3.1.1 La méthode de solution sous forme de série:

La fonction $\varphi(x)$ est appelée analytique si elle a des dérivés de tous les ordres tels que la série de Taylor à n'importe quel point b dans son domaine

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(b)}{n!} (x-b)^n \quad (3.2)$$

converge vers $\varphi(x)$ dans un quartier de b . Pour plus de simplicité, la forme générique de Séries de Taylor à $x = 0$ peut s'écrire sous

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.3)$$

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode de solution sous forme d'une série pour la résolution des équations intégral-différentielles de Volterra de second type. Nous supposons

que la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégral-différentielle de Volterra est sous la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) \varphi(t) dt, \quad \varphi^{(k)}(0) = k! a_k, \quad 0 \leq k \leq (n-1) \quad (3.4)$$

est analytique et possède donc par série de Taylor de la forme donnée un développement en (3.3), où les coefficients a_n seront déterminés par récurrence. Les premiers coefficients a_k peuvent être déterminés en utilisant les conditions initiales et alors

$$a_0 = \varphi(0), a_1 = \varphi'(0), a_2 = \frac{1}{2!} \varphi''(0), a_3 = \frac{1}{3!} \varphi'''(0) \quad (3.5)$$

et ainsi de suite. Pour déterminer en appliquant les coefficients a_k restants de (3.3) seront déterminés par l'application de la méthode de solution de série à l'équation intégral-différentielle

de Volterra (3.4). Substitution (3.3) dans les deux côtés de la donnée (3.4)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^{(n)} = T(f(x)) + \int_0^x K(x,t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt \quad (2.6)$$

ou pour plus de simplicité, nous utilisons

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^{(n)} = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x,t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \quad (3.7)$$

où $T(f(x))$ est la série de Taylor de $f(x)$. L'équation intégral-différentielle (3.4) sera convertie en une intégrale traditionnelle dans (3.6) ou (3.7) où à la place d'intégrer la fonction inconnue

$\varphi(x)$ termes de la forme t^n , $n \geq 0$ sera intégrée. Notez que parce que nous cherchons la solution de la série, puis si $f(x)$ inclut des fonctions élémentaires comme les fonctions trigonométriques, fonctions exponentielles, etc, puis Taylor expansions pour fonctions impliquées dans $f(x)$ doit être Utilisée.

Nous intégrons tout d'abord la partie droite de l'intégrale dans (3.6) ou (3.7), et collecter les coefficients de comme puissances de x . Nous assimilons ensuite les coefficients d'aimé les puissances de x dans les deux côtés de l'équation pour déterminer un relation de récurrence dans a_j , $j \geq 0$.

Résoudre la relation de récurrence conduira à une détermination complète des coefficients a_j , $j \geq 0$ où certains d'entre les coefficients seront utilisés à partir des conditions initiales. Après avoir déterminé les coefficients a_j , $j \geq 0$, la solution de série suit immédiatement à son remplacement par les coefficients dérivés en (3.3). La solution exacte peut être obtenue si une telle solution exacte existe. Si une solution exacte n'est pas obtenue, puis la série obtenue peut être utilisée à des fins numériques. Dans ce cas, plus nous évaluons des termes ; nous atteindrons un niveau de précision plus élevé.

Exemple 3.1.1 *Utilisez la méthode de solution sous forme série pour résoudre l'équation intégral-différentielle de Volterra*

$$\varphi'(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t) dt \quad (3.8)$$

Solution 3.1.1 *Son remplacement par $\varphi(x)$ de la série*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.9)$$

dans les deux côtés de l'équation (3.8) conduit à

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = 1 + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \quad (3.10)$$

Différencier le côté gauche une fois par rapport à x , et l'évaluation de l'intégrale sur le côté droit, nous trouvons

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n \quad (3.11)$$

qui peut être réécrite sous la forme

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n \quad (3.12)$$

où nous avons unifié l'exposant de x les deux côtés et utilisé $a_0 = 0$ de la condition initiale donnée.

Assimiler les coefficients de puissances comme de x à la fois côté de (3.12) donne la relation de récurrence

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} a_{n-1} \geq 1 \quad (3.13)$$

où ce résultat donne

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} \quad (3.14)$$

Pour $n \geq 0$. Par substitution de ce résultat dans (3.9) donne la solution de série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (3.15)$$

qui converge vers la solution exacte

$$\varphi(x) = \sinh x \quad (3.16)$$

3.1.2 La méthode de décomposition de Adomian

La méthode de décomposition de Adomian (**voir[01]**) donne la solution dans un infini série de composants qui peuvent être déterminés de façon récurrente. la série obtenue peut donner

la solution exacte, si une telle solution existe. Dans le cas contraire, la série donne une approximation de la solution qui donne le niveau de précision élevé. sans perte de généralité,

on peut supposer un équation intégral-différentielle de Volterra du second type donnée par

$$\varphi''(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t) \varphi(t) dt, \quad \varphi(0) = a_0, \varphi'(0) = a_1 \quad (3.17)$$

Intégration des deux côtés (3.17) de 0 à x deux fois conduit à

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt \right) \quad (3.18)$$

où les conditions initiales $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$ sont utilisées, et L^{-1} est une fois deux opérateur intégral. nous utilisons ensuite la série de décomposition

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (3.19)$$

dans les deux côtés de (3.18) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \right) dt \right) \quad (3.20)$$

ou de façon équivalente

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots = & a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_0(t) \right) dt \right), \\ & (3.21) \\ & + L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_1(t) \right) dt \right) + L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_2(t) \right) dt \right) + \dots \end{aligned}$$

Pour déterminer les composants $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots$ de la solution $\varphi(x)$, nous avons mis la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) \\ \varphi_{k+1}(x) &= L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t)\varphi_k(t)dt \right), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

où le zéro élément $\varphi_0(x)$ est défini par tous les termes non inclus à l'intérieur le signe intégral (3.21). Après avoir déterminé les composants $\varphi_i(x), i \geq 0$; la solution $\varphi(x)$ de (3.17)

est alors obtenu sous forme de série. En utilisant (3.19), la série obtenue converge vers la solution exacte, si une telle solution existe.

Cependant, pour des problèmes concrets, une série tronquée $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ est généralement utilisé rapprochant la solution $\varphi(x)$ qui peut être utilisée à des fins numériques.

Remarque 3.1.1 1. La méthode de décomposition de Adomian a été présentée avant de gérer une deuxième équations intégral-différentielles d'ordre Volterra.

Pour les autres commandes, nous pouvons suivre la même approche, telle que présentée. Cela sera expliqué plus loin dans les détails en examinant les exemples illustratifs, où le premier ordre, deuxième ordre, troisième ordre, et les équations intégral-différentielles de quatrième ordre Volterra seront étudiées.

2. La méthode de décomposition modifiée que nous avons utilisée avant peut être utilisée pour le traitement des équations intégral-différentielles Volterra de n'importe quel ordre.

3. Le phénomène des termes de bruit qui a été appliqué avant peut être utilisé ici si des termes de bruit apparaissent.

Exemple 3.1.2 Utilisez la méthode Adomian pour résoudre l'équation intégral-différentielle de Volterra

$$\varphi'(x) = 1 - \int_0^x \varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 0 \quad (3.23)$$

Solution 3.1.2 Application de l'opérateur intégral L^{-1} définie par

$$L^{-1}(.) = \int_0^x (.)dx \quad (3.24)$$

des deux côtés de (3.23), c'est à dire intégrant les deux côtés de (3.23) une fois de 0 à x , et en utilisant la condition initiale donnée nous obtenons

$$\varphi(x) = x - L^{-1} \left(\int_0^x \varphi(t)dt \right) \quad (3.25)$$

Utilisation de la série de décomposition (3.19), et en utilisant la relation de récurrence (3.22) on obtient

$$\varphi_0(x) = x \quad (3.26)$$

$$\varphi_1(x) = -L^{-1} \left(\int_0^x \varphi_0(t)dt \right) = -\frac{1}{3!}x^3$$

$$\varphi_2(x) = L^{-1} \left(\int_0^x \varphi_1(t)dt \right) = \frac{1}{5!}x^5$$

$$\varphi_3(x) = L^{-1} \left(\int_0^x \varphi_2(t)dt \right) = -\frac{1}{7!}x^7$$

et ainsi de suite. cela donne la solution sous forme de série

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \quad (3.27)$$

et par conséquent la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \sin x \quad (3.28)$$

3.1.3 La méthode de transformation de Laplace

La méthode de transformation de Laplace a été utilisée avant pour résoudre Volterra intégrante des équations du premier et du deuxième type.

Les détails et les propriétés du procédé de la transformée de Laplace sont présents dans différentielle ordinaire équations textes.

Dans la transformation de Laplace théorème de convolution, il a été dit que, si le noyau $K(x; t)$ de l'équation intégrale

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (3.29)$$

dépend de la différence $x - t$, il est alors appelé un noyau de différence. L'équation intégral-différentielle peut donc être exprimée comme

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x - t)\varphi(t)dt, \quad (3.30)$$

Considérons deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ qui possèdent les conditions nécessaires de l'existence de transformée de Laplace pour chacun. Que les transformées de Laplace pour les

fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont données par:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) \quad , \quad \mathcal{L}\{g(x)\} = G(s) \quad (3.31)$$

Le produit de convolution de Laplace ses deux fonctions sont définies par:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x - t)g(t)dt \quad (3.32)$$

où

$$(g * f)(x) = \int_0^x g(x - t)f(t)dt \quad (3.33)$$

Rappelons que

$$(f * g)(x) = (g * f)(x) \quad (3.34)$$

On peut montrer facilement que la transformée de Laplace du produit de convolution $(f * g)(x)$ est donnée par :

$$\mathcal{L} \{(f * g)(x)\} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^x f(x-t)g(t)dt \right\} = F(s)G(s). \quad (3.35)$$

Pour résoudre les équations intégral-différentielles de Volterra en utilisant la méthode de transformée de Laplace, il est essentiel d'utiliser les transformations de Laplace des dérivées de $\varphi(x)$. Nous pouvons facilement montrer que:

$$\mathcal{L} \{\varphi^{(n)}(x)\} = s^n \mathcal{L} \{\varphi(x)\} - s^{n-1}\varphi(0) - s^{n-2}\varphi'(0) - \dots - \varphi^{(n-1)}(0) \quad (3.36)$$

Cela donne tout simplement

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{\varphi'(x)\} &= s \mathcal{L} \{\varphi(x)\} - \varphi(0) \\ &= sU(s) - \varphi(0) \\ \mathcal{L} \{\varphi''(x)\} &= s^2 \mathcal{L} \{\varphi(x)\} - s\varphi(0) - \varphi'(0) \\ &= s^2U(s) - s\varphi(0) - \varphi'(0) \\ \mathcal{L} \{\varphi'''(x)\} &= s^3 \mathcal{L} \{\varphi(x)\} - s^2\varphi(0) - s\varphi'(0) - \varphi''(0) \\ &= s^3U(s) - s^2\varphi(0) - s\varphi'(0) - \varphi''(0) \\ \mathcal{L} \{\varphi^{(4)}(x)\} &= s^4 \mathcal{L} \{\varphi(x)\} - s^3\varphi(0) - s^2\varphi'(0) - s\varphi''(0) - \varphi'''(0) \\ &= s^4U(s) - s^3\varphi(0) - s^2\varphi'(0) - s\varphi''(0) - \varphi'''(0) \end{aligned} \quad (3.37)$$

et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur.

Nous appliquons d'abord la transformée de Laplace à deux côtés de (3.30), utilisons la transformée de Laplace bon pour le dérivé de $\varphi(x)$, puis résoudre pour $U(s)$.

Nous utilisons ensuite la transformée inverse de Laplace des deux côtés de l'équation résultante pour obtenir la solution $\varphi(x)$ de l'équation.

Exemple 3.1.3 *Utiliser la méthode de transformation de Laplace pour résoudre l'équation intégral-différentielle de Volterra:*

$$\varphi'(x) = x + \int_0^x \varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 0 \quad (3.38)$$

Notez que le noyau $k(x-t) = 1$. Prenant la transformée de Laplace de part et d'autre de (3.38) donne :

$$\mathcal{L}(\varphi'(x)) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(1 * \varphi(x)), \quad (3.39)$$

obtenu

$$sU(s) - \varphi(0) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}U(s) \quad (3.40)$$

On utilise la condition initiale donnée puis on résoud pour $U(s)$, nous trouvons

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \quad (3.41)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de (3.41), la solution exacte est donnée par :

$$\varphi(x) = x \quad (3.42)$$

3.2 Équations intégral-différentielles de Fredholm linéaire de deuxième type

Définition 3.2.1 Soit équations intégral-différentielles de Fredholm linéaire donnée sous la forme

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad \varphi^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq n-1 \quad (3.43)$$

où $\varphi^{(n)}(x) = \frac{d^n u}{dx^n}$ étant donné que l'équation entraîné (3.43) combine l'opérateur différentiel et l'opérateur intégral est alors nécessaire de définir des conditions initiales $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(0)$ pour la détermination de la solution particulière $\varphi(x)$ de l'équation (3.43). toute équation intégral-différentielle de Fredholm est caractérisée par l'existence d'une ou de plusieurs des dérivés $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots$ en dehors du signe de l'intégrale.

Nous allons nous concentrer notre étude sur les équations qui impliquent séparables noyaux où le noyau $K(x, t)$ peut être exprimé comme une somme finie de la forme

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t) \quad (3.44)$$

Sans perte de généralité, nous allons faire notre analyse sur un noyau d'un terme $K(x, t)$ de la forme

$$K(x, t) = g(x)h(t) \quad (3.45)$$

3.2.1 La méthode de calcul direct

Le format standard de l'équation intégral-différentielle de Fredholm est donné près

$$\varphi^{(n)}(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad , \quad \varphi^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq n-1 \quad (3.46)$$

où $\varphi^{(n)}(x)$ indique le dérivé n-ième de $\varphi(x)$ par rapport à x et b_k des conditions initiales.

En substituant (3.45) dans (3.46) donne

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_a^b h(t)\varphi(t)dt \quad , \quad \varphi^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq n-1 \quad (3.47)$$

Nous pouvons facilement constater que l'intégrale définie dans le intégral-différentielle l'équation (3.47) implique une intégrant qui dépend entièrement de la variable t .

Cela signifie que l'intégrale définie sur le côté droit de (3.47) est équivalent à a une constante α . En d'autres termes, nous avons mis en

$$\alpha = \int_a^b h(t)\varphi(t)dt \quad (3.48)$$

Par conséquent, l'équation. (3.47) devient

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \alpha g(x) \quad (3.49)$$

L'intégration des deux côtés de (3.49) n fois à partir de 0 à x , et en utilisant conditions initiales, nous pouvons trouver une expression pour $\varphi(x)$ qui implique la constante α en plus de la variable x .

Cela signifie que nous pouvons écrire

$$\varphi(x) = v(x; \alpha) \quad (3.50)$$

En substituant (3.50) dans le côté droit de (3.48), l'évaluation de l'intégrale, et résolution de l'équation résultante, nous déterminons a valeur numérique de la constante α .

Cela conduit à la solution exacte $\varphi(x)$ obtenu par la substitution la valeur résultante de α en (3.50).

Il est important de rappeler que cette méthode conduit toujours à la solution exacte et pas aux composants de série.

Exemple 3.2.1 Résoudre l'équation intégral-différentielle de Fredholm à l'adresse suivante

$$\varphi'(x) = 3 + 6x + x \int_0^1 t\varphi(t)dt \quad , \quad \varphi(0) = 0 \quad (3.51)$$

Solution 3.2.1 Cette équation peut être écrite comme

$$\varphi'(x) = 3 + 6x + \alpha x \quad , \quad \varphi(0) = 0 \quad (3.52)$$

Obtenue en définissant

$$\alpha = \int_0^1 t\varphi(t)dt \quad (3.53)$$

Intégrant les deux côtés du (3.52) de 0 à x et en utilisant la donnée initiale des conditions que nous obtenons

$$\varphi(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 \quad (3.54)$$

En substituant dans (3.53) et évaluer le rendement intégrale

$$\alpha = \int_0^1 t\varphi(t)dt = \frac{7}{4} + \frac{1}{8}\alpha \quad (3.55)$$

C'est pourquoi nous trouvons $\alpha = 2$ La solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = 3x + 4x^2. \quad (3.56)$$

3.2.2 La méthode de décomposition Adomian

On peut supposer un second ordre de Fredholm équation intégral-différentielle donnée par

$$\varphi''(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad , \quad \varphi(0) = a_0, \varphi'(0) = a_1 \quad (3.57)$$

Intégration des deux côtés de (3.57) de 0 à x deux fois donne

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt\right) \quad (3.58)$$

Lorsque les conditions initiales $\varphi(0) = a_0$. Et $\varphi'(0) = a_1$. Sont utilisées, et L^{-1} double opérateur intégral.

La méthode de décomposition de Adomian admet la utilisation de la série de décomposition

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (3.59)$$

dans les deux côtés de (3.58) pour obtenue

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_a^b K(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) dt \right) \quad (3.60)$$

ou de façon équivalente

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) \\ + L^{-1} \left(\int_a^b K(x, t) \varphi_0(t) dt \right) + L^{-1} \left(\int_a^b K(x, t) \varphi_1(t) dt \right) + L^{-1} \left(\int_a^b K(x, t) \varphi_2(t) dt \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.61)$$

Par conséquent, pour déterminer les composants $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ de la solution $\varphi(x)$, nous avons mis la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) \\ \varphi_{k+1}(x) &= L^{-1} \left(\int_a^b K(x, t) \varphi_k(t) dt \right), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

où le zéro élément $\varphi_0(x)$ est défini par tous les termes non inclus à l'intérieur le signe intégral de (3.61) .

Après avoir déterminé les composants, $\varphi_i(x)$, $i \geq 0$ le solution $\varphi(x)$ de (3.61) est ensuite obtenu sous forme de série en utilisant (3.59), la série obtenue converge vers la solution exacte si une telle solution existe.

Exemple 3.2.2 Utilisez la méthode de décomposition de Adomian pour résoudre l'équation intégral-différentielle de Fredholm

$$\varphi'(x) = 36x^2 + \int_0^1 \varphi(t) dt, \quad \varphi(0) = 1 \quad (3.63)$$

Solution 3.2.2 Rappelons que l'intégrale sur le côté droit est équivalente à une constante parce que cela dépend uniquement de la variable t avec limites constantes d'intégration pour t .

Intégration des deux côtés de l'équation (3.63) de 0 à x donne

$$\varphi(x) - \varphi(0) = 12x^3 + x \left(\int_0^1 \varphi(t) dt \right) \quad (3.64)$$

ce qui donne à l'utilisation de la condition initiale

$$\varphi(x) = 1 + 12x^3 + x \left(\int_0^1 \varphi(t) dt \right) \quad (3.65)$$

Son remplacement par l'hypothèse de la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (3.66)$$

dans les deux côtés de la donne (3.65)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 1 + 12x^3 + x \left(\int_0^1 \varphi_n(t) dt \right) \quad (3.67)$$

Les composants $\varphi_j(x), j \geq 0$ de $\varphi(x)$ peuvent être déterminés en utilisant la récurrence relation

$$\varphi_0(x) = 1 + 12x^3, \quad \varphi_{k+1}(x) = x \left(\int_0^1 \varphi_{k+1}(t) dt \right), \quad k \geq 0 \quad (3.68)$$

Cela donne à son tour

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 + 12x^3, \quad \varphi_1(x) = x \left(\int_0^1 K(x, t) \varphi_0(t) dt \right) = 4x \\ \varphi_2(x) &= x \left(\int_0^1 K(x, t) \varphi_1(t) dt \right) = 2x, \quad \varphi_3(x) = x \left(\int_0^1 K(x, t) \varphi_2(t) dt \right) = x \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.69)$$

La solution sous forme de série est donnée par

$$\varphi(x) = 1 + 12x^3 + 4\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \quad (3.70)$$

qui donne la solution exacte

$$u(x) = 1 + 8x + 12x^3 \quad (3.71)$$

obtenue, évaluer la somme de la série géométrique infinie.

3.2.3 La méthode de solution sous forme de séries

La méthode de solution de série a été utilisée avant, où la forme générique de Taylor série pour une solution analytique d' u à $x = 0$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.72)$$

Le série solution méthode sera utilisée pour résoudre l'équation intégral-différentielle de Fredholm.

- Nous supposons que $\varphi(x)$ de la solution d'équation intégral-différentielle de Fredholm

$$\varphi^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt, \quad \varphi^{(j)}(0) = a_j, 0 \leq j \leq (k-1) \quad (3.73)$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans (3.72), où les coefficients en volonté sont déterminés de façon récurrente.

Son remplacement (3.72) deux côtés (3.73) donne:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = T(f(x)) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \quad (3.74)$$

ou pour plus de simplicité, nous utilisons

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^{(k)} = T(f(x)) + \lambda \int_a^b K(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \quad (3.75)$$

où $T(f(x))$ est la série de Taylor de $f(x)$. La volonté de l'équation intégrale (3.73) être convertie en une intégrale traditionnelle dans (3.74) ou (3.75) où au lieu de intégrant la fonction inconnue $\varphi(x)$, les termes forme $t^n, n \geq 0$ sera intégré. Notez que parce que nous cherchons la solution de série, puis si $f(x)$ inclut des fonctions élémentaires comme les fonctions trigonométriques, exponentielles fonctions, etc. Puis de développements de Taylor pour les fonctions impliquées dans $f(x)$ doit être utilisé.

En outre, les équations initiales données devraient être utilisées dans la série polypeuse (3.72).

Nous intégrons d'abord le côté droit de l'intégrale ou (3.75), et recueillir les coefficients de puissances comme de x .

Nous assimilons côté les coefficients de comme puissances de x dans les deux côtés de l'équation résultant pour obtenir une récidive relation dans $a_j, j \geq 0$.

Résoudre la relation de récurrence va conduire à une complète détermination des coefficients $a_j, j \geq 0$ après avoir déterminé les coefficients $a_j, j \geq 0$, la solution de série suit immédiatement après son remplacement par le dérivé coefficients dans (3.72). La solution exacte peut être obtenue que si une telle solution exacte existe.

Si une solution exacte ne peut être obtenu, alors la obtenue série peut être utilisé à des fins numériques. Dans ce cas, les termes plus nous évaluer le niveau de précision plus élevé que nous obtenons.

Exemple 3.2.3 Résoudre l'équation intégral-différentielle de Fredholm en utilisant la méthode de solution sous forme série:

$$\varphi'(x) = 4 + 4x + \int_{-1}^1 (1 - xt)\varphi(t)dt \quad , \quad \varphi(0) = 1 \quad (3.76)$$

Solution 3.2.3 En substituant $\varphi(x)$ de la série

$$\varphi'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' \quad (3.77)$$

dans les deux côtés de l'équation.(3.76) conduit à

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 4 + 4x + \int_{-1}^1 (1 - xt) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt \quad (3.78)$$

Notez que $a_0 = 1$ à partir des conditions initiales données. évaluation de l'intégrale sur le côté droit donne

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots = 6 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{2}{7}a_6 + \frac{2}{9}a_8 + \left(4 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{5}a_3 - \frac{2}{7}a_5 - \frac{2}{9}a_7 \right) x \quad (3.79)$$

Assimiler les coefficients des puissances comme de x dans les deux côtés de (3.79) donne

$$a_1 = 6, a_n = 0 \quad , \quad n \geq 2 \quad (3.80)$$

La solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = 1 + 6x \quad (3.81)$$

où nous avons utilisé $a_0 = 1$ à partir de l'état initial.

Chapitre 4

Résolution numérique de quelques types d'équations intégrales-différentielles

Dans ce chapitre on essaye de trouver la solution numérique de certaines classes d'équations intégrales-différentielles linéaires on se basant sur la méthode de collocation, utilisant les polynômes de Legendre et les polynômes de Bessel et Taylor, où on emploie la matrice opérationnelle d'intégration et de dérivation, les solutions approximatives sont données sous forme des polynômes.

L'étude de la convergence de la méthode est nécessaire aussi bien que la vitesse de la convergence, en estimant les erreurs pour ces méthodes avec comparaison des solutions approchées avec la solution exacte.

4.1 Polynômes de Legendre

La formule suivante, dite formule de Rodrigues, donne l'expression de P_n pour tout entier $n \geq 0$ (voir [16]).

Théorème 4.1.1 *Pour tout entier n , P_n est un polynôme unitaire de degré n et on a:*

$$P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) \quad , \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Notons que pour tout n , $p_n(1) = 2^n(n!)^2/(2n!)$. Les polynômes de Legendre, que nous désignerons dans la suite par une lettre majuscule P_n , sont proportionnels aux polynômes p_n et normalisés de façon que $P_n(1)$ soit égal à 1. Ils sont donc donnés, grâce à la formule de Rodrigues, par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} P_n(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

Ainsi, le coefficient de x^n dans l'expression de P_n est égal à $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$: On a par exemple

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)(5x^3 - 3x), P_4(x) = \left(\frac{1}{8}\right)(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \left(\frac{1}{8}\right)(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ P_6(x) &= \left(\frac{1}{16}\right)(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \end{aligned}$$

Théorème 4.1.2 Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = 2/(2n+1)$$

Théorème 4.1.3 La suite des polynômes de Legendre (P_n) est une base orthogonale de l'espace $L^2((-1, 1), dx)$. toute fonction f de $L^2((-1, 1), dx)$ se développe de façon unique sous la forme

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) P_n \quad \text{avec} \quad c_n(f) = \frac{2n+1}{2} \langle f, P_n \rangle$$

où la convergence de la série a lieu en moyenne quadratique

$$\lim \left\| f - \sum_{n=0}^N c_n(f) P_n \right\|_{L^2} = 0$$

on a de plus l'égalité de Parseval

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n(f)|^2}{2n+1}$$

On notera que le polynôme de Legendre de f de degré n , donné par

$$L_n f(x) = \sum_{k=0}^n c_k(f) P_k(x)$$

réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de f par des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On notera aussi que si f est paire (resp. impaire), son développement ne fera intervenir que les polynômes de Legendre d'indice pair (resp. impair).

Propriétés des polynômes de Legendre

1- Parité

Pour tout entier naturel n et pour tout x , on a

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x); \text{ en particulier } P_n(-1) = (-1)^n$$

Ainsi pour n pair, $P_n(x)$ ne contient que des puissances paires de x et pour n impair, $P_n(x)$ ne contient que des puissances impaires de x .

• L'orthogonalité :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) Q_m(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2m+1}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

2- Relation de récurrence

$$\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x) = x P_n(x)$$

Pour démontrer cette relation on remarque que $x P_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ et admet donc un développement sous la forme

$$x P_n(x) = \sum_{j \leq n+1} a_{nj} P_j(x) \quad \text{avec} \quad a_{nj} \|P_j\|^2 = \langle x P_n, P_j \rangle$$

comme $a_{nj} \|P_j\|^2 = a_{jn} \|P_n\|^2$; il en résulte que $a_{nj} = 0$ pour $j < n-1$ (et pour $j > n+1$). en posant $a_{nn+1} = \alpha_n$, $a_{nn} = \beta_n$ et $a_{nn-1} = \gamma_n$; on en déduit que

$$x P_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)$$

En examinant la parité des deux membres, on voit que $\beta_n = 0$ et en faisant $x = 1$; il vient $\alpha_n + \gamma_n = 1$

Enfin, en comparant les termes de plus haut degré dans chacun des deux membres, on trouve

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \alpha_n \frac{(2n+2)!}{2^{n+1} ((n+1)!)^2}$$

d'où il résulte que

$$\alpha_n = \frac{n+1}{2n+1} \text{ et par suite } \gamma_n = \frac{n}{2n+1}$$

ce qui termine la preuve.

3- Equation différentielle

Pour tout entier naturel n , on a

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

On peut établir cette équation de la manière suivante ; on part de l'égalité

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2)P_n'(x) \right\} = (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x)$$

le deuxième membre est un polynôme de degré n , on peut donc le décomposer suivant la base $\{P_i; i \leq n\}$

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2)P_n'(x) \right\} = \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i(x) \quad (\star)$$

la propriété d'orthogonalité implique

$$\alpha_i \|P_i\|^2 = \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2)P_n'(x) \right\} dx$$

deux intégrations par parties successives donnent

$$\alpha_i \|P_i\|^2 = \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2)P_i'(x) \right\} dx$$

Or la dérivée de $(1-x^2)P_i'(x)$ est un polynôme de degré i , on en déduit que $\alpha_i = 0, \forall i < n$, et la relation $(\star)$ peut maintenant s'écrire

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) = \alpha_n P_n(x)$$

En comparant les coefficients des termes de plus haut degré dans chacun des membres, on trouve immédiatement $\alpha_n = -n(n+1)$: D'où résulte l'équation différentielle cherchée.

4.2 Résolution des équations intégral-différentielles (E.I-Ds) linéaires utilisant les polynômes de Legendre

Soit le problème (voir[04]et[08])

$$\sum_{k=0}^m F_k(x)y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda \int_{-1}^1 K(x,t)y(t)dt \quad , \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (4.1)$$

tel que $K(x, t)$ est le noyau de l'intégrale

$g(x)$, $F_k(x)$, ($k = 0, 1, \dots, m$) sont des fonctions analytiques λ constant.

Avec conditions mixtes

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{jk} y^{(k)}(-1) + b_{jk} y^{(k)}(+1) + c_{jk} y^{(k)}(0) = U_j \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (4.2)$$

L'approximation de la solution $y(x)$ par le polynôme de Legendre $P_n(x)$ et

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^N \alpha_n P_n(x) \\ A &= (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \\ P(x) &= (P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)) \end{aligned}$$

par recurrence on a

$$\begin{aligned} P^{(K)}(x) &= P(x) (\Pi^T)^k . A \\ y(x) &= P(x) . A \quad , \quad y^{(k)}(x) = P(x) (\Pi^T)^k . A \end{aligned}$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2N-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x) = \sum_{k=0}^m F_k y^{(k)}(x) \quad , \quad \lambda I_f(x) = \lambda \int_{-1}^1 K(x, t) y(t) dt$$

• L'écriture matricielle de (4.1) est

$$D = G - \lambda I_f$$

pour les points de collocation $x_i : (i = 0, 1, 2, \dots, N)$

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i$$

on a

$$D = \begin{pmatrix} D(x_0) \\ D(x_1) \\ \vdots \\ D(x_N) \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}, \lambda I_f = \begin{pmatrix} \lambda I_f(x_0) \\ \lambda I_f(x_1) \\ \vdots \\ \lambda I_f(x_N) \end{pmatrix}$$

$$D(x_i) = \sum_{k=0}^m F_k(x_i) y^{(k)}(x_i) \quad , \quad D(x) = \sum_{k=0}^m F_k P(\Pi^T)^k . A$$

$$\begin{aligned} \lambda I_f(x) &= \int_{-1}^1 P(x).k_l.P^T(t).P(t).Adt \\ &= P(x).k_l \int_{-1}^1 P^T(t).P(t).Adt \end{aligned}$$

on a

$$\int_{-1}^1 P^T(t).P(t).Adt = Q = [q_{m,n}] = \begin{cases} \frac{1}{2m+1} & ; m = n \\ 0 & ; m \neq n \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} K(x, t) &= P(x).k_l.P^T(t) \\ \lambda I_f(x) &= P(x).k_l.Q.A \end{aligned}$$

l'équation (4.1) devient

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^2 F_k P(\Pi^T)^k - \lambda K_l Q \right\}}_W A = G$$

telle que

$$K_l = [K_{l,i,j}]$$

$$K_{l,i,j} = \frac{\langle L_i(x), \langle K(x, t), L_j(t) \rangle \rangle}{\langle L_i(x), L_i(x) \rangle \cdot \langle L_j(t), L_j(t) \rangle} \quad , \quad i, j = 0, 1, \dots, m$$

$$P = \begin{pmatrix} P_0(x_0) & P_1(x_0) & P_2(x_0) & \cdots & P_N(x_0) \\ P_0(x_1) & P_1(x_1) & P_2(x_1) & \cdots & P_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_0(x_N) & P_1(x_N) & P_2(x_N) & \cdots & P_N(x_N) \end{pmatrix}$$

pour la condition mixtes (4.2)

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk}P(-1) + b_{jk}P(+1) + c_{jk}P(0)] [\Pi^T]^k A = U_j \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

$$U_j \cdot A = [U_{i,j}]$$

telle que

$$U_j = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk}P(-1) + b_{jk}P(+1) + c_{jk}P(0)] [\Pi^T]^k \quad , \quad A = (U_{j0}, U_{j1}, \dots, U_{jN})$$

Alors on obtient une matrice $\widetilde{W}$ inversible donnée par

$$\widetilde{W} = \begin{pmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \cdots & w_{0,N} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & \cdots & w_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} \\ u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,N} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & \cdots & u_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} \end{pmatrix}$$

On trouve que

$$\widetilde{W}A = G \quad \text{et} \quad A = (\widetilde{W})^{-1}G$$

On peut donc déterminer les coefficients a_i , $(i = 0, 1, 2, \dots, N)$; et ainsi $\widetilde{y}(x)$ solution approximative de l'équation intégral-différentielle (4.1).

Remarque 4.2.1 si $(\lambda = 0)$ on obtient une équation différentielle ordinaire linéaire.

Exemple 4.2.1 (voir [08])

Soit l'équation intégral-différentielle

$$\begin{cases} y'' + xy' - xy = 3x^2 + 6x + \int_{-1}^1 xy(t)dt \\ y(0) = 7 \quad , \quad y'(0) = -4 \end{cases}$$

telle que

$$F_0(x) = -x, \quad F_1(x) = 5, \quad F_2(x) = 1, \quad g(x) = -3x^2 + 6x, \quad \lambda = 1 \text{ et } K(x; t) = x$$

l'approximation de solution $y(x)$ par le polynôme de Legendre sous forme:

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \alpha_n P_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

pour ($N = 3$) les points de collocation sont

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{3}i, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

on obtint

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 F_k P \left(\left(\frac{T}{\Pi} \right)^k \right) - \lambda K_l Q \right\} A = G$$

telle que

$$F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{11}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice obtenue est

$$F_0 P \left(\frac{T}{\Pi} \right)^0 + F_1 P \left(\frac{T}{\Pi} \right)^1 + F_2 P \left(\frac{T}{\Pi} \right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{31}{9} & -\frac{398}{81} \\ -1 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

les matrices K_t et Q sont

$$K_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

K_l est définie par $K_l = (Q^{-1})^T K_t Q^{-1}$

$$K_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, \quad \lambda P K_l Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

utilisant la formule

$$F_0 P \left(\begin{matrix} T \\ \Pi \end{matrix} \right)^0 + F_1 P \left(\begin{matrix} T \\ \Pi \end{matrix} \right)^1 + F_2 P \left(\begin{matrix} T \\ \Pi \end{matrix} \right)^2 - \lambda P K_l Q = W$$

la matrice W est

$$W = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & -22 \\ 1 & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} \\ -1 & \frac{2}{9} & \frac{31}{9} & -\frac{398}{81} \\ -3 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

la condition $y(0) = -1$ et $y'(0) = 3$ donnée

$$U_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 ; -1], \quad U_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 ; 3]$$

$$G = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ g(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -\frac{7}{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

les matrices $\widetilde{W}$ et $\widetilde{G}$ peuvent s'écrire

$$W = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & -22 \\ 1 & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -9 \\ -\frac{7}{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La matrice A est

$$A = [\widetilde{W}]^{-1} G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{188}{1555} & \frac{891}{1555} & -\frac{327}{1555} & \frac{4}{311} \\ -\frac{261}{3110} & \frac{567}{3110} & \frac{108}{1555} & -\frac{27}{311} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -\frac{7}{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pour $(N = 3)$ la solution approximative est

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^N \alpha_n P_n(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) \\ &= (-1).1 + 3x + 0 + 0 = -1 + 3x \end{aligned}$$

Exemple 4.2.2 (voir [08])

Soit l'équation intégral-différentielle

$$\begin{cases} y'' + xy' - xy = 8x^2 - \frac{25}{3}x + 7x^3 - 3x^4 + 4 + \int_{-1}^1 xy(t)dt \\ y(0) = 7, \quad y'(0) = -4 \end{cases}$$

telle que

$$(N = 3) F_0(x) = -x, F_1(x) = 5, F_2(x) = 1, g(x) = -3x^2 + 6x, \lambda = 1 \text{ et } K(x, t) = x$$

l'approximation de la solution $y(x)$ par le polynôme de Legendre avec $(N = 3)$ est

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 \alpha_n P_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

On a $(N = 3)$

$$F_0(x) = -x, F_1(x) = x, F_2(x) = 1, g(x) = 8x^2 - \frac{25}{3}x + 7x^3 - 3x^4 + 4, \lambda = 1 \text{ et } K(x, t) = x$$

pour $(N = 3)$ les points de collocation sont

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{3}i, \quad i = 0, 1, 2, 3 \implies x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 1$$

l'écriture matricielle de l'équation donnée est

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 F_k P \left(\Pi \right)^k - \lambda K_l Q \right\} A = G$$

telle que

$$F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{27} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{31}{3} \\ \frac{199}{27} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{23}{3} \end{bmatrix}$$

$$F_0 P \left(\begin{smallmatrix} T \\ \Pi \end{smallmatrix} \right)^0 + F_1 P \left(\begin{smallmatrix} T \\ \Pi \end{smallmatrix} \right)^1 + F_2 P \left(\begin{smallmatrix} T \\ \Pi \end{smallmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{31}{9} & -\frac{398}{81} \\ -1 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

pour les conditions $y(0) = 7$, $y'(0) = -4$ on obtient les matrices

$$U_0 = \left[1 \ 0 \ -\frac{1}{2} \ 0 ; 7 \right], U_1 = \left[0 \ 1 \ 0 \ -\frac{1}{2} ; -4 \right]$$

d'où la matrice

$$[\widetilde{W}; \widetilde{G}] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & -22 & : & \frac{31}{3} \\ 1 & -\frac{4}{9} & \frac{29}{9} & -\frac{376}{81} & : & \frac{199}{27} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & : & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & : & -4 \end{bmatrix}$$

la solution de système algébrique est

$$A = \left[\frac{23}{3} \ -\frac{11}{5} \ \frac{4}{3} \ \frac{6}{5} \right]^T$$

- $y(x)$ l'approximation de la solution donnée par:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^N \alpha_n P_n(x) = \frac{23}{3} P_0(x) + \left(-\frac{11}{5}\right) P_1(x) + \left(\frac{4}{3}\right) P_2(x) + \left(\frac{6}{5}\right) P_3(x) \\ y(x) &= 3x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \end{aligned}$$

4.3 Méthode de collocation (Polynôme de Bessel)

Polynômes de Bessel de première espèce

Les polynôme de Bessel tronqués de degré n de première espèce, définis par

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sum_{k=0}^{\frac{N-n}{2}} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\ n &\in N, 0 \leq x < \infty \end{aligned} \quad (4.3)$$

Principe de la méthode (voir[15])

Soit l'équation intégrale-différentielle de Volterra d'ordre n suivante

$$\begin{aligned} \varphi^n(x) &= f(x) + \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \\ n &\in N, a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sous les conditions initiales

$$\varphi^k(a) = a_j \quad (4.5)$$

Où : $\varphi^0(x) = \varphi(x)$ est une fonction inconnue.

$k(x), g(x)$ et $K(x, t)$ sont des fonctions connues définies sur l'intervalle $a \leq x \leq b$.

a_{jk} et b_{jk} sont des constants réels ou complexes.

Notre but est interpoler la solution φ de (4.4) par

$$\begin{aligned} p_N(x) &= \sum_{n=0}^N a_n J_n(x) \\ n &\leq N \end{aligned} \quad (4.6)$$

tel que : $n = 0, 1, 2, \dots, N$ sont les coefficients inconnus de Bessel et N choisi de tel sorte qu'un nombre entier positif $N > n$ et $J_n(x), n = 0, 1, 2, \dots, N$ sont des polynômes de

Bessel de première espèce donnée par (4.3) à telle que p_N et φ sont égaux sur les nœuds $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N$. le fait que toutes les valeurs $\varphi(x_i)$, sont inconnues, on peut

utiliser (4.4) pour trouver les polynômes de l'interpolation au $x_0, x_1, \dots, x_N$ sans connaître les valeurs $\varphi(x_i)$. pour faire ça, Nous avons mis l'interpolation polynômiale

$$p_N : p_N(x) = c_0, c_1x, c_2x^2, \dots, c_Nx^N \text{ dans (4.4).}$$

Si p_N égale φ sur les nœuds, alors p_N satisfait (4.4), d'où on peut obtenir un système d'équations linéairement indépendantes à $c_0, c_1, c_2, \dots, c_N$.

Par conséquent, nous pouvons trouver la solution (4.4) avec quelques des erreurs de l'interpolation et de la computation.

• Relations fondamentales

On écrit $J_n(x)$ sous forme matricielle comme suit :

$$J^T(x) = DX^T(x) \rightarrow J(x) = X(x)D^T \quad (4.7)$$

$$J(x) = [J_0(x), J_1(x), J_2(x), \dots, J_N(x)]$$

et

$$X(x) = [1, x, x^2, \dots, x^N]$$

Si N est impair

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!0!2^0} & 0 & \frac{-1}{1!1!2^0} & \cdots & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N-1}{2})!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0!1!2^1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N+1}{2})!2^N} \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!2!2^2} & \cdots & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{(\frac{N-1}{2})!(\frac{N+1}{2})!2^N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{0!(N-1)!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!(N)!2^N} \end{pmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

Si N est pair

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!0!2^0} & 0 & \frac{-1}{1!1!2^0} & \cdots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2})!(\frac{N}{2})!2^N} \\ 0 & \frac{1}{0!1!2^1} & 0 & \cdots & \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{(\frac{N-2}{2})!(\frac{N}{2})!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!2!2^2} & \cdots & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{(\frac{N-2}{2})!(\frac{N+2}{2})!2^N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{0!(N-1)!2^{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!(N)!2^N} \end{pmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

On pose (4.4) sous forme

$$\begin{aligned} D(x) &= g(x) + I(x) \\ D(x) &= \sum_{k=0}^n p_k \varphi^k(x) \\ \text{telle que} \quad I(x) &= \int_0^x K(x; t) \varphi(t) dt \end{aligned} \tag{4.8}$$

maintenant, on va convertir la solution $\varphi(x)$ et ses dérivées $\varphi^k(x)$, la partie $D(x)$ et $I(x)$ et les conditions mixtes (4.5) aux formes matricielles

•Forme matricielle pour la partie différentielle D(x) :

On considère la solution voulue $\varphi(x) = p_n(x)$ de l'équation (4.4) définie par la série de Bessel tronquée (4.3)

On écrit la relation (4.8) sous la forme matricielle

$$|\varphi(x)| = J(x)A \tag{4.9}$$

Où

$$A(x) = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_N] \tag{4.10}$$

de (4.7) on a

$$\varphi(x) = X(x)D^T A$$

On a aussi la relation entre la matrice $X(x)$ et ses dérivés $X^{(1)}(x)$ comme suite

$$X^{(1)}(x) = X(x)B^T \tag{4.11}$$

Où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De l'équation (4.11) on écrit sous forme récurrente

$$\begin{aligned}
 X^{(0)}(x) &= X(x) \\
 X^{(1)}(x) &= X(x)B^T \\
 X^{(2)}(x) &= X^{(1)}(x)B^T = X(x)(B^T)^2 \\
 &\vdots \\
 X^{(k)}(x) &= X^{(k-1)}(x)B^T = X(x)(B^T)^k
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Utilisant (4.11) et (4.12) on obtient

$$\begin{aligned}
 \varphi^k(x) &= X^{(k)}(x)D^T A = X(x)(B^T)^k D^T A \\
 k &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

En substituant (4.8) en (4.12) on obtient :

$$[D(x)] = \sum_{m=0}^N \beta_k(x) X(x)(B^T)^k D^T A \tag{4.14}$$

• Forme matricielle pour la partie intégrale $I(x)$:

Le noyau $k(x; t)$ peut être approché par la série de Maclaurin tronquée et la série de Bessel tronquées. respectivement :

$$K(x; t) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N K_{mn}^t x^m t^n$$

et

$$K(x; t) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N K_{mn}^b J_m(x) J_n(t) \tag{4.15}$$

Où

$$\begin{aligned}
 K_{mn}^t &= \frac{1}{m!n!} \frac{d^{m+n} K(0, 0)}{dx^m dt^n} \\
 m, n &= 0, 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

On pose les relations données à (4.15) aux formes matricielles suivantes :

$$K(x; t) = X(x) K_t X^{(T)}(t) \tag{4.16}$$

$$K_{mn}^t = K_t$$

et

$$K(x; t) = J(x)K_b J^{(T)}(t) \quad (4.17)$$

$$K_{mn}^b = K_b$$

De l'équation (4.16) et (4.17) on obtient les relations suivantes

$$\begin{aligned} X(x)K_t X^{(T)}(t) &= J(x)K_b J^{(T)}(t) \longrightarrow X(x)K_t X^{(T)}(t) \\ &= X(x)D^T K_b X^{(T)}(t) \end{aligned}$$

d'où

$$K_t = D^T K_b D$$

où

$$K_b = (D^T)^{-1} K_t D^{-1} \quad (4.18)$$

En remplaçant les formes matricielles (4.9) et (5.17) dans la partie intégrale $I(x)$ en (4.8), on obtient la forme matricielle

$$\begin{aligned} [I(x)] &= \int_a^x J(x)K_b J^{(T)}(t)J(t)A dt \\ &= J(x)K_b Q A \end{aligned} \quad (4.19)$$

tel que

$$\begin{aligned} Q &= \int_a^x J^{(T)}(t)J(t)dt \\ &= \int_a^x D X^{(T)}(t)X(t)D^T dt \\ &= D H D^T \end{aligned}$$

d'où

$$H = \int_a^x X^T(t)X(t)dt = [h_{ij}(x)]$$

avec

$$h_{ij} = \frac{x^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}; \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N$$

En remplaçant la matrice (4.7) dans l'expression (4.19) on obtient la forme matricielle suivante

$$\begin{aligned} [I(x)] &= X(x)MH(x)D^T A \\ M &= D^T K_b D \end{aligned} \tag{4.20}$$

• **La forme matricielle pour les conditions :**

On peut obtenir les formes matricielles correspondantes pour les conditions (4.5) et par (4.13) comme suivant

$$\begin{aligned} \varphi^k(a) &= X^{(k)}(a)D^T A = X(a)(B^T)^k D^T A = [\alpha_j] \\ j &= 0, 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \tag{4.21}$$

maintenant on a l'équation matricielle correspondante à l'équation (4.4), pour ce but on remplace les relations matricielles (4.14) et (4.20) dans (4.8). donc on a

$$X(x)(B^T)^k D^T A = g(x) + X(x)MH(x)D^T A \tag{4.22}$$

En utilisant les points de collocation définis par

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

Dans l'équation (4.22), on obtient le système matriciel

$$\begin{aligned} X(x_i)(B^T)^k D^T A &= g(x_i) + X(x_i)MH(x_i)D^T A \\ i &= 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \tag{4.23}$$

et on écrit :

$$\left\{ X(B^T)^k D^T - \widetilde{X} \widetilde{M} \widetilde{H} \widetilde{D} \right\} A = G \tag{4.24}$$

telle que

$$\begin{aligned}
 G &= \begin{pmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g(x_N) \end{pmatrix} \\
 X &= \begin{pmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdot & \cdot & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & x_1^N \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdot & \cdot & x_N^N \end{pmatrix} \\
 \tilde{X} &= \begin{pmatrix} X(x_0) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & X(x_1) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & X(x_N) \end{pmatrix} \\
 \widetilde{M} &= \begin{pmatrix} M & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & M & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & M \end{pmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} H(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & H(x_1) & 0 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & H(x_N) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} D^T \\ D^T \\ . \\ . \\ . \\ D^T \end{pmatrix}_{(N+1)*1}$$

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T$$

Donc la matrice fondamentale de l'équation (4.24) correspondante à l'équation (4.4) peut être écrite sous la forme:

$$WA = G \quad \text{ou} \quad [W; G]$$

$$W = X(B^T)^k D^T - \tilde{X} \tilde{M} \tilde{H} \tilde{D} \quad (4.25)$$

On note que l'équation (4.24) correspondante au système de $(N+1)$ équations algébriques linéaires avec les coefficients inconnus de Bessel $a_0, a_1, \dots, a_N$.

D'autre côté la forme matricielle des conditions initiales de (4.21) peut être écrite :

$$U_j A = [\alpha_j] \quad ; \quad [U_j; \alpha_j]$$

avec

$$U_j = X(\alpha)(B^T)^k D^T$$

$$= [u_{j0}, u_{j1}, \dots, u_{jN}] \quad , \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

Pour obtenir de solution de (4.4) sous les conditions (4.5), en remplaçant les lignes de matrice U_j et j par les lignes de la matrice W et G respectivement, on obtient :

$$[\widetilde{W}; \widetilde{G}] = \begin{pmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & w_{0,2} & \cdots & w_{0,N} & ; & g(x_0) \\ w_{1,0} & w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,N} & ; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & w_{N-m,2} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & g(x_{N-m}) \\ u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & \cdots & u_{0,N} & ; & \alpha_0 \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,N} & ; & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & u_{m-1,2} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$$

Notons que $\text{rang} \widetilde{W} = \text{rang} [\widetilde{W}; \widetilde{G}] = N + 1$, si ce n'est pas, ce serait une contradiction à

$$A = (\widetilde{W})^{-1} \widetilde{G}$$

et les éléments $a_0, a_1, \dots, a_N$ de A sont déterminés de façon unique.

Exemple 4.3.1 Soit l'équation intégrale-différentielle de Volterra d'ordre 2

$$\begin{aligned} u''(x) &= x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 1 \end{aligned}$$

La solution exacte est $u(x) = \sin h(x)$

Solution 4.3.1

$n_{\text{œuds}}$	sol exact	sol app(Bessel)	erreur
0.0	0.00000000	0.00000000	0.000e+000
0.1	0.10016675	0.10016666	9.353e-008
0.2	0.20133600	0.20133301	2.996e-006
0.3	0.30452029	0.30449750	2.279e-005
0.4	0.41075233	0.41065603	9.629e-005
0.5	0.52109531	0.52080049	2.948e-004
0.6	0.63665358	0.63591709	7.365e-004
0.7	0.75858370	0.75698442	1.599e-003
0.8	0.88810598	0.88497111	3.135e-003
0.9	1.02651673	1.02083309	5.684e-003
1.0	1.17520119	1.16551030	9.691e-003

Table 4.1: résultat de l'exemple (4.3.1)

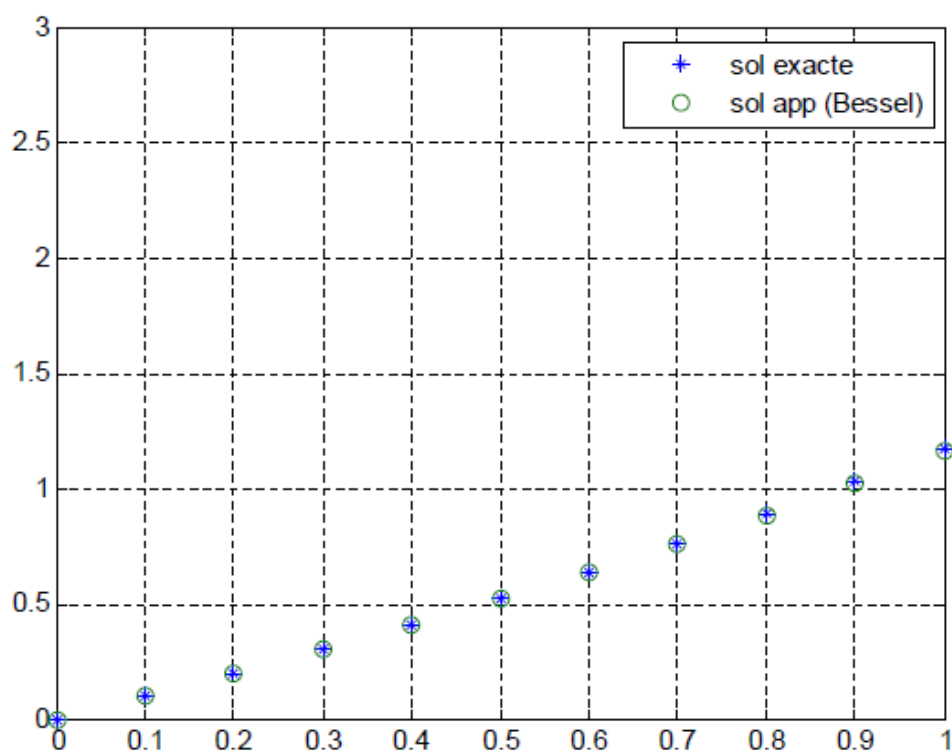


Fig 4.1: la solution exacte et la solution approchée de Bessel

4.4 Méthode de collocation (Polynôme de Taylor)

Principe de la méthode: voir([17], [09])

Une méthode de matrice pratique, est présentée pour trouver une solution approchée pour les équations intégrales de Volterra et Fredholm linéaires, en terme de polynôme de Taylor.

La méthode convertit l'E.I-D à une système matriciel qui correspond à un système des équations algébriques linéaires .

Soit l'E.I-D de Volterra d'ordre n

$$u^n(x) = f(x) + \int_a^x K(x;t)u(t)dt \quad (4.26)$$

$$u^k(a) = \alpha_k \quad (4.27)$$

Où : α_k sont des constants avec $f(x)$ et $K(x;t)$ sont définis sur l'intervalle $[a, b]$:

La solution $u(x)$ sera exprimée par la série de Taylor suivante

$$u(x) = \sum_{n=0}^N a_n (x - c)^n$$

$$a_n = \frac{u^n(c)}{(n)!} , \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.28)$$

Le but de cette méthode est de déterminer les coefficients a_n .

• Relations matricielle fondamentales :

On pose (4.26) sous forme

$$D(x) = g(x) + I(x) \quad (4.29)$$

$$D(x) = u^k(x)$$

$$I(x) = \int_0^x K(x;t)u(t)dt$$

maintenant, on va convertir la solution $u(x)$ et ses dérivées $u^k(x)$, la partie différentielle $D(x)$ et la partie intégrale $I(x)$ et les conditions mixtes aux formes matricielles

• Forme matricielle pour la partie différentielle D(x) :

On considère la solution voulue $u(x)$ de (4.26) définie par la série de Taylor

$$u(x) = X(x)A \quad (4.30)$$

Où

$$X(x) = [1, (x - c), (x - c)^2, \dots, (x - c)^N]$$

On a aussi la relation entre $X(x)$ et ses dérivées est:

$$X^{(1)}(x) = X(x)B^T \quad (4.31)$$

Où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \end{pmatrix}$$

De la matrice (4.31) on obtient

$$X^{(1)}(x) = X(x)B^T \quad (4.32)$$

$$X^{(2)}(x) = X^{(1)}(x)B^T = X(x)(B^T)^2$$

$$\vdots$$

$$X^{(k)}(x) = X^{(k-1)}(x)B^T = X(x)(B^T)^k$$

De (4.31) et (4.32) la relation de récurrente est :

$$u^k(x) = X^{(k)}(x)A = X(x)(B^T)^k A \quad (4.33)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N$$

En substituant (4.29) en (4.32) on obtient :

$$[D(x)] = \sum_{m=0}^N \beta_k(x) X(x)(B^T)^k A \quad (4.34)$$

•Forme matricielle pour la partie intégrale $I(x)$:

Le noyau $K(x; t)$ peut être approximer par la série de Taylor de degré N sur $x = c$ et $t = c$, sous la forme :

$$K(x; t) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N K_{mn} (x - c)^m (t - c)^n \quad (4.35)$$

Où

$$\begin{aligned} K_{mn} &= \frac{1}{m!n!} \frac{d^{m+n} K(c, c)}{dx^m dt^n} \\ m, n &= 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

On pose (4.35) sous forme matricielle

$$[K(x; t)] = X(x) K X^{(T)}(t) \quad (4.36)$$

Où

$$X(t) = [1, (t - c), (t - c)^2, \dots, (t - c)^N]$$

et

$$K_{mn} = K$$

En substituant la forme (4.30) et (4.36) dans (4.29), on a la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} [I(x)] &= \int_a^x X(x) K X^{(T)}(t) X(t) A dt \\ &= X(x) K \left\{ \int_a^x X^{(T)}(t) X(t) dt \right\} A \\ &= X(x) K Q A \end{aligned} \quad (4.37)$$

avec

$$\begin{aligned} Q &= \int_a^x X^{(T)}(t) X(t) dt = [q_{ij}] \\ [q_{ij}] &= \frac{(x - c)^{i+j+1} - (a - c)^{i+j+1}}{i + j + 1}; \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

• Représentation matricielle pour $g(x)$:

Le terme non homogène de l'équation (4.35) , $g(x)$ peut s'écrire sous forme :

$$[g(x)] = \left[\sum_{n=0}^N g_n (x - c)^n \right]$$

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{g^n(c)}{(n)!} \\ &= X(x)G \end{aligned} \quad (4.38)$$

avec

$$G = [g_0, g_1, \dots, g_N]^T$$

En remplaçant les relations (4.34) et (4.37) et (4.38) dans (4.29) il en résulte l'équation suivante :

$$X(x)(B^T)^k A = X(x)G + X(x)KQA \quad (4.39)$$

• Représentation matricielle pour les conditions initiales:

On peut obtenir la forme matricielle de conditions (4.27) de (4.33) on a :

$$\begin{aligned} u^k(a) &= X^{(k)}(a)A = X(a)(B^T)^k A = [\alpha_j] \\ j &= 0, 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Pour calculer les coefficients, on utilise les points de collocations suivantes

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.41)$$

tel que $a \leq x_i \leq b$ et $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N = b$ dans l'équation (4.39) .

On obtient:

$$\begin{aligned} X(x_i)(B^T)^k A &= X(x_i)G + X(x_i)KQA \\ i &= 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

et on écrit :

$$\{(B^T)^k - KQ\} A = G \quad (4.42)$$

telle que

$$G = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_N \end{pmatrix}$$

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T$$

L'équation (4.42) correspond à une système de $(N+1)$ équations algébriques pour $(N+1)$ coefficients de Taylor inconnus. Alors on peut écrire (4.42) comme suit :

$$WA = G \quad \text{ou} \quad [W; G] \quad (4.43)$$

$$WA = [w_{pq}] = (B^T)^k - KQ \quad \text{avec} \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, N$$

De la même façon, la forme matricielle pour les conditions initiales dans (4.40) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} U_j A &= [\alpha_j] ; [U_j; \alpha_j] \\ j &= 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (4.44)$$

avec

$$\begin{aligned} U_j &= X(a)(B^T)^k \\ &= [u_{j0}, u_{j1}, \dots, u_{jN}] \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

En remplaçant les lignes de la matrice (4.44) par les lignes de dernières m lignes du (4.43), il en résulte la nouvelle matrice augmentée

$$[\widetilde{W}; \widetilde{G}] = \begin{pmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & w_{0,2} & \cdots & w_{0,N} & ; & g_0 \\ w_{1,0} & w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,N} & ; & g_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & w_{N-m,2} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & g_{N-m,N} \\ u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & \cdots & u_{0,N} & ; & \alpha_0 \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,N} & ; & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & u_{m-1,2} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & \alpha_{m-1} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Si $\text{rang} \widetilde{W} = \text{rang} [\widetilde{W}; \widetilde{G}] = N+1$, alors

$$A = (\widetilde{W})^{-1} \widetilde{G} \quad (4.46)$$

et la matrice A ainsi les coefficients $(a_n, n = 0, 1, 2, \dots, N)$ sont déterminés de façon unique, donc l'équation (4.26) avec les conditions (4.27) a une solution unique est donnée par polynôme de Taylor (4.28).

Exemple 4.4.1 Soit l'équation intégrale-différentielle de Volterra d'ordre 2

$$\begin{aligned} u''(x) &= x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 1 \end{aligned}$$

La solution exacte est :

$$u(x) = \sinh(x)$$

Solution 4.4.1

<i>nœuds</i>	<i>sol exact</i>	<i>sol app(Taylor)</i>	<i>erreur</i>
0.0	0.00000000	0.00000000	0.000e+000
0.1	0.100166750	0.100166640	1.097e-007
0.2	0.201336003	0.201333087	2.915e-006
0.3	0.304520293	0.304499082	2.121e-005
0.4	0.410752326	0.410664240	8.809e-005
0.5	0.521095305	0.520827797	2.675e-004
0.6	0.636653582	0.635987604	6.660e-004
0.7	0.758583702	0.757136427	1.447e-003
0.8	0.888105982	0.885250412	2.856e-003
0.9	1.026516726	1.021257698	0.9 5.259e-003
1.0	1.175201194	1.165963097	9.238e-003

Table 4.2: résultat de l'exemple (4.4.1)

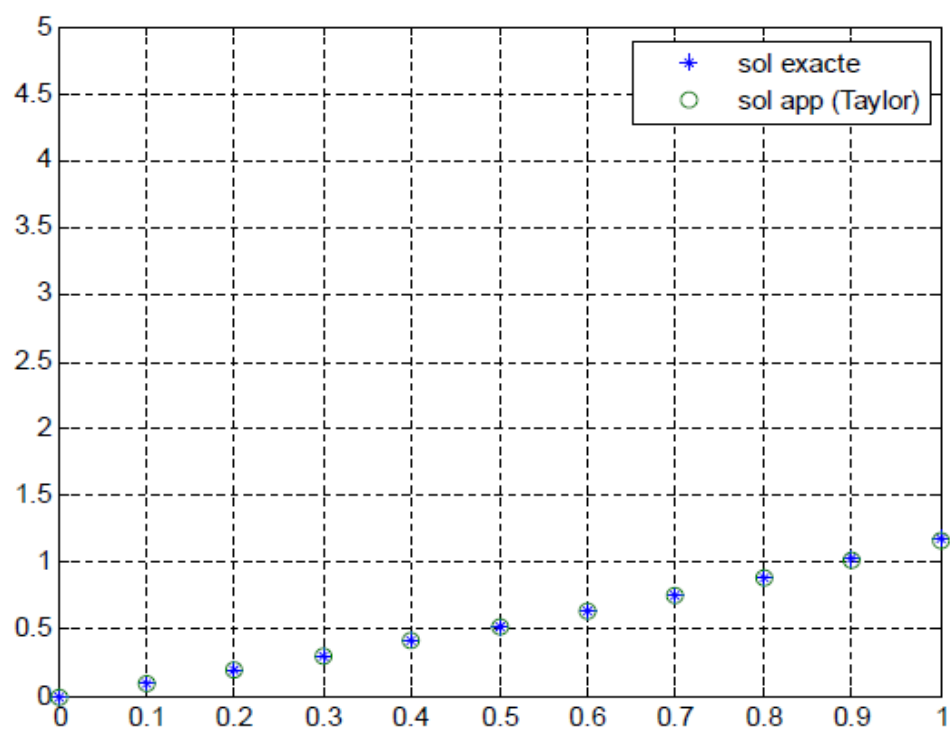


Fig 4.2: la solution exacte et la solution approchée de Taylor

Conclusion

Nous avons présenté dans cette mémoire les divers méthodes pour trouver les solutions des équations intégral-différentielles , où on montre qu'on ne peut pas résoudre tous les types des équation intégral-différentielles avec les méthodes analytiques, aussi nous avons le besoin de chercher d'autres méthodes approchées ou appliquer des méthodes numériques (collocation utilisant les polynômes de Legendre et les polynômes de Bessel et les polynômes de Taylor , ...).

Bibliographie

- [1] **G. Adomian**, Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, San Diego,(1986).
- [2] **M.I.Berengue, M.V.Fernàndez.Mumoz***, A.I.Garralda.Guillem, M.Ruiz.Galàn.A Sequential Approach for Solving The Fredholm Integro-differential Equation.Applied Numerical Mathematics,2011.
- [3] **J. Biazar, M. Eslami**, Diffierential transform method for systems of Volterra integral equations of the second kind and comparison with homotpy perturbation method, Int. J. Phys. Sci. 6 (2011) 1207-1212.
- [4] **R.Y.Chang, M.L.Wang**, Shifted Legendre direct method for variational problems, Journal of optimization theory and Application 39 (1983) 299-307.
- [5] **A.Ebadian, P.Darania**, A Method For The Numerical Solution of The Integrodifferential Equations . Applied Mathematics and Computation, 657-668, 2007.
- [6] **P.Kumlin**. A Note on Fixed Point Theory. Mathematics, Chalmers and Gu,2003/2004
- [7] **V. Lakshmikanthan and M. Rama Mohana Rao**, Theory of Integro-differentail Equations, Gordon and Breach Science Publishers, Volume 1 1995.
- [8] **P. E. Lewis and J. P. Ward**, The finite element method, Principles and Applications,Addition-Wesley, 1991.
- [9] **M.Sezer, N.Kurt**, Polynomial Solution of High-order Linear Fredholm Integrodifferential Equations With Constant Coefficients. Freklin Institute, 839-850,2008.

- [10] **M.Sezer, S.Yalçınbas**, A Taylor collocation method for the approximate solution of general linear Fredholm-Volterra integro-difference equations with mixed argument. *Applied Mathematics and Computation*, 675-690, 2006..
- [11] **M.rahaman** ,integral equations and their applications ,Dalhousie university ,Canada ,2007.
- [12] **E.Varley, J.Walker**, A method for solving singular integro-differential equation. *IMA. Journal of Applied Mathematics* 11-45, 1989
- [13] **A.M.Wazwaz**, Linear and nonlinear integral equations methods and applications, Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.
- [14] **A.M. Wazwaz**, A First course in Integral Equations, World Scientific, Singapore,(1997).
- [15] **S. Yalçınba_s, Mehmet Sezer and Hüseyin Hilmi Sorkun**, Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 210 (2009), 334-349..5.
- [16] **M. Razzaghi, S. Yousefi**, Legendre wavelets method for nonlinear Volterra-Fredholm integral equations, *Math. Comput. Simul.* 70 (2005) 1-8.
- [17] **A.Yildirim, N.Sahin, S.Yüzbasi**, A collocation approach for solving high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 547-563, 2012.
- [18] **M. Moussai**, Résolution des équations intégro-différentielles,Thèse de doctorat, université de M'sila 2018.