



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## *Mémoire de Master*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** EDPs et applications

## Thème

---

*Solutions semi-analytiques pour les équations aux dérivées conformable et local fractionnaires*

---

**Présentée par :**

*M<sup>elle</sup> SALHI Djihad*

**Soutenu publiquement le :** 19/06/2023.

**Devant le jury composé de :**

**Président :** *M<sup>r</sup> FERAHTIA Nassim*

M.C.B, Université de M'sila

**Encadreur :** *M<sup>r</sup> ABDELKEBIR Saad*

M.C.B, Université de M'sila

**Examineur :** *M<sup>r</sup> BENMEDDOUR Mohamedourabah*

M.A.A, Université de M'sila

---

# Remerciements

---

Avant tout, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné la patience, la puissance et la force pour finir ce travail.

j'exprime ici notre profonde reconnaissance à l'égard de l'encadreur Mr : **ABDELKEBIR Saad**. Pour la confiance qu'il m'a accordée. Accepter de superviser les travaux du maître note pour ses nombreux conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche.

Je remercie également le membre de jury.

Merci à tout ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

---

# Dédicaces

---

Je dédie ce travail

Particulièrement à mon père feu, il qui m'a doté éducation digne, ton amour a fait de moi ce que je suis aujourd'hui, que ce travail soit le meilleur cadeau que je puisse te faire .

À ma mère, qui m'a soutenu et encouragé durant ces année d'études, qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

À vous mes frères et soeurs.

À mon mari.

À tous mes amis, tous mes professeurs.

## الملخص:

هدفنا في هذه المذكرة، هو البحث عن حلول شبه تحليلية للمعادلات التفاضلية الكسرية التفاضلية. حيث نأخذ مشتق جزئي للوقت بالمفهوم المطابق والمحلي باستخدام طريقة التحويل التفاضلي المختزل (RDTM).

(CRDTM): طريقة التحويل التفاضلي المخفض المطابقة.

(LRDTM): طريقة التحويل التفاضلي المخفض المحلي.

اعتمادا على المشتق المستخدم المتعلق بالوقت  $t$ ، من خلال صيغة الحلول شبه التحليلية التي تم الحصول عليها من هذه الدراسة، نقوم بإنشاء تمثيلات رسومية لبعض الأمثلة من أجل تحديد فعالية الطريقة أم لا.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية، المشتق المحلي الكسري، المشتق الكسري المطابق، طريقة التحويل التفاضلي المخفض.

---

Notre objectif dans cette mémoire. C'est la recherche de solutions semi-analytiques d'équations différentielles à dérivées fractionnaire. Où l'on prend la dérivée pratile du temps  $t$  au sens conforme et local par l'utilisation de la méthode de transformation différentielle réduite (RDTM).

**(CRDTM) : Méthode de transformation différentielle réduite conforme.**

**(LRDTM) : Méthode de transformation différentielle réduite local.**

Selon la dérivée utilisée par rapport au temps  $t$ . A travers la formule des solutions semi-analytiques obtenues à partir de cette étude, nous créons des représentations graphiques pour certains exemples afin de préciser l'efficacité de la méthode ou non.

**Mots-Clés :** Équations aux dérivées partielles fractionnaires, La dérivée conforme fractionnaire, La dérivée local fractionnaire, La Méthode de transformation différentielle réduite.

---

Our goal in this memory. It is the search for semi-analytic solutions of fractional differential equations. Where we take the pratile derivative of time  $t$  in the conformable and local sense by using the method of reduced differential transformation (RDTM).

**(CRDTM) : Conformable reduced differential transformation method.**

**(LRDTM) : Local Reduced Differential Transform Method.**

Depending on the derivative used in relation to time  $t$ . Through the formula of semi-analytical solutions obtained from this study, we create graphical representations for some examples in order to specify the effectiveness of the method or not

**Keywords :** Fractional partial differential equations, The fractional conformable derivative, The fractional local derivative, Reduced differential transform method.

---

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>Notations</b>	<b>9</b>
<b>1 Notions de base</b>	<b>10</b>
1.1 fonctions spéciales . . . . .	11
1.1.1 La fonction Gamma d'Euler . . . . .	11
1.1.2 La fonction de Mittag-Leffler . . . . .	11
1.2 La dérivée conformable fractionnaire . . . . .	13
1.2.1 L'intégrale fractionnaire conformable . . . . .	15
1.2.2 Relation entre la dérive fractionnaire conformable et l'intégrale fractionnaire conformable . . . . .	16
1.3 La Dérivée fractionnaire locale . . . . .	16
1.3.1 L'intégrale fractionnaire local . . . . .	17
<b>2 Les solutions semi-analytiques pour les équations aux dérivées fractionnaires conformable</b>	<b>19</b>
2.1 position du problème . . . . .	20
2.2 Méthode de transformation différentielle réduite conformable (CRDTM) . . . . .	20
2.3 Quelques Exemples . . . . .	21
<b>3 Solutions semi-analytiques pour les équations aux dérivée local fractionnaire</b>	<b>31</b>
3.1 Position du problème . . . . .	32
3.2 Méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire local(LRDTM) . . . . .	32
3.3 Quelques Exemples . . . . .	33
<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>

---

---

# Liste des tableaux

---

2.1	Quelques propriétés de base du (CRDTM) . . . . .	21
3.1	Quelques propriétés de base du (LRDTM) . . . . .	33

---

# Table des figures

---

2.1	La loi de (CRDTM) . . . . .	21
2.2	Comparaison entre la solution exacte et la solution d'approximation de l'équation (2.3) . . . . .	23
2.3	La fonction d'erreur de la solution approximative de l'équation (2.3) . . . . .	23
2.4	Comparaison entre la solution exacte et la solution d'approximation. . . . .	25
2.5	La fonction d'erreur de la solution approximative de l'équation (2.3) . . . . .	25
2.6	Comparaison entre la solution exacte et la solution d'approximation de l'équation (2.11) . . . . .	27
2.7	La fonction d'erreur de la solution approximative de l'équation (2.11) . . . . .	27
2.8	Comparaison entre la solution exacte et la solution d'approximation de l'équation (2.18). . . . .	29
2.9	La fonction d'erreur de la solution approximative de l'équation(2.18) . . . . .	29
2.10	La solution exacte de l'équation (2.22) . . . . .	30
3.1	La loi de (LRDTM) . . . . .	33
3.2	Comparaison entre la solution exacte et la solution d'approximation de le problème (3.3) . . . . .	35
3.3	La fonction d'erreur de la solution approximative de le problème (3.3) . . . . .	35
3.4	Comparaison entre la solution exacte et la solution d'approximation de le problème (3.7) . . . . .	37
3.5	La fonction d'erreur de la solution approximative de le problème (3.7) . . . . .	37
3.6	Comparaison entre la solution exacte et la solution d'approximation de (3.13) . . . . .	39
3.7	La fonction d'erreur de la solution approximative de le problème (3.13) . . . . .	39
3.8	Comparaison entre la solution exacte et la solution d'approximation de (3.19) . . . . .	41
3.9	La fonction d'erreur de la solution approximative de le problème (3.19) . . . . .	41
3.10	La solution exacte de l'équation (3.25) . . . . .	43

---

# Introduction générale

---

Le 30 septembre 1695, le calcul fractionnaire a été introduit lorsque Leibniz a écrit une lettre à L'Hopital, demandant "qu'est-ce que cela signifie par  $\frac{d^n f}{dx^n}$  quand  $n = \frac{1}{2}$  ?" où  $n$  est connue comme la  $n$  ième dérivée de l'application  $f$ .

Depuis lors, de nombreux chercheurs ont tenté de mettre une définition d'une dérivée fractionnaires. La plupart d'entre eux utilisaient une forme intégrale pour la dérivée fractionnaires. Deux d'entre eux sont les plus populaires.

1. Définition de Riemann-Liouville. Pour  $\alpha \in [n - 1, n[$  :

$$\mathcal{D}_a^\alpha (f) (t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(t)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dx. \quad (1)$$

2. Définition de Caputo. Pour  $\alpha \in [n - 1, n[$  :

$$\mathcal{D}_a^\alpha (f) (t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f^{(n)}(t)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dx. \quad (2)$$

Maintenant, toutes les définitions, y compris (1) et (2) satisfont la propriété que la dérivée fractionnaire est linéaire.

Cependant, voici quelques-uns des revers des définitions :

1. Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la formule connue de la dérivée du produit de deux fonctions :

$$\mathcal{D}^\alpha (fg) = f\mathcal{D}^\alpha (g) + g\mathcal{D}^\alpha (f).$$

2. Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la formule connue de la dérivée du quotient de deux fonctions :

$$\mathcal{D}^\alpha \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{g\mathcal{D}^\alpha (f) - f\mathcal{D}^\alpha (g)}{g^2}; g \neq 0.$$

Une nouvelles définitions de la dérivée fractionnaire appelée « dérivée fractionnaire conformable » a été introduite par R. Khalil et ses collègues [11], et la dérivée fractionnaire appelée « dérivée fractionnaire local » a été introduite par X.Yong [19, 20].

En outre, les problèmes fractionnaires linéaires et non linéaires des équations différentielles jouent un rôle majeur dans divers domaines tels que la biologie, la physique, la chimie, les mathématiques, l'astronomie, la mécanique des fluides, l'optique, les mathématiques appliquées, et ingénierie. Il n'est pas toujours possible de trouver des solutions analytiques à ces problèmes.

Par conséquent, il est très important de gérer ces problèmes de manière appropriée et de les résoudre ou de développer des solutions.

Dans ce mémoire, nous avons utilisé la méthode de transformation différentielle réduite (RDTM) qui a été introduite par Kaskin et Oturanc [13, 9] pour construire des solutions semi-analytiques pour les équations aux dérivées fractionnaire conformable et local.

La technique de transformation différentielle réduite est une procédure itérative permettant d'obtenir une solution sous la forme d'une série de Taylor converge vers la solution exacte. Cette méthode est semi-analytique et largement utilisée par de nombreux chercheurs pour la résolution des équations aux dérivées partielles fractionnaire conformable et local, linéaires et non linéaires, homogènes et non homogènes. Les résultats obtenus montrent que la méthode (RDTM) est précise, efficace et nécessite moins d'effort par rapport aux autres méthodes analytiques et numériques.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions, notions, résultats, propriétés et les outils nécessaires sur les fonctions spéciales dans l'espace fractionnaire, la dérivée fractionnaire conformable et la dérivée fractionnaire local.

Dans le deuxième chapitre, nous avons utilisé la méthode de transformation différentielle réduite conformable et les propriétés de dérivée fractionnaire conformable pour déterminer la solution semi-analytique du problème ou dérivée fractionnaire conformable.

Dans le dernier chapitre, nous avons appliqué la méthode LRDTM pour des équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire. De plus, nous avons cherché des solutions semi-analytiques par des exemples donnés.

---

# Notations

---

$\mathbb{R}$ :	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$ :	Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{Z}$ :	Ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{C}$ :	Ensemble des nombres complexes.
$\Omega$ :	Domaine borné dans $\mathbb{R}$ .
$Re(.)$ :	La Partie entière d'un nombre complexe.
$\Delta$ :	L'opérateur laplacien.
$\Gamma(.)$ :	La fonction Gamma d'Euler.
$\beta(.)$ :	La fonction Beta.
$E_\alpha(.)$ :	La fonction Mittag-leffler.
$\mathcal{T}^\alpha$ :	L'opérateur de la dérivée fractionnaire conforme d'ordre $\alpha$ .
$\mathcal{I}_c^\alpha$ :	L'opérateur de l'intégrale fractionnaire conforme d'ordre $\alpha$ .
$C_a(a, b)$ :	L'espace des fonctions continues au sens local sur $[a, b]$ en voisinage de $a$ .
$\mathcal{D}^\alpha$ :	L'opérateur de la dérivée fractionnaire local d'ordre $\alpha$ .
$\mathcal{I}_l^\alpha$ :	L'opérateur de l'intégrale fractionnaire local d'ordre $\alpha$ .
$u_x$ :	La dérivée par rapport $x$ .
$u_{xx}$ :	La seconde dérivée par rapport $x$ .

## NOTIONS DE BASE

---

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions, notions, résultats, propriétés et les outils nécessaires sur les fonctions spéciales dans l'espace fractionnaire, la dérive fractionnaire conforme et la dérivée fractionnaire local.

## 1.1 fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma d'Euler et Mittag-Leffler. cette fonctions soit très importante dans la calcul fractionnaire et ses application.

### 1.1.1 La fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma d'Euler est une fonction complexe. Cette fonction généralise la fonction factorielle  $n!$  et elle permet à  $n$  de prendre des valeurs non entières, considérée également comme une fonction spéciale [7, 6].

**Définition 1.1.** pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $Re(z) > 0$ , la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

**Exemple 1.1.** 1.  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$

2.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$  posant le changement de variable  $t = \tau.$

**Propriétés 1.1.** [7] Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $Re(z) > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  on a :

1.  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$
2.  $\Gamma(n+1) = (n)!.$
3.  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^n}.$

La fonction Gamma vérifie également la formule de réflexion suivante[6] :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, 0 \leq Re(z) \leq 1.$$

### 1.1.2 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle  $e^z$  est une fonction très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier, la généralisation de cette fonction est la fonction de Mittag-Leffler notée  $E_\alpha(z)$ ,  $0 < \alpha < 1$  introduite par Magnus Gustaf Mittag-Leffler [12, 6], elle s'écrit :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}; \alpha > 0, z \in \mathbb{C}.$$

On note que pour  $\alpha = 1$ , la fonction  $E_1$  est l'exponentielle usuelle [2].

Par la suite Agarwal [5] à généralisé cette fonction en une fonction à deux paramètres, a appelée fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres(voir[7]).

**Définition 1.2.** Soient  $\alpha, \beta > 0$  et  $z \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \beta)}. \quad (1.1)$$

Pour  $\alpha = \beta = 1$ , on trouve la relation (1.1) avec  $E_{1,1}(z) = e^z.$

**Définition 1.3.** [21] La fonction Mittag-Leffler dans l'espace fractionnaire est défini par :

$$E_{\alpha}(x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} ; x \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < \alpha \leq 1.$$

**Définition 1.4.** [21] La fonction sinus dans l'espace fractionnaire est défini par :

$$\sin_{\alpha}(x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{\alpha(2k+1)}}{\Gamma(\alpha(2k+1) + 1)}, x \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < \alpha \leq 1.$$

**Définition 1.5.** [21] La fonction dans l'espace fractionnaire est défini par :

$$\cos_{\alpha}(x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2\alpha k}}{\Gamma(2\alpha k + 1)}, x \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < \alpha \leq 1.$$

Les règles suivantes s'appliquent [18],

$$E_{\alpha}(x^{\alpha}) E_{\alpha}(y^{\alpha}) = E_{\alpha}((x+y)^{\alpha}),$$

$$E_{\alpha}(x^{\alpha}) E_{\alpha}(-y^{\alpha}) = E_{\alpha}((x-y)^{\alpha}),$$

$$E_{\alpha}(i^{\alpha} x^{\alpha}) E_{\alpha}(i^{\alpha} y^{\alpha}) = E_{\alpha}(i^{\alpha} (x+y)^{\alpha}),$$

$$E_{\alpha}(i^{\alpha} x^{\alpha}) = \cos_{\alpha}(x^{\alpha}) + i^{\alpha} \sin_{\alpha}(x^{\alpha}),$$

$$\sin_{\alpha}(x^{\alpha}) = \frac{E_{\alpha}(i^{\alpha} x^{\alpha}) - E_{\alpha}(-i^{\alpha} x^{\alpha})}{2i^{\alpha}},$$

$$\cos_{\alpha}(x^{\alpha}) = \frac{E_{\alpha}(i^{\alpha} x^{\alpha}) + E_{\alpha}(-i^{\alpha} x^{\alpha})}{2},$$

$$\cos_{\alpha}(-x^{\alpha}) = \cos_{\alpha}(x^{\alpha}),$$

$$\sin_{\alpha}(-x^{\alpha}) = -\sin_{\alpha}(x^{\alpha}),$$

$$\cos_{\alpha}^2(x^{\alpha}) + \sin_{\alpha}^2(x^{\alpha}) = 1,$$

$$\sin_{\alpha}^2(x^{\alpha}) = \frac{1 - \cos_{\alpha}((2x)^{\alpha})}{2},$$

$$\cos_{\alpha}^2(x^{\alpha}) = \frac{1 + \cos_{\alpha}((2x)^{\alpha})}{2}.$$

**Remarque 1.1.**  $i^{\alpha}$  est une unité fractale imaginaire.

## 1.2 La dérivée conforme fractionnaire

Dans cette section, nous allons introduit une nouvelle dérivée fractionnaire appelée la dérivée conforme et nous présentons certaines notions préliminaires fondamentaux.

**Définition 1.6.** [11, 15] Soit la fonction  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\alpha \in ]0, 1]$ , alors la dérivée fractionnaire conforme d'ordre  $\alpha$  en voisinage de  $a^+$  est donné par :

$$(\mathcal{T}^\alpha f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon(x-a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\epsilon}, \quad (1.2)$$

pour toute  $x > a$ .

Cette limite (1.2) existe est finie.

**Définition 1.7.** [4] Soit la fonction  $f : [0, +\infty[$   $n$  fois différentiable en  $x$ , la dérivée conforme fractionnaire de  $f$  d'ordre  $\alpha$  est donné par :

$$\mathcal{T}^\alpha f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(x + \epsilon x^{([\alpha]-\alpha)}) - f^{([\alpha]-1)}(x)}{\epsilon}, \quad (1.3)$$

pour toute  $x > 0$ ,  $\alpha \in ]n, n+1]$  et  $[\alpha]$  est le plus petit entier supérieur ou égal à  $\alpha$ .

**Définition 1.8.** [1, 11] Si la fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\alpha \in ]0, 1]$ , alors la dérivée fractionnaire conforme d'ordre  $\alpha$  est donné par :

$$(\mathcal{T}^\alpha f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\epsilon}, \quad (1.4)$$

pour toute  $x > 0$ .

Si  $(\mathcal{T}^\alpha f)(x)$  existe on dit que  $f$  est  $\alpha$ -différentiable.

**Lemme 1.1.** [1, 11, 16] si la fonction  $f$  est  $n$  fois différentiable sur  $[0, +\infty[$  et  $\alpha \in ]n, n+1]$  alors :

$$\mathcal{T}^\alpha f(x) = x^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(x).$$

*Démonstration.* D'après l'équation (1.3) on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^\alpha f(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(x + \epsilon x^{([\alpha]-\alpha)}) - f^{([\alpha]-1)}(x)}{\epsilon}, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x + \epsilon x^{n+1-\alpha}) - f^{(n)}(x)}{\epsilon}, \end{aligned}$$

on pose  $h = \epsilon x^{n+1-\alpha} \implies \epsilon = hx^{\alpha-n-1}$  alors :

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{hx^{\alpha-n-1}}, \\ &= x^{n+1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{h}, \\ &= x^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

□

**Théorème 1.1.** [11] Si  $f$  est dérivable au sens usuelle au point  $x > 0$ , alors  $f$  est  $\alpha$ -différentiable en  $x$  et :

$$(\mathcal{T}^\alpha f)(x) = x^{1-\alpha} \frac{d}{dx} f(x).$$

*Démonstration.* D'après l'équation (1.4) et on pose :  $h = \epsilon x^{1-\alpha}$ , donc  $\epsilon = hx^{\alpha-1}$  et  $\epsilon \rightarrow 0$  alors  $h \rightarrow 0$  d'où :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}^\alpha f)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} x^{1-\alpha} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\ &= x^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\ &= x^{1-\alpha} \frac{d}{dx} f(x). \end{aligned}$$

□

Nous donnons dans cette Corollaire le dérivée fractionnaire conforme de certaines fonctions.[15, 7]

**Corollaire 1.1.** Soit  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $\forall a \in \mathbb{R}$  :

1.  $\mathcal{T}^\alpha f(x) = 0$ ; pour toute  $f(x) = c$  telle que  $c$  une constante de  $\mathbb{R}$ .
2.  $\mathcal{T}^\alpha (e^{ax}) = ax^{1-\alpha} e^{ax}$ .
3.  $\mathcal{T}^\alpha (x^\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ .
4.  $\mathcal{T}^\alpha (\sin(ax)) = ax^{1-\alpha} \cos(ax)$ .
5.  $\mathcal{T}^\alpha (\cos(ax)) = -ax^{1-\alpha} \sin(ax)$ .
6.  $\mathcal{T}^\alpha (\sin(\frac{1}{\alpha}x)) = \cos(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)$ .
7.  $\mathcal{T}^\alpha (\cos(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)) = -\sin(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)$ .
8.  $\mathcal{T}^\alpha (e^{\frac{1}{\alpha}x^\alpha}) = e^{\frac{1}{\alpha}x^\alpha}$ .

**Propriétés 1.2.** [11, 1, 4] Soit  $f, g : ]0, +\infty[$  deux fonction  $\alpha$ -différentiable et  $\alpha \in ]0, 1]$  alors :

1.  $\mathcal{T}^\alpha (af + bg) = a\mathcal{T}^\alpha (f) + b\mathcal{T}^\alpha (g), \forall a, b \in \mathbb{R}$ .
2.  $\mathcal{T}^\alpha \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f\mathcal{T}^\alpha(g) + g\mathcal{T}^\alpha(f)}{g^2}, g \neq 0$ .
3.  $\mathcal{T}^\alpha (x^p) = px^{p-\alpha}, \forall p \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $x > 0$  et  $a, b \in \mathbb{R}$  nous avons  $af + bg$   $\alpha$ -différentiable en  $x$  et :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^\alpha (af + bg)(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(af + bg)(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - (af + bg)(x)}{\epsilon}, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{af(x + \epsilon x^{1-\alpha}) + bg(\epsilon x^{1-\alpha}) - af(x) - bg(x)}{\epsilon}, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a(f(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - f(x)) + b(g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - g(x))}{\epsilon}, \\ &= a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\epsilon} + b \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - g(x)}{\epsilon}, \\ &= a\mathcal{T}^\alpha (f)(x) + b\mathcal{T}^\alpha (g)(x). \end{aligned}$$

2. Pour tout  $x > 0$  et  $g \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^\alpha \left( \frac{f}{g} \right) (x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f}{g}(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - \frac{f}{g}(x)}{\epsilon}, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \epsilon x^{1-\alpha})}{g(x + \epsilon x^{1-\alpha})} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\epsilon}, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \epsilon x^{1-\alpha})g(x) - g(x + \epsilon x^{1-\alpha})f(x)}{g(x + \epsilon x^{1-\alpha})g(x)}}{\epsilon}, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \epsilon x^{1-\alpha})g(x) - g(x + \epsilon x^{1-\alpha})f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x + \epsilon x^{1-\alpha})g(x)}}{\epsilon}, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x)(f(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - f(x)) + f(x)(g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - g(x))}{g(x + \epsilon x^{1-\alpha})g(x)}}{\epsilon}, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(x)(f(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - f(x)) + f(x)(g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - g(x))}{\epsilon} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{g(x + \epsilon x^{1-\alpha})g(x)}, \\
&= \left( g(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\epsilon} + f(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - g(x)}{\epsilon} \right) \frac{1}{g^2(x)}, \\
&= \frac{g(x) \mathcal{T}^\alpha f(x) + f(x) \mathcal{T}^\alpha g(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^\alpha (fg) (x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{fg(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - fg(x)}{\epsilon}, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon x^{1-\alpha})g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - f(x)g(x)}{\epsilon}, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon x^{1-\alpha})g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - f(x)g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) + f(x)g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - f(x)g(x)}{\epsilon}, \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\epsilon} g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) \right) + f(x) \frac{g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - g(x)}{\epsilon}, \\
&= \mathcal{T}^\alpha f(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(x + \epsilon x^{1-\alpha}) + f(x) \mathcal{T}^\alpha g(x), \\
&= \mathcal{T}^\alpha f(x) g(x) + f(x) \mathcal{T}^\alpha g(x).
\end{aligned}$$

□

### 1.2.1 L'intégrale fractionnaire conformable

**Définition 1.9.** [2] Soient  $a > 0$ ,  $x > 0$  et la fonction  $f : [a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , alors l'intégrale fractionnaire conformable d'ordre  $\alpha$  est définie par :

$$\mathcal{I}_c^\alpha (f) (x) = \int_a^x (x - a)^{\alpha-1} f(x) dx.$$

## 1.2.2 Relation entre la dérive fractionnaire conformable et l'intégrale fractionnaire conformable

**Théorème 1.2.** [2] Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\alpha \in ]0, 1]$  pour toute  $x > a$  nous avons :

1. Si  $f$  est continue, alors :  $\mathcal{I}_c^\alpha [\mathcal{T}^\alpha (f)] (x) = f(x) - f(a)$ .
2. Si  $f$  est différentiable, alors  $\mathcal{T}^\alpha [\mathcal{I}_c^\alpha (f)] (x) = f(x)$ .

*Démonstration.* 1.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_l^\alpha \mathcal{T}^\alpha (f) (x) &= \int_a^x (x-a)^{\alpha-1} \mathcal{T}^\alpha (f) (x) dx, \\ &= \int_a^x (x-a)^{\alpha-1} (x-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dx} f(x), \\ &= \int_a^x \frac{d}{dx} f(x), \\ &= f(x) - f(a). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^\alpha \mathcal{I}_l^\alpha (f) (x) &= (x-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dx} \mathcal{I}_l^\alpha (f) (x), \\ &= (x-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx, \\ &= (x-a)^{1-\alpha} (x-a)^{\alpha-1} f(x), \\ &= f(x). \end{aligned}$$

□

## 1.3 La Dérivée fractionnaire locale

Dans cette section, nous allons donner une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire locale et nous discutons quelques propriétés.

S'il existe la relation :

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon^\alpha,$$

Avec  $|x - x_0| < \delta$  pour  $\delta, \epsilon > 0$  et  $\delta, \epsilon \in \mathbb{R}$ .

Maintenant  $f(x)$  est appelée continue fractionnaire locale à  $x = x_0$  désigner par :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Alors  $f(x)$  est appelée fonction continue fractionnaire locale sur l'intervalle  $(a, b)$  désigné par :

$$f(x) \in C_\alpha(a, b).$$

**Définition 1.10.** [21, 3, 17] Soit  $f \in C_\alpha(a, b)$  la dérivée locale fractionnaire de  $f$  d'ordre  $\alpha$  en  $x = x_0$  est donné par :

$$\mathcal{D}^\alpha f(x) = f^{(\alpha)}(x_0) = \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta^\alpha (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^\alpha},$$

tell que :

$$\Delta^\alpha (f(x) - f(x_0)) \cong \Gamma(1 + \alpha) \Delta (f(x) - f(x_0)).$$

Pour toute  $x \in (a, b)$ , il existe  $f^{(\alpha)}(x) = \mathcal{D}_x^\alpha f(x)$ , désigner par  $f(x) \in \mathcal{D}_x^\alpha(a, b)$ . La dérivée fractionnaire locale d'ordre  $k\alpha$  est donnée par :

$$f^{(k\alpha)}(x) = \mathcal{D}^{k\alpha} f(x) = \underbrace{\mathcal{D}^\alpha \dots \mathcal{D}^\alpha}_{k\text{fois}} f(x), k \in \mathbb{N}, 0 < \alpha \leq 1.$$

Et la dérivée partielle fractionnaire local d'ordre  $k\alpha$  est donnée par :

$$\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial x^{k\alpha}} f(x) = \underbrace{\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \dots \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}}_{k\text{fois}} f(x), k \in \mathbb{N}, 0 < \alpha \leq 1.$$

**Remarque 1.2.** Opérateur dérivative noté local est un opérateur linéaire est vérifiant toute les propriétés de la dérivée classique.

**Lemme 1.2.** [3] Soient  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $f, g \in C_\alpha(a, b)$  alors :

1.  $f(x) = 0$ ; pour toute  $f(x) = c$  telle que  $c$  une constante de  $\mathbb{R}$ .
2.  $\mathcal{D}^\alpha (af + bg)(x) = a\mathcal{D}^\alpha f(x) + b\mathcal{D}^\alpha g(x)$ .
3.  $\mathcal{D}^\alpha fg(x) = f\mathcal{D}^\alpha g(x) + g\mathcal{D}^\alpha f(x)$ .
4. Si  $g \neq 0$  alors  $\mathcal{D}^\alpha \frac{f}{g}(x) = \frac{g\mathcal{D}^\alpha(x)f - f\mathcal{D}^\alpha g(x)}{g(x)^2}$ .

**Corollaire 1.2.** [3] Nous donnons dans cette corollaire le dérivée fractionnaire local de certaines fonctions.

1.  $\mathcal{D}^\alpha \left( \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \right) = \frac{x^{(k-1)\alpha}}{\Gamma((k-1)\alpha+1)}$ .
2.  $\mathcal{D}^\alpha (E_\alpha(x^\alpha)) = E_\alpha(x^\alpha)$ .
3.  $\mathcal{D}^\alpha (E_\alpha(-x^\alpha)) = -E_\alpha(-x^\alpha)$ .
4.  $\mathcal{D}^\alpha (\sin_\alpha(x^\alpha)) = \cos_\alpha(x^\alpha)$ .
5.  $\mathcal{D}^\alpha (\cos_\alpha(x^\alpha)) = -\sin_\alpha(x^\alpha)$ .

### 1.3.1 L'intégrale fractionnaire local

**Définition 1.11.** [18] Soit  $f(x) \in C_\alpha(a, b)$ , l'intégrale fractionnaire local de  $f(x)$  d'ordre  $\alpha$  dans l'intervalle  $(a, b)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_a^b f(t) (dt)^\alpha, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{j=N-1} f(t_j) (\Delta t_j)^\alpha, \end{aligned}$$

tell que :  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ ,  $\Delta t = \max(\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_{N-1})$  et  $j = 0, \dots, N - 1$ ;  $t_0 = a$ ,  $t_N = b$ ,  $[t_j; t_{j+1}]$  est une partition de l'intervalle  $[a, b]$ . On supposons que :

$$\begin{cases} \mathcal{I}_l^\alpha f(x) = 0 & \text{si : } a = b, \\ \mathcal{I}_l^\alpha f(x) = -\mathcal{I}_c^\alpha f(x) & \text{si : } a < b, \end{cases}$$

pour tous  $x \in (a, b)$  on a :  $\mathcal{I}_l^\alpha f(x)$  désigné par :  $f(x) \in I_x^{(\alpha)}(a, b)$ .

# LES SOLUTIONS SEMI-ANALYTIQUES POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES CONFORMABLE

---

Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode de transformation différentielle réduite conforme et les propriétés de dérivée fractionnaire conforme pour déterminer la solution semi-analytique des problèmes de dérivée fractionnaire conforme.

## 2.1 position du problème

Dans cette section, nous avons cherchons les solution semi-analytiques de l'équation différentielle à dérivée fractionnaire au sens conformable, sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_t^\alpha u(x, t) = F(u, u_x, u_{xx}, f(x, t)), & \text{dans } \Omega = [0, L] \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{dans } x \in [0, L], \end{cases}$$

telle que :

- ☞  $\mathcal{T}_t^\alpha$  L'opérateur de la dérivée fractionnaire conformable d'ordre  $\alpha$ .
- ☞  $u(x, t)$  La fonction inconnu.
- ☞  $x$  La variable spatiale.
- ☞  $t$  Le temps.
- ☞  $f(x, t)$  est une fonction donnée.

## 2.2 Méthode de transformation différentielle réduite conformable (CRDTM)

**Définition 2.1.** [4] Supposons que  $u(x, t)$  est analytiquement différencié de manière continue par rapport au temps  $t$  et à l'espace  $x$  dans son domaine (CRDTM) de  $u(x, t)$  est défini comme :

$$U_t^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^k k!} \left[ \left( (\mathcal{T}_t^\alpha)^{(k)} u \right) \right]_{t=t_0}, \quad (2.1)$$

où

$$(\mathcal{T}_t^\alpha)^{(k)}(u(x, t)) = \underbrace{(\mathcal{T}_t^\alpha \mathcal{T}_t^\alpha \cdots \mathcal{T}_t^\alpha)}_{k \text{ fois}}(u(x, t)),$$

et  $k$  est un entier non négatif.

La fonction t-dimensionnel  $U_k^\alpha(x)$  est un fonction transformée.

Les minuscules  $u(x, t)$  représentent l'originale de fonction pendant que  $U_k^\alpha(x)$  majuscule représentent le fonction transformée.

**Définition 2.2.** [10] Soit  $U_k^\alpha(x)$  la transformation de  $u(x, t)$  par la méthode (CRDTM). inverse CRDTM de  $U_k^\alpha(x)$  est défini comme :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^\alpha(x) (t - t_0)^{\alpha k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k k!} \left[ \left( (\mathcal{T}_t^\alpha)^{(k)} u \right) \right]_{t=t_0} (t - t_0)^{\alpha k}, \quad (2.2)$$

où le (CRDTM) de  $u(x, t)$  aux conditions initiales est défini comme suit :

$$U_k^\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^k k!} \left[ \left( (\mathcal{T}_t^\alpha)^{(k)} u \right) \right]_{t=t_0} & \text{si : } \alpha k \in \mathbb{Z}^+, \\ 0 & \text{si : } \alpha k \notin \mathbb{Z}^+, \end{cases}$$

pour :  $k = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{n}{\alpha} - 1\right)$ , tel que  $n$  représente l'ordre de CFPDE.

En considérant  $U_0^\alpha(x) = f(x)$  comme transformation de la condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x).$$

Des calculs itératifs simples donnent le  $U_k^\alpha(x)$  pour  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . Alors la transformation inverse du  $\{U_k^\alpha(x)\}_{k=0}^n$  donne la solution d'approximation comme :

$$\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n U_k^\alpha(x) t^{\alpha k},$$

où  $n$  représente l'ordre de la solution d'approximation obtenue.

Par conséquent, le (CRDTM) propose la solution suivante :

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{u}_n(x, t).$$

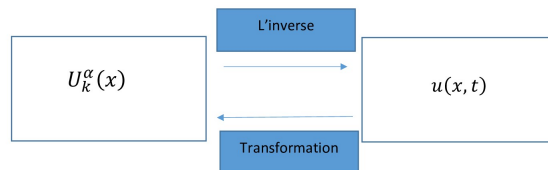


FIGURE 2.1 – La loi de (CRDTM)

Les opérations fondamentales de transformation différentielle réduite qui peuvent être déduites des équations (2.1) et (2.2) sont énumérés au Tableau 2.1 [4].

Fonction d'origine	Fonction transformée
$u(x, t)$	$U_k^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^k k!} [(\mathcal{T}_t^\alpha u)]_{t=t_0}$
$u(x, t) = av(x, t) \pm bw(x, t)$	$U_k^\alpha(x) = aV_k^\alpha(x) \pm bW_k^\alpha(x)$
$u(x, t) = v(x, t)w(x, t)$	$U_k^\alpha(x) = \sum_{s=0}^k V_s^\alpha W_{k-s}^\alpha(x)$
$u(x, t) = \mathcal{T}_k^\alpha v(x, t)$	$U_k^\alpha(x) = \alpha(k+1)V_{k+1}^\alpha(x)$
$u(x, t) = x^m(t-t_0)^n$	$U_k^\alpha(x) = x^m \delta(k - \frac{n}{\alpha}), \delta(k - \frac{n}{\alpha}) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = \frac{n}{\alpha}, \\ 0, & \text{si } k \neq \frac{n}{\alpha}. \end{cases}$

TABLE 2.1 – Quelques propriétés de base du (CRDTM)

## 2.3 Quelques Exemples

**Exemple 2.1.** [3] Nous cherchons une solution semi-analytiques pour le modèle fractionnaire de l'équation de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} u(x, t), \\ u(x, 0) = e^{\frac{x^\beta}{\beta}}. \end{cases} \quad (2.3)$$

La solution exacte de (2.3) au sens conformable est :

$$u_e(x, t) = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{x^\beta}{\beta}}.$$

Si on prend le (CRDTM) de (2.3), nous obtenons la formule suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(k+1)U_{k+1}^\alpha(x) &= \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}}U_k^\alpha(x), \\ U_{k+1}^\alpha(x) &= \frac{1}{\alpha(k+1)}\frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}}U_k^\alpha(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

D'après la condition initiale de (2.3) on a :

$$U_0^\alpha(x) = e^{\frac{x^\beta}{\beta}}. \quad (2.5)$$

Donc, en utilisant les équations (2.5) et (2.4), nous donnons les composants comme suit :

Pour :  $k = 0$

$$\begin{aligned} U_1^\alpha(x) &= \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}}U_0^\alpha(x), \\ &= \frac{1}{\alpha}e^{\frac{x^\beta}{\beta}}. \end{aligned}$$

Pour :  $k = 1$

$$\begin{aligned} U_2^\alpha(x) &= \frac{1}{2\alpha}\frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}}U_1^\alpha(x), \\ &= \frac{1}{2\alpha^2}e^{\frac{x^\beta}{\beta}}. \end{aligned}$$

Pour :  $k = 2$

$$\begin{aligned} U_3^\alpha(x) &= \frac{1}{3\alpha}\frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}}U_2^\alpha(x), \\ &= \frac{1}{3!\alpha^3}e^{\frac{x^\beta}{\beta}}, \end{aligned}$$

⋮

$$U_k^\alpha(x) = \frac{1}{k!\alpha^k}e^{\frac{x^\beta}{\beta}}. \quad (2.6)$$

à partir de (2.6), on trouve la solution de l'équation(2.3) comme :

$$\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n U_k^\alpha(x) t^{k\alpha} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!\alpha^k} t^{k\alpha} e^{\frac{x^\beta}{\beta}}. \quad (2.7)$$

Ainsi, à partir de (2.7) la solution approchée de (2.3) obtenue par (CRDTM) est :

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^k}{k!} e^{\frac{x^\beta}{\beta}} = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}} e^{\frac{x^\beta}{\beta}}.$$

C'est aussi la solution exacte.

Nous représentant graphiquement la solution approximative pour  $n = 3$  et la solution exacte pour  $\alpha = 0.95, \beta = 0.85$ .

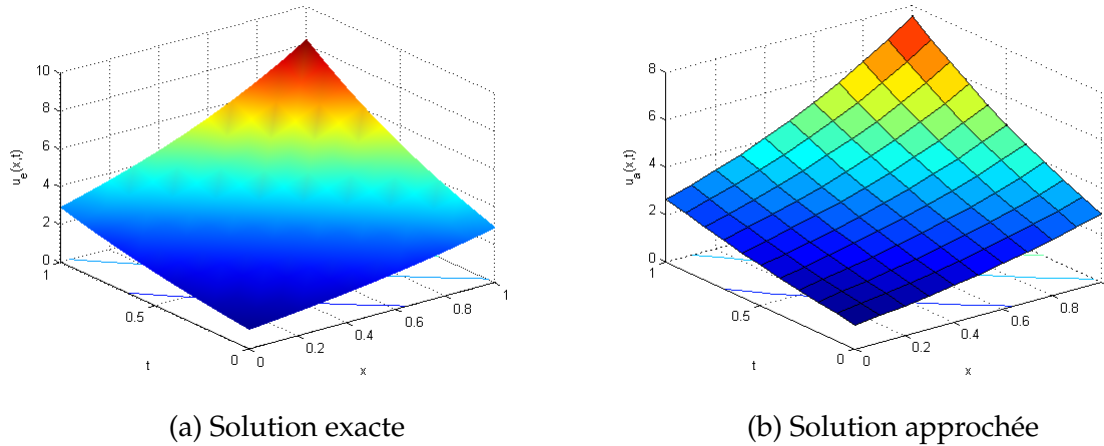


FIGURE 2.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution d’approximation de l’équation (2.3)

Nous représentons graphiquement la fonction d’erreur de la solution approximative de l’équation (2.3) pour  $n = 3$ .

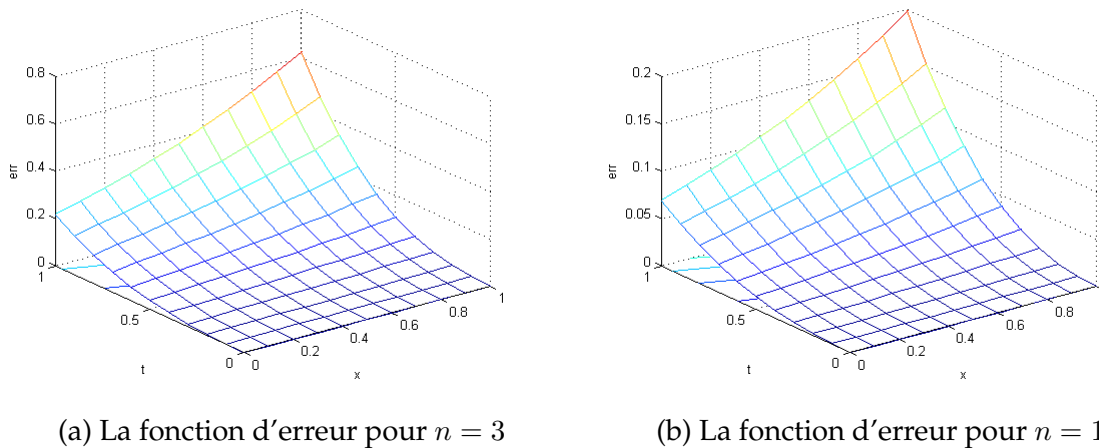


FIGURE 2.3 – La fonction d’erreur de la solution approximative de l’équation (2.3)

**Exemple 2.2.** [15] Considérant l’équation différentielle fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_t^\alpha u(x, t) + u(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = e^{-x}. \end{cases} \quad (2.8)$$

La solution exacte de problème (2.8) au sens conformable est :

$$u(x, t) = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha} - x}.$$

Pour obtenir la solution de l’équation (2.8) en utilisant le (CRDTM), nous pouvons transformer l’équation (2.8) en la relation suivante :

$$\alpha(k+1)U_{k+1}^\alpha(x) = -U_k^\alpha(x).$$

$$U_{k+1}^\alpha(x) = \frac{-1}{\alpha(k+1)} U_k^\alpha(x). \quad (2.9)$$

D'après la condition initiale de (2.8), nous avons :

$$U_0^\alpha(x) = e^{-x}. \quad (2.10)$$

Donc, en utilisant les formes (2.9) et (2.10), nous donnons les composants comme suit :  
pour :  $k = 0$

$$U_1^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-x}.$$

pour :  $k = 1$

$$U_2^\alpha(x) = \frac{1}{2\alpha^2} e^{-x}.$$

pour :  $k = 2$

$$U_3^\alpha(x) = \frac{1}{3!\alpha^3} e^{-x},$$

$$\vdots$$

$$U_k^\alpha(x) = \frac{e^{-x}}{k!\alpha^k}.$$

la transformée différentielle inverse de  $U_k^\alpha(x)$  donne :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(x, t) &= \sum_{k=0}^n U_k^\alpha(x) t^{k\alpha}, \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^{k\alpha}}{k!\alpha^k} e^{-x}. \end{aligned}$$

Et par conséquent, la solution approchée de (2.8) obtenue par (CRDTM) est :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{k!\alpha^k} e^{-x}, \\ &= e^{\frac{t^\alpha}{\alpha} - x}. \end{aligned}$$

Qui est la solution exacte.

Maintenant, nous représentons graphiquement la solution approximative pour  $n = 10$  et la solution exacte pour  $\alpha = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ .

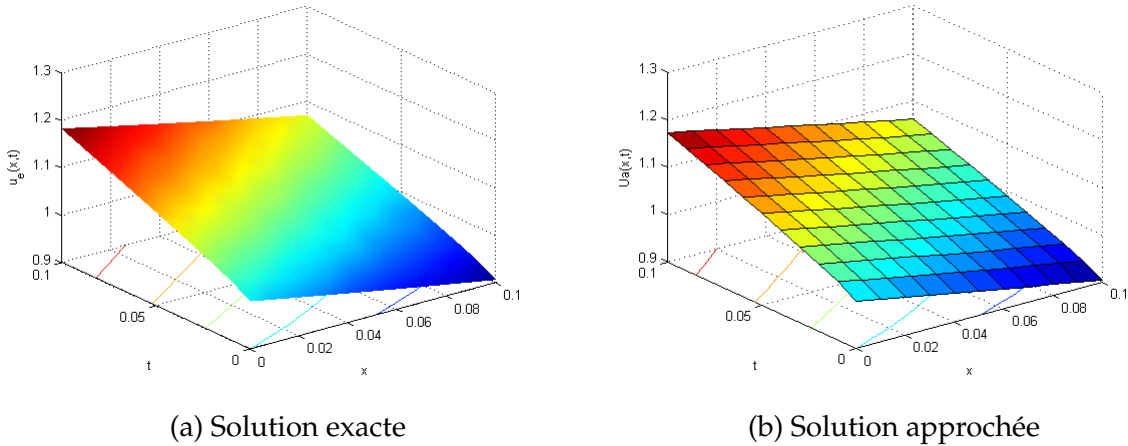


FIGURE 2.4 – Comparaison entre la solution exacte et la solution d’approximation.

Nous représentons graphiquement la fonction d’erreur de la solution approximative de l’équation (2.3) pour  $n = 8$  et  $n = 14$ .

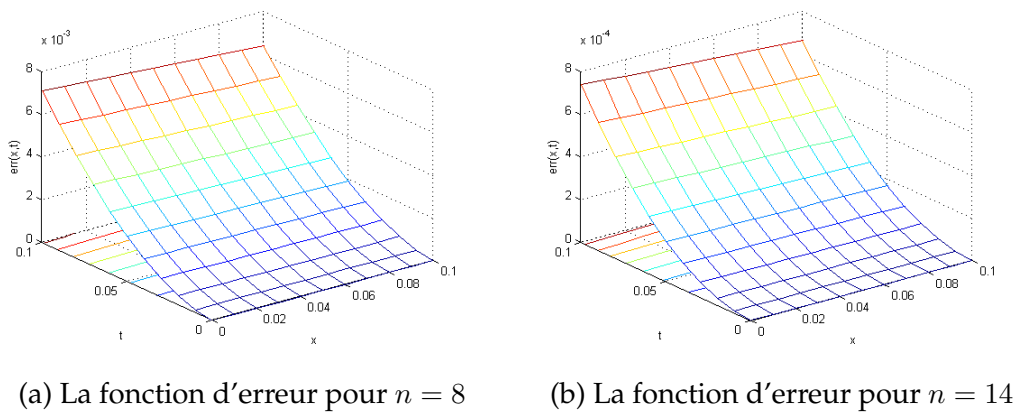


FIGURE 2.5 – La fonction d’erreur de la solution approximative de l’équation (2.3)

**Exemple 2.3.** [10] Considère le type suivant de CFNWS :

$$\mathcal{T}_t^\alpha u(x, t) = \mathcal{T}_x^{2\beta} u(x, t) - 2u^2(x, t), \quad (2.11)$$

telle que  $\alpha > 0, \beta \leq 1, t > 0, x \in \mathbb{R}$ .

avec la condition initiale :

$$u(x, 0) = 1. \quad (2.12)$$

La solution exacte de (2.12) au sens confoemable est :

$$u(x, t) = \frac{1}{1 + \frac{2t^\alpha}{\alpha}}.$$

Pour obtenir la solution de l’équation (2.11) en utilisant le (CRDTM), nous pouvons transformer l’équation (2.11) en la relation suivante :

$$\alpha(k+1)U_{k+1}^\alpha(x) = \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} U_k^\alpha(x) - 2 \sum_{s=0}^k U_s^\alpha(x) U_{k-s}^\alpha(x).$$

$$U_{k+1}^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha(k+1)} \left( \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} U_k^\alpha(x) - 2 \sum_{s=0}^k U_s^\alpha(x) U_{k-s}^\alpha(x) \right). \quad (2.13)$$

D'après la condition initiale de (2.12) nous avons :

$$U_0^\alpha(x) = 1. \quad (2.14)$$

Donc, en utilisant les équations (2.13) et (2.14), nous donnons les composants comme suit :

Pour :  $k=0$

$$\begin{aligned} U_1^\alpha(x) &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} U_0^\alpha(x) - 2U_0^\alpha(x) U_0^\alpha(x) \right), \\ &= \frac{-2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Pour :  $k=1$

$$\begin{aligned} U_2^\alpha(x) &= \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} U_1^\alpha(x) - 2(U_0^\alpha(x) U_1^\alpha(x) + U_1^\alpha(x) U_1^\alpha(x)) \right), \\ &= \frac{4}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Pour :  $k=2$

$$\begin{aligned} U_3^\alpha(x) &= \frac{1}{3\alpha} \left( \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} U_2^\alpha(x) - 2(U_0^\alpha(x) U_2^\alpha(x) + U_1^\alpha(x) U_1^\alpha(x) + U_2^\alpha(x) U_0^\alpha(x)) \right), \\ &= \frac{-8}{\alpha^3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$U_k^\alpha(x) = \frac{(-1)^k 2^k}{\alpha^k}. \quad (2.15)$$

Par conséquent, la transformation inverse de (2.15) est donnée par :

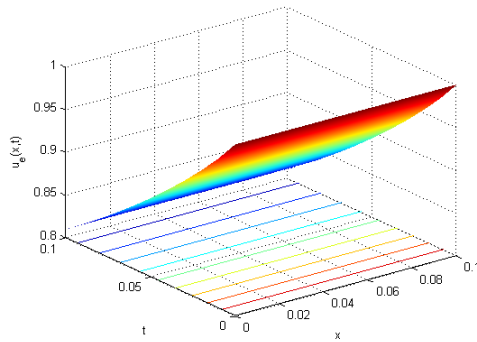
$$\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n U_k^\alpha(x) t^{k\alpha} = \sum_{k=0}^n \left( \frac{-2}{\alpha} \right)^k t^{k\alpha} = 1 - \frac{2}{\alpha} t^\alpha + \frac{4}{\alpha^2} t^{2\alpha} - \frac{8}{\alpha^3} t^{3\alpha} + \frac{16}{\alpha^4} t^{4\alpha} + \dots$$

On obtient donc la solution approchée :

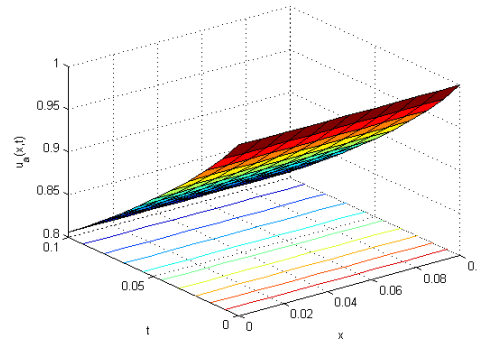
$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{2t^\alpha}{\alpha} \right)^k = \frac{1}{1 + \frac{2t^\alpha}{\alpha}}. \quad (2.16)$$

La solution approchée de (2.11) par (CRDTM) est la même que la solution exacte.

Nous représentons graphiquement la solution approximative pour  $n = 10$  et la solution exacte pour  $\alpha = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ .



(a) Solution exacte



(b) Solution approchée

FIGURE 2.6 – Comparaison entre la solution exacte et la solution d'approximation de l'équation (2.11)

Maintenant, nous représentons graphiquement la fonction d'erreur de la solution approximative de l'équation (2.11) pour  $n = 8$  et  $n = 12$ .

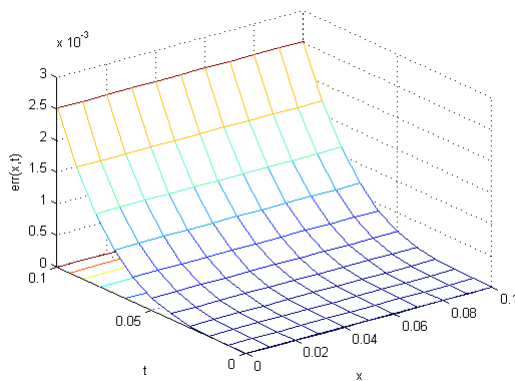
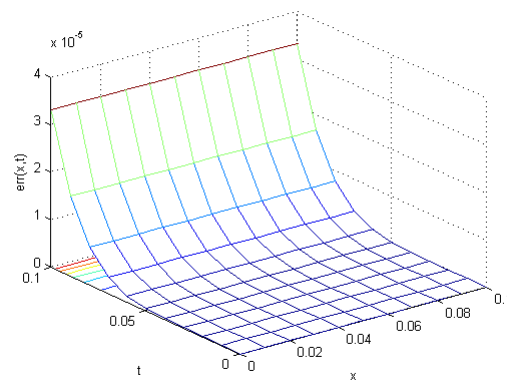
(a) La fonction d'erreur pour  $n = 8$ (b) La fonction d'erreur pour  $n = 12$ 

FIGURE 2.7 – La fonction d'erreur de la solution approximative de l'équation (2.11)

**Remarque 2.1.** La solution approximative de (2.16) existe si et seulement si :

$$0 < t \leq \frac{1}{2}. \quad (2.17)$$

**Exemple 2.4.** Considérer l'équation non linéaire de la dynamique des gaz fractionnaires dans le temps et dans l'espace :

$$\mathcal{T}_t^\alpha(x) + \frac{1}{2} \mathcal{T}_x^\beta u^2(x, t) - u(x, t)(1 - u(x, t)) = 0, 0 < \alpha, \beta \leq 1. \quad (2.18)$$

Et la condition initiale :

$$u(x, 0) = e^{-\frac{x^\beta}{\beta}}. \quad (2.19)$$

La solution exacte de (2.18) au sens conforme est :

$$u(x, t) = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{x^\beta}{\beta}}.$$

Pour obtenir la solution de l'équation (2.18) en utilisant le (CRDTM), nous pouvons transformer l'équation (2.18) en la relation suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(k+1)U_{k+1}^\alpha(x) &= -\sum_{s=0}^k U_s^\alpha(x) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} U_{k-s}^\alpha(x) + U_k^\alpha(x) - \sum_{s=0}^k U_k^\alpha(x) U_k^\alpha(x). \\ U_{k+1}^\alpha(x) &= \frac{1}{\alpha(k+1)} \left( -\sum_{s=0}^k U_s^\alpha(x) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} U_{k-s}^\alpha(x) + U_k^\alpha(x) - \sum_{s=0}^k U_k^\alpha(x) U_k^\alpha(x) \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

D'après la condition initiale de (2.18) nous avons :

$$U_0^\alpha(x) = e^{-\frac{x^\beta}{\beta}}. \quad (2.21)$$

Donc, en utilisant les équations (2.20) et (2.21), nous donnons les composants comme suit :

Pour :  $k=0$

$$\begin{aligned} U_1^\alpha(x) &= \frac{1}{\alpha} \left( -U_0^\alpha(x) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} U_0^\alpha(x) + U_0^\alpha(x) - U_0^\alpha(x) U_0^\alpha(x) \right), \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x^\beta}{\beta}}. \end{aligned}$$

Pour :  $k=1$

$$\begin{aligned} U_2^\alpha(x) &= \frac{1}{2\alpha} \left( -U_0^\alpha(x) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} U_1^\alpha(x) - U_1^\alpha(x) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} U_0^\alpha(x) + U_1^\alpha(x) - U_0^\alpha(x) U_1^\alpha(x) - U_1^\alpha(x) U_0^\alpha(x) \right), \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} e^{-\frac{x^\beta}{\beta}}. \end{aligned}$$

Pour :  $k=2$

$$\begin{aligned} U_3^\alpha(x) &= \frac{1}{\alpha(k+1)} \left( -\sum_{s=0}^2 U_s^\alpha(x) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} U_{k-s}^\alpha(x) + U_k^\alpha(x) - \sum_{s=0}^2 U_k^\alpha(x) U_k^\alpha(x) \right), \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} e^{-\frac{x^\beta}{\beta}}, \end{aligned}$$

⋮

$$U_k^\alpha(x) = \frac{1}{k! \alpha^k} e^{-\frac{x^\beta}{\beta}}.$$

Par conséquent, la transformation inverse de  $U_k^\alpha(x)$  se trouve sous la forme :

$$\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n U_k^\alpha(x) t^{k\alpha} = \sum_{k=0}^n U_k^\alpha \frac{t^{k\alpha}}{k! \alpha^k} e^{-\frac{x^\beta}{\beta}}.$$

On obtient donc la solution approchée :

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x, t) = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{x^\beta}{\beta}}.$$

Maintenant, nous représentation graphiquement la solution approximative pour  $n = 8$  et la solution exacte pour  $\alpha = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}, \beta = 0.65$  de l'équation (2.18).

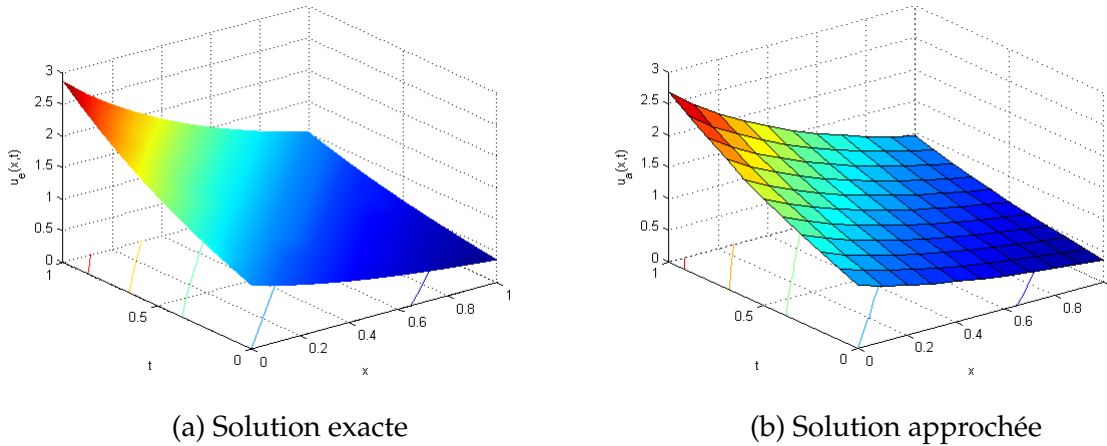


FIGURE 2.8 – Comparaison entre la solution exacte et la solution d’approximation de l’équation (2.18).

Nous représentons graphiquement la fonction d’erreur de la solution approximative pour  $n = 8$  de l’équation (2.18).

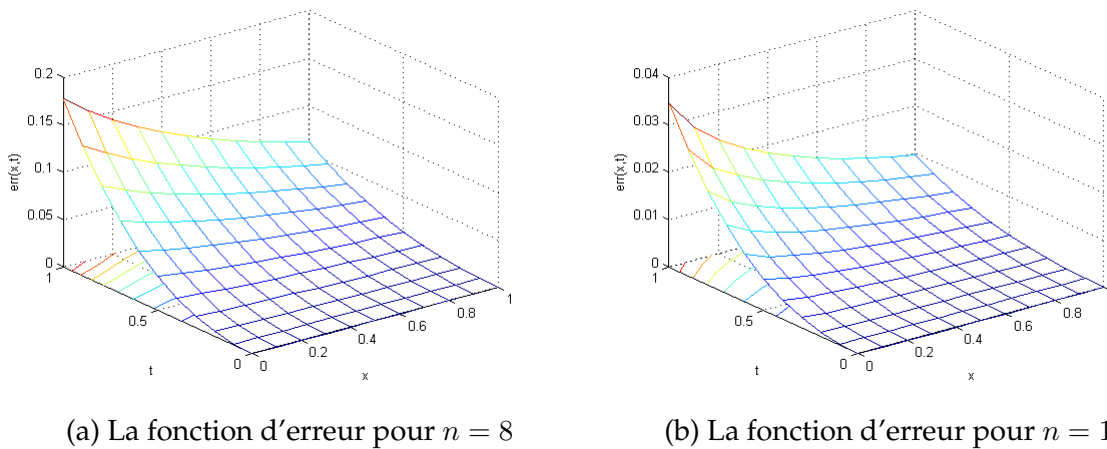


FIGURE 2.9 – La fonction d’erreur de la solution approximative de l’équation(2.18)

**Exemple 2.5.** Considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_t^\alpha u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - x \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + 4x - 1 = 0, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases} \quad (2.22)$$

Si on prend le (CRDTM) de (2.22), nous obtenons la formule suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(k+1) U_{k+1}^\alpha(x) - \frac{\partial}{\partial x} U_k^\alpha(x) - x \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k^\alpha(x) + (4x-1) \delta(k) &= 0, \\ U_{k+1}^\alpha(x) &= \frac{1}{\alpha(k+1)} \left( \frac{\partial}{\partial x} U_k^\alpha(x) + x \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k^\alpha(x) - (4x-1) \delta(k) \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

D'après la condition initiale de (2.22) nous avons :

$$U_0^\alpha(x) = x^2. \quad (2.24)$$

Donc, en utilisant les équations (2.23) et (2.24), nous donnons les composants comme suit :

Pour :  $k=0$

$$\begin{aligned} U_1^\alpha(x) &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x} U_0^\alpha(x) + x \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_0^\alpha(x) - (4x - 1) \delta(0) \right), \\ &= \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Pour :  $k=1$

$$\begin{aligned} U_2^\alpha(x) &= \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x} U_1^\alpha(x) + x \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_1^\alpha(x) - (4x - 1) \delta(1) \right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

⋮

$$U_k^\alpha(x) = 0 ; \quad k > 1.$$

la transformée différentielle inverse de  $U_k^\alpha(x)$  donné :

$$\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n U_k^\alpha(x) t^{k\alpha} = x^2 + \frac{1}{\alpha} t^\alpha.$$

Donc :

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x, t) = x^2 + \frac{1}{\alpha} t^\alpha.$$

Qui est la solution exacte.

La solution de (2.22) pour  $\alpha = 0.5$  est illustrée à la figure.

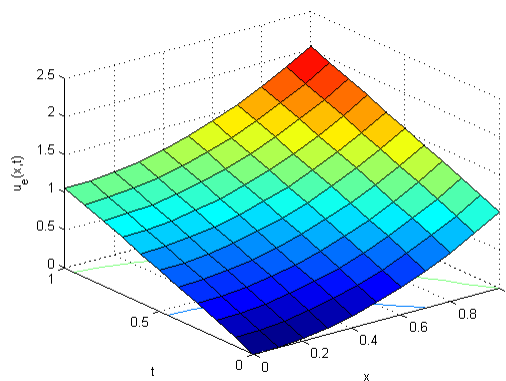


FIGURE 2.10 – La solution exacte de l'équation (2.22)

# SOLUTIONS SEMI-ANALYTIQUES POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉE LOCAL FRACTIONNAIRE

---

Dans ce chapitre, nous appliqués la méthode (LRDTM) pour des équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire. De plus, nous avons cherché des solutions semi-analytiques par des exemples donnés.

### 3.1 Position du problème

Nous avons cherchons la solution approximative de l'équation aux dérivée partielles d'ordre fractionnaire peut être représenté comme :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\alpha \psi(x, t) = F(\psi, \psi_x, \psi_{xx}, f(x, t)), & \text{dans } \Omega = [0, L] \times [0, T], \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \psi(x, 0) = h(x), & \text{dans } x \in [0, L], \end{cases}$$

telle que :

- ☞  $\mathcal{D}_t^\alpha$  L'opérateur de la dérivée fractionnaire conformable d'ordre  $\alpha$ .
- ☞  $\varphi(x, t)$  La fonction inconnu.
- ☞  $x$  La variable spatiale.
- ☞  $t$  Le temps.
- ☞  $f(x)$  et  $h(x)$  deux fonctions donnée.

### 3.2 Méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire local(LRDTM)

Dans cette section, nous rappelons et posons brièvement en revue les théorèmes fractionnaires de Taylor. Puis on étend (RDTM) pour la dérivé fractionnaire local.

**Théorème 3.1.** [4] (Théorème de Taylor fractionnaire local) on suppose que  $\frac{d^{(k+1)\alpha}}{dx^{(k+1)\alpha}} \psi(x) \in C_\alpha(a, b)$  poue  $a, b \in \mathbb{R}; k = 0, 1, 2, \dots, n$  et  $0 < \alpha \leq 1$  alors :

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi(x_0) \frac{(x-x_0)^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)},$$

où  $a < x_0 < x < b$ .

**Théorème 3.2.** Supposons que  $\psi^{((k+1)\alpha)}(x) \in C_\alpha(a, b)$ , pour  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  et  $0 < \alpha \leq 1$ , alors :

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi^{(k\alpha)}(x_0) \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad \forall x \in (a, b).$$

**Définition 3.1.** [8] le (LRDTM) de la fonction  $\Psi(x)$  est défini comme :

$$\Psi_k^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(1+k\alpha)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha} \psi(x, t)}{\partial t^{k\alpha}} \right]_{t=t_0}, \quad (3.1)$$

où  $k = 1, 2, \dots, n$  et  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Définition 3.2.** [8] La transformée inverse différentielle local de  $\Psi_k^\alpha(x)$  est définie comme suit :

$$\psi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k^\alpha(x) (t-t_0)^{k\alpha}, \quad (3.2)$$

où :  $0 < \alpha \leq 1$ .

Les opérations fondamentaux de transformation différentielle réduite qui peuvent être déduites des équations (3.1) et (3.2) sont énumérés le tableau suivant [3] :

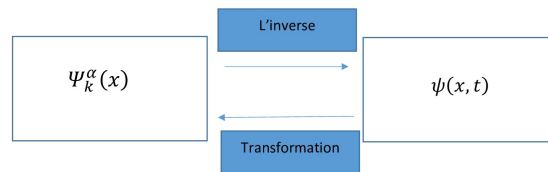


FIGURE 3.1 – La loi de (LRDTM)

Fonction d'origine	Fonction transformée
$\psi(x, t)$	$\Psi_k^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(1+k\alpha)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha} u(x, t)}{\partial t^{k\alpha}} \right]_{t=t_0}$
$\psi(x, t) = a\varphi(x, t) \pm b\pi(x, t)$	$\Psi_k^\alpha(x) = a\phi_k^\alpha(x) \pm b\Pi_k^\alpha(x)$
$\psi(x, t) = \varphi(x, t) \pi(x, t)$	$\Psi_k^\alpha(x) = \sum_{s=0}^k \phi_s^\alpha \Pi_{k-s}^\alpha(x)$
$\psi(x, t) = \mathcal{D}_t^\alpha \pi(x, t)$	$\Psi_k^\alpha(x) = \frac{\Gamma(1+k\alpha+n\alpha)}{\Gamma(k\alpha+1)} \Pi_{k+n}^\alpha(x)$
$\psi(x, t) = \frac{(x-x_0)^{m\alpha} (t-t_0)^{n\beta}}{\Gamma(1+m\alpha) \Gamma(1+n\beta)}$	$\Psi_k^\alpha(x) = \frac{x^{m\alpha}}{\Gamma(1+m\alpha)} \delta_\alpha(k-n), \quad \delta_\alpha(k-n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$
$\psi(x, t) = E_\alpha((a(x-x_0))^\alpha) E_\beta((b(t-t_0))^\beta)$	$\Psi_k^\alpha(x) = E_\alpha((a(x-x_0))^\alpha) \frac{a^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}$

TABLE 3.1 – Quelques propriétés de base du (LRDTM)

### 3.3 Quelques Exemples

**Exemple 3.1.** Considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\alpha \psi(x, t) = \mathcal{D}_x^{2\beta} \psi(x, t), \\ \psi(x, 0) = E_\beta(x^\beta). \end{cases} \quad (3.3)$$

La solution exacte de (3.3) au sens local est :

$$\psi(x, t) = E_\alpha(t^\alpha) E_\beta(x^\beta).$$

Pour obtenir la solution de l'équation (3.3) en utilisant le (LRDTM), nous pouvons transformer l'équation (3.3) en la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1+(k+1)\alpha)}{\Gamma(k\alpha+1)} \Psi_{k+1}^\alpha(x) &= \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} \Psi_k^\alpha(x). \\ \Psi_{k+1}^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(1+(k+1)\alpha)} \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} \Psi_k^\alpha(x). \end{aligned} \quad (3.4)$$

D'après la condition initiale de (3.3) nous avons :

$$\Psi_0^\alpha(x) = E_\beta(x^\beta). \quad (3.5)$$

Donc, en utilisant les équations (3.4) et (3.5), nous donnons les composants comme suit : pour :  $k = 0$

$$\begin{aligned} \Psi_1^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} \Psi_0^\alpha(x), \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} E_\beta(x^\beta). \end{aligned}$$

pour :  $k = 1$

$$\begin{aligned}\Psi_2^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} E_\beta(x^\beta), \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} E_\beta(x^\beta).\end{aligned}$$

pour :  $k = 2$

$$\begin{aligned}\Psi_3^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)} \frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} E_\beta(x^\beta), \\ &= \frac{1}{\Gamma(3\alpha+1)} E_\beta(x^\beta),\end{aligned}$$

⋮

$$\Psi_k^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(K\alpha+1)} E_\beta(x^\beta).$$

Alors, la transformation inverse de de l'ensemble des valeurs  $\{\Psi_k^\alpha(x)\}_{k=0}^n$  donne la solution d'approximation suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_n(x, t) &= \sum_{k=0}^n \Psi_k^\alpha(x) t^{k\alpha}, \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} E_\beta(x^\beta).\end{aligned}\tag{3.6}$$

à partir de (3.6) on obtient la solution approchée de (3.3) par (LRDTM) comme :

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_n(x, t), \\ &= E_\alpha(x^\alpha) E_\beta(x^\beta).\end{aligned}$$

C'est aussi la solution exacte.

Nous représentant les solutions exactes et les solutions approchées pour  $\alpha = 0.95$ ,  $n = 10$ .

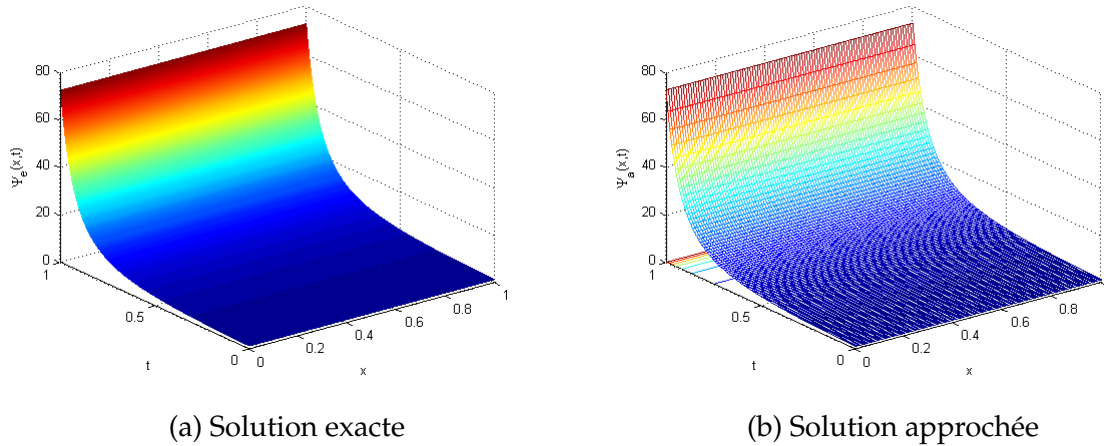


FIGURE 3.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution d’approximation de le problème (3.3)

La fonction d’erreur dans cet exemple est représentée graphiquement selon la représentation suivante :

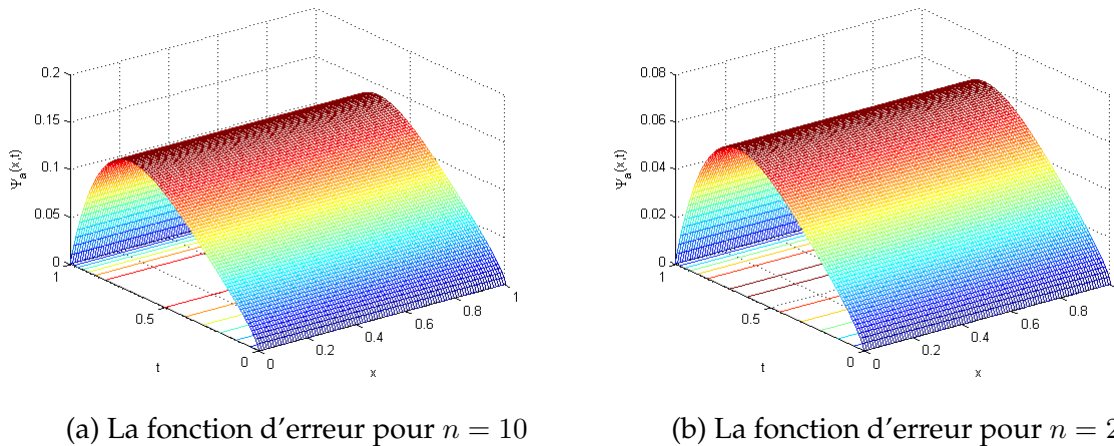


FIGURE 3.3 – La fonction d’erreur de la solution approximative de le problème (3.3)

**Exemple 3.2.** Considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{2\alpha} \psi(x, t) = \mathcal{D}_x^{2\alpha} \psi(x, t), \\ \psi(x, 0) = \sin_\alpha(x^\alpha), \\ \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \psi(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

La solution exacte ou sens local de ce problème est :

$$\psi(x, t) = \sin_\alpha(x^\alpha) \cos_\alpha(t^\alpha).$$

Pour obtenir la solution de l'équation (3.7) en utilisant le (LRDTM), nous pouvons transformer l'équation (3.7) en la relation suivante :

$$\frac{\Gamma((k+2)\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1)}\Psi_{k+2}^\alpha(x) = \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}\Psi_k^\alpha(x).$$

$$\Psi_{k+2}^\alpha(x) = \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma((k+2)\alpha+1)}\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}\Psi_k^\alpha(x). \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \Psi_0^\alpha(x) = \sin_\alpha(x^\alpha), \\ \Psi_1^\alpha(x) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Donc, en utilisant les équations (3.8) et (3.9), nous donnons les composants comme suit :

Pour :  $k = 0$

$$\begin{aligned} \Psi_2^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}\Psi_0^\alpha(x) \\ &= \frac{-1}{\Gamma(2\alpha+1)}\sin_\alpha(x^\alpha), \end{aligned}$$

Pour :  $k = 1$

$$\begin{aligned} \Psi_3^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}\Psi_1^\alpha(x), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour :  $k = 2$

$$\begin{aligned} \Psi_4^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)}\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}\Psi_2^\alpha(x), \\ &= \frac{1}{\Gamma(4\alpha+1)}\sin_\alpha(x^\alpha), \end{aligned}$$

⋮

$$\Psi_k^\alpha(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(2k\alpha+1)}\sin_\alpha(x^\alpha) & \text{si } k = 2i, \\ 0 & \text{si } k = 2i+1. \end{cases} \quad \text{pour } i \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$

Alors, la transformation inverse de de l'ensemble des valeurs  $\{\Psi_k^\alpha(x)\}_{k=0}^n$  donne la solution d'approximation suivante :

$$\tilde{\psi}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n \Psi_k^\alpha(x) t^{k\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \frac{t^{2k\alpha}}{\Gamma(2k\alpha+1)} \sin_\alpha(x^\alpha). \quad (3.11)$$

à partir de (3.11), la solution approchée de (3.7) obtenue par (LRDTM) est :

$$\psi(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_n(x, t) = \cos_\alpha(t^\alpha) \sin_\alpha(x^\alpha). \quad (3.12)$$

C'est aussi la solution exacte.

Maintenant, nous représentent graphiquement la solution approximative pour  $n = 9$  et la solution exacte pour  $\alpha = 0.45$ .

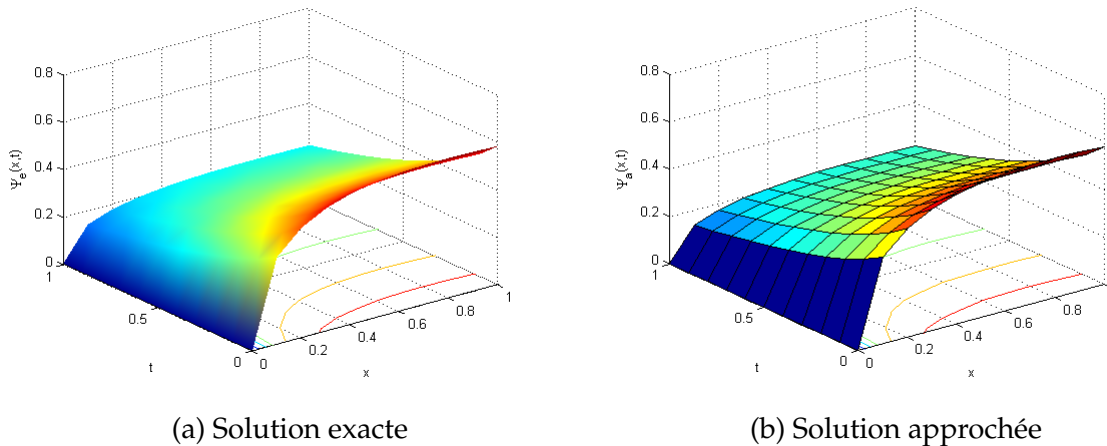


FIGURE 3.4 – Comparaison entre la solution exacte et la solution d’approximation de le problème (3.7)

Nous représentant graphiquement la fonction d’erreur de la solution approximative pour  $n = 9$  et  $n = 14$  de le problème (3.7).

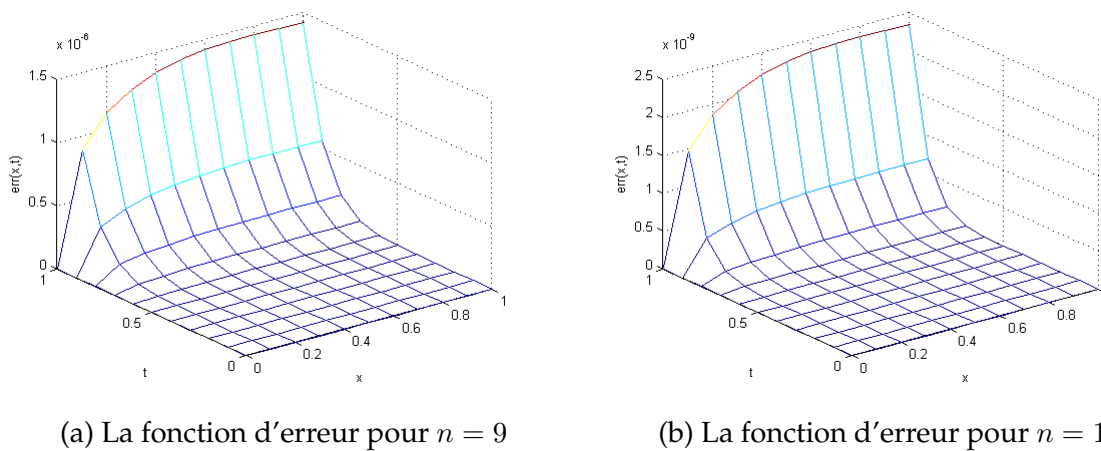


FIGURE 3.5 – La fonction d’erreur de la solution approximative de le problème (3.7)

**Exemple 3.3.** Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{2\alpha} \psi(x, t) = \mathcal{D}_x^{2\beta} \psi(x, t) - 2\psi(x, t), \\ \psi(x, 0) = E_\beta(-x^\beta), \\ \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \psi(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

La solution exacte de (3.13) au sens local est :

$$\psi(x, t) = E_\beta(-x^\beta) \cos_\alpha(t^\alpha). \quad (3.14)$$

Pour obtenir la solution de l'équation (3.13) en utilisant le (LRDTM), nous pouvons transformer l'équation (3.13) en la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1+(k+2)\alpha)}{\Gamma(k\alpha+1)} \Psi_{k+2}^\alpha(x) &= \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} \Psi_k^\alpha(x) + 2\Psi_k^\alpha(x). \\ \Psi_{k+2}^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(1+(k+2)\alpha)} \left( \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} \Psi_k^\alpha(x) + 2\Psi_k^\alpha(x) \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

D'après la condition initial de (3.13) nous avons :

$$\begin{cases} \Psi_0^\alpha(x) = E_\beta(-x^\beta), \\ \Psi_1^\alpha(x) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Donc, en utilisant les équations (3.15) et (3.16), nous donnons les composants comme suit :  
pour :  $k = 0$

$$\begin{aligned} \Psi_2^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \left( \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} \Psi_0^\alpha(x) + 2\Psi_0^\alpha(x) \right), \\ &= \frac{-1}{\Gamma(2\alpha+1)} E_\beta(-x^\beta). \end{aligned}$$

pour :  $k = 1$

$$\begin{aligned} \Psi_3^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)} \left( \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} \Psi_1^\alpha(x) + 2\Psi_1^\alpha(x) \right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

pour :  $k = 2$

$$\begin{aligned} \Psi_4^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)} \left( \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} \Psi_2^\alpha(x) + 2\Psi_2^\alpha(x) \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(4\alpha+1)} E_\beta(-x^\beta), \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Psi_k^\alpha(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(2k\alpha+1)} E_\beta(-x^\beta) & \text{si : } k = 2i, i \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si : } k = 2i + 1, i \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Alors, la transformation inverse de l'ensemble des fonction  $\{\Psi_k^\alpha(x)\}_{k=0}^n$  donne la solution d'approximation suivante :

$$\tilde{\psi}_n^\alpha(x, t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \frac{t^{2k\alpha}}{\Gamma(2k\alpha+1)} E_\beta(-x^\beta). \quad (3.18)$$

à partir de (3.18) on obtient :

$$\psi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k\alpha}}{\Gamma(2k\alpha+1)} E_\beta(-x^\beta) = E_\beta(-x^\beta) \cos_\alpha(t^\alpha).$$

C'est aussi la solution exacte.

Nous représentant les solutions exactes et les solutions approchées pour  $\alpha = 0.95$  et  $n = 9$ .

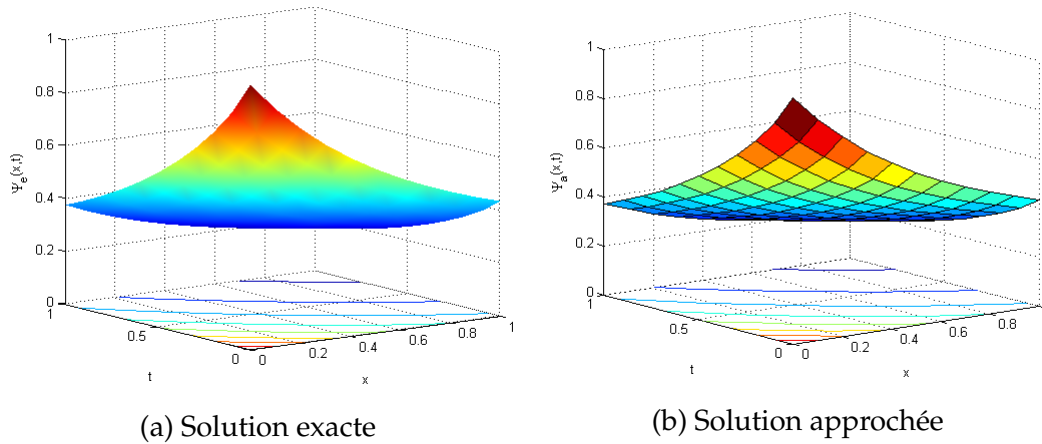


FIGURE 3.6 – Comparaison entre la solution exacte et la solution d’approximation de (3.13)

Nous représentant graphiquement la fonction d’erreur de la solution approximative pour  $n = 9$  et  $n = 14$  de le problème (3.13).

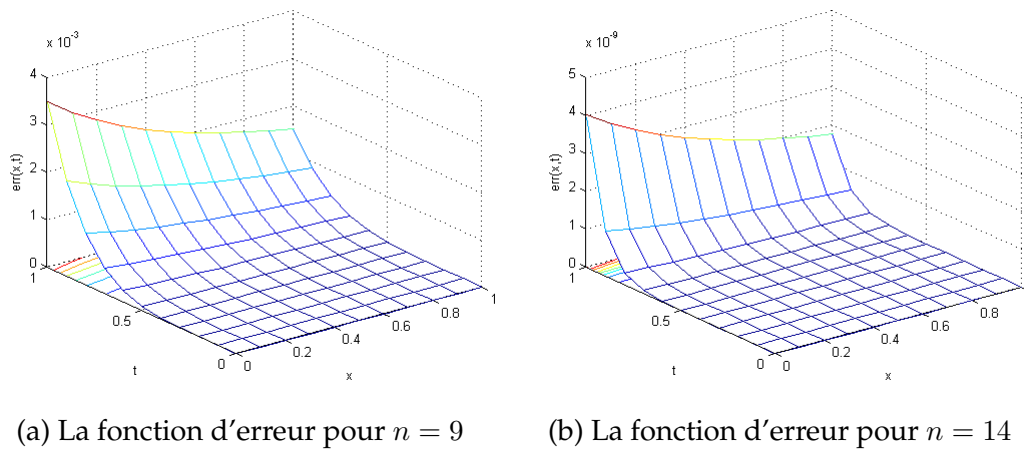


FIGURE 3.7 – La fonction d’erreur de la solution approximative de le problème (3.13)

**Exemple 3.4.** [14] Considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\alpha \psi(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) + \psi(x, t) - E_\alpha(t^\alpha), \\ \psi(x, 0) = x. \end{cases} \quad (3.19)$$

La solution exacte de (3.19) au sens local est :

$$\psi(x, t) = x E_\alpha(t^\alpha). \quad (3.20)$$

En utilisant les propriétés de base du différentiel réduit transformée tableau 1 pour le problème (3.19), on prend la relation :

$$\frac{\Gamma(1 + (k + 1)\alpha)}{\Gamma(k\alpha + 1)} \Psi_{k+1}^\alpha(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_k^\alpha(x) + \frac{\partial}{\partial x} \Psi_k^\alpha(x) + \Psi_k^\alpha(x) - \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)}.$$

$$\Psi_{k+1}^\alpha(x) = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(1 + (k+2)\alpha)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_k^\alpha(x) + \frac{\partial}{\partial x} \Psi_k^\alpha(x) + \Psi_k^\alpha(x) - \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \right). \quad (3.21)$$

D'après la condition initiale de (3.19) nous avons :

$$\Psi_0^\alpha(x) = x. \quad (3.22)$$

Donc, en utilisant les équations (3.21) et (3.22), nous donnons les composants comme suit :  
pour :  $k = 0$

$$\begin{aligned} \Psi_1^\alpha(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_0^\alpha(x) + \frac{\partial}{\partial x} \Psi_0^\alpha(x) + \Psi_0^\alpha(x) - 1 \right), \\ &= \frac{x}{\Gamma(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

pour :  $k = 1$

$$\begin{aligned} \Psi_2^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_1^\alpha(x) + \frac{\partial}{\partial x} \Psi_1^\alpha(x) + \Psi_1^\alpha(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right), \\ &= \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

pour :  $k = 2$

$$\begin{aligned} \Psi_3^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_2^\alpha(x) + \frac{\partial}{\partial x} \Psi_2^\alpha(x) + \Psi_2^\alpha(x) - \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right), \\ &= \frac{x^3}{\Gamma(3\alpha + 1)}, \end{aligned}$$

⋮

$$\Psi_k^\alpha(x) = \frac{x^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}. \quad (3.23)$$

Par conséquent, la transformation inverse de (3.23) est donnée par :

$$\tilde{\psi}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n \Psi_k^\alpha(x) t^{k\alpha} = \sum_{k=0}^n \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} x. \quad (3.24)$$

Ainsi, à partir de (3.24) la solution approchée de (3.19) obtenue par LRDTM est :

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_n(x, t), \\ &= E_\alpha(t^\alpha) x. \end{aligned}$$

C'est aussi la solution exacte.

Maintenant, nous analysons graphiquement l'itération de la LRDTM solution et la solution exacte pour  $\alpha = 0.95$ .

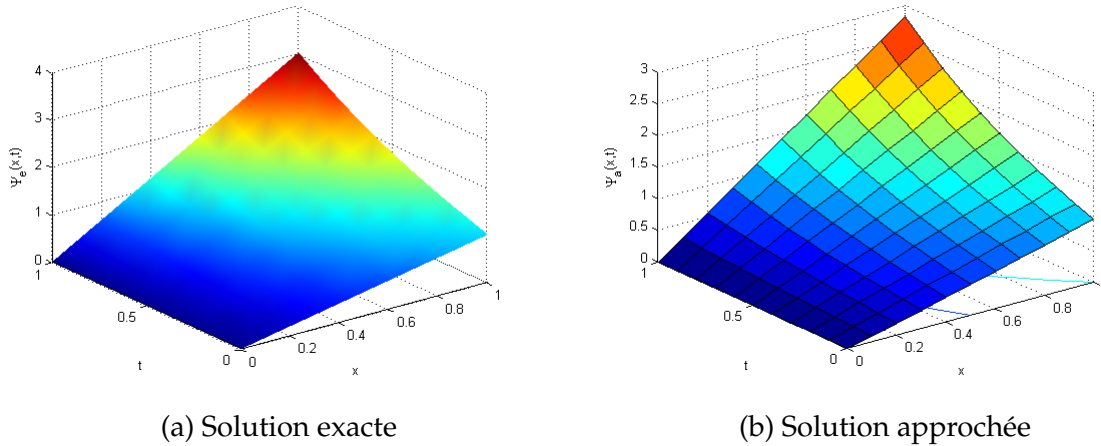


FIGURE 3.8 – Comparaison entre la solution exacte et la solution d’approximation de (3.19)

Nous représentons graphiquement la fonction d’erreur de la solution approximative pour  $n = 10$  de l’équation (3.19).

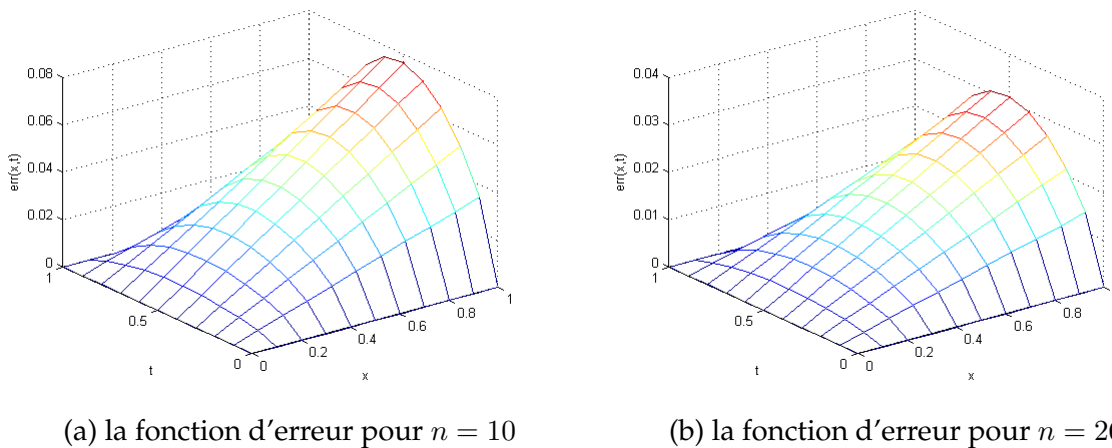


FIGURE 3.9 – La fonction d’erreur de la solution approximative de le problème (3.19)

**Exemple 3.5.** Considérons l’équation d’onde suivante :

$$\mathcal{D}_t^{2\alpha} \psi(x, t) + \mathcal{D}_x^{2\alpha} \psi(x, t) = \psi(x, t). \quad (3.25)$$

avec la condition initiale :

$$\begin{cases} \psi(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \psi(x, 0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} E_\alpha(x^\alpha). \end{cases} \quad (3.26)$$

La solution exacte de (3.25) au sens local est :

$$\psi(x, t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} E_\alpha(x^\alpha). \quad (3.27)$$

En appliquant la méthode de tram différentielle réduite fractionnaire local à l'équation (3.25), on obtient la relation d'itération suivante :

$$\frac{\Gamma((k+2)\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1)}\Psi_{k+2}^\alpha(x) + \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}\Psi_k^\alpha(x) = \Psi_k^\alpha(x).$$

$$\Psi_{k+2}^\alpha(x) = \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma((k+2)\alpha+1)}\left(\Psi_k^\alpha(x) - \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}\Psi_k^\alpha(x)\right). \quad (3.28)$$

D'après la condition initiale de (3.26) on a :

$$\begin{cases} \Psi_0^\alpha(x) = 0, \\ \Psi_1^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}E_\alpha(x^\alpha). \end{cases} \quad (3.29)$$

Donc, en utilisant les équations (3.28) et (3.29), nous donnons les composants comme suit :

Pour :  $k = 0$

$$\begin{aligned} \Psi_2^\alpha(x) &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)}\left(\Psi_0^\alpha(x) - \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}\Psi_0^\alpha(x)\right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour :  $k = 1$

$$\begin{aligned} \Psi_3^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}\left(\Psi_1^\alpha(x) - \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}\Psi_1^\alpha(x)\right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour :  $k = 2$

$$\begin{aligned} \Psi_4^\alpha(x) &= \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)}\left(\Psi_2^\alpha(x) - \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}\Psi_2^\alpha(x)\right), \\ &= 0, \end{aligned}$$

⋮

$$\Psi_k^\alpha(x) = 0, k = 2, 3, \dots$$

la transformée différentielle inverse de  $\Psi_k^\alpha(x)$  donne :

$$\tilde{\psi}_n(x, t) = \sum_{k=0}^{k=n} \Psi_k^\alpha(x) t^{k\alpha} = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}E_\alpha(x^\alpha).$$

Et par conséquent, la solution approchée de (3.25) obtenue par (LRDTM) est :

$$\psi(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_n(x, t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}E_\alpha(x^\alpha).$$

C'est aussi la solution exacte.

La solution de (3.25) pour  $\alpha = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$  est illustrée à la figure.

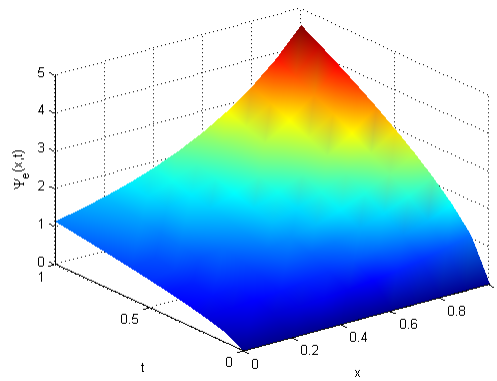


FIGURE 3.10 – La solution exacte de l'équation (3.25)

---

# Conclusion générale

---

L'objectif fondamental de ce travail est de construire les solutions approximatives d'équations différentielles à dérivées fractionnaires par appliqué la méthode de transformation différentielle réduite (**RDTM**) pour les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire par rapport au temps  $t$ .

On peut en conclure que cette méthode est très puissante et efficace pour trouver la solution semi-analytique pour l'équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire.

**(RDTM)** offre des solutions avec des composants facilement calculables en série convergente, Les résultats obtenus montrent que la méthode **(RDTM)** est précise, efficace et nécessite moins d'effort par rapport aux autres méthodes analytiques et numériques. Ce travail se déroule en deux étapes :

☞ **(CRDTM) : Méthode de transformation différentielle réduite conformable.**

Nous avons appliqué la méthode **(CRDTM)** pour des équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire. De plus, nous avons cherché des solutions exactes et approchés par des exemples données.

☞ **(LRDTM) : Méthode de transformation différentielle réduite local.**

Nous avons appliqué la méthode **(LRDTM)** pour les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire a travers des exemples choisis.

Ces deux dérivées fractionnaires, **Conformable** et **Local** sont d'une grande importance dans le domaine de calculs fractionnaire. Parce qu'ils sont considérés comme une généralisation du concept de dérivation classique.

---

# Bibliographie

---

- [1] Thabet Abdeljawad. On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279 :57–66, 2015.
- [2] Saad ABDELKEBIR. *Étude de quelques problèmes d'évolution pour des équations aux dérivées fractionnaires*. PhD thesis, Université de M'sila, 2022.
- [3] Omer Acan, Maysaa Mohamed Al Qurashi, and Dumitru Baleanu. Reduced differential transform method for solving time and space local fractional partial differential equations. *Journal of Nonlinear Sciences & Applications (JNSA)*, 10(10), 2017.
- [4] Omer Acan and Dumitru Baleanu. A new numerical technique for solving fractional partial differential equations. *arXiv preprint arXiv :1704.02575*, 2017.
- [5] Ratan Prakash Agarwal. A propos d'une note de m. pierre humbert. *CR Acad. Sci. Paris*, 236(21) :2031–2032, 1953.
- [6] Achouak BEKKAI. *Etude de quelques types d'équations différentielles fractionnaires*. PhD thesis, 2021.
- [7] Meriem Guechi. Résolution de l'équation de fitzhugh-nagumo d'ordre fractionnaire moyennant la méthode d'expansion de riccati. 2020.
- [8] Hossein Jafari, Hassan K Jassim, Seithuti P Moshokoa, Vernon M Ariyan, and Fairouz Tchier. Reduced differential transform method for partial differential equations within local fractional derivative operators. *Advances in Mechanical Engineering*, 8(4) :1687814016633013, 2016.
- [9] Ming-Jyi Jang, Chieh-Li Chen, and Yung-Chin Liu. Two-dimensional differential transform for partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 121(2-3) :261–270, 2001.
- [10] M Jneid and A Chaouk. The conformable reduced differential transform method for solving newell-whitehead-segel equation with non-integer order. *Journal of Analysis and Applications*, 2019.
- [11] Roshdi Khalil, Mohammed Al Horani, Abdelrahman Yousef, and Mohammad Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, 264 :65–70, 2014.
- [12] Anatoly Kilbas, Anna Koroleva, and Sergei Rogosin. Multi-parametric mittag-leffler functions and their extension. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 16(2) :378–404, 2013.
- [13] Aydin Kurnaz and Galip Oturanç. The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(6) :709–719, 2005.
- [14] A MOHAMMADPOUR. A weighted algorithm to solve the conformable time fractional reaction-diffusion-convection problem. *Journal of Hyperstructures*, 7(2) :135–148, 2018.

- 
- [15] ACAN Omer, Omer FİRAT, Yildiray KESKİN, and Galip OTURANC. Conformable variational iteration method. *New Trends in Mathematical Sciences*, 5(1) :172–178, 2017.
- [16] Abdelkebir Saad and Nouri Brahimi. An efficient algorithm for solving the conformable time-space fractional telegraph equations. *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, 7(3) :413–429, 2021.
- [17] Yang Xiao-Jun. Local fractional integral equation and their application. *Advances in Computer Science and its Applications (ACSA)*, 1(4), 2012.
- [18] Yang Xiaojun. Generalized sampling theorem for fractal signals. *Advances in Digital Multimedia*, 1(2) :88–92, 2012.
- [19] Xiao-Jun Yang. *Local Fractional Functional Analysis & Its Applications*. Asian Academic Publisher Limited Hong Kong, 2011.
- [20] Xiao-Jun Yang. *Advanced local fractional calculus and its applications*, 2012.
- [21] Xiao-Jun Yang. Local fractional kernel transform in fractal space and its applications. *Advances in Computational Mathematics and its Applications*, 1(2) :86–93, 2012.

## المخلص:

هدفنا في هذه المذكرة، هو البحث عن حلول شبه تحليلية للمعادلات التفاضلية الكسرية التفاضلية.

حيث نأخذ مشتق جزئي للوقت بالمفهوم المطابق والمحلي باستخدام طريقة التحويل التفاضلي المختزل (RDTM).

(CRDTM): طريقة التحويل التفاضلي المخفض المطابقة.

(LRDTM): طريقة التحويل التفاضلي المخفض المحلي.

اعتمادا على المشتق المستخدم المتعلق بالوقت  $t$ ، من خلال صيغة الحلول شبه التحليلية التي تم الحصول عليها من هذه الدراسة، نقوم بإنشاء تمثيلات رسومية لبعض الأمثلة من أجل تحديد فعالية الطريقة أم لا.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية، المشتق المحلي الكسري، المشتق الكسري المطابق، طريقة التحويل التفاضلي المخفض.

---

Notre objectif dans cette mémoire. C'est la recherche de solutions semi-analytiques d'équations différentielles à dérivées fractionnaire. Où l'on prend la dérivée pratile du temps  $t$  au sens conforme et local par l'utilisation de la méthode de transformation différentielle réduite (RDTM).

(CRDTM) : Méthode de transformation différentielle réduite conforme.

(LRDTM) : Méthode de transformation différentielle réduite local.

Selon la dérivée utilisée par rapport au temps  $t$ . A travers la formule des solutions semi-analytiques obtenues à partir de cette étude, nous créons des représentations graphiques pour certains exemples afin de préciser l'efficacité de la méthode ou non.

Mots-Clés : Équations aux dérivées partielles fractionnaires, La dérivée conforme fractionnaire, La dérivée local fractionnaire, La Méthode de transformation différentielle réduite.

---

Our goal in this memory. It is the search for semi-analytic solutions of fractional differential equations. Where we take the pratile derivative of time  $t$  in the conformable and local sense by using the method of reduced differential transformation (RDTM).

(CRDTM) : Conformable reduced differential transformation method.

(LRDTM) : Local Reduced Differential Transform Method.

Depending on the derivative used in relation to time  $t$ . Through the formula of semi-analytical solutions obtained from this study, we create graphical representations for some examples in order to specify the effectiveness of the method or not

Keywords : Fractional partial differential equations, The fractional conformable derivative, The fractional local derivative, Reduced differential transform method.