

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد بوضياف - المسيلة



ميدان: علوم المادة
فرع: الفيزياء.
تخصص: الفيزياء النظرية

كلية: العلوم.
قسم: الفيزياء.
رقم: Ph/TH/11/2022

مذكرة مقدمة لنيل شهادة الماستر أكاديمي

إعداد الطالبة: عبد المجيد زهراء

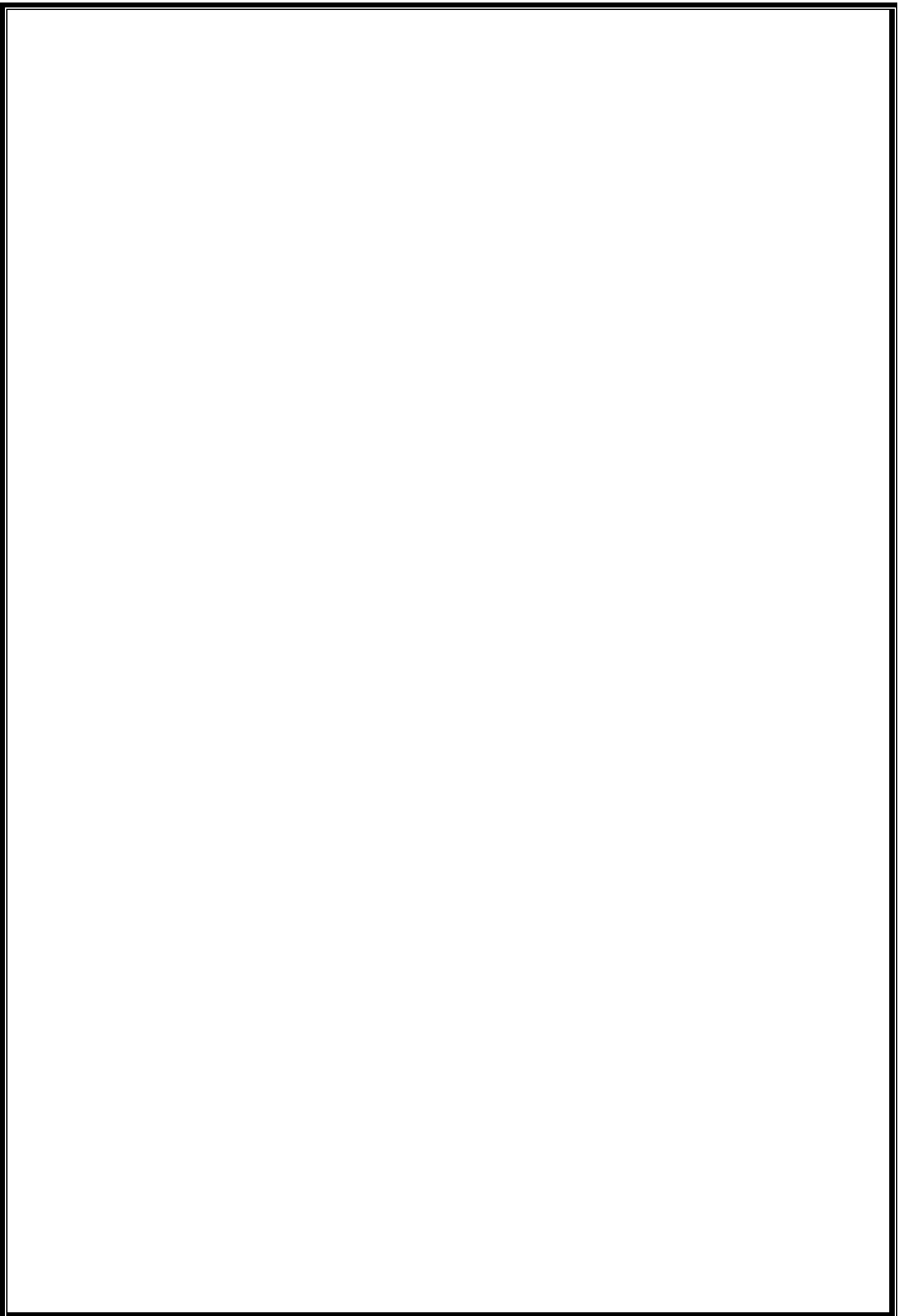
تحت عنوان

الاهتزازات الكمومية للعزم الحركي المداري الكلي لغاز فرميوني فائق
البرودة محصور بكمون هزاز توافقي متماثل المناحي دوار

تمت المناقشة يوم / 06 / 2022 أمام اللجنة المكونة من:

د. بوفراش كريم	جامعة محمد بوضياف - المسيلة	رئيسا
د. صابري يوسف	جامعة محمد بوضياف - المسيلة	ممتحنا
د. مجدل صهيب	جامعة محمد بوضياف - المسيلة	مشرفا ومقررا

السنة الجامعية: 2022/2021



جدول المحتويات

الإهداء

شكر و عرفان

مقدمة عامة 2

الفصل الاول :

دراسة هاملتوني غاز فرميوني منحل خاضع لكمون هزاز توافقي متماثل
المنحى دوار

1 . مقدمة 5

2 . وصف النظام المدروس 5

3 . اشتقاق الهاملتوني في المعلم الدوراني 6

1.3 . الأشتقاق الكلاسيكي 6

2.3 . الأشتقاق الكمومي 9

4 . التماثل بين الهاملتوني جملة مغناطيسية و هاملتوني جملة دوار 11

1.4 . هاملتوني جسيم محايد خاضع لكمون هزاز توافقي في معلم دوار 11

2.4 . هاملتوني جسيم مشحون خاضع لحقل مغناطيسي 12

3.4 . المقارنة بين هاملتوني جملة مغناطيسية و هاملتوني جملة دوار 13

الفصل الثاني :

الادوات الرياضية و الكميات الفيزيائية الضرورية للدراسة الكمومية للعزم
الحركي المداري الكلي للنظام الفزيائي المدروس

1. المقدمة 16

2. مصفوفة الكثافة لبلوخ 16

1.2 . تعريف مصفوفة الكثافة لبلوخ 16

2.2. علاقة مصفوفة الكثافة لبلوخ ببعض المقادير الفيزيائية ذات الصلة بالموضوع 18

1.2.2. تحويلات لابلاس \mathcal{L} و تحويلاته العكسية \mathcal{L}^{-1}_{μ}

18

1.1.2.2. تحويل لابلاس المعكوس لدالة القفزة Θ لهيفيزايد 19

2.2.2. العلاقة بين مصفوفة الكثافة لبلوخ و مصفوفة كثافة الجسيمات 19

3.2.2. العلاقة بين $C(r; \xi)$ و $\rho(r)$ 20

4.2.2. العلاقة بين مصفوفة $C(r; \xi)$ و عدد الجسيمات N 21

5.2.2. العلاقة بين مصفوفة الكثافة لبلوخ $C(r, r'; \xi)$ و كثافة التيار $J(r)$... 21

3.2. عبارة مصفوفة الكثافة لبلوخ $C(r, r'; \xi)$ من أجل الجملة المدروسة 21

3. طيف طاقة النظام 22

4. كثافة الجسيمات $\rho(r)$ 23

5. عبارة كثافة التيار $j(r)$ 24

الفصل الثالث :

الإهتزازات الكمومية للعزم الحركي المداري الكلي لغاز فرميوني منحل خاضل
لكمون لهزاز توافقي دوراني

1. مقدمة 27

2. عبارة القيمة المتوسطة للعزم الحركي المداري الكلي 27

3. العزم الحركي المداري الكلي للنظام الفيزيائي المدروس 29

4. الإهتزازات الكمومية للعزم الحركي المداري الكلي 33

1.4. العلاقة بين عدد الجسيمات N و الكمون الكيميائي μ 34

2.4. الدراسة البيانية للإهزازات الكمومية للعزم الحركي المداري الكلي 36

الخاتمة العامة 39

المراجع 41

الإهداء

و بعد عناءٍ كثيرٍ و جهدٍ كبيرٍ أُهدي هذا العمل

إلى صاحب السيرة العطرة و الفكر المستنير و الرجل الأبرز

في حياتي والدي " عبد المجيد الصديق "

إلى من وضعتني على طريق الحياة, و جعلتني رابطة

الجأش والدي " عبد السلام نصيرة "

إلى من شجعني على المثابرة طوال عمري

جدي الغالي " عبد السلام الحاج "

إلى من بذلوا جهدا في مساعدتي و كانوا خير سند

إخوتي كوثر , أحمد و عبد الرحيم

شكر و عرفان

أول من يشكر ويحمد آناء الليل و أطراف النهار, هو العلي القهار,
الأول و الآخر و الظاهر و الباطن الذي أغرقنا بنعمه التي لا تحصى,
فله جزيل الحمد و الثناء العظيم, هو الذي أنعم علينا إذ أرسل فينا
عبده و رسوله " محمد بن عبد الله " عليه أزكى الصلوات و أظهر
التسليم أرسله بقرآنه المبين فعلمنا ما لم نعلم و حثنا على طلب
العلم أينما وجد .

لله الحمد كله والشكر كله أن وفقنا لإنجاز هذا العمل المتواضع
و الشكر موصول لكل معلم أفادني بعلمه من أولى المراحل الدراسية
حتى هذه اللحظة

كما أرفع كلمة شكر للدكتور المشرف " مجدل صهيب " الذي
ساعدني في إنجاز مذكرتي , و أيضا أشكر كل من مد لي يد العون من
قريب أو بعيد , كما أوجه شكري لكل أساتذة قسم الفيزياء .
و في الأخير لا يسعني إلا أن أدعو الله عزوجل أن يرزقنا السداد و
التوفيق و أن يجعلنا هداة مهتدين

مقدمة عامة

مقدمة عامة

Introduction générale

إن ميدان الغازات فائقة البرودة يعتبر من بين أهم بحوث الفيزياء الحديثة، فمنذ بداية القرن العشرين والباحثون يجتهدون في محاولة التبريد لبعض المواد بغية الوصول إلى درجات حرارة منخفضة تسمح لنا بملاحظة التأثيرات الكمومية على خصائص المادة وفق التوقعات النظرية الرياضية، لكن بآت محاولاتهم في البداية بالفشل نظرا لعدم توفر الوسائل التجريبية اللازمة في ذلك الوقت.

إلا أنه مع ظهور الليزر وبفضل التقدم التقني أصبح بالإمكان الوصول إلى درجات حرارة من رتبة نانو كلفن وأقل من ذلك مقترين جدا من الصفر المطلق. علما أن النانو كلفن أقل من درجة حرارة فارمي للغازات الباردة، أي يسمح بإبراز التأثيرات الكمية على المادة بصفة مايكروسكوبية.

في هذه المذكرة سنتطرق لدراسة الاهتزازات الكمومية للعزم الحركي المداري الكلي لغاز فرميوني فائق البرودة محصور بكمون هزاز توافقي متمائل المناحي ودوار في فضاء ثنائي البعد. في الحقيقة، إن الدراسة النظرية المقدمة في هذه المذكرة تفترض أن الجملة المدروسة عبارة عن غاز عند درجة الصفر المطلق. إن هذه الوضعية، أي دراسة مجموعة من الذرات المعتدلة كهربائيا والمحصورة بكمون دوراني مشابهة فيزيائيا لدراسة مجموعة من الجسيمات المشحونة الخاضعة لحقل مغناطيسي. سنرى هذا التماثل بين النظامين بالتفصيل في هذه المذكرة. وهذه الحقيقة ستسمح لنا بالتالي أن نقول إن ظاهرة الاهتزازات الكمومية المدروسة في هذه المذكرة تحدث أيضا في الأنظمة المغناطيسية. بل في الواقع، إن هذه الظواهر الاهتزازية لمختلف المقادير الفيزيائية لوحظت أيضا على غازات الالكترونات الموجودة في الأجسام الصلبة عند إخضاعها لحقول مغناطيسية شديدة. فعند إخضاع هذا الأخير إلى حقول مغناطيسية شديدة ومتغيرة سنلاحظ اهتزاز مختلف المقادير الفيزيائية المميزة له، وهي المعروفة باسم اهتزازات de Hass-van Alphen الخاصة باهتزازات المغناطيسية، أو اهتزازات المقاومة أو اهتزازات الحرارة النوعية... إلخ. وكما هو معلوم فإن هذه الاهتزازات في الحقيقة تعود إلى تكميم مستويات طاقة النظام التي تترتب وفق ما يسمى بمستويات لانداو Niveaux de Landau وهو سلوك كمومي ينعكس بصورة مايكروسكوبية على المقادير الفيزيائية المذكورة على شكل اهتزازات كدالة في شدة الحقل المطبق. لكن التطور السريع للدراسات في ميدان الغازات فائقة البرودة (والذي لا يزال يشهد تطورا حاليا واهتماما كبيرا من طرف الباحثين) سمح بالتحقق من كثير من النظريات الفيزيائية المتعلقة بفيزياء الجسم الصلب عبر ما يمنحه من إمكانية محاكاة هذه الأجسام الصلبة من خلال التحكم في التفاعل بين ذرات الغاز وكذا درجات الحرارة غير المسبوقة.

تم تقسيم هذه المذكرة إلى مقدمة عامة وثلاثة فصول وخاتمة، حيث قدمنا في الفصل الأول وصفا للنظام الفيزيائي المعالج هنا مع تبيين ضرورة دراسته في معلم دوراني مرتبط بسرعة دوران كمون الحصر التوافقي. وفي الفصل الثاني وبعد معرفة عبارة الهاملتوني الذي يصف سلوك جسيمات الغاز (التي نعتبرها غير متفاعلة فيما بينها، أي تقريب الجسيمات المستقلة) قمنا بتحضير الإطار الرياضي وكذا تقديم النتائج الخاصة بالمقادير الفيزيائية ذات الصلة بحساب العزم الحركي المداري الكلي، ونقصد هنا مصفوفة الكثافة لبلوخ وكثافة الجسيمات المحلية وكذا تيار كثافة الاحتمال.

في الفصل الثالث نشرع في استخراج العبارة التحليلية للعزم الحركي المداري الكلي للغاز الفرميوني المنحل المدروس عبر إثبات العلاقة الأساسية التي ننطلق منها وهي التي تربط بين هذا المقدار (أي العزم الحركي) من جهة وبين كثافة الجسيمات وكثافة التيار من جهة أخرى. لنمر بعد الحصول على هذه العبارة إلى دراسة ظاهرة الاهتزازات الكمومية المميزة للأنظمة المشحونة الخاضعة للحقول المغناطيسية ورصدها في حالة الغازات الخاضعة لحقل دوراني. نشير هنا للتنبيه أننا أهملنا خلال كل هذه الدراسة الجزء المتعلق بدرجة حرية السبين لأن محل اهتمامنا و فقط الجزء المداري من العزم الحركي الكلي.

نهي هذه المذكرة بعد ذلك بخاتمة نلخص فيها أهم ما قدمناه فيها.

الفصل الأول

دراسة هاملتونبي غاز فرميونبي منحل خاضع لكمون
هزاز توافقي متماثل المناحي دوّار

دراسة هاملتوني نماز فرميوني منجل خاضع لكمون هزاز توافقي متماثل المناحي دوّار

Hamiltonien d'un gaz de fermions dégénéré soumis à un potentiel d'oscillateur harmonique isotrope tournant

1. مقدمة

إن هذا الفصل مخصص لدراسة هاملتوني غاز فرميوني فائق البرودة خاضع لكمون هزاز توافقي متماثل المناحي يدور حول محور عمودي على مستوى هذا النظام. إن دوران الكمون التوافقي يجعل من هاملتوني النظام متعلقا بالزمن مما يجعل من حل معادلة شرودينغر في معلم المخبر أمرا صعبا، ولذلك فإنه سيكون علينا العمل في المعلم الدوراني المرتبط بسرعة دوران كمون الحصر التوافقي والذي يكون فيه الهاملتوني الجديد مستقلا عن الزمن مما يسمح لنا باستغلال الحلول المستقرة لمعادلة شرودينغر. كما أن العمل ضمن المعلم الدوار يسمح لنا بمقارنة الهاملتوني الدوراني الجديد مع هاملتوني الجسيم المشحون الخاضع لحقل مغناطيسي عمودي على مستوى حركته. إن التماثل الموجود بين النظامين يسمح بالانتقال بين نتائج دراستهما بسهولة وفق بعض المتطابقات بين المقادير المميزة لكليهما (سرعة دوران، تواتر لارمور، الكمون الشعاعي، الحقل المغناطيسي، ... إلخ) والتي سنستخرجها في هذا الفصل. لذلك فإن النتائج الموجودة في هذه المذكرة والخاصة بالجملة الدورانية يمكن تعميمها على الجملة المغناطيسية أيضا مع احترام التطابق المستخرج هنا.

2. وصف النظام المدروس

إن النظام المدروس عبارة عن غاز فائق البرودة مكون من N من الذرات الفرميونية معتدلة كهربائيا كتلة كل منها m^* وغير متفاعلة فيما بينها (جسيمات مستقلة)، كما أن هذا النظام محصور بكمون $V(\mathbf{r})$ لهزاز توافقي متماثل المناحي ذو التواتر ω_0 يدور وفق المحور (Oz) بسرعة زاوية Ω حيث $\Omega = \Omega e_z$ ، نكتفي هنا بدراسة حركة الجسيمات في المستوي ثنائي البعد (Oxy). إن هاملتوني هذا النظام يكتب في معلم المخبر الثابت (\mathcal{R}_a) على النحو التالي:

$$(1-1) \quad H = \frac{1}{2m^*} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r})$$

حيث \mathbf{p} يمثل الاندفاع، بينما عبارة الكمون $V(\mathbf{r})$ هي :

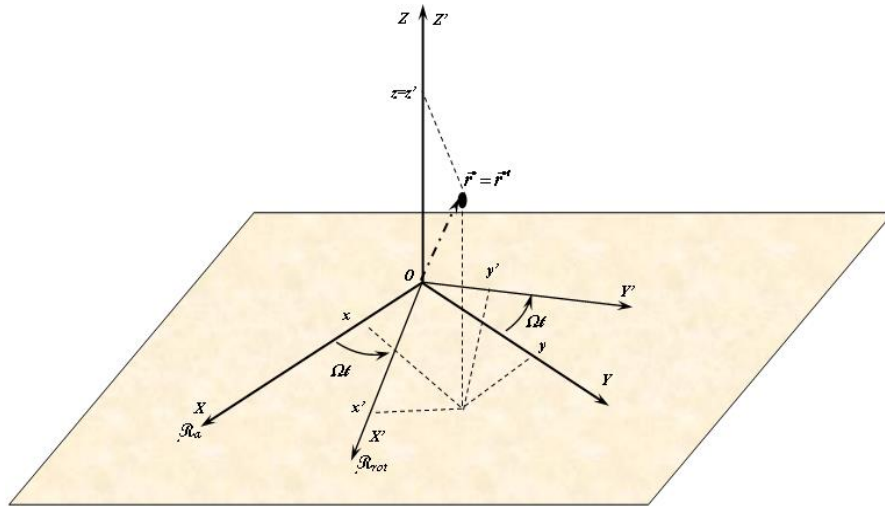
$$(2-1) \quad V(r) = \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 r^2$$

إن سرعة زاوية الدوران Ω محدودة بقيمة التردد ω_0 فيجب أن لا تتعدها أي أنه لا بد من تحقيق الشرط $\Omega \leq \omega_0$ وذلك حفاظاً على الاستقرار العام للنظام، حيث في حالة المساواة بينهما $\omega_0 = \Omega$ نكون قد وصلنا إلى السرعة الحدية للدوران. لكن يجب التأكيد من أن العلاقة (1-1) تمثل هاملتوني في المعلم الثابت، وحتى يتسنى لنا الدراسة يتوجب علينا البحث عن عبارة الهاملتوني في المعلم الدوراني وهذا ما سنقوم به في الفقرة الموالية.

3. اشتقاق الهاملتوني في المعلم الدوراني

1.3 الاشتقاق الكلاسيكي

ليكن لدينا جسيم متعادل كهربائياً خاضع لكمون $V(r)$ يدور وفق المحور (Oz) بسرعة زاوية Ω حيث $\Omega = \Omega e_z$. نعتبر أن احداثيات هذا الجسيم في المعلم المطلق (الثابت) (\mathcal{R}_a) هي (x, y, z) ولتكن (x', y', z') احداثياته في المعلم النسبي الدوراني (\mathcal{R}_{rot}) ، إلا أن كل من (\mathcal{R}_a) و (\mathcal{R}_{rot}) لهما نفس المبدأ كما يبينه الشكل أدناه.



إن العلاقة التي تربط بين الاحداثيات في المعلم المطلق (\mathcal{R}_a) و الاحداثيات في المعلم الدوراني (\mathcal{R}_{rot}) تعطى

بـ:

$$(3-1) \quad \begin{cases} x = x' \cos(\Omega t) - y' \sin(\Omega t) \\ y = y' \sin(\Omega t) + x' \cos(\Omega t) \\ z = z' \end{cases}$$

مهما يكن النظام المدروس فإن عبارة اللاغرانجي *Lagrangien* تعطى بـ:

$$(4-1) \quad \mathcal{L} = T - V$$

حيث T تمثل الطاقة الحركية بينما V تمثل الطاقة الكامنة (عبارة الكمون الذي يخضع له الجسم). إن

عبارة الطاقة الحركية T في المعلم المطلق (\mathcal{R}_a) هي:

$$(5-1) \quad T = m^*(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2$$

ويمكننا إيجادها في المعلم الدوراني (\mathcal{R}_{rot}) وذلك بالاستعانة بالتحويلات (3-1) فنجد:

$$(6-1) \quad T = \frac{1}{2} m^* [(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - 2\Omega(\dot{x}'y' - \dot{y}'x') + \Omega^2(x'^2 + y'^2)]$$

و حتى نستطيع الاشتقاق في المعلم (\mathcal{R}_{rot}) نأخذ عبارة الكمون بدلالة الاحداثيات (x', y', z') لتصبح عبارة

: *Lagrangien*

$$(7-1) \quad \mathcal{L} = T - V(x', y', z')$$

إن معادلات لاغرانج التالية:

$$(8-1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_i} = 0 \\ x'_i = x', y', z' \end{cases}$$

تسمح بالحصول على جملة المعادلات:

$$(9-1) \quad \begin{cases} m^* \ddot{x}' = -\frac{\partial V}{\partial x'} + 2m^* \Omega y' + m^* \Omega^2 x' \\ m^* \ddot{y}' = -\frac{\partial V}{\partial y'} - 2m^* \Omega x' + m^* \Omega^2 y' \\ m^* \ddot{z}' = -\frac{\partial V}{\partial z'} \end{cases}$$

وللتلخيص أكثر نكتب (9-1) على الشكل الشعاعي :

$$(10-1) \quad m^* \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = -\vec{\nabla} V - 2m^* \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} - m^* \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')$$

حيث نرى بأن كل جسيم يتحرك في معلم دوراني يخضع لقوتين أساسيتين هما :

✓ قوة الطرد المركزي والتي تتمثل في الحد : $-m^* \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')$

✓ قوة كوريوليس والتي يمثلها الحد : $-2m^* \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$

لدينا أيضا معادلة العزم القانوني $\mathbf{p}'_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'_i}$, وكذلك تعريف الهاملتوني في المعلم الدوراني (\mathcal{R}_{rot}) بدلالة

اللاجرانجي هو

$$(11-1) \quad H_{rot} = \sum_i \dot{x}'_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'_i} - \mathcal{L}$$

وبتعويض المعادلات السابقة في هذه الأخيرة وبعد القيام بالحسابات اللازمة نتوصل إلى:

$$(12-1) \quad H_{rot} = \left[\frac{1}{2m^*} (p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z) + V(x', y', z') \right] - \boldsymbol{\Omega} (x' p'_y - y' p'_x)$$

نلاحظ أن عبارة H_{rot} المحصل عليها في (12-1) تتكون من حدين, حيث الحد الأول يتمثل في :

$\left[\frac{1}{2m^*} (p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z) + V(x', y', z') \right]$ وهو مركب من كمية الحركة \mathbf{p} وكمون $V(\mathbf{r})$ لهذا

يمكننا القول أنه عبارة عن هاملتوني نسميه H_0 , بينما الجزء الثاني $\boldsymbol{\Omega} (x' p'_y - y' p'_x)$, فهو عبارة

عن جداء بين زاوية الدوران Ω و العزم الحركي المداري \mathbf{L} , حيث $\mathbf{L} = (x' p'_y - y' p'_x)$. في الأخير, وبعد

تعرفنا على كل من H_0 وكذلك عبارة العزم \mathbf{L} نكتب الهاملتوني بالصيغة التالية :

$$(13-1) \quad H_{rot} = H_0 - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}$$

باختيارنا للعمل في المعلم الدوّار ستكون كتابة المتغيرات الديناميكية للجمله بالفتحة، مثلا x' ، غير ذات معنى ولذلك سنتخلى عنها لصالح الكتابة بدون فتحة بما أننا قررنا العمل في المعلم الدوار. تمر الآن للاشتقاق الكمومي للهاميلتوني والذي سيؤدي إلى نفس الصيغة (13-1).

2.3 الاشتقاق الكمومي

إن العلاقة (1-1) تمثل هاميلتوني الجمله المدروسة المتعلق بالزمن في المعلم المطلق (\mathcal{R}_a) حيث كل من \mathbf{p} و \mathbf{r} يمثلان مؤترات شعاع الموضع وشعاع الاندفاع على الترتيب، كما أن معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن والتي تجكم ديناميكة الجمله تعطي في معلم المخبر كما يلي:

$$(14-1) \quad i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H|\Psi\rangle$$

إن المرور إلى المعلم الدوّار يتم بتطبيق مؤثر الدوران حول المحور Oz :

$$(15-1) \quad \hat{R}_z(t) = \exp\left[i \frac{(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L})t}{\hbar}\right]$$

والذي يمثل دوراننا موضعيا خلال الزمن بالزاوية $\theta = \Omega t$ (transformation passive)¹. والمؤثر \mathbf{L} ما هو إلا عبارة عن العزم الحركي المداري والذي تتمثل عبارته في الجداء الشعاعي $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ، ومنه يمكننا تعريف $\hat{R}_z(t)$ على أنه مؤثر يعمل على تحويل شعاع الحالة $|\Psi\rangle$ الذي يصف حالة الجمله في المعلم المطلق (\mathcal{R}_a) إلى شعاع حالة جديد $|\Psi_{rot}\rangle$ الذي يصفها في المعلم الدوراني (\mathcal{R}_{rot})، ونكتب:

$$(16-1) \quad |\Psi_{rot}\rangle = \hat{R}_z(t)|\Psi\rangle = \exp(i(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L})t/\hbar) |\Psi\rangle$$

أو بطريقة عكسية:

$$(17-1) \quad |\Psi\rangle = \hat{R}_z^\dagger(t)|\Psi_{rot}\rangle = \exp(-i(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L})t/\hbar)|\Psi_{rot}\rangle$$

و بتعويض عبارة $|\Psi\rangle$ الجديدة (17-1) في معادلة شرودينغر (14-1) نحصل على:

$$(18-1) \quad H \exp\left(\frac{-i\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right) |\Psi_{rot}\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp\left(\frac{-i\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right) |\Psi_{rot}\rangle \right]$$

¹ المعاكس للتحويل الفعال transformation active والذي يمثله المؤثر المرافق للمؤثر (15-1).

باشتقاق الطرف الثاني نجد:

$$(19-1) \quad \begin{aligned} & H \exp\left(\frac{-i\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right) |\Psi_{rot}\rangle \\ &= (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}) \exp\left(\frac{-i\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right) |\Psi_{rot}\rangle \\ &+ \exp\left(\frac{-i\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_{rot}\rangle \end{aligned}$$

إن الحد $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}$ ينتج من التعلّق الزمني لمؤثر الدوران $\hat{R}_z(t)$. وبما أن هذا الأخير مؤثر واحد² فإننا نضرب الآن طرفي المعادلة (19-1) في $\exp\left(i\frac{\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right)$ فنجد:

$$(20-1) \quad \begin{aligned} & \exp\left(\frac{i\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right) H \exp\left(\frac{-i\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right) |\Psi_{rot}\rangle = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L} |\Psi_{rot}\rangle \\ &+ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_{rot}\rangle \end{aligned}$$

والتي يمكن أن توضع على الشكل التالي

$$(21-1) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_{rot}\rangle = \left[\exp\left(\frac{i\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right) H \exp\left(\frac{-i\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right) - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L} \right] |\Psi_{rot}\rangle$$

وبالمطابقة مع الشكل العام لمعادلة شرودينغر نلاحظ أن الطرف الأيسر من (21-1) يمثل هاميلتوني النظام في المعلم الدوّار (\mathcal{R}_{rot}) ونكتب:

$$(22-1) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_{rot}\rangle = H_{rot} |\Psi_{rot}\rangle$$

حيث:

$$(23-1) \quad H_{rot} = \exp\left(\frac{i\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right) H \exp\left(\frac{-i\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} t\right) - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}$$

يجب علينا الآن معرفة كيفية تحويل الهاميلتوني H بواسطة مؤثر الدوران، أي التحويل $\hat{R}_z(t) H \hat{R}_z^+(t)$. بالعودة إلى العبارة (1-1) للهاميلتوني \hat{H} في المعلم (\mathcal{R}_a) فإن:

$$(24-1) \quad \hat{R}_z(t) H \hat{R}_z^+(t) = \hat{R}_z(t) \mathbf{p}^2 \hat{R}_z^+(t) + \hat{R}_z(t) V(\mathbf{r}) \hat{R}_z^+(t)$$

² Opérateur unitaire

إن المؤثر السلي³ \mathbf{p}^2 يتبادل مع مؤثر العزم الحركي، ولذلك فهو يبقى محفوظ بالتحويلات الدورانية
 $\hat{R}_z(t)\mathbf{p}^2\hat{R}_z^+(t) = \mathbf{p}^2$ ، على عكس الكمون الذي نجده كالتالي: $\hat{R}_z(t)V(\mathbf{r})\hat{R}_z^+(t) = V(\mathbf{r}')$ ، حيث \mathbf{r}'
 يمثل شعاع الموضع في المعلم الدوراني (\mathcal{R}_{rot}) . إذن يمكننا القول أن تحويل الهاملتوني \hat{H} من المعلم المطلق
 (\mathcal{R}_a) الى المعلم (\mathcal{R}_{rot}) بفعل المؤثر $\hat{R}_z(t)$ يعطينا نفس الصيغة للهاملتوني \hat{H} بمعنى أنه يبقى عبارة عن
 هاملتوني ولا تتغير ماهيته لكن بدلالة المتغيرات النسبية للمعلم الجديد (\mathcal{R}_{rot}) ، الآن نرسم للهاملتوني الجديد
 H_0 مثل ما سميناه في الاشتقاق الكلاسيكي لتصبح عبارة الهاملتوني الدوراني من الشكل:

$$(25-1) \quad H_{rot} = H_0 - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}$$

نلاحظ إذن من خلال (13-1) (الاشتقاق الكلاسيكي) أو من خلال (25-1) (الاشتقاق الكمومي) أن الجسم
 يتحسس وجود الحد الإضافي $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}$ تحت تأثير الدوران.

4. التماثل بين هاملتوني جملة مغناطيسية و هاملتوني جملة دوارة

الهدف من هذه الفقرة هو تحديد وجه التشابه بين عبارة الهاملتوني لجسيم محايد (متعادل كهربائيا)
 محصور بكمون $V(\mathbf{r})$ يدور حول المحور (Oz) بسرعة زاوية $\mathbf{\Omega} = \Omega \cdot \mathbf{e}_z$ ، و هاملتوني جسيم مشحون
 بشحنة q خاضع لحقل مغناطيسي \mathbf{B} موجه نحو نفس اتجاه الدوران السابق (Oz) محصور بكمون سلمي
 نعبر عنه ب $V_{mag}(\mathbf{r})$ ذو التردد ω_{osc} ، وحتى نصل الى الهدف المطلوب لا بد من دراسة هاملتوني الجسيم
 المحايد الذي يتعلق بالقيم $V(\mathbf{r})$ و $\mathbf{\Omega}$ ، وكذلك ايجاد هاملتوني الجسيم المشحون الذي يتعلق بالقيم $V_{mag}(\mathbf{r})$
 و \mathbf{B} .

1.4 هاملتوني جسيم محايد خاضع لكمون هزاز توافقى في معلم دوار

بالنظر إلى العلاقة (25-1) والتي تعبر عن الهاملتوني في المعلم الدوار، وبتعويض قيمتي كل من H_0 و \mathbf{L} يمكننا
 إذن صياغة H_{rot} على النحو التالي:

$$(26-1) \quad H_{rot} = \underbrace{\frac{1}{2m^*}\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}m^*\omega_0^2\mathbf{r}^2}_{H_0} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}$$

حيث أن كمون الهزاز التوافقي متماثل المناحي هو

$$(27-1) \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 \mathbf{r}^2$$

وبما أن $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ فإنه يمكن أن نكتب (26-1) كما يلي:

$$(28-1) \quad H_{\text{rot}} = \frac{1}{2m^*} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 \mathbf{r}^2 - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

ولغرض المطابقة مع شكل هاملتوني الجسيم المشحون الخاضع لحقل مغناطيسي، نضع العبارة (28-1) تحت الشكل التالي:

$$(29-1) \quad H_{\text{rot}} = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - m^*(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}))^2 + \frac{1}{2} m^* (\omega_0^2 - \Omega^2) \mathbf{r}^2$$

بناء على العبارتين (26-1) و (29-1) سنقوم بدراسة التماثل المغناطيسي - الدوراني.

2.4 هاملتوني جسيم مشحون خاضع لحقل مغناطيسي

إذا افترضنا أنه لدينا جسيم ذو الكتلة m^* والشحنة q خاضع لحقل مغناطيسي \mathbf{B} ثابت، و محصور بكمون هزاز توافقي متماثل المناحي نرمز لتردده ب ω_{osc} . كما نفرض أن هذا الجسيم محصور في المستوي (Oxy) وأن الحقل \mathbf{B} متعامد معه، أي أنه متجه نحو المحور (Oz) ، فنكتب إذن: $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$. أن هاملتوني هذا الجسيم يعطى بالعلاقة التالية:

$$(30-1) \quad H_{\text{mag}} = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_{osc}^2 \mathbf{r}^2$$

علما أن \mathbf{A} هو الكمون الشعاعي المرتبط بالحقل \mathbf{B} حيث $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، وبما أن الحقل المغناطيسي ثابت فإنه يمكن أن نأخذ الشكل التالي للكون الشعاعي:

$$(31-1) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})$$

إن المؤثر الشعاعي \mathbf{A} يتبادل مع مؤثر الاندفاع \mathbf{p} ، أي $(\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p}\mathbf{A})$ ، وباستخدام هذه الحقيقة مع

عبارة الكمون الشعاعي (31-1) فإنه يمكن أن نكتب الهاملتوني المغناطيسي كما يلي:

$$(32-1) \quad \mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p}\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})\mathbf{p} = \frac{1}{2} \mathbf{B}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} B \cdot L_z$$

حيث \mathbf{L} يمثل العزم الحركي المداري الكلي و L_z هو الاسقاط الشعاعي له على المحور (Oz) . من جهة

أخرى، يمكن أن نجد قيمة A^2 بتربيع العلاقة (31-1) التي تعطينا:

$$(33-1) \quad A^2 = \frac{1}{4} \mathbf{B}^2 r^2$$

بتعويض كل من (32-1) و (33-1) في (30-1) نجد العبارة التالية للهاملتوني المغناطيسي:

$$(34-1) \quad H_{\text{mag}} = \frac{1}{2m^*} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m^* r^2 (\omega_{\text{osc}}^2 + \omega_L^2) - \omega_L L_z$$

حيث $\omega_L = \frac{qB}{2m^*}$ هو تواتر لارمور⁴. فإذا وضعنا:

$$(35-1) \quad \Omega_{\text{mag}} = \sqrt{(\omega_{\text{osc}}^2 + \omega_L^2)}$$

فإن الهاملتوني المغناطيسي (34-1) يأخذ الشكل التالي:

$$(36-1) \quad H_{\text{mag}} = \frac{1}{2m^*} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m^* r^2 \Omega_{\text{mag}}^2 - \omega_L L_z$$

والذي يظهر منذ الآن التشابه الموجود بين النظامين الدوراني والمغناطيسي.

3.4 المقارنة بين هاملتوني جملة مغناطيسية و هاملتوني جملة دوارة

بالنظر إلى عبارة هاملتوني الجملة المدروسة (29-1) و عبارة الهاملتوني لجملة مغناطيسية (30-1) يمكننا

استخراج المتطابقة الأولى التالية:

$$(37-1) \quad q \cdot \mathbf{A} \equiv m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{A} \equiv \frac{m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{q}$$

أي أن الشعاع \mathbf{A} في الجملة المغناطيسية له نفس الدور الذي تقوم به العبارة $\left(\frac{m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{q} \right)$ في الجملة

الدوارة، ولإيجاد العنصر الذي يوافق شعاع الحقل المغناطيسي \mathbf{B} في الجملة الدوارة نعوض قيمة \mathbf{A} المعطاة

من خلال العبارة (31-1) في (37-1) فننتحصل على:

$$(38-1) \quad \mathbf{B} \equiv \frac{2m^* \boldsymbol{\Omega}}{q}$$

⁴ Fréquence de Larmor

كما نرى من جهة أخرى أن:

$$(39-1) \quad \omega_{osc}^2 \equiv \omega_0^2 - \Omega^2 \Rightarrow \omega_{osc} \equiv \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

كما أن المقارنة بين الصيغتين (26-1) و (36-1) تؤدي إلى التطابق التالي بين التواترات:

$$(40.0) \quad \Omega \equiv \omega_L$$

إن الحالة الحدية التي توافقت سرعة الدوران الحرجة $\omega_0 = \Omega$ توافقت حالة تطبيق الحقل المغناطيسي الشديد حيث يكون $\omega_{osc} \gg \omega_L$ ، أي $\omega_L \approx \Omega_{mag}$ ، وبالتالي نجد

$$(41-1) \quad \Omega_{mag} = \sqrt{(\omega_{osc}^2 + \omega_L^2)} \approx \omega_L \equiv \Omega = \omega_0$$

إن هذه الحالة الحدية مثيرة جداً للاهتمام نظراً لما تتضمنه من ظواهر فيزيائية مهمة جداً. نقصد هنا اهتزازات الكميات الفيزيائية المختلفة بدلالة شدة الحقل المغناطيس المطبق على الجملة تحت درجات حرارة منخفضة جداً (أو ما يقابلها في حالة النظام الدوراني، اهتزاز المقادير الفيزيائية اعتماداً على سرعة الدوران الفائقة). إن هذه التذبذبات ترتبط في المقام الأول بتكميم مستويات الطاقة في النظام كما سنرى لاحقاً في هذه المذكرة. لذلك فتشكّل مستويات لاندواو شديدة الانحلال وامتلاؤها بجزيئات النظام عند درجات حرارة منخفضة للغاية هي المسؤولة عن هذه السلوك الاهتزازي للكميات الفيزيائية المميزة للنظام.

بدراستنا للتماثل بين النظامين المغناطيسي والدوراني، مع الأخذ بعين الاعتبار مختلف التطابقات التي بيّناها سابقاً، يمكن أن ننقل نتائج الدراسة عن أحدهما إلى النظام الآخر مع احترام المتطابقات المذكورة فقط. لذلك فكل ما سنقوله عن الاهتزازات الكمومية للنظام الدوراني المدروس في هذه المذكرة يمكن إسقاطه على النظام المغناطيسي المكافئ له.

الفصل الثاني

الأدوات الرياضية والكميات الفيزيائية الضرورية
للداسة الكمومية للعزم الحركي المداري الكلي
للنظام الفيزيائي المدروس

الأدوات الرياضية والكميات الفيزيائية الضرورية للدراسة الكمومية
للعزم الحركي المداري الكلي للنظام الفيزيائي المدروس

Outils mathématiques et grandeurs physique nécessaire à
l'étude quantique du moment cinétique orbital total du
système physique étudié

1. مقدمة

سنعالج في هذا الفصل الإطار الرياضي وكذا المقادير الفيزيائية المهمة ذات الصلة الوثيقة بموضوع دراستنا. وهذه الأداة الرياضية هي التي نسميها مصفوفة الكثافة لبلوخ (matrice densité de Bloch) والتي نرمز لها بـ $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ حيث أن ξ هو عدد مركب جزؤه الحقيقي موجب. إن استخدام هذه المقاربة المعتمدة على مصفوفة بلوخ في دراسة الخواص التارموديناميكية أظهر قدرتها الحسابية الكبيرة من خلال علاقاتها بمختلف الكميات الفيزيائية للنظام مثل كثافة الجسيمات وكثافة التيار. في الحقيقة، إن أهمية معرفة هذه المصفوفة تكمن في أنها تمكننا من الاستغناء عن البحث عن حلول معادلة شرودينغر والتي تكون أحيانا صعبة الإيجاد، وتؤدي في المقابل إلى اشتقاق عبارات تحليلية دقيقة لهذه الكميات الفيزيائية مثل ما هو الحال بالنسبة للكثافة المحلية للجسيمات وكثافة توزيع تيار الجسيمات (أو التيار الكهربائي إن كانت الجسيمات مشحونة)، كما سنرى في الفصل القادم أيضا أن معرفة عبارة عناصر هذه المصفوفة سيسمح لنا بإيجاد العبارة التحليلية الدقيقة للعزم الحركي المداري الكلي للنظام عبر معرفة كثافة التيار والكثافة الجسيمات المحلية المرتبطان بمصفوفة بلوخ.

2. مصفوفة الكثافة لبلوخ $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$

1.2 تعريف مصفوفة الكثافة لبلوخ

قدمنا في الفصل السابق أن النظام المدروس عبارة عن غاز فرميوني فائق البرودة يتكون من N جسيمة مستقلة (غير متفاعلة فيما بينها) خاضع لكمون هزاز توافقي دوراني. نريد أن نقدم هنا الأداة الرياضية التي سنستخدمها في دراسة الخصائص الإحصائية لهذا النظام الفيزيائي والتي هي مصفوفة الكثافة لبلوخ¹ $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ ، والتي ليست إلا التمثيل المصفوفي للمؤثر:

¹Matrice densité de Bloch

$$(1.2) \quad C = \exp(-\xi H)$$

في تمثيل الموضع $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ حيث إن H يمثل هاملتوني النظام بينما ξ هو عدد مركب جزؤه الحقيقي موجب. تكتب عناصر هذه المصفوفة في تمثيل الموضع كالتالي:

$$(2.2) \quad C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = \langle \mathbf{r} | \exp(-\xi H) | \mathbf{r}' \rangle$$

من أجل ربط مصفوفة الكثافة لبلوخ ببعض المقادير الفيزيائية ذات الصلة بالموضوع، لا بد من كتابتها في القاعدة $\{|\varphi_i\rangle\}$ المكونة من الأشعة الذاتية لهاملتوني النظام H والتي تحقق معادلة شرودينغر التالية:

$$(3.2) \quad H|\varphi_i\rangle = E_i|\varphi_i\rangle$$

كما يجب الإشارة إلى أن E_i هي قيم الطاقة الذاتية الموافقة لهاملتوني H ، بينما الحرف i في شعاع الحالة $|\varphi_i\rangle$ يشير إلى كل الأعداد الكمية المميزة للجمل المدروسة. ففي حالة نظام ذو بعدين (وهذا ما سنقوم بدراسته هنا) سيكون لدينا اثنين من درجات الحرية (باهمال سبين الجسيم) ويكون إذن $|i\rangle = |n, m\rangle$. ان علاقة الانغلاق في القاعدة $\{|\varphi_i\rangle\}$ تعطى ب:

$$(4.2) \quad \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \mathbb{I}$$

حيث \mathbb{I} يعبر عن مصفوفة الوحدة، فبإدخال علاقة الانغلاق (4.2) على مصفوفة الكثافة لبلوخ (2.2) نجد:

$$(5.2) \quad C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = \sum_{i,j} \langle \mathbf{r} | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \exp(-\xi H) | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j | \mathbf{r}' \rangle$$

واعتمادا على المعادلة (3.2) فإنه يمكننا تعويض عبارة تأثير الهاملتوني على أشعته الذاتية بالقيم الذاتية له والتي تتمثل في قيم الطاقة، فنكتب:

$$(6.2) \quad \exp(-\xi H) |\varphi_j\rangle = \exp(-\xi E_j) |\varphi_j\rangle$$

وباستخدام علاقة التعامد والتقنين لأشعة الحالة $\{|\varphi_j\rangle\}$:

$$(7.2) \quad \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \int \varphi_i^*(\mathbf{r}) \varphi_j(\mathbf{r}) = \delta_{ij}$$

فإنه يمكننا كتابة (5.2) على النحو الآتي:

$$(8.2) \quad C(\mathbf{r}, \mathbf{r}' ; \xi) = \sum_i \varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_i^*(\mathbf{r}') \exp(-\xi E_i)$$

وبما أننا ذكرنا سابقا أن $|i\rangle = |n, m\rangle$ فإننا نستطيع صياغة $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}' ; \xi)$ على الشكل :

$$(9.2) \quad C(\mathbf{r}, \mathbf{r}' ; \xi) = \sum_{n,m} \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}') \exp(-\xi E_{nm})$$

ومن أجل الحصول على العناصر القطرية للمصفوفة $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}' ; \xi)$ نضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ في العبارة (9.2) فنجد :

$$(10.2) \quad C(\mathbf{r} ; \xi) = \sum_{n,m} \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}) \exp(-\xi E_{nm})$$

نشير أيضا إلى نتيجة مهمة تنتج من شرط تقنين دالة الموجة $\varphi_i(\mathbf{r})$ الذي يسمح لنا بالوصول إلى النتيجة التالية:

$$(11.2) \quad \begin{aligned} \int C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r} &= \sum_i \exp(-\xi E_i) \left(\int \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}) \right) \\ &= \sum_{n,m} \exp(-\xi E_{nm}) \end{aligned}$$

وهذه النتيجة الأخيرة سنحتاجها لاحقا عند البحث على طيف الطاقة للنظام المدروس.

2.2 علاقة مصفوفة الكثافة لبلوخ ببعض المقادير الفيزيائية ذات الصلة بالموضوع

قبل البحث عن العلاقات بين عناصر مصفوفة الكثافة لبلوخ وبعض المقادير الفيزيائية نود أولا التذكير

بتحويلات لابلاس وتحويلاته العكسية وذلك كي يتسنى لنا اشتقاق بعض العلاقات ببساطة

1.2.2 تحويلات لابلاس \mathcal{L} وتحويلاته العكسية \mathcal{L}^{-1}

إن تحويل لابلاس للدالة $f(\mu)$ نعبّر عنه بـ $\mathcal{L}\{f(\mu)\}$ وهو عبارة عن تكامل تعطى قيمته ب :

$$(12.2) \quad \mathcal{L}\{f(\mu)\} = F(\xi) = \int_0^{\infty} \exp(-\xi\mu) f(\mu) d\mu$$

مع العلم أن الجزء الحقيقي للعدد المركب ξ موجب . أما تحويل لابلاس العكسي \mathcal{L}^{-1} فهو :

$$(13.2) \quad \mathcal{L}_\mu^{-1}\{F(\xi)\} = f(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\xi) \exp(\xi\mu) d\xi$$

حيث c عدد حقيقي أكبر من الجزء الحقيقي لكل نقاط التفرد للدالة $F(\xi)$. و للتوضيح أكثر ندرس المثال في الفقرة التالية.

1.1.2.2 تحويل لابلاس المعكوس لدالة القفزة Θ لهيفيزايد Heaviside

نعلم أن دالة القفزة لهيفيزايد تعرف ب :

$$(14.2) \quad \Theta(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

الآن نعرف دالة القفزة لهيفيزايد من أجل الفرق $(\mu - E_{nm})$, حيث μ يمثل الكمون الكيميائي أو ما يسمى بطاقة فارمي عند درجة حرارة منعدمة $T = 0 K^\circ$, أما E_{nm} فتمثل طاقة الجملة لأننا سنحتاجها في دراستنا لاحقاً .

$$(15.2) \quad \Theta(\mu - E_{nm}) = \begin{cases} 1 & , (\mu - E_{nm}) > 0 \Rightarrow \mu > E_{nm} \\ 0 & , (\mu - E_{nm}) \leq 0 \Rightarrow \mu \leq E_{nm} \end{cases}$$

بأخذنا للدالة $F(\xi) = \frac{\exp(-\xi E_{nm})}{\xi}$, فإن تحويل لابلاس المعكوس للدالة $\Theta(\mu - E_{nm})$ يكتب على الشكل :

$$(16.2) \quad \begin{aligned} \Theta(\mu - E_{nm}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(\xi(\mu - E_{nm}))}{\xi} d\xi \\ &= \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\xi E_{nm})}{\xi} \right\} \end{aligned}$$

و μ يمثل مستوى فارمي، أعلى مستوى مشغول من طرف جسيمات النظام.

2.2.2 العلاقة بين مصفوفة الكثافة لبلوخ ومصفوفة كثافة الجسيمات:

إن مصفوفة كثافة الجسيمات $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$ ترتبط بمعظم المقادير الفيزيائية المميزة للأنظمة ذات N جسيم عموماً وتعطى عبارتها من أجل نظام مكون من غاز فرميوني ثنائي البعد عند درجة حرارة $T = 0K^\circ$ كما يلي :

$$(17.2) \quad \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu) = \sum_{n,m} \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}') \Theta(\mu - E_{nm})$$

علما أن μ هو الكمون الكيميائي للنظام المعطى عند درجة حرارة $T = 0K^\circ$ بمعنى أنه يعبر عن طاقة مستوى فيرمي , بينما قمنا بإدخال دالة القفزة لهيفيزايد $\Theta(\mu - E_{nm})$ في المجموع أعلاه (17.2) من أجل احتساب الحالات المشغولة فقط التي طاقتها أقل أو تساوي طاقة فيرمي μ .

بالعودة الى العلاقة (16.2) نلاحظ أنه يمكننا الاستفادة من تحويل لابلاس لدالة القفزة لهيفيزايد فنكتب :

$$(18.2) \quad \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu) = \sum_{n,m} \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}') \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\xi E_{nm})}{\xi} \right\}$$

والتي يمكن أيضا كتابتها على الصورة التالية:

$$(19.2) \quad \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[\frac{1}{\xi} \sum_{n,m} \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}') \exp(-\xi E_{nm}) \right]$$

وباستعمال العبارة (10.2) يمكننا استنتاج العلاقة بين مصفوفة الكثافة للجسيمات $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$ ومصفوفة

الكثافة لبلوخ $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ وهي :

$$(20.2) \quad \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[\frac{1}{\xi} C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) \right]$$

إذن , بمعرفة $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ يمكننا إيجاد عبارة كثافة الجسيمات $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$.

3.2.2 العلاقة بين $\rho(\mathbf{r})$ و $C(\mathbf{r}; \xi)$

تعرف كثافة الجسيمات المحلية $\rho(\mathbf{r})$ بأنها العناصر القطرية لمصفوفة كثافة الجسيمات

$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$, فنحصل عليها بوضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ أي أن :

$$(21.2) \quad \begin{cases} \rho(\mathbf{r}; \mu) = \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \\ C(\mathbf{r}; \xi) = C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \end{cases}$$

وبالنظر الى (20.2) يمكن أن نكتب :

$$(22.2) \quad \rho(\mathbf{r}; \mu) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[\frac{1}{\xi} C(\mathbf{r}; \xi) \right]$$

إن كثافة الجسيمات المحلية $\rho(r)$ مرتبطة بالعدد الكلي للجسيمات N بواسطة شرط التقنين الذي يتم عبر مكاملة الكثافة المحلية $\rho(r)$ على كل الفضاء الفيزيائي المدروس، أي:

$$(23.2) \quad \int \rho(r) dr = N$$

4.2.2 العلاقة بين مصفوفة $C(r; \xi)$ وعدد الجسيمات N

بتعويض عبارة كثافة الجسيمات المحلية الممثلة بالعبارة (22.2) في العلاقة (23.2) نجد :

$$(24.2) \quad N = \int \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[\frac{1}{\xi} C(r; \xi) \right] dr = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \int C(r; \xi) dr \right\}$$

وبالنظر إلى العلاقتين (11.2) و (16.2) نجد أن:

$$(25.2) \quad N = \sum_{n,m} \Theta(\mu - E_{nm})$$

5.2.2 العلاقة بين مصفوفة الكثافة لبلوخ $(r, r'; \xi)$ وكثافة التيار $J(r)$

تعطى عبارة كثافة التيار $J(r)$ بدلالة مصفوفة كثافة الجسيمات $\rho(r, r'; \mu)$ بالعلاقة التالية :

$$(26.2) \quad J(r) = \frac{\hbar}{2m^*i} [(\nabla_r - \nabla_{r'})\rho(r, r'; \mu)]_{r=r'}$$

و بإدراج العلاقة (20.2) مباشرة في (26.2) نحصل على عبارة كثافة التيار بدلالة مصفوفة الكثافة لبلوخ و هي:

$$(27.2) \quad J(r) = \frac{\hbar}{2m^*i} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} [(\nabla_r - \nabla_{r'})C(r, r'; \xi)]_{r=r'} \right\}$$

3.2 عبارة مصفوفة الكثافة لبلوخ $C(r, r'; \xi)$ من أجل الجملة المدروسة :

يبدو من خلال العبارة (10.2) أن تحديد العبارة التحليلية للعناصر المصفوفية $C(r, r'; \xi)$ يتطلب منا معرفة أشعة الحالة φ_{nm} و القيم الذاتية المرافقة لها E_{nm} , لكن هذه الطريقة ليست ضرورية عند دراسة كثير من الأنظمة الفيزيائية، فقد تم استخراج عبارة هذه العناصر المصفوفية بطرق رياضية أخرى دون اللجوء إلى حل معادلة شرودينغر، مع استخدام الشرطين التاليين:

$$(28.2) \quad \begin{cases} HC(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = \frac{-\partial C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)}{\partial \xi} \\ C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{cases}$$

وبشكل خاص، فمن أجل النظام محل الاهتمام في هذه المذكرة فإننا نذكر بأن عبارة الهاملتوني المدروس هي :

$$(29.2) \quad H = \frac{1}{2m^*} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 \mathbf{r}^2 - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}$$

والذي توافقه العبارة التحليلية التالية لمصفوفة الكثافة لبلوخ []:

$$(30.2) \quad \begin{aligned} C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) &= \frac{m^* \omega_0}{2\pi \hbar \sinh(\xi \hbar \omega_0)} \exp \left[\frac{-im^* \omega_0 \sinh(\xi \hbar \Omega)}{\hbar \sinh(\xi \hbar \omega_0)} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') e_z \right] \\ &\times \exp \left[\frac{-m^* \omega_0 \sinh \left(\frac{\xi \hbar (\omega_0 + \Omega)}{2} \right) \sinh \left(\frac{\xi \hbar (\omega_0 - \Omega)}{2} \right)}{2\hbar \sinh(\xi \hbar \omega_0)} (\mathbf{r} + \mathbf{r}')^2 \right] \\ &\times \exp \left[\frac{-m^* \omega_0 \cosh \left(\frac{\xi \hbar (\omega_0 + \Omega)}{2} \right) \cosh \left(\frac{\xi \hbar (\omega_0 - \Omega)}{2} \right)}{2\hbar \sinh(\xi \hbar \omega_0)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \right] \end{aligned}$$

كما يجب الإشارة إلى أن العناصر القطرية لهذه المصفوفة نجدها بوضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ، فنحصل على العبارة $C(\mathbf{r}, \xi)$

الآتية:

$$(31.2) \quad C(\mathbf{r}; \xi) = \frac{m^* \omega_0}{2\pi \hbar \sinh(\xi \hbar \omega_0)} \exp \left[\frac{-m^* \omega_0}{\hbar} \left(\coth(\xi \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \mathbf{r}^2 \right]$$

3. طيف طاقة النظام

من بين فوائد معرفة عناصر مصفوفة الكثافة لبلوخ أنها تساعدنا في إيجاد قيم طيف طاقة النظام

E_{nm} بدون الرجوع لحلول معادلة شرودينجر، وذلك بفضل العلاقة (11.2) التي تربط بين قيم الطاقة و

العناصر القطرية لمصفوفة الكثافة لبلوخ. فإذا أخذنا العبارة (31.2) العناصر للمصفوفة $C(\mathbf{r}; \xi)$ وقمنا

بإجراء المكاملة على كامل فضاء الموضع ذي البعدين فإننا نجد بالاستعانة بالتكامل الآتي:

$$(32.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-at^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

أن:

$$(33.2) \quad \int C(\mathbf{r}; \xi) dr = \frac{1}{4} \sinh^{-1}(\xi \hbar \Omega_+) \sinh^{-1}(\xi \hbar \Omega_-)$$

حيث:

$$(34.2) \quad \begin{aligned} \Omega_+ &= \Omega + \omega_0 \\ \Omega_- &= \Omega - \omega_0 \end{aligned}$$

وباستخدام النشر التالي []:

$$(35.2) \quad \sinh^{-1}(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-(2n+1)x]$$

نجد أن :

$$(36.0) \quad \int C(\mathbf{r}; \xi) dr = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \exp \left\{ -\xi \left[\hbar \Omega_+ \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_- \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

وبالمقارنة مع النتيجة العامة (11.2) وإجراء المطابقة نستنتج أن الطيف الطاقي لجسيم خاضع لكمون هزاز توافقي دوّار ذو الهاملتوني (29.2) هو:

$$(37.2) \quad E_{nm} = \hbar \Omega_+ \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_- \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

4. كثافة الجسيمات $\rho(\mathbf{r})$

في الحقيقة يمكن استخراج العبارة التحليلية الصريحة لكثافة المحلية للجسيمات الخاصة بالنظام المدروس وذلك انطلاقاً من العبارة (31.2) وإدراجها في العلاقة (22.2) ما يعطينا العبارة التالية:

$$(38.2) \quad \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi \sinh(\xi \hbar \omega_0)} \exp \left[- \left(\coth(\xi \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \frac{r^2}{a^2} \right] \right\}$$

ثم عبر حسابات رياضية طويلة نوعاً ما (تم حسابها في أعمال سابقة يمكن الاطلاع عليها في المراجع []) نصل إلى

النتيجة النهائية التالية:

$$(39.2) \quad \rho(\mathbf{r}) = \frac{\exp(-r^2/a^2)}{\pi a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r/a)^{2(m+n)}}{m! n!} \\ \times L_k^{n+m}(2r^2/a^2) \Theta[\mu - (2k\hbar\omega_0 + E_{nm})]$$

حيث أن $a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ هو الطول المميز لكمون الهزاز التوافقي .

5. عبارة كثافة التيار $\mathbf{j}(\mathbf{r})$

إن معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن والموافقة للهاملتوني (29.2) هي:

$$(40.2) \quad i\hbar \frac{\partial |\varphi\rangle}{\partial t} = H|\varphi\rangle = \left(\frac{-\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \omega_0^2 r^2 - \Omega \cdot \mathbf{L} \right) |\varphi\rangle$$

وباستخدام شرط الاستمرارية $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0$ فإنه يمكننا إيجاد العبارة العامة التي تعطي توزيع التيار $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ للجسيمة ذات الكتلة m^* الخاضعة لكمون هزاز توافقي متمائل المناحي الدوار:

$$(41.2) \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2im^*} \underbrace{[(\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'})\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}}_{\mathbf{J}_{kin}(\mathbf{r})} - (\Omega \times \mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\mathbf{e}_\varphi$$

نلاحظ أن عبارة كثافة التيار $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ (41.2) تتكون من حدين. يمثل الحد الأول الجزء الحركي لكثافة التيار كما يمكننا القول أن هذا الأخير يعبر عن عبارة كثافة التيار في المعلم المطلق (بدون دوران) ونسميه $\mathbf{J}_{kin}(\mathbf{r})$ ، بينما الحد الثاني فينتج من الحركة الدورانية للجسيمة المدروسة ونكتب إذن:

$$(42.2) \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_{kin}(\mathbf{r}) - \Omega r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\varphi$$

علما أن:

$$(43.2) \quad \begin{cases} \Omega = \Omega \mathbf{e}_z \\ \mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\varphi \end{cases} \Rightarrow (\Omega \times \mathbf{r}) = \Omega r \mathbf{e}_\varphi$$

حيث وضعنا:

$$(44.2) \quad J_{kin}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2im^*} [(\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'})\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}$$

$$= \frac{\hbar}{2m^*i} \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} [(\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'})C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \right\}$$

حيث استخدمنا في السطر الأول من الطرف الثاني لهذه المعادلة العلاقة (20.2) للوصول إلى الطرف الثاني.

إذن بإدراج عبارة $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ المعطاة بالعلاقة (30.2) في (44.2) نجد أن:

$$(45.2) \quad J_{kin}(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})}{2\pi a^2} \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \frac{\omega_0 \sinh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh^2(\xi \hbar \omega_0)} \exp \left[- \left(\coth(\xi \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \frac{r^2}{a^2} \right] \right\}$$

الآن وباستخدام العبارات (38.2) و (42.2) و (45.2) نجد العبارة المفيدة التالية لكثافة التيار الكلي:

$$(46.2) \quad J(\mathbf{r}) = \frac{r}{2\pi a^2} \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \left(\frac{\omega_0 \sinh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh^2(\xi \hbar \omega_0)} - \frac{\Omega}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \right. \\ \left. \times \exp \left[- \left(\coth(\xi \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \frac{r^2}{a^2} \right] \right\} \mathbf{e}_{\varphi}$$

وهي التي سننطلق منها عند البحث عن العبارة التحليلية للعزم الحركي المداري الكلي للنظام. يمكن الاستمرار

لإيجاد العبارة الصريحة لكثافة التيار والتي يمكن إيجادها في الأعمال التالية []:

$$(47.2) \quad J(\mathbf{r}) = \frac{\omega_0 r}{\pi a^2} \exp\left(\frac{-r^2}{a^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! n!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2(m+n)} \left\{ L_k^{n+m+1} \left(2 \frac{r^2}{a^2}\right) \right. \\ \times \left[\theta \left(\tilde{\mu} - 2k - (n+m+2) - (n-m-1) \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \right. \\ \left. - \theta \left(\tilde{\mu} - 2k - (n+m+2) - (n-m+1) \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \right] \\ \left. - \frac{\Omega}{\omega_0} L_k^{n+m} \left(2 \frac{r^2}{a^2}\right) \theta \left(\tilde{\mu} - 2k - (n+m+1) - (n-m) \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \right\} \mathbf{e}_{\varphi}$$

حيث وضعنا للاختصار $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\hbar \omega_0}$

الفصل الثالث

الامتيازات العمومية للعزم الحركي المداري الكلي
لغاز فرميوني منحل خاضع لكمون لهزاز توافقي
دوراني

الاهتزازات الكمومية للعزم الحركي المداري الكلي لغاز فرميوني منحل خاضع لكمون لهزاز توافقي دوراني

Oscillations quantiques du moment cinétique orbital total d'un gaz de fermions dégénéré soumis à un potentiel d'oscillateur harmonique isotrope tournant

1. مقدمة

بعدما قمنا بتحضير النتائج الخاصة بالمقادير الفيزيائية الضرورية لعملنا في هذه المذكرة، ستركز عملنا في هذا الفصل على اشتقاق العبارة التحليلية للقيمة المتوسطة للعزم الحركي المداري الكلي للغاز الفرميوني المحصور بكمون هزاز توافقي متمائل المناحي في معلم دوراني موافق لسرعة دوران كمون الحصر التوافقي. سنجد أن عبارة هذا العزم المداري الكلي عبارة عن الفرق بين العزم الحركي المداري الكمومي ونظيره الكلاسيكي. ففي حين أن الأول منهما ناشئ عن التغير في المستويات الطاقوية، فالثاني مرتبط بعزم عطالة الغاز باعتباره جسما متماسكا ولذلك سنجد عبارته متعلقة بشكل صريح بسرعة دوران الغاز الفرميوني. إن دراسة انحراف الجزء الكمومي للعزم الكلي عن نظيره الكلاسيكي هو أهم أهداف هذه المذكرة. سنرى أنهما مختلفان من أجل عدد الجسيمات الصغيرة وأن الاهتزازات الكمومية تظهر بشكل جلي من أجل سرعات دوران صغيرة. سنقدم إذن في البداية اشتقاقا رياضيا بسيطا للعلاقة التي سننطلق منها لحساب العزم الكلي، ثم بعد ذلك نشرع في البحث عن العبارة التحليلية له لنقوم بعد ذلك بدراسة الاهتزازات الكمومية كدالة في عدد الجسيمات من أجل قيم مختلفة لسرعة الدوران. فعند سرعات الدوران الضعيفة ستظهر هذه الاهتزازات بشكل كبير مما يدل على مدى انحراف السلوك الكمومي للغاز عن نظيره الكلاسيكي. لكن عند الرفع من قيمة سرعة الدوران سنرى تلاشي هذه الاهتزازات ما يبين أن السلوك الكمومي للغاز يقترب من سلوكه الكلاسيكي، وهو معيار مهم جدا لتمييز متى يمكن استعمال المعالجة الكلاسيكية أو الكمومية للغاز.

2. عبارة القيمة المتوسطة للعزم الحركي المداري الكلي :

نريد في هذه الفقرة أن نبرهن بطريقة بسيطة عن العلاقة المفتاحية التالية التي تربط بين القيمة المتوسطة لمؤثر العزم الحركي المداري الكلي من جهة وبين مؤثر الموضع ومؤثر كثافة التيار من جهة ثانية:

$$(1-3) \quad \langle \mathbf{L} \rangle \equiv \mathbf{L} = m^* \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d\mathbf{r}$$

لذلك ننتقل من الجداء الشعاعي الموجود في هذه العلاقة السابقة. لدينا:

$$(2-3) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \varepsilon_{ijk} r_i J_j \mathbf{e}_k$$

حيث استعملنا اصطلاح Einstein. نعلم أيضا أن عبارة كثافة تيار الاحتمال تعطى بالعلاقة أدناه:

$$(3-3) \quad J_j = \frac{\hbar}{2im^*} (\Psi^* \partial_j \Psi - \Psi \partial_j \Psi^*)$$

ومنه:

$$(4-3) \quad m^* \int \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{2i} \int \varepsilon_{ijk} r_i (\Psi^* \partial_j \Psi - \Psi \partial_j \Psi^*) \mathbf{e}_k d\mathbf{r}$$

باستخدام النشر التالي:

$$(5-3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_j (r_i \Psi \Psi^*) &= \varepsilon_{ijk} (\partial_j r_i) \Psi \Psi^* + \varepsilon_{ijk} r_i (\partial_j \Psi) \Psi^* \\ &+ \varepsilon_{ijk} r_i \Psi (\partial_j \Psi^*) \end{aligned}$$

مع حقيقة أن:

$$(6-3) \quad \begin{aligned} \partial_j r_i &= \delta_{ij} \\ \delta_{ij} \varepsilon_{ijk} &= \varepsilon_{iik} = 0 \end{aligned}$$

فإننا نجد:

$$(7-3) \quad \varepsilon_{ijk} \partial_j (r_i \Psi \Psi^*) = \varepsilon_{ijk} r_i (\partial_j \Psi) \Psi^* + \varepsilon_{ijk} r_i \Psi (\partial_j \Psi^*)$$

وبالتكامل بالتجزئة نجد:

$$(8-3) \quad \int dv \varepsilon_{ijk} r_i \Psi (\partial_j \Psi^*) = - \int dv \varepsilon_{ijk} r_i \Psi^* (\partial_j \Psi)$$

إذن:

$$(9-3) \quad m^* \int \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{i} \int dv \varepsilon_{ijk} r_i (\Psi^* \partial_j \Psi) \mathbf{e}_k$$

كما نلاحظ أن:

$$(10-3) \quad \frac{\hbar}{i} \varepsilon_{ijk} r_i (\partial_j) \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk} r_i P_j \mathbf{e}_k = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{L}$$

فنجد في النهاية النتيجة المطلوب إثباتها:

$$(11-3) \quad \langle \mathbf{L} \rangle \equiv \mathbf{L} = \int \Psi^* \mathbf{L} \Psi d\mathbf{r} = m^* \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d\mathbf{r}$$

وهي العلاقة المهمة التي تشكل نقطة انطلاق دراسة العزم الحركي المداري الكلي للنظام الفيزيائي محل الدراسة في هذه المذكرة.

3. العزم الحركي المداري الكلي للنظام الفيزيائي المدروس

إن ما سنقوم به في هذه الفقرة هو حساب القيمة المتوسطة للعزم الحركي المداري الكلي \mathbf{L} لجسيم كتلته m^* و خاضع لكمون هزاز توافقية متمائل المناحي تواتره ω_0 دوّار بسرعة زاوية Ω , فبالنظر إلى العبارة (1-3) يمكننا إذن البحث عن العبارة التحليلية للقيمة المتوسطة للعزم الحركي المداري الكلي \mathbf{L} وذلك من خلال العبارات المعطاة في الفصل الثاني من هذه المذكرة والتي نقوم بالتذكير بها هنا للتسهيل:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \left(\frac{\omega_0 \sinh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh^2(\xi \hbar \omega_0)} - \frac{\Omega}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{a^2} \left(\coth(\xi \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \right] \right\} \quad (12-3)$$

وبغرض تبسيط الحسابات نضع في هذه العبارة التغيرات التالية:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\omega_0 \sinh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh^2(\xi \hbar \omega_0)} - \frac{\Omega}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} = \frac{\omega_0}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \left(\frac{\sinh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} - \alpha \right) \\ \beta = \frac{\cosh(\xi \hbar \omega_0) - \cosh(\xi \hbar \Omega)}{a^2 \sinh(\xi \hbar \omega_0)} = \frac{2 \sinh(\xi \hbar \Omega_+/2) \sinh(\xi \hbar \Omega_-/2)}{a^2 \sinh(\xi \hbar \omega_0)} \end{cases} \quad (13-3)$$

حيث وضعنا للاختصار أيضا

$$\alpha = \Omega / \omega_0 \quad (14-3)$$

الذي يمثل منسوب الدوران مع التذكير كذلك بأن:

$$\Omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Omega \quad (15-3)$$

إن هذه الاختصارات تسمح لنا بأن نكتب الصورة الجديدة لكثافة التيار الكلي بشكل أبسط كما يلي:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \lambda \exp[-\beta r^2] \right\} \quad (16-3)$$

الآن، ومن أجل حساب العزم الحركي \mathbf{L} نقوم أولا بحساب الجداء الشعاعي $\mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})$ الموجود في العبارة (1-3) وذلك باستخدام (16-3).

نذكر بأن حركة جسيمات الغاز ثنائية البعد، وبالتالي فإن العمل ضمن المعلم القطبي يمكننا من إيجاد النتيجة التالية:

$$(17-3) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \mathbf{e}_z \frac{r^2}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \lambda \exp[-\beta r^2] \right\}$$

باستخدام عبارة عنصر الحجم في الاحداثيات القطبية $d\mathbf{r} = r dr d\varphi$ وبتعويض (17-3) في (1-3) نجد:

$$(18-3) \quad \mathbf{L} = \mathbf{e}_z \frac{m^*}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \lambda \int r^2 \exp[-\beta r^2] r dr d\varphi \right\}$$

بحساب بسيط نجد:

$$(19-3) \quad \mathbf{L} = \mathbf{e}_z \frac{m^*}{a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \lambda \int_0^\infty r^3 \exp[-\beta r^2] dr \right\}$$

إن قيمة التكامل I تحسب بسهولة ونجد:

$$(20-3) \quad I = \int_0^\infty r^3 \exp[-\beta r^2] dr = \frac{1}{2\beta^2}$$

وبتعويضها في (19-3) نجد:

$$(21-3) \quad \mathbf{L} = \mathbf{e}_z \frac{m^*}{2a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\lambda}{\beta^2} \right\}$$

الآن نستعمل العبارات الصريحة (13-3) للوسائط λ و β فنجد أن:

$$(22-3) \quad \frac{\lambda}{\beta^2} = \frac{\omega_0 a^4}{4} \left(\frac{\overbrace{\sinh(\xi \hbar \Omega)}^{T_1}}{\sinh^2(\xi \hbar \Omega_+ / 2) \sinh^2(\xi \hbar \Omega_- / 2)} - \alpha \frac{\overbrace{\sinh(\xi \hbar \omega_0)}^{T_2}}{\sinh^2(\xi \hbar \Omega_+ / 2) \sinh^2(\xi \hbar \Omega_- / 2)} \right)$$

من جهة أخرى لدينا :

$$(23-3) \Rightarrow \begin{cases} \Omega = \frac{\Omega_+ - \Omega_-}{2} \\ \omega_0 = \frac{\Omega_+ + \Omega_-}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sinh(\xi\hbar\Omega) = \sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right) - \cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right) \\ \sinh(\xi\hbar\omega_0) = \sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right) \end{cases}$$

إذن يمكننا تبسيط كل من الحدين T_1 و T_2 وذلك باستعمال (23-3) لنجد أن :

$$(24-3) \quad T_1 = \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)} - \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)}$$

9

$$(25-3) \quad T_2 = \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)} + \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)}$$

الآن، وباستعمال النشور الرياضية التالية :

$$(26-3) \quad \begin{cases} \sinh^{-1}(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)x} \\ \frac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) e^{-(2m+1)x} \end{cases}$$

نجد إذن أن الحد الأول من الطرف الأيسر للعبارة (24-3) يكتب كما يلي:

$$(27-3) \quad \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)}$$

$$= \left(2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_+}\right) \left(2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) e^{-(m+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_-}\right)$$

$$= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) e^{-(n+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_+ - (m+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_-}$$

أما الحد الثاني للطرف الأيسر فيأخذ الصيغة التالية :

$$(28-3) \quad \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right)\sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)} = \left(2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)e^{-(n+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_+}\right)\left(2\sum_{m=0}^{\infty}e^{-(m+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_-}\right)$$

$$= 4\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(2n+1)e^{-(n+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_+-(m+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_-}$$

وبتعويض كل من (27-3) و (28-3) في (24-3) نجد أن العبارة المكثفة للحد T_1 هي:

$$(29-3) \quad T_1 = 8\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(m-n)e^{-(n+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_+-(m+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_-}$$

بنفس الطريقة وبتابع نفس الخطوات السابقة نجد أن العبارة المكثفة للحد T_2 هي:

$$(30-3) \quad T_2 = 8\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(n+m+1)e^{-(n+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_+-(m+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_-}$$

وبالعودة إلى العلاقة (22-3) نجد باستخدام (29-3) و (30-3) أن:

$$(31-3) \quad \frac{\lambda}{\beta^2} = 2\omega_0 a^4 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}[(m-n) - \alpha(n+m+1)]e^{-\xi E_{nm}}$$

حيث ادرجنا فيها عبارة طاقة النظام التالية:

$$(32-3) \quad E_{nm} = \hbar\Omega_+(n+1/2) + \hbar\Omega_-(m+1/2)$$

نعود الآن إلى العبارة (21-3) الخاصة بالعزم الحركي \mathbf{L} ، فإذا عوضنا فيها الحد $\frac{\lambda}{\beta^2}$ بعبارته الجديدة (31-3)

فسنجد أن:

$$(33-3) \quad \mathbf{L} = \mathbf{e}_z m^* \omega_0 a^2 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}[(m-n) - \alpha(n+m+1)] \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{e^{-\xi E_{nm}}}{\xi} \right\}$$

فإذا تذكرنا أن $a^2 = \hbar/m^*\omega_0$ فإنه يمكننا حينها كتابة هذه العبارة الأخير بالصيغة الآتية:

$$(34-3) \quad \mathbf{L} = \mathbf{e}_z \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m-n) - \frac{\Omega}{\omega_0} (n+m+1) \right] \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\xi E_{nm}}}{\xi} \right\}$$

بالعودة إلى الفصل السابق، نتذكر أن هناك علاقة بين دالة القفزة لهيفيزايد Heaviside وتحويل لابلاس

المعكوس الموجود في العبارة (34-3) أعلاه. في الحقيقة لدينا:

$$(35-3) \quad \Theta(\mu - E_{nm}) = \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\xi E_{nm})}{\xi} \right\}$$

وبإدراج (35-3) في (34-3) نتحصل على العبارة النهائية للقيمة المتوسطة للعزم الحركي المداري الكلي لهذا

النظام المدروس والتي تكتب على الشكل التالي:

$$(36-3) \quad \mathbf{L} = \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (m-n) - \frac{\Omega}{\omega_0} (n+m+1) \right\} \Theta(\mu - E_{nm}) \mathbf{e}_z$$

وهو المطلب الرئيس الأول في هذه المذكرة.

4. الاهتزازات الكمومية للعزم الحركي المداري الطلي

على ضوء العبارة التحليلية (36-3) سنقوم في هذه الفقرة بدراسة الاهتزازات الكمومية للعزم الحركي المداري

الكلي كدالة لعدد الجسيمات N ، أو كدالة لشدة الدوران المميزة بالوسيط α المعطى بالعلاقة (14-3).

نلاحظ أولاً أن العزم الحركي المداري الكلي \mathbf{L} يمكن أن يكتب كصورة الفرق بين العزم الحركي المداري الكمومي

\mathbf{L}_Q و العزم الحركي المداري الكلاسيكي \mathbf{L}_C ، أي:

$$(37-3) \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_Q - \mathbf{L}_C$$

حيث أن الجزء الكمومي هو:

$$(38-3) \quad \mathbf{L}_Q = \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (m-n) \Theta(\mu - E_{nm}) \mathbf{e}_z$$

والذي لا يظهر فيه التعلق بسرعة دوران الغاز الفرميوني إلا بشكل ضمني من خلال عبارة مستويات الطاقة، كما أنه ناشئ عن التغير في مستويات طاقة النظام. على العكس من ذلك يظهر التعلق الصريح بسرعة الدوران في الجزء الكلاسيكي حيث نكتبه كما يلي:

$$(39-3) \quad L_C = \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha(m+n+1) \Theta(\mu - E_{nm}) \mathbf{e}_z$$

والذي يمكن اعتباره مرتبطاً بعزم عطالة الغاز الفرميوني وكأنه جسم صلب متحد. سنقوم إذن في هذه الفقرة بالمقارنة بين هذين العزمين الكمومي والكلاسيكي وندرس انحراف أحدهما عن الآخر من خلال دراسة النسبة بينهما والتي نعرفها بالوسيط R حيث:

$$(40-3) \quad R = \frac{L_Q}{L_C} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (m-n) \Theta(\mu - E_{nm})}{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha(m+n+1) \Theta(\mu - E_{nm})}$$

في الحقيقة، إن المجاميع الظاهرة في العلاقات السابقة لبت لا نهائية كما يبدو عليه الحال للوهلة الأولى. إن وجود دالة القفزة لهيفيزايد تحُدُّ من القيم المسموحة التي يمكن أن يأخذها العددين الكموميين m و n لأن عدد جسيمات الغاز محدود وهي تشغل المستويات الدنيا الموجودة أسفل مستوى فارمي μ . سنحدد إذن في الفقرة الموالية العلاقة بين هذين المقدارين الأخيرين.

1.4 العلاقة بين عدد الجسيمات N و الكمون الكيميائي μ

انطلاقاً من العلاقة المثبتة في الفصل السابق:

$$(41-3) \quad N = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Theta(\mu - E_{nm})$$

يمكن لنا إيجاد مستوى طاقة فارمي μ من أجل قيمة معينة من الجسيمات (N معلوم) ، لذا يتوجب علينا البحث عن جميع القيم الممكنة لكل من n و m التي تحقق الشرط $E_{nm} \leq \mu$. وبالتذكير أن:

$$(42-3) \quad \begin{aligned} \Omega_+ &= \Omega + \omega_0 \\ \Omega_- &= \Omega - \omega_0 \end{aligned}$$

و باستعمال (32-3) التي تعطي مستويات طاقة الغاز الفرميوني E_{nm} نكتب إذن:

$$(43-3) \quad \begin{aligned} \theta(\mu - E_{nm}) \geq 0 &\Rightarrow E_{nm} \leq \mu \\ &\Rightarrow \hbar\Omega_+ \left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_- \left(m + \frac{1}{2}\right) \leq \mu \end{aligned}$$

نسي القيمة العظمى لكل من n و m ب n_{max} و m_{max} على الترتيب , فإيجاد n_{max} نضع $m = 0$ في (43-3) فنجد :

$$(44-3) \quad n_{max} = \frac{\mu}{\hbar\Omega_+} - \frac{\omega_0}{\Omega_+}$$

أو بالعبارة المختصرة التالية:

$$(45-3) \quad n_{max} = \frac{\tilde{\mu} - 1}{1 + \alpha}$$

حيث α منسوب الدوران وهو معطى بالعلاقة (14-3) و $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\hbar\omega_0}$.

ومن أجل أي قيمة ل n تكون أكبر قيمة m_{max} للعدد الكمومي m من خلال (43-3) وهي:

$$(46-3) \quad m_{max} = \frac{\tilde{\mu} - (\alpha + 1)n - 1}{1 - \alpha}$$

وضمن هذه القيم العظمى للأعداد الكمومية المميزة لمستويات طاقة الغاز، يمكن أن نكتب الآن العبارة السابقة (41-3) على الشكل التالي

$$(47-3) \quad N = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{m_{max}} (1)$$

فإذا أخذنا في الاعتبار العلاقات (45-3) و (46-3) سنجد في النهاية العلاقة التي تربط عدد الجسيمات N بقيمة مستوى فيرمي $\tilde{\mu}$:

$$(48-3) \quad N = \frac{\tilde{\mu}^2 + (1 - \alpha)\tilde{\mu} + \alpha - 2\alpha^2}{2(1 - \alpha^2)}$$

إذن , يمكننا تحديد مستوى طاقة فيرمي μ من خلال ايجاد قيمة $\tilde{\mu}$, وحتى نجد قيمة $\tilde{\mu}$ المقبولة يتوجب علينا حل المعادلة (48-3) من أجل قيم معلومة لكل من α و N فنجد:

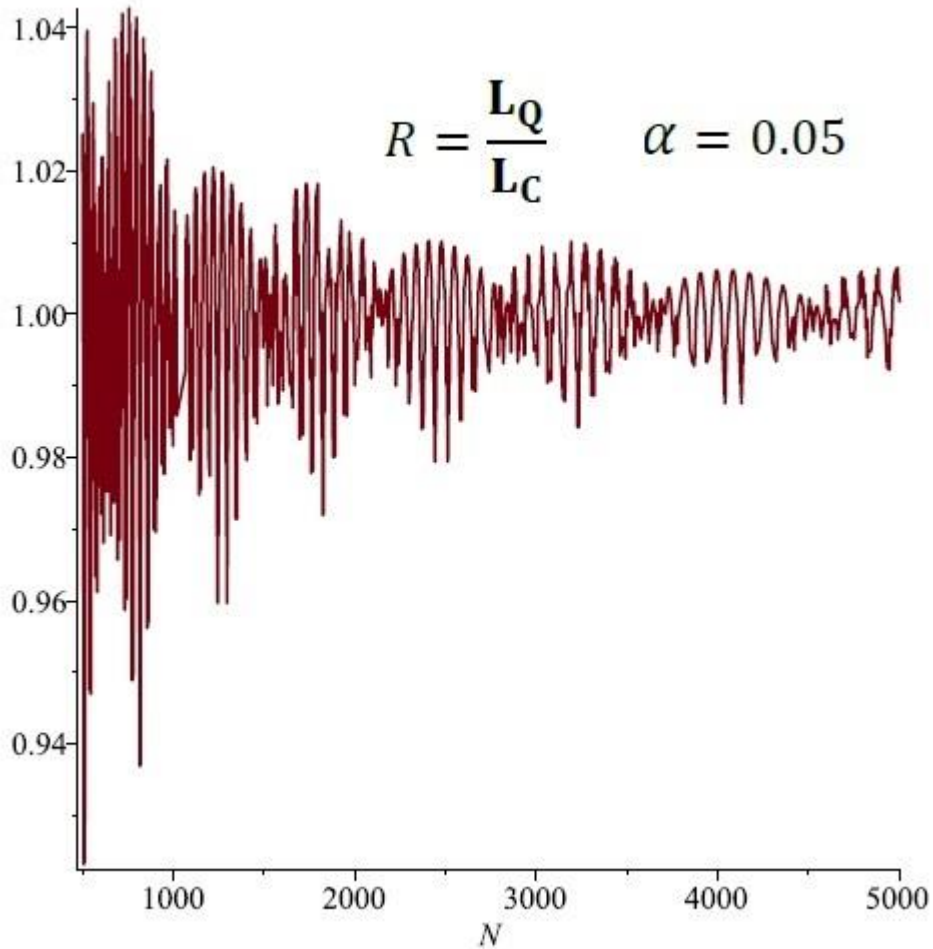
$$(49-3) \quad \tilde{\mu} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{-8N\alpha^2 + 9\alpha^2 + 8N - 6\alpha + 1}$$

2.4 الدراسة الهيازية للاهتزازات الكمومية للجزء الحركي المداري الكلي

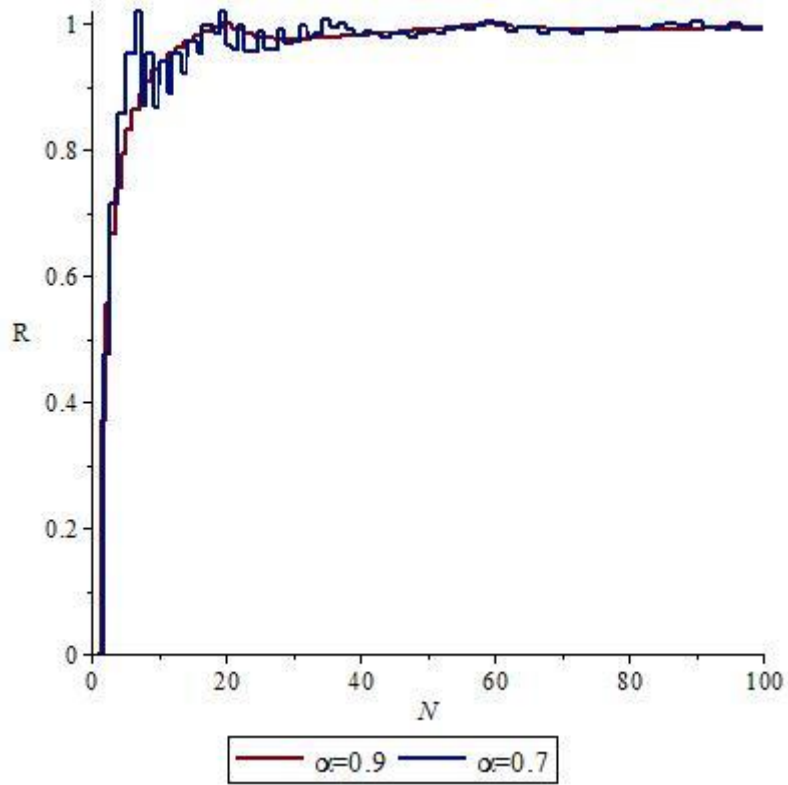
إذن يمكن أن نكتب النسبة R بين الجزئين الكمومي L_Q والكلاسيكي L_C كما يلي:

$$(50-3) \quad R = \frac{L_Q}{L_C} = \frac{\sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{m_{max}} (m - n)}{\sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{m_{max}} \alpha(m + n + 1)}$$

فمن أجل شدة دوران ثابتة وصغيرة $\alpha = 0.05$ يمكننا ملاحظة الاهتزازات الكمومية الشديدة للجزء الحركي المداري الكلي عند سرعات الدوران المنخفضة أين يظهر السلوك الكمومي للغاز الفرميوني فائق البرودة واضحا جدا من خلال هذه الاهتزازات التي تبين مدى انحراف القيم الكلاسيكية عن نظيرتها الكلاسيكية.



نلاحظ في الشكل التالي أسفله أن هذه الاهزازات تبدأ في التلاشي عند زيادة سرعة الدوران، وهذا امر متوقع لأن الغاز سيميل إلى سلوكه الكلاسيكي (أي أن الجزء الكمومي يقترب في قيمه من الجزء الكلاسيكي) كما يوضحه هذا الشكل.



خاتمة عامة

خاتمة عامة

Conclusion générale

لقد كان الهدف الرئيس من العمل المقدم في هذه المذكرة هو دراسة الاهتزازات الكمومية للعزم الحركي المداري الكلي لغاز فرميوني فائق البرودة محصور بكمون هزاز توافقي متمائل المناحي ودوّار في فضاء ثنائي البعد. في الحقيقة، إن هذه الطاهرة، أي ظاهرة الاهتزازات الكمومية، هي أمر معروف عند فيزيائي الجسم الصلب. فعند إخضاع هذا الأخير إلى حقول مغناطيسية شديدة ومتغيرة سنلاحظ اهتزاز مختلف المقادير الفيزيائية المميزة له، كذلك الأمر بالنسبة للغازات فائقة البرودة الخاضعة لحقول دورانية، فهي تظهر سلوكا اهتزازيا كموميا للمقادير المميزة لها، وهنا نذكر بشكل خاص العزم الحركي المداري، وهو ما يعكس ترتّب المستويات الطاقوية للغاز بشكل شبيه بمستويات لاندو.

إن الدراسة النظرية المنجزة في هذه المذكرة عن العزم الحركي المداري الكلي للغاز الفرميوني فائق البرودة أظهرت سلوكا اهتزازيا كموميا لهذا المقدار كدالة في عدد الجسيمات، وكذلك أيضا كدالة في شدة سرعة الدوران. قدمنا من خلال هذه الدراسة وصفا دقيقا للنظام المدروس في الفصل الأول، ثم أعقبناه بعد ذلك بتحضير الإطار الرياضي الضروري للدراسة عبر تقديم النتائج الخاصة بكل من مصفوفة الكثافة لبلوخ والكثافة المحلية للجسيمات ثم عبارة كثافة تيار الاحتمال. مما سمح لنا بالبحث عن العبارة التحليلية للعزم الحركي انطلاقا من العلاقة التي تربطه بكل من الكثافة المحلية وكثافة التيار والتي تم إثباتها في بداية الفصل الثالث. نود أن نذكّر في الأخير أنه تم إهمال درجة حرية سبين جسيمات الغاز في هذه الدراسة لأن الاهتمام كان منصبا على الجزء المداري للعزم الحركي الكلي.

قائمة المراجع

References

- [1] M. H. Anderson et al., *Science* **269**, 198 (1995); C. C. Bradley et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995); K. B. Davis et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [2] B. DeMarco et al., *Science* **285**, 1703 (1999). B. DeMarco et al., *Phys. Rev. Lett.* **86** 5409, (2001).
- [3] S. Medjedel. Calcul des densités de courants dans les systèmes quantiques con.nés en dimensions réduites. Thèse de Doctorat en physique théorique. Université Ferhat Abbas-Sétif 1 (2016). Algérie.
- [4] I. Saidi, *Densité de Particules et de Courant d'un Gaz Fermionique Ultra Froid en Rotation Rapide*, Mémoire Master, Université de M'sila, Algerie, 2018.
- [5] N.W. Ashcroft, D. Mermin, *Physique du Solide*, EDP Sciences (2002), France.
- [6] J.R. Abo-Shaer et al., *Science* **292**, 476 (2001); M.R. Matthews et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999); A.E. Leanhardt et al., *Phys. Rev. Lett.* **89**, 190403 (2002); K.W. Madison et al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000); P.C. Haljan et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 210403 (2001); E. Hodby et al., *Phys. Rev. Lett.* **88**, 010405 (2001).
- [7] M. Brack, R. K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Frontiers in Physics, vol.96, Westview, Boulder, 2003)
- [8] M. Brack et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1574 (2001); M. Brack et al., *J. Phys. A* **36**, 1111 (2003); B.P. van Zyl et al., *Phys.Rev. A* **67**,023609 (2003); P. Shea et al., *J. Phys. A* **40**, 10589 (2007); P. Shea et al., *J. Phys. A.* **41**, 135305 (2008); B.P. van Zyl et al., *Phys. Rev. B* **69** 024520 (2004); K. Bencheikh et al., *Phys. Rev. A* **78** 053614 (2008).
- [9] P. Shea et al., *Phys. Rev. B* **74**, 205334 (2006)
- [10] N. H. March and M. P. Tosi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, L643-L645 (1985).
- [11] H. Naidja et al., *Phys. Rev. A* **83**, 053631 (2011).
- [12] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn* **22**, 264 (1940); E. H. Sondheimer et al., *Proc. R. Soc. A*, **210**, 173 (1951); N H March et al., *Phys. Rev.* **120** 830 (1960); N. H. March et al., *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** L643 (1985); J. M. Manoyant, *Phys. A: Math. Gen.* **19**. 3013 (1986); M. A. Habeeb, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, 5549-5554 (1987); R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill) (1965). ch 10.
- [13] K. Yonei, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**. 2415 (1989).
- [14] S. Medjedel, K. Bencheikh, *Physics Letters A* **383**, 1915–1921 (2019).
- [15] I S Gradshteyn and I M Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 5th edition, 1994).
- [16] Ch. Grenier, C. Kollath, A. Georges, *Phys. Rev. A* **87**, 033603 (2013)

الملخص

تقدم هذه المذكرة دراسة نظرية في الاهتزازات الكمومية في غاز فائق البرودة مكون من ذرات فرميونية متعادلة كهربائياً ومستقلة محصورة بكمون لهزاز توافقي متماثل المناحي يدور حول المحور العمودي على مستوى النظام , تتم المعالجة النظرية لهذا النظام عند درجة حرارة معدومة , قمنا بدراسة حركة الجسيمات و المقادير الفيزيائية , ووضحنا علاقة مصفوفة بلوخ بمختلف الكميات الفيزيائية والتي ستسمح لنا بإيجاد العبارة التحليلية الدقيقة للعزم الحركي الكلي للنظام , و بينا أن عبارة العزم هي الفرق بين العزم الحركي المداري الكمومي ونظيره الكلاسيكي , إن عبارة القيمة المتوسطة للعزم الحركي المداري الكلي تكون متعلقة بسرعة دوران الغاز الفرميوني وكذا بعدد الجسيمات مما يؤثر على شكل الاهتزازات الكمومية شدة وضمورا و بالتالي على السلوك الكمومي للغاز , فمثلا في حال سرعة الدوران كانت ضعيفة يظهر الاهتزاز بشكل كبير أي إنحرف سلوكه عن نظيره الكلاسيكي , و برفع قيمتها تتلاشى الاهتزازات يعني أن السلوك أقرب الي الكلاسيكي , وهذا مقياس هام لمعرفة متى تستعمل المعالجة الكلاسيكية و الكمومية للغاز .

Résumé

On présente dans ce mémoire une étude théorique des oscillations quantiques dans un gaz ultra froid formé d'atomes fermioniques neutres piégé par un potentiel harmonique isotrope tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan content le système supposé bidimensionnel. Cette étude théorique de ce système, se faisant à une température nulle, porte sur quelques importantes quantités physiques telles la densité de particules et la densité de courant, ingrédients nécessaires à la dérivation d'une expression analytique de la valeur moyenne du moment cinétique orbital total du système. Les expressions de la densité locale et la densité de courant se dérivent à partir de ce qu'on appelle « Matrice densité de Bloch ».

L'expression trouvée pour le moment cinétique orbital total dépend de la vitesse de rotation du système ainsi du nombre d'atomes du gaz. Ces deux paramètres influent sur le comportement quantique du gaz, chose qu'on peut remarquer à travers les oscillations quantiques, en fonction de l'un de ces deux paramètres, que montre la déviation de la partie quantique du moment cinétique total de son analogue classique. Pour les petites valeurs de ces deux paramètres le comportement quantique du gaz est manifesté et qui commence à disparaître pour les grandes valeurs du nombre de particules ou pour une rotation rapide.

Abstract

This work presents a theoretical study of quantum oscillations in an ultra-cold gas formed of neutral fermionic atoms trapped by an isotropic harmonic potential rotating around an axis perpendicular to the plane containing the supposed two-dimensional system. This theoretical study, at zero temperature, covers a few important physical quantities such as particle density and current density, ingredients necessary to derive an analytical expression of the mean value of the total orbital angular momentum of the system. Expressions of local density and current density are derived from the so-called Bloch Density Matrix.

The found expression for the total orbital angular momentum depends on the speed of rotation of the system as well as the number of atoms of the gas. These two parameters influence the quantum behavior of the gas, something that can be observed through quantum oscillations, depending on one of these two parameters, that shows the deviation of the quantum part of the total orbital angular momentum of its classical analogue. For the small values of these two parameters the quantum behavior of the gas is manifested and starts to disappear for the large values of the number of particles or for a fast rotation