



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Sur les opérateurs linéaires latticiellement sommant

Présentée par :

LAICHI Hadda

Devant le jury composé de :

Saadi Khalil	Prof ,	Université de M'sila	Président.
Tiaiba Abdelmoumen	Prof ,	Université de M'sila	Encadreur.
Yahi Rachid	MCB ,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2021/2022

0.1 *Remerciements*

J'adresse mes remerciements en premier temps et lieu au grand Dieu qui ma donner la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a aider au cours de ces longues années de formation.

Je tiens à remercier sincèrement Mr. *ABDE-MOUMEN TIAIBA*, pour avoir accepté de diriger ce mémoire qu'il a consenti tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à tous les membres de jury .M : ...*khalil...Saadi .. et...Mr : .Yahi Rachide...* qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes collègues ,mes amis,mes parents et tous mes frères et mes soeurs pour leurs aides et leurs encouragements.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé de loin ou de près à réaliser ce travail.

Merci

Notations

- X^* : Le dual topologique de X .
- X^{**} : La bidual topologie de X .
- B_{X^*} : Boule unité fermée de l'espace X .
- T^* : L'adjoint d'opérateur T .
- T^{-1} : L'inverse de l'opérateur T .
- p^* : L'exposant conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Le crochet de dualité.
- $\sigma(X, X^*)$: La topologie faible.
- $\sigma(X^*, X^{**})$: La topologie *-faible.
- μ : Mesure de probabilité régulière positive sur l'espace compact Ω .
- $C(K)$: Espace des fonctions continues sur un compact K à valeurs réelles.
- $L(X, Y)$: Espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y .
- $L^r(X, Y)$: L'espace vectoriel des opérateurs réguliers.
- $L_f(X, Y)$: L'espace des opérateurs de rang finie.
- $\ell_p(X)$: Espace des suites $(x_i)_{i=1}^n \in X$ absolument p -sommables.
- $\ell_p^w(X)$: Espace de suites $(x_i)_{i=1}^n \in X$ faiblement p -sommables.
- $\Pi_p(X, Y)$: Espace des opérateurs p -sommants de X dans Y .
- $\Pi_p^+(X, Y)$: Classe de tous les opérateurs linéaires positivement p -sommants de X dans Y .
- $C_{(p,q)}^{vex}(X, Y)$: L'ensemble de tous ces opérateurs (p, q) -convexes.
- $\Lambda_p(X, Y)$: Espace des opérateurs lattice p -sommants de X dans Y .
- $p^\dagger$: L'exposant conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).
- X^* : Le dual topologique de X .
- X^{**} : La bidual topologie de X .
- T^* : L'adjoint d'opérateur T .
- T_L : La linéarisation de l'opérateur multilinéaires (m -linéaires) T .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Le crochet de dualité.

Résumé : Dans le cadre de la théories des opérateurs, Notre mémoire touche le font d'étude des opérateurs p -sommants et des opérateurs p -lattice sommants surtout les relations entre ces deux types d'opérateurs par la donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les espaces de Banach de démarrage et d'arrivées et sur l'opérateur lui même. Pour ce but ont a profité de ce mémoire pour faire une étude détaillé d'un travail de Monsieur Jerzy SZULGA en 1983 intitulé " On lattice summing operators " publier en le journal AMS où il a donné des conditions nécessaires et suffisantes sur le nouveau type des opérateurs lattic p -sommants et l'espace de Banach de démarrage X et cel d'arrivée Y qui est un espace de Banach réticulé .pour que tout opérateur Lattice sommant $T : X \rightarrow Y$ soit absolument sommant.

Abstract : The purpose of this thesis is to make a detailed study of a work by Mr. Jerzy SZULGA in 1983 entitled " On lattice summing operators " published in the AMS journal where he gave necessary and sufficient conditions for the new type of lattice summing operators and Banach space of start X and cel of arrivals Y which is a lattice Banach space. So that any lattice summing operator $T : X \rightarrow Y$ is absolutely summing.

Table des matières

0.1	<i>Remerciements</i>	1
	Notation	2
	Introduction	6
1	Préliminaires	8
1.1	Espace vectoriel normé	8
1.2	Espaces complets (Banach)	11
1.3	Espaces de Hilbert	13
1.3.1	Espace préhilbertien	14
1.3.2	Espace de Hilbert	14
1.4	Quelques outils Mathématiques	15
1.4.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz	15
1.4.2	Inégalité de Minkowski	15
1.5	Espace de suites ℓ_p	16
1.5.1	Espace de Hilbert ℓ_2	17
1.5.2	Espace dual	17
1.6	Les espaces de Lebesgue L_p et l'espace $C(K)$	19
1.6.1	Tribu	19
1.6.2	Espace mesuré	19
1.6.3	Intégral des fonctions mesurables	21
1.6.4	Les espaces de Lebesgue L_p	22
1.6.5	L'espace L_∞	24

1.6.6	Inégalité de Minkowski	24
1.6.7	Espace des fonctions continues sur un compact $\mathcal{C}(K)$	24
2	Opérateurs sommables	26
2.1	Les application linéaires	26
2.1.1	Espace dual, reflexif et séparable	28
2.1.2	L'adjoint d'un opérateur linéaire	29
2.2	Topologie faible et $*$ -faible	29
2.3	Espaces de Banach réticulés	30
2.3.1	Opérateurs linéaires positifs	32
2.4	Mesure de Radon	32
2.5	Opérateurs linéaires p -convexes, q -concaves	34
2.6	Opérateurs linéaires p -sommants	35
3	Une représentation des opérateurs lattices	38
3.0.1	Produit tensoriel	40
3.1	Opérateurs lattices	41
3.2	Exemple d'un opérateur lattice sommant	43
3.3	Bidual	48
3.4	Le principe de réflexivité local	48
3.5	Théorème Hahn-Banach	48
3.6	Opérateurs linéaires p-lattice sommants	49
	Références	52

Introduction

A savoir, qu'un opérateur $T : E \rightarrow L$ est appelée lattice sommant, si pour toute suite (x_n) dans E telle que $\sum x_n$ converge inconditionnellement alors la série $\sum |Tx_n|$ converge dans L . Le concept d'opérateurs absolument sommant a une certaine analogue naturel lorsque l'espace de portée est un espace de Banach réticulé ou bien lattice. Bien sûr, si par exemple L est un L_1 -espace ou E est un L_1 -espace et L est un espace de Hilbert, alors les deux notions coïncident. Le but de cet mémoire qui est une étude détaillé d'un article de Jerzy SZULGA en 1983 voir ref . [16] est de caractériser toutes les paires E, L pour les quelles cela se produit. En 1979, Yanovskii [10] a étudié les problèmes liés à la sommabilité du lattice sommants .En particulier, il a formulé une conjecture selon laquelle, si tous les opérateurs lattice sommants agissant sur le même espace de Banach réticulé L sont absolument sommants, alors L est isomorphe à L_1 . Cependant, il découle de leur caractérisation que les espaces de cotype 2 ont bien la même propriété. Un autre sous-produit de cet travail qui est une formulation encore différente du Propriété Dubinsky-Pekzynski-Rosenthal $\Pi_2(\mathcal{L}_\infty, E) = B(\mathcal{L}_\infty, E)$.

Le mémoire s'articule autour de trois chapitres :

Le premier chapitre . Il ne monopolise que quelques concepts de base qui aideront le lecteur à mieux comprendre le mémo. Essentiellement est un rappel. Où a-t-on inclus les résultats classiques dans les théories des opérateurs linéaires et non linéaires. Par exemple les notions concernant les espaces classiques qui sont les espaces vectoriels normés, et cel de

Banach , Espace de Hilbert ; Quelques outils Mathématiques comme Inégalité de Cauchy-Schwarz et autre ; Les espaces de Lebesgue L_p et l'espace $C(K)$; .Espaces de suites ℓ_p et espace des fonctions continues sur un compact $\mathcal{C}(K)$..

La dont le chapitre deux. Nous voulons attirer l'attention de ceux qui s'intéressent à ce travail sur quelques concepts de base comme les espaces de Banach réticulés. Notamment Nous mentionnerons tout ce dont nous avons besoin et qui sont liés aux applications sommants de toutes sortes. Par exemple, sans limitation opérateurs linéaires p -convexes, q -concaves et opérateurs linéaires p -sommants.

Le troisième chapitre. Est considéré comme le fond et le but de ce travail qui entre dans le cadre de la théories des opérateurs et qui touche l'un des axes d'étude des opérateurs p -sommants et des opérateurs p -lattice sommants surtout les relations entre ces deux types d'opérateurs par la donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les espaces de Banach de démarrage et d'arrivées et sur l'opérateur lui même.. Et nous y avons fait une étude détaillée du travail de Monsieur Jerzy SZULGA en 1983 intitulé " On lattice summing operators " publier en le journal AMS [16] où il a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour le nouveau type des opérateurs lattice p -sommants et l'espace de Banach de démarrage X et cel d'arrivées Y qui est un espace de Banach réticulé. Pour que tout opérateur Lattice sommant $T : X \rightarrow Y$ soit absolument sommant.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats de base à propos des espaces vectoriels, les normes, les espaces complets ainsi que des résultats concernant les applications linéaires. Le dual d'un espace de Banach sera défini à l'aide des applications linéaires dont l'espace arrive est $\mathbb{R}$. Certaines propriétés seront exposées notamment, la séparabilité, et la réflexivité d'un espace de Banach et plusieurs exemples seront donnés. pour plus de détail voir [5] [4] ; [15] .

1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.1.1 *Soit K un corps commutatif ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) et soit X un ensemble muni de deux lois de compositions, l'une interne*

$$\begin{aligned} + & : X \times X \rightarrow X \\ (x, y) & \rightarrow x + y \end{aligned}$$

et l'autre externe

$$\begin{aligned} \cdot & : \mathbb{K} \times X \rightarrow X \\ (\lambda, x) & \rightarrow \lambda \cdot x \end{aligned}$$

On dit que $(X, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur K (on dit aussi K -espace vectoriel) si

- 1) $(X, +)$ est un groupe commutatif, i.e ,
- a) $\forall x, y, z \in X : (x + y) + z = x + (y + z).$ (associativité).
 - b) $\forall x, y \in X : x + y = y + x.$ (commutatif).
 - c) X contient un élément 0 tel que $0 \cdot x = 0, \forall x \in X.$
- 2) Pour tout $x, y \in X$ et $\alpha, \beta \in K$
- d) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (distributivité).
 - e) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributivité).
 - f) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x.$
 - g) $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$

Remarque 1.1.1 Les éléments de X sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

Exemple. L'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies par :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2) &= (\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2) \end{aligned}$$

est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Définition 1.1.2 Soit X un ensemble quelconque. Soit l'application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$.
 d dite une métrique (distance) sur X si ,

- (1) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
- (2) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
- (3) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité du triangle).

Remarque 1.1.2 Un ensemble muni de telle distance est dite un espace métrique.

Remarque 1.1.3 Un espace métrique est un espace topologique.

Définition 1.1.3 (La norme). Soit X un espace vectoriel sur K , une norme sur X est une application $N : X \mapsto \mathbb{R}_+$ tel que

- 1) $\forall x \in X : N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- 2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{ on a } N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité).
- 3) $\forall x, y \in X, \text{ on a } N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Notation 1.1.1 On note $N(x)$ par $\|x\|$.

Définition 1.1.4 (Espace normé). On appelle un espace vectoriel normé tout espace vectoriel X muni d'une norme $\|\cdot\|$. On le note $(X, \|\cdot\|)$ ou simplement X . Si X est un espace vectoriel normé, on définit la distance associée par :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

L'espace vectoriel normé X est donc un espace métrique par conséquent est un espace topologique. Cette topologie s'appelle parfois topologie forte.

Définition 1.1.5 Soient $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ deux normes sur X . Elles sont équivalentes si elles définissent la même topologie sur X . En d'autres termes, s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in X : \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|_1.$$

Proposition 1.1.1 Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

- I) $\forall x, y \in X : \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$ (seconde inégalité triangulaire).
- II) $\forall x_i \in X, \forall \lambda_i \in \mathbb{K} \quad (1 \leq i \leq n) : \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|u_i\|$ (Inégalité triangulaire généralisée).

Exemple Soient $X = \mathbb{R}^n$ et $x \in X$. L'application de X dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n |x_i|.$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.1.1 *Dans un espace vectoriel normé X de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Exemple On définit les trois normes sur $\mathbb{R}^n$ de la façon suivantes :

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n |x_i|$

Elles sont équivalentes. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty,$$

et

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

1.2 Espaces complets (Banach)

Définition 1.2.1 *Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X est dite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 : p \geq q > n \implies \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Soit X un espace normé, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X est dite convergente vers x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow \|x_n - x_0\| < \varepsilon.$$

On écrit dans ce cas $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Remarque 1.2.1 1- Toute suite convergente est de Cauchy.

2- La réciproque de cette proposition est fausse en générale. En effet, prenons l'exemple suivant. On a bien que $([0, 1], |\cdot|)$...est un espace métrique, soit $u_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$ est une suite de Cauchy mais n'est pas converge.

Définition 1.2.2 (Espace de Banach). Un espace vectoriel normé X est dit complet (espace de Banach), si toute suite de Cauchy de X est convergente dans X .

Proposition 1.2.1 Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach. Et tout sous espace fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.

Exemples

1) Les espaces $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Banach.

2) Les espaces l_p^n des suites finies de $\mathbb{R}$, où $1 \leq p < \infty$, sont des espaces de Banach pour la norme :

$$\|(x_i)_{i=0}^n\|_{l_p^n} = \left(\sum_{i=0}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3) Si $p = \infty$ la norme est

$$\|(x_n)_{i=0}^n\|_{l_\infty^n} = \sup_{i=0}^n |x_i|.$$

4) L'espace vectoriel de fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$, $C([0, 1])$ n'est pas un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Proposition 1.2.2 (*Produit des espaces de Banach*). Soient $(X_i)_{i=1}^m$ une famille des espaces de Banach. L'espace produit $X = X_1 \times \dots \times X_m$ est un espace de Banach dont son norme est définie par :

- 1) $\forall x \in X : \|x\|_1 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|_{X_i}$. ou bien
- 2) $\forall x \in X : \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_{X_i}^p \right)^{\frac{1}{p}}, (1 \leq p < \infty)$.ou bien
- 3) $\forall x \in X : \|x\|_3 = \sup_{i=1}^m \|x_i\|_{X_i}$.

Quelques exemples des espaces de Banach

1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.3.1 Soit H un espace vectoriel sur K . On appelle **produit scalaire** sur H toute application $\varphi : H \times H \rightarrow R$ telle que

I) *Linéaire par rapport à la première composante, i.e.,*

1. $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$.
2. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$.

II) *Anti-linéaire par rapport à la deuxième composante, i.e.,*

1. $\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$.
2. $\varphi(x, \lambda y) = \bar{\lambda} \varphi(x, y)$.

III) *Positive, i.e., $\varphi(x, x) \geq 0$.*

IV) *Définie, i.e., $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

V) *Hermitienne, i.e., $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$.*

où x, x' et y sont des éléments quelconques de H et λ un élément quelconque de $\mathbb{K}$.

On note habituellement l'application φ par $\langle, \rangle$, c'est à dire

$$\forall x, y \in X : \varphi(x, y) = \langle x, y \rangle .$$

Exemple On définit le produit scalaire usuel sur $X = \mathbb{R}^n$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

1.3.1 Espace préhilbertien

On appelle un espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. dans ce cas l'application suivante ;

$$\forall x \in X : \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (1.1)$$

Théorème 1.3.1 *Un espace préhilbertien est un espace normé dont sa norme est définie comme suit $\forall x \in X : \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.*

Exemples

- a) $\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ des éléments de $\mathbb{K}^n$, on pose $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$. Cette formule définit clairement un produit scalaire sur $\mathbb{K}$. La norme associée est l'application (module) $x \mapsto |x|$.
- b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on trouve l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

1.3.2 Espace de Hilbert

Définition 1.3.2 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la distance issue du produit scalaire.*

Exemples

- 1) $\mathbb{R}^n$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire.
- 2) L'espace des suites finies

$$l_2 = \left\{ (x_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R} : \|(x_i)\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

avec le produit scalaire est

$$\langle (x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

2) L'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues définies sur $[a, b]$, on le muni de produit scalaire suivant

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \text{ ou } f, g \in \mathcal{C}([a, b])$$

Il est un espace préhilbertien mais pas de Hilbert.

3) L'espace des polynômes définis sur un intervalle $\mathcal{P}([a, b])$ n'est pas un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx, \text{ ou } f, g \in \mathcal{P}([a, b]). \quad (1.2)$$

1.4 Quelques outils Mathématiques

1.4.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.4.1 Soit H un espace de Hilbert. Pour tout le $x, y \in H$ nous avons

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \quad (1.3)$$

1.4.2 Inégalité de Minkowski

Théorème 1.4.2 Soit H un espace de Hilbert. Pour tout le $x, y \in H$ nous avons

$$(\langle x + y, x + y \rangle)^{1/2} \leq (\langle x, x \rangle)^{1/2} + (\langle y, y \rangle)^{1/2}.$$

1.5 Espace de suites ℓ_p

Définition 1.5.1 Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de R et $p \in [1, +\infty[$. On définit l'ensemble ℓ_p par

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Si $p = \infty$, on définit ℓ_∞ par

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

On définit les opérations algébrique sur cet ensemble par

- 1) Pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x' = (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$, on a $x + x' = (x_n + x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) Pour tout $\lambda \in R$ et $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$, on a $\lambda x = (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme 1.5.1 Soit $1 \leq p < \infty$. Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites quelconques.

Nous avons

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.4)$$

Si $p = \infty$, l'inégalité de Minkowski devient

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n|.$$

Proposition 1.5.1 Soit $1 \leq p < \infty$. Alors, ℓ_p est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.5.1 Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit $x \in \ell_p$, alors

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n, \dots) \\ &= x_1(1, 0, \dots) + \dots + x_n(0, \dots, 1, 0, \dots) + \dots \\ &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + \dots \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n \end{aligned}$$

Donc, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de ℓ_p .

ℓ_p munit des application suivantes (définie de ℓ_p dans $\mathbb{R}_+$)

1. Si $1 \leq p < \infty$: $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
2. Si $p = \infty$, $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

sont des norme sur ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$).

Théorème 1.5.1 Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace ℓ_p est un Banach.

1.5.1 Espace de Hilbert ℓ_2

Théorème 1.5.2 L'espace ℓ_2 est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n. \quad (1.5)$$

1.5.2 Espace dual

Théorème 1.5.3 Soient $1 \leq p \leq +\infty$. On a

$$(\ell_p)^* = \ell_{p^*}$$

avec p^* est le conjugué de p , i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Le croché de dualité correspondant est

$$|\langle (x_i), (y_i) \rangle| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n x_n|$$

tels que $(x_i) \in \ell_p$ et $(y_i) \in \ell_{p^*}$.

Remarque 1.5.2 1- Soient $1 \leq p \leq +\infty$. $\forall (x_i) \in \ell_p$ on a

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n x_n| : \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq 1 \right\}.$$

2- Grâce à la dualité de l'espace ℓ_p , on peut donner une autre formule de sa norme, laquelle

$$\begin{aligned} \|(x_i)\|_p &= \sup_{(\lambda_i) \in B_{\ell_{p^*}}} |\langle (x_i), (\lambda_i) \rangle| \\ &= \sup \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n x_n| : \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Proposition 1.5.2 1- Soient $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace ℓ_p est réflexif, i.e.,

$$(\ell_p)^{**} = \ell_p. \tag{1.6}$$

2- Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Nous avons

$$\ell_1 \subset \dots \subset \ell_p \subset \ell_q \subset \dots \subset \ell_\infty \tag{1.7}$$

1.6 Les espaces de Lebesgue L_p et l'espace $C(K)$

1.6.1 Tribu

Définition 1.6.1 Soient X un ensemble et T une famille des parties de X ($T \in \mathcal{P}(X)$).

La famille T est une tribu sur X si elle vérifie

1) $\emptyset \in T$.

2) T stable par passage au complémentaire, (i.e.,)

$$\forall A \in T \implies A^c \in T$$

3) T est stable par union dénombrable, (i.e.), pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T.$$

Exemple

1) $T = \{\emptyset, X\}$ est la tribu minimal sur X .

2) $T = \mathcal{P}(X)$ est la tribu maximal sur X .

3) (*Tribu borélienne*) Soit X un ensemble muni d'une topologie. On appelle tribu borélienne la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de X , cette tribu sera notée $\mathcal{B}(X)$. Dans le cas $X = \mathbb{R}$, on note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Espace mesurable. Si T est une tribu sur X , on dit que (X, T) est un espace mesurable. Souvent, on note simplement X .

1.6.2 Espace mesuré

Définition 1.6.2 a) Soit (X, T) un espace mesurable, on appelle mesure sur X une application $\mu : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ vérifiant

1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) μ est σ -additive c-à-d $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des parties disjointes deux à deux ($\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$)

on a

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

b) Soient X un ensemble, T une tribu sur X et μ une mesure sur X . Le triplet (X, T, μ) est appelé espace mesuré.

c) Soient (X, T, μ) un espace mesuré et A une partie de X . On dit que A est négligeable si

$$\exists B \in T : A \subset B \text{ et } \mu(B) = 0.$$

d) Soient (X_1, T_1) et (X_2, T_2) deux espaces mesurables. Une fonction $f : X_1 \rightarrow X_2$ est dite mesurable si

$$\forall B \in T_2 : f^{-1}(B) \in T_1.$$

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions mesurables et $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des fonctions mesurables positives

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable}\} \\ \mathcal{M}_+ &= \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, f \text{ est mesurable}\}. \end{aligned}$$

Remarque 1.6.1 $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel.

Définition 1.6.3 Soit X est un espace mesurable et soit $A \in T$, on appelle fonction caractéristique mesurable de l'ensemble A , on note 1_A ou χ_A , la fonction définie par

$$\forall x \in X : \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}. \quad (1.8)$$

Définition 1.6.4 Soit X un espace mesurable et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est étagée si f est une combinaison linéaire (finie) des fonctions caractéristiques mesurables. En d'autres termes s'il existe $(A_i)_{i=1}^n \subset T$ et n réels positifs $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$$

avec $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ et $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$ et $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

On note par ξ l'ensemble des fonctions étagées mesurables et ξ_+ l'ensemble des fonctions mesurables positives étagées.

Définition 1.6.5 Soient (X, T, m) un espace mesuré, Y un ensemble, f et g des fonctions définies de X dans Y . On dit que $f = g$ presque partout, si l'ensemble

$$\{x \in X : g(x) \neq f(x)\}$$

est négligeable.

1.6.3 Intégral des fonctions mesurables

Définition 1.6.6 Soit X un espace mesuré et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction étagée positive. On appelle intégrale de f par rapport à la mesure μ le nombre

$$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i). \quad (1.9)$$

On dit que f est intégrable si son intégral est fini.

Théorème 1.6.1 (Beppo-Levi). *Si f_n est une suite croissante de fonctions mesurables positives convergente vers f on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Ce théorème est aussi appelée Théorème de la convergence monotones.

1.6.4 Les espaces de Lebesgue L_p

Définition 1.6.7 *Soit $1 \leq p < \infty$. Soient (X, T, μ) un espace mesuré et f est une fonction mesurable définie de X dans R , on note que $|f|^p \in M_+$. La fonction f est dite p -intégrable si*

$$\int |f|^p d\mu < \infty.$$

On note par $\mathcal{L}_p(X, T, \mu)$ l'espace de toutes les fonctions mesurables p -intégrables. On définit l'application suivante

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.6.1 $\mathcal{L}_p(X, T, \mu)$ est un sous espace vectoriel et l'application définit ci-dessus est une semi norme sur $\mathcal{L}_p(X, T, \mu)$. Soit $f \in \mathcal{L}_1(X, T, \mu)$ tel que $\|f\|_1 = 0$. Alors

$$\int |f| d\mu = 0$$

donc $f = 0$ (p.p). Pour cette raison on va définir une relation d'équivalence d'égalité presque partout afin de rendre la semi norme une norme. On introduira donc les espaces de Lebesgue comme des espaces de classes d'équivalences pour cette relation.

Pour tout $f, g \in \mathcal{L}_1(X, T, \mu)$ on définit la relation suivante

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ (p.p)} \tag{1.10}$$

Il s'agira bien d'une relation d'équivalence dont l'espace de classes d'équivalences est $L_1(X, T, \mu)$.

En effet, soit $\tilde{f} \in L_1(X, T, \mu)$, alors

$$\tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}_1(X, T, \mu) : f = g \text{ p.p.}\}.$$

Définition 1.6.8 On définit la norme sur L_1 par :

$$\|\tilde{f}\|_1 = \|f\|_1 \text{ avec } f \in \tilde{f},$$

Proposition 1.6.2 L'application $\tilde{f} \longrightarrow \|\tilde{f}\|_1$ est une norme sur L_1 , et l'espace L_1 devient un espace normé.

Remarque 1.6.2 .Au lieu d'étudier la notation $\tilde{f}$, on note simplement f d'un élément de $L_p(X, T, \mu)$.

Définition 1.6.9 Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $L_p(X, T, \mu)$ l'espace des fonctions p -intégrables, i.e., $f : X \rightarrow R$, telle que

$$\int |f|^p d\mu < \infty$$

On définit $L_p(X, T, \mu)$ comme l'ensemble des classes d'équivalences sur $L_p(X, T, \mu)$ pour la relation d'équivalence (p.p.). Soit $\tilde{f} \in L_p(X, T, \mu)$, alors

$$\tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}_p(X, T, \mu) : f = g \text{ (p.p.)}\}$$

On définit la norme par

$$\|\tilde{f}\|_p = \|f\|_p \text{ avec } f \in \tilde{f} \tag{2.1}$$

même remarque, cette définition est cohérente car ne dépend pas du choix de f dans $\tilde{f}$.

Remarque 1.6.3 On peut faire même procédure que dans l'espace L_1 pour montrer que L_p est un espace normé pour la norme définie dans (2.1).

1.6.5 L'espace L_∞

Définition 1.6.10 Soient (X, T, μ) un espace mesuré et f une fonction mesurable (de X dans $\mathbb{R}$)

- Si $f \in L_p$ on pose $\|f\|_\infty = \inf \{c \in \mathbb{R}_+; |f| < c \text{ p.p.}\}$.
- Si $f \notin L_p$ on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.

Lemme 1.6.1 Si $f \in L_\infty$ alors $|f| \leq \|f\|_\infty$ (p.p.).

Théorème 1.6.2 L_p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

1.6.6 Inégalité de Minkowski

Théorème 1.6.3 (Inégalité de Minkowski). Soit (X, T, μ) un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Soit $f, g \in L_p$, alors,

$$f + g \in L_p \text{ et } \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (1.11)$$

Théorème 1.6.4 (Inégalité de Hölder généralisée). Soient un espace mesuré et $p, q, r \in [1, \infty]$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Soient $f \in L_p(E, T, m)$ et $g \in L_q(E, T, m)$ on a

$$fg \in L_r(X, T, \mu) \text{ et } \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (1.12)$$

1.6.7 Espace des fonctions continues sur un compact $\mathcal{C}(K)$

Définition 1.6.11 Soit A un espace topologique. On dit que A est compact si toute suite de A contient une sous-suite converge dans A .

Corollaire 1.6.1 *Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées.*

Définition 1.6.12 *Soit K un espace de Hausdorff compact. L'espace $C(K)$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues sur K*

$$\mathcal{C}(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est continue} \}$$

Munissons l'espace des fonctions continues $C(K)$ de la norme suivante

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Cette norme est bien définie d'après les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.6.5 *L'image d'un ensemble compact par une application continue est compact.*

Théorème 1.6.6 *Soit K un espace de Hausdorff compact. Alors $\mathcal{C}(K)$ est un espace de Banach.*

Remarque 1.6.4 *L'espace $\mathcal{C}(K)$ n'est pas réflexif.*

Chapitre 2

Opérateurs sommables

Dans ce chapitre nous essayons d'attirer l'attention de quelques concepts pour celui qui s'intéressent à ce travail . Pour ce la nous avons cité quelques terminologies de base comme les espaces de Banach réticulés. Notamment Nous mentionnerons tout ce dont nous avons besoin et qui sont liés aux applications sommants de toutes sortes. Par exemple, sans limitation opérateurs linéaires p-convexes, q-concaves et opérateurs linéaires p-sommants.

2.1 Les application linéaires

Définition 2.1.1 Soient X, Y deux espaces normés et $u : X \rightarrow Y$ une application est linéaire si et seulement si

- 1) $\forall x, y \in X : u(x + y) = u(x) + u(y)$.
- 2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

On note par : $L(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires, sachons que u_1 et $u_2 \in L(X, Y)$ on le muni de deux opérations algébriques suivantes :

- 1) $\forall x \in X : (u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x)$.
- 2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda u)(x) = \lambda u(x)$.

Définition 2.1.2 Soit $u \in L(X, Y)$. L'application linéaire u est continue s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq C \|x\|. \quad (2.1)$$

On note $L(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues.

On définit l'application $\|\cdot\|$ de $L(X, Y)$ dans R_+ en posant

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|u(x)\|_Y}{\|x\|_X} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|_Y. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\forall x \in X : \|u(x)\|_Y \leq \|u\| \|x\|_X.$$

Théorème 2.1.1 La quantité $\|u\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$. Si Y est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est aussi un espace de Banach.

Théorème 2.1.2 Soit $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires, si $\dim X < \infty$ alors toute application linéaire de X dans Y est continue.

Définition 2.1.3 Une application $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dite isomorphisme ssi elle est :

1- u est continue.

2- u est bijective.

3- u^{-1} est continue.

Donc dans ce cas on dit que X et Y sont isomorphes noté $X = Y$.

Remarque 2.1.1 Les espaces de Banach de dimension finis " n " / $n \in \mathbb{N}$ sont tous isomorphes à l'espace $\mathbb{R}^n$.

2.1.1 Espace dual, reflexif et séparable

Définition 2.1.4 I- Soit X un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note X^* , l'espace de Banach des formes linéaires continues sur X , c.-à-d.

$$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) \quad (2.2)$$

il est muni de la norme

$$\begin{aligned} \|x^*\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |x^*(x)| \\ &= \sup_{\|x\|=1} |x^*(x)| \\ &= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|}. \end{aligned}$$

II- Soit X un espace normé, le bidual de X , noté X^{**} , est le dual de X^* . Pour tout $x \in E$ notons

$$J_X(x) : X^* \longrightarrow \mathbb{K}.$$

la forme linéaire sur X^* qui à $x^* \in E^*$ associe $x^*(x)$

$$\forall x^* \in E^* : J_X(x^*) = x^*(x)$$

pour tout $x^* \in E^*$ on a

$$|J_X(x)(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\|$$

donc $J_X(x) \in X^{**}$ et $\|J_X(x)\| \leq \|x\|$. L'application $J_X \in \mathcal{L}(X, X^{**})$ est appelée plongement canonique de X dans son bidual.

Définition 2.1.5 Un espace de Banach X est dit réflexif si l'application canonique $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ est bijective. Autrement dit, X et X^{**} sont isomorphes isométriques.

Proposition 2.1.1 *Soit X un Banach. Alors X est réflexif ssi X^* est réflexif.*

Définition 2.1.6 *Soit X un espace métrique. On dit que X est séparable si X possède une partie dénombrable et dense.*

Exemple Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ (munis d'une norme quelconque) sont séparables.

Théorème 2.1.3 *Soit X un Banach. Si X^* est séparable alors X est aussi séparable. La réciproque est en générale fausse.*

Corollaire 2.1.1 *Soit X un Banach réflexif. Alors X séparable si et seulement si X^* est séparable.*

2.1.2 L'adjoint d'un opérateur linéaire

Définition 2.1.7 *Soit X, Y deux espaces vectoriels normés. Pour un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(X; Y)$, on définit l'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(Y^*; X^*)$ par :*

$$T^*(y^*)(x) = y^*(Tx) \text{ (i.e.,) } \langle x ; T^*y^* \rangle = \langle Tx ; y^* \rangle ,$$

pour tout $x \in X$ et $y^ \in Y^*$, T^* est appelé adjoint de T .*

Proposition 2.1.2 1) *Soit $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ alors T^* linéaire et $\|T\| = \|T^*\|$.*

2) *Pour tout $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y; Z)$ on a $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.*

2.2 Topologie faible et *-faible

Définition 2.2.1 (Topologie faible) *Soit X un espace de Banach, on note X^* l'espace dual ($X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

La topologie faible, noté $\sigma(X, X^)$ sur un espace de Banach X est la plus petite topologie sur X rendant continue tous les éléments $x^* \in X^*$.*

Théorème 2.2.1 *Les sous espaces vectoriels fermés de X sont les mêmes pour les deux topologies (forte et faible). Il en est même plus généralement des parties fermées convexes.*

Théorème 2.2.2 (Topologie *-faible) *La topologie *-faible d'ésignée aussi par $\sigma(X^*, X)$ est la topologie la moins fine sur X^* rendant continues tout les application $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme $X \hookrightarrow X^{**}$, il est clair que la topologie $\sigma(X^*, X)$ est moins fine que la topologie $\sigma(X^*, X^{**})$.*

*Autrement dit la topologie *-faible $\sigma(X^*, X)$ possède moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$.*

Théorème 2.2.3 (Alaoglu-Banach-Bourbaki) *L'ensemble $B_{X^*} = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie *-faible $\sigma(X^*, X)$.*

Théorème 2.2.4 (Kakutani) *Soit X un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si $B_{X^*} = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie $\sigma(X, X^*)$.*

2.3 Espaces de Banach réticulés

Cette section à une très importante rôle pour ce travail car là on va voir l'espace muni d'une relation d'ordre totale ou partielle qui nous fournit l'utilisation des inégalités dans notre travail et autres propriétés. Pour plus de détail voir [6] , [8] [7].

Définition 2.3.1 1- Soit E un ensembl non vide muni d'une relation binaire dite d'ordre et notée " $\leq$ " si

- (i) $\forall x \in E, x \leq x$ (réflexive),
- (ii) $x, y \in E, x \leq y \text{ et } y \leq x \implies x = y$ (antisymetrique),
- (iii) $x, y, z \in E, x \leq y \text{ et } y \leq z \implies x \leq z$ (transitive).

2- Un espace vectoriel ordonné X la dont pour les quel toute paire d'éléments à une borne supérieur est appelé espace vectoriel réticulé,i.e.,

$$\forall x, y \in X, \sup(x, y) \in X \text{ et } \inf(x, y) \in X.$$

3- Soit X un espace vectoriel réel ordonné, X est complètement réticulé, si:

$$\forall A \in X \text{ tel que } A \neq \Phi, A \text{ majoré} \implies \sup(A) \text{ existe.}$$

Définition 2.3.2 *Un espace vectoriel ordonné est un espace vectoriel réel E qui est aussi un espace ordonné où les structures linéaires et de l'ordre reliées par les implications :*

- (1) Si $x, y, z \in E$ et $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$,
- (2) Si $x, y \in E$, $x \leq y$ et $0 \leq a \in \mathbb{R}$, alors, $ax \leq ay$.

Remarque 2.3.1 *Soit X un espace de Banach. Si X est réticulé alors,*

- 1) $\forall x \in X ; |||x||| = ||x||$,
- 2) $\forall x, y \in X ; |x| \leq |y| \implies ||x|| \leq ||y||$.

Notons:

$$||x|| = \sup(x, -x) \text{ tel que}$$

$$x = x^+ - x^- \text{ et } |x| = x^+ + x^- \quad (1.1),$$

ou la partie positive de x est $x^+ = \sup(x, 0)$ (ou $x^+ = x \vee 0$), et la partie négative de x est $x^- = \sup(-x, 0)$ (ou $x^- = x \wedge 0$)

$$\text{tel que } \sup((x + z), (y + z)) = \sup(x, y) + z.$$

Exemple 2.3.1 *Les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ avec leurs normes euclidiennes sont tous des espaces de Banach réticulés.*

Proposition 2.3.1 *Le dual E^* d'un espace de Banach réticulé E est un espace de Banach complètement réticulé muni de l'ordre nature*

$$x_1^* \leq x_2^* \iff \langle x_1^*, x \rangle \leq \langle x_2^*, x \rangle \quad \forall x \in E^+,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est le crochet de dualité.

2.3.1 Opérateurs linéaires positifs

Le but de cette partie est de faire un survole un peu approfondi sur les opérateurs linéaires positifs où on va donner la définition de ces opérateurs et leur construction algébrique, ce type d'opérateurs sont entre les espaces de Banach réticulés. Pour plus d'informations consulter [3] , [8].

Définition 2.3.3 [3] Si E et F sont des espaces vectoriels réticulés,

a) $T : E \longrightarrow F$ est un opérateur linéaire positif si $x \geq 0 \implies Tx \geq 0$, $T(E^+) = F^+$, sont fermés par l'addition et la multiplication par des réels positifs mais pas sous la multiplication par des réels négatifs. L'ensemble de tous ces opérateurs linéaires positifs est noté par : $\mathcal{L}^+(E, F)$.

b) L'espace engendré par les opérateurs linéaires positifs est dit l'espace vectoriel des opérateurs réguliers, noté par $\mathcal{L}^r(E, F)$.

Pour tout $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$, la norme de T est définie par:

$$\|T\|_r = \inf\{ \|S\| : S \in \mathcal{L}^+(E, F), |T(x)| \leq S(x), x \in E^+ \}.$$

Théorème 2.3.1 Si E est un Banach réticulé et F un espace normé réticulé alors tout opérateur régulier de E dans F est continu pour la norme

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_E^+\}, \text{ où } B_E^+ = B_E \cap E^+.$$

Proposition 2.3.2 L'espace $(\mathcal{L}^r(E, F), \|\cdot\|_r)$ est un espace de Banach. Si $F = \mathbb{R}$, alors $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \mathcal{L}^r(E, \mathbb{R})$

2.4 Mesure de Radon

Définition 2.4.1 On appelle une mesure de Radon , toute forme linéaire continue sur $C(K)$. Autrement dit c'est une forme à valeurs dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$1- \mu(f + g) = \mu(f) + \mu(g) .$$

$$2- \mu(\alpha f) = \alpha \mu(f) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} .$$

$$3- \exists a \geq 0 \quad |\mu(f)| \leq a \|f\| .$$

Définition 2.4.2 Nous noterons $\mathcal{M}(K)$ l'espace des mesures de Radon sur K , pour l'instant ce n'est autre que le dual topologique de $C(K)$ (i.e. $C(K)^*$). La norme d'une mesure est tout simplement la norme dans le dual topologique.

$$\|\ell\|_{\mathcal{M}(K)} = \|\ell\|_{C(K)^*} = \sup_{\|f\|_{C(K)} \leq 1} |\langle \ell, f \rangle| .$$

Remarque 2.4.1 On peut voir l'espace $C(K)$ exactement comme l'espace L^∞ .

Exemple 2.4.1 Soit l'espace $E = L^1(0, 1)$, Alors ses dual et bidual donné respectivement par

$$E' = L^\infty(0, 1) \quad \text{et} \quad E'' = \mathcal{M}(0, 1)$$

rappelons que les différents crochets de dualité sont définis par

$$\begin{aligned} \forall f \in L^1(0, 1), \forall g \in L^\infty(0, 1) \quad \langle f, g \rangle_{L^\infty, L^1} &= \int_0^1 f(t) g(t) dt, \\ \forall f \in L^\infty(0, 1), \forall \mu \in \mathcal{M}(0, 1) \quad \langle f, g \rangle_{\mathcal{M}, L^\infty} &= \int_0^1 f(t) d\mu. \end{aligned}$$

2.5 Opérateurs linéaires p -convexes, q -concaves

Dans cette section nous généralisons la notion d'opérateurs p -convexes et q -concaves aux opérateurs linéaires. Nous traitons aussi quelques exemples et remarques concernant cette classe. Pour plus de détails voir [5] .

Définition 2.5.1 1) Soient E un espace de Banach arbitraire, X un espace de Banach réticulé et $1 \leq p \leq \infty$. Un opérateur linéaire $u : E \longrightarrow X$ est dit p -convexe s'il existe une constante positive C telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ les opérateurs

$$\begin{aligned} u_n : l_p^n(E) &\longrightarrow X(l_p^n) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (u(x_1), \dots, u(x_n)) \end{aligned}$$

sont uniformément bornés par C .

C'est à dire que

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{i=1}^n |u(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| &\leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |u(x_i)| \right\| &\leq C \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \quad \text{si } p = \infty. \end{aligned}$$

La plus petite constante C vérifiant ces inégalités sera notée par $C^p(u)$.

2) Soient X, Y deux espaces de Banach dont X réticulé et $1 \leq p \leq \infty$. Un opérateur linéaire $u : X \longrightarrow Y$, est dit p -concave s'il existe une constante C telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ les opérateurs

$$\begin{aligned} u_n : X(l_p^n) &\longrightarrow l_p^n(Y) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (u(x_1), \dots, u(x_n)) \end{aligned}$$

sont uniformément bornés par C .

C'est à dire que

$$\begin{aligned} \|u(x_i)\|_{l_p^n(Y)} &\leq C \|x_i\|_{X(l_p^n)} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{1 \leq i \leq n} \|u(x_i)\| &\leq C \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right\| \quad \text{si } p = \infty. \end{aligned}$$

La plus petite constante C vérifiant ces inégalités sera notée par $C_p(u)$.

Remarque 2.5.1 Si X est réticulé, on dira qu'il est q -convexe (resp. q -concave) si l'identité est q -convexe (resp. q -concave).

Tout opérateur linéaire q -convexe (resp. q -concave) est borné et $\|T\| \leq C_q(T)$ (resp. $\|T\| \leq C_q(T)$).

Tout espace de Banach est 1-convexe. La p -convexité pour $1 \leq p \leq \infty$ est décroissante en p , voir [LT96]. Par exemple L_p pour $1 \leq p < \infty$ est p -convexe, et $C^p(L_p) = 1$.

Tout espace de Banach est ∞ -concave. La p -concavité est croissante en p . Par exemple L_p pour $1 \leq p < \infty$ est p -concave et $C_p(L_p) = 1$.

2.6 Opérateurs linéaires p -sommants

Définition 2.6.1 Soient X, Y deux Banach réticulés et $u \in B(X, Y)$. On dira que u est p -sommant pour $1 \leq p \leq \infty$ si,

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subset X \\ \left(\sum_1^n \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_1^n |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right.$$

ou bien

$$(\|(u(x_i))\|_{l_p^n(Y)} \leq C \|(x_i)\|_{l_p^n(X)}). \quad (2.3)$$

On note par

$$\pi_p(X, Y) = \{u : X \longrightarrow Y \text{ linéaire } p\text{-sommants}\}$$

et

$$\pi_p(T) = \inf\{C, \text{ vérifiant l'inégalité 2.3}\}.$$

Remarque 2.6.1 Soit $T \in \Pi_p(X, Y)$:

- 1) $\|(T(x_i)_{1 \leq i \leq n})\|_p \leq \pi_p(T) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{p, \omega},$
- 2) Si en prendre $n = 1$ dans (2.1) on a bien que ;

$$\|T\| \leq \pi_p(T).$$

Proposition 2.6.1 (Propriété d'edical Soient) $T \in \Pi_p(X, Y)$, $v \in \mathcal{L}(E, Y)$ et $\omega \in \mathcal{L}(Y, F)$

alors $\omega \circ T \circ v$ est p -sommant et

$$\pi_p(\omega \circ T \circ v) \leq \|\omega\| \pi_p(T) \|v\|.$$

Proposition 2.6.2 (l'inclusion) $\Pi_p(X, Y) \subset \Pi_q(X, Y)$ où $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $\forall T \in \Pi_p(X, Y), \pi_q(T) \leq \pi_p(T)$

Théorème 2.6.1 (*Théorème de Pietsch*) [5], [10] Soient $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ et c une constante positive , Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) u est p -sommant et $\pi_p(u) \leq c$.
- 2) Il existe une probabilité λ sur $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ telle que :

$$\|u(x)\| \leq c \left(\int_K |\langle x, \xi \rangle|^p d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.4)$$

3) Il existe $\tilde{u} \in \mathcal{L}(S, Y)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y \\
 \downarrow i & & \uparrow \tilde{T} \\
 S & \xrightarrow{J_{p/S}} & S_p \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C(K) & \longrightarrow & L_p(X, \lambda).
 \end{array}$$

Chapitre 3

Une représentation des opérateurs lattices

Ce chapitre s'intéresse aux opérateurs p -sommants et les opérateurs p -lattice sommants surtout les relations entre ces deux types d'opérateurs par la donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les espaces de Banach de démarrage et d'arrivées et sur l'opérateur lui même. Pour ce but ont a profité de ce mémoire pour faire une étude détaillé d'un travail de Monsieur Jerzy SZULGA en 1983 intitulé " On lattice summing operators " publier en le journal AMS [16] où il a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour le nouveau type des opérateurs lattice p -sommants et l'espace de Banach de démarrage X et cel d'arrivée Y qui est un espace de Banach réticulé. Pour que tout opérateur Lattice sommant $T : X \rightarrow Y$ soit absolument sommant. voir [16] ,[17].

Notation 3.0.1 Soit n un entier. Soit X un espace de Banach réticulé et $1 \leq p \leq \infty$. On note par $X(l_p^n)$ l'espace des suites $x = (x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de X telles que

$$\|x\|_{X(l_p^n)} = \left\| \left(\sum_1^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \quad (3.1)$$

et

$$\|x\|_{X(l_\infty^n)} = \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right\| \quad \text{si } p = \infty \quad (3.2)$$

L'espace $X(l_p^n)$ équipé de l'ordre naturel

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i, \quad \forall i,$$

est un espace de Banach réticulé.

Soit maintenant X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$. On note par $l_p(X)$ (resp. $l_p^n(X)$) l'espace des suites (x_i) dans X muni de la norme

$$\begin{aligned} \|(x_i)\|_{l_p(X)} &= \left(\sum_1^\infty \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ (\text{resp. } \|(x_n)\|_{l_p^n(X)} &= \left(\sum_1^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}) \end{aligned}$$

si p est fini, et on prend le sup si p est infini.

On désigne aussi par $l_p^\omega(X)$ (resp. $l_p^{n\omega}(X)$) l'espace des suites (x_i) dans X muni de la norme

$$\begin{aligned} w_p(\{x_i\}) &= \|(x_n)\|_{l_p^\omega(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^*} \leq 1} \left(\sum_1^\infty |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ (\text{resp. } \|(x_n)\|_{l_p^{n\omega}(X)} &= \sup_{\|\xi\|_{X^*} \leq 1} \left(\sum_1^n |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

On sait voir [5] que $l_p(X) = l_p^\omega(X)$ pour tout $1 \leq p < \infty$, si et seulement si, $\dim(X)$ est finie. Si $p = \infty$, on a $l_\infty(X) = l_\infty^\omega(X)$. On a aussi si $1 < p \leq \infty$, $l_p^\omega(X) \equiv B(l_{p^*}, X)$ isométriquement et $l_1^\omega(X) \equiv B(c_O, X)$ isométriquement (où p^* est le conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$). En d'autres termes, soit $v : l_{p^*} \longrightarrow X$ un opérateur linéaire tel que $v(e_i) = x_i$ (i.e., $v = \sum_1^\infty e_j \otimes x_j$, (e_j) est la base canonique de l_{p^*}). Alors, $\|v\| = \|(x_n)\|_{l_p^\omega(X)}$.

3.0.1 Produit tensoriel

On peut construire un produit tensoriel $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ des espaces $X_1, \dots, X_n$ par des éléments de l'espace $(L(X_1, \dots, X_n; Y))^*$:

Pour $x^j \in X_j (j = 1, \dots, n)$; on définit l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned} x^1 \otimes \dots \otimes x^n : L(X_1, \dots, X_n) &\longrightarrow \mathbb{k} \\ x^1 \otimes \dots \otimes x^n(\phi) &:= \phi(x^1, \dots, x^n) \end{aligned}$$

pour toute forme linéaire ϕ sur $X_1 \times \dots \times X_n$: Le fonctionnel $x^1 \otimes \dots \otimes x^n$ est un tenseur élémentaire.

Produit tensoriel algébrique

On considère le dual algébrique $L(X_1, \dots, X_m)^*$ de l'espace $L(X_1, \dots, X_m)$, tel que

$$L(X_1, \dots, X_m)^* = \{\Phi : L(X_1, \dots, X_m) \longrightarrow \mathbb{k} : \Phi \text{ est une forme linéaire}\}.$$

Le produit tensoriel de $X_1, \dots, X_m$ sera construit à partir des éléments de l'espace $L(X_1, \dots, X_m)^*$.

Soit $x^1, \dots, x^m \in X_1 \times \dots \times X_m$ on définit

$$\begin{aligned} x^1 \otimes \dots \otimes x^m : L(X_1, \dots, X_m) &\longrightarrow \mathbb{k} \\ x^1 \otimes \dots \otimes x^m(\varphi) &= \varphi(x^1, \dots, x^m) \end{aligned}$$

où φ est une forme m -linéaire .

On pose D l'ensemble formes définie par tous ces éléments,

$$D := \{x^1 \otimes \dots \otimes x^m : x^1 \in X_1, \dots, x^m \in X_m\} \subseteq \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m).$$

La forme $x^1 \otimes \dots \otimes x^m$ s'appelle tenseur élémentaire..

3.1 Opérateurs lattices

Dans cette section . Étant donné un espace de Banach E et un espace de Banach réticulé L . Nécessaires et suffisants conditions sur E et L sont données telles que tout opérateur lattice sommant

$u : E \rightarrow L$ soit absolument sommant.

Définition 3.1.1 Soient X, Y deux Banach réticulés et $u \in B(X, Y)$. On dira que u est p -sommant pour $1 \leq p \leq \infty$ si,

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subset X \\ \left(\sum_1^n \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_1^n |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right.$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subset X \\ \left(\sum_1^n \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C w_p(\{x_i\}). \end{array} \right.$$

Définition 3.1.2 Soient X, Y deux Banach réticulés et $u \in B(X, Y)$. On dira que u est lattice sommant pour $1 \leq p \leq \infty$ si,

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subset X \\ \left\| \sum_1^n u(x_i) \right\|_Y \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_1^n |\langle x_i, \xi \rangle| \right) \end{array} \right.$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subset X \\ \left\| \sum_1^n u(x_i) \right\| \leq C w_1(\{x_i\}). \end{array} \right. \quad (3.5)$$

On note par

$$\Lambda_p(X, Y) = \{u : X \longrightarrow Y \text{ linéaire } p\text{-lattice sommants}\}$$

et

$$\Lambda_p(T) = \inf\{C, \text{ vérifiant l'inégalité 3.5}\}.$$

Remarque 3.1.1 L'espace $\Lambda_p(X, Y)$ avec la norme $\Lambda_p(T)$ est un espace de Banach.

Proposition 3.1.1 Soit $T \in \Lambda(X, Y)$ donc on a

$$\|(T(x_i)_{1 \leq i \leq n})\|_p \leq \Lambda(T) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{p, \omega}.$$

-Si en (prendre $n = 1$) dans (2.2) on a bien que ;

$$\|T\| \leq \Lambda(T) \leq \Pi_1(T).$$

Notation 3.1.1 Soit L un espace de Banach, soit $y^* \in L^*$ tels que $y \geq 0$. On note par (L, y^*) le complément de L avec le respect de seminorme suivant $\langle y^*, |\cdot| \rangle$.

Remarque 3.1.2 (L, y^*) est isomorphe au L_1 et le homomorphisme naturel lattice $I_{y^*} : L \rightarrow (L, y^*)$ est continu.

Proposition 3.1.2 Soient X, Y deux Banach réticulés et $u \in L(X, Y)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1- u est un opérateur lattice sommant.
- 2- Pour tout $y^* \in L^*$ tel que $y \geq 0$. $I_{y^*} \circ u$ est absolument sommant.
- 3- Pour tout espace de Banach L_1 ou cel qui equivalent a non infinie dimentioniel espace L_1 et pour tout opérateur positif $S : L \rightarrow L_1$ Alors $S \circ u$ est absolument sommant.

3.2 Exemple d'un opérateur lattice sommant

Définition 3.2.1 Soient X, Y deux réticulés et $u \in L(X, Y)$. Alors u dit majoré si

$$M(u) = \sup \left\{ \left\| \sup_i |u(x_i)| \right\| : \|x_i\| \leq 1, i = 1, \dots, n \right\}.$$

soit finie. Dans ce cas on note par : $M(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs majorés qui est un espace de Banach.

Proposition 3.2.1 Soient X, Y deux Banach réticulés et $T \in L(X, Y)$. Alors u est un opérateur lattice sommant si et seulement si pour tout opérateur $U : l_\infty^n \rightarrow X$. on a $T \circ U$ est majorisé.

Preuve.

On a

$$\begin{aligned} \Lambda(T) &= \sup_n \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n T(x_i) \right\| : w_1(\{x_i\}) \leq 1, i = 1, \dots, n; \{x_i\} \subset X \right\} \\ &= \sup_n \sup \left\{ \left\| \sup \{|T(a_i x_i)| : |a_i| \leq 1\} \right\| : w_1(\{x_i\}) \leq 1, i = 1, \dots, n; \{x_i\} \subset X \right\} \\ &= \sup_n \sup \left\{ \left\| \sup |T(SU)| : U \in l_\infty^n, \|U\| \leq 1 \right\| : S : l_\infty^n \rightarrow X, \|S\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \{M(TS) : U \in l_\infty^n, \|U\| \leq 1 : S : l_\infty^n \rightarrow X, \|S\| \leq 1\}. Q.T.D. \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.2.1 Soient X, Y deux Banach réticulés et $U \in L(X, Y)$. Alors opérateur u majorisé est un lattice sommant avec $\Lambda((U)) \leq M(U)$. De plus si : $X = l_\infty^n$ on a $M(l_\infty^n, Y) = \Lambda(l_\infty^n, Y)$.

Théorème 3.2.1 Soit B un espace de Banach ayant cotype $q \geq 2$; pour tout espace compact séparé K , une application continue $T : C(K) \rightarrow B$ et tout $r > q$, alors T est r -sommant.

Définition 3.2.2 Soit B un espace de Banach, B est dite à le type $p \geq 1$ si pour toute suite finie $x_1, \dots, x_n$ de E alors :

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(u) x_i \right\| du \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

avec (r_i) est une suite de fonctions de Rademacher définit par :

$$r_i(u) = \text{sign}(\sin(2^n \pi u)),$$

et C est une constante .

B est dit (à le cotype) si dans l'inégalité précédente en remplace $(\leq)$ par $(\geq)$

on pose $T_y(B) = \sup \{p : B \text{ est de type } p\}$ et $C_o(B) = \{p : B \text{ est de cotype } p\}$; si $B \neq \{0\}$ alors :

$$1 \leq T_y(B) \leq 2 \leq C_o(B) \leq \infty.$$

Remarque 3.2.1 Pour tout $\{x_i\} \subset X$ on a

$$\sum_1^\infty |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup \left\{ \sum (a_i x_i) : a_i \in \mathbb{R}; \quad \sum |a_i|^p \leq 1 \right\}.$$

Remarque 3.2.2 [3], [5] et [9]. Notons si l'espace de Banach X est 1-concave, alors il est isomorphe dans un L_1 espace. Aussi on dit que un espace F est finiment représentable dans E (respectivement; K est lattice finiment représentable dans L) s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout sous-espace de dimension finie $F_0 \subset F$ (respectivement; sous lattice $K_0 \subset K$) on peut trouver un isomorphisme $I_0 : F_0 \rightarrow F$ (respectivement; $I_0 : K_0 \rightarrow K$) satisfaisant pour tout $x \in F$ (respectivement; $x \in K$) que :

$$\delta^{-1} \|x\| \leq \|I_0 x\| \leq \delta \|x\|.$$

Théorème 3.2.2 Soient X, Y deux Banach réticulés . Alors ; les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) – $\Lambda(X; Y) = \Pi_1(X; Y)$.
- (2) – $M(X; Y) \subseteq \Pi_1(X; Y)$.
- (3) – Il existe $p \in [1, 2]$ telle que on a les deux $\Pi_{p'}(\mathfrak{L}_\infty; Y) = B(\mathfrak{L}_\infty; Y)$ et Y est p -concave.

Remarque 3.2.3 Nous identifions les les opérateurs ∞ -absolument sommants et les opérateurs bornés. Ce qui suit est une adaptation de ce que nous avons besoin de Rosenthal [8] et Maurey et Pisier [7] .

Proposition 3.2.2 Soient $p \in [1, 2]$. Les propriétés suivantes sur l'espace de Banach E sont équivalentes :

- (1) – $M(E; l_p) \subseteq \Pi_1(E; l_p)$.
- (2) – Il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $\{x_j\} \subset E$ et $\{x_i^*\} \subset E^*$ on a

$$\sum (\sum |\langle x_i^*, x_j \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \leq cw_1(\langle x_j \rangle) (\sum \|x_i^*\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

- (3) – Pour tout espace de Banach F . on a $\Pi_1(E; F) = \Pi_p(E; F)$.
- (4) – $\Pi_{p'}(\mathfrak{L}_\infty; E) = B(\mathfrak{L}_\infty; E)$

Ausi si $p < 2$ alors pour tout les conditions dans ce qui précèdent elle (4) est équivalente a :

- (5) – $q_E < p'$ tel que $q_E = \inf \{q : \Pi_{q'}(\mathfrak{L}_\infty; E) = B(\mathfrak{L}_\infty; E)\}$.

Preuve. Les implications $(2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$ sont la dont la Propostion 3 en [8] .Le fait que infimum q_E n'est jamais atteint pour $2 < q$ qui est précisément [8] qui est dû à par Maurey et Pisier en [7]. Finalement (2) ni juste que une reformulation de (1) exprimé en termes d'opérateurs de rang fini. ■

Définition 3.2.3 *Un opérateur compact est une application continue entre deux espaces vectoriels topologiques X et Y envoyant les parties bornées de X sur les parties relativement compactes de Y . Les applications linéaires compactes généralisent les applications linéaires continues de rang fini.*

Lemme 3.2.1 *Soient E, L deux Banach réticulés. Supposons que F est finiment représentable dans E et K est lattice finiment représentable dans L et $M(E; L) \subseteq \Pi_1(E; L)$. Alors, $\pi_1(T) \leq cM(T)$ pour tout opérateur compact $T : F \rightarrow K$; où c est une constante de dépend pas de T .*

Preuve. Soit M^c et Π_1^c désigner les classes des opérateurs compacts dans resp $M(E; L)$ et $\Pi_1(E; L)$. Un argument standard montre que $M(E; L) \subseteq \Pi_1(E; L)$ ce qui implique que $M^c(E; L) \subseteq \Pi_1^c(E; L)$. En particulier par le principe de convexité locale [4, Proposition 1.4] $M^c(E; K'') \subseteq \Pi_1^c(E; K'')$. Enfin répéter la procédure habituelle mais en faisant en utilisant la propriété rxtension des opérateurs majorants comme indiqué dans [9, Proposition IV.3.10], nous en déduisons que $M^c(E; K) \subseteq \Pi_1^c(E; K)$. ■

Corollaire 3.2.2 *Si l_q est finiment représentable dans E où $1 < q \leq \infty$ et $M(E; L) \subseteq \Pi_1(E; L)$, alors L est q' -concave particulièrement par le théorème de Dvoretzky dans [2] on a $M(E; L) \subseteq \Pi_1(E; L)$ démontre que L soit un q' -concave.*

Preuve. (de théorème 3.2.2) En fait, avec lemme 3.2.1 nous pouvons, et faire, supposer que $M(l_q, L) \subseteq \Pi_1(l_q, L)$; alor pour tout $c > 0$, $\Pi_1(T) \leq cM(T)$, pour chaque opérateur de la forme $T = \sum_{i=1}^n e_i * y_i : l_q \rightarrow L$. mais

$$\Pi_1(T) \geq \sup \left\{ \sum |a_i| \|y_i\| : w_1(\{a_i e_i\}) \leq 1 \right\} = \left(\sum \|y_i\|^{q'} \right)^{1/q'};$$

$$M(T) \leq \left\| \sup \left\{ \left| \sum \langle e_i, x \rangle y_i \right| : \|x\| \leq 1 \right\} \right\| = \left(\sum \|y_i\|^{q'} \right)^{1/q'}$$

Combining ces estimations nous obtenons la condition souhaitée. (1) $\longrightarrow$ (2) est un conséquence de la Propotion (3.2.2)

(2) $\longrightarrow$ (3) soit $P_L = \{p : L \text{ p concave}\}$. Avec [4, theorem 2.2], l_{p_L} est lattice fini représentant dans L . d'ou, avec lemma 3.2.1 et Proposition 3.2.2, $\prod_{p_L'}(L_\infty, E) = B(L_\infty, E)$.

Maintenant nous examinons trois cas : $p_L = 2$, $p_L \in (1, 2)$ et $p_L = 1$. les premiers rendements (3) avec $p=2$, En vue du corollaire (3, 2.2). Dans le second cas, nous appliquons la conditon (4) de proposition (3, 2.2) pour que $p_L' > q_E$ et cela implique (3) avec $p_L \in (1, 2)$ et $p_L = 1$ ne porte aucune information sur E , pourtant, si $q_E < \infty$, puis encore $q_E' > q_L = 1$ et nous ne pouvons pas continuer comme avant pour obtenir (3) pour un $p \in (1, 2)$. D'autre part, si $q_E < \infty$, équivalente, si l_∞ est finement représentable dans E (voir[7]), puis par corolaire (3, 2.2), L est 1- concave (notez que $p_L = 1$ n'implique pas la concavité , en général). C'est complétant la preuve de (2) $\longrightarrow$ (3).

(1) $\longrightarrow$ (3). Soit $p \in [1, 2]$ être tel que $\prod_{p_1'}(L_\infty, E) = B(L_\infty, E)$ et soit L p_c oncave .Par conséquent, par proposition (3,2.2), $\prod_1(E, L) = \prod_p(E, L)$. Par conséquent, par (3), il existe des constantes C et C_1 telle que pour chaque $T : E \longrightarrow L$ on a

$$\begin{aligned} \prod_1(T) &\leq C \prod_p(T) \leq CC_1 \sup \left\{ \left\| \left(\sum |Tx_i|^p \right)^{1/p} \right\| : w_p(\{x_i\}) \leq 1 \right\} \\ &\leq CC_1 \end{aligned}$$

Où (f_i) est une séquence de variables aléatoires réelles p satable et indépendantes dans $[0, 1]$ et

$$w_1(f) \leq 1 = \sup \left\{ \int_0^1 \left| \langle x', f(t) \rangle \right| dt : x' \in E', \|x'\| \leq 1 \right\}$$

Pour fonction E_p alorise f . Par le thorme de la routine de mesure on peut verifier que $\lambda(T) = \sup \left\| \int_0^1 |Tf(t)| dt \right\|$ Où le suprême est repris sur toutes les fonction mesurables du rang fini

avec $w_1(f) \leq 1$ $\prod_1(T) \leq CC_1\lambda(T)$ pour tous les opérateurs $T : E \longrightarrow L$ cela complète la preuve de (1) $\longrightarrow$ (3). ■

3.3 Bidual

Définition 3.3.1 Soit $x \in E$. Alors l'application

$$\langle \cdot, x \rangle : E^* \longrightarrow K$$

$$l \longrightarrow \langle l, x \rangle$$

est une forme linéaire sur E^* , un élément du bidual E^{**} de E .

3.4 Le principe de réflexivité local

Définition 3.4.1 Soit G un sous espace fini de bidual E'' de espace Banach E , et H un sous espace fini de dual E' donne $t \geq 0$ il existe un opérateur $R : G \longrightarrow E$ tel que :

- 1- $\|R\| \leq 1 + t$.
- 2- $\langle Rx'', y' \rangle = \langle x'', y' \rangle$ pour tout $x'' \in G$ et $y' \in H$.
- 3- Si $J : E \longrightarrow E''$ est l'injection canonique. pour tout x'' dans $G \cap J(f)$. J on a $Rx'' = x''$.

3.5 Théorème Hahn-Banach

Théorème 3.5.1 Soit X un espace Banach et $X_0 \subset X$ est sousespace. Soit $U_0 : X_0 \longrightarrow R$ est opérateur linéaire borné. Il y a un extension $U : X \longrightarrow R$ de U ($U|_{X_0} = U_0$) tel que $\|U\| = \|U_0\|$.

3.6 Opérateurs linéaires p -lattice sommants

Définition 3.6.1 Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit E un espace de Banach, F un espace de Banach lattice et T un opérateur linéaire. On dit que T est p -lattice sommant, s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout $(x_1, \dots, x_n)$ dans E , on a

$$\|(T(x_i))\|_F \leq C \|(x_i)\|_E \quad (3.6)$$

et

$$\lambda_p(T) = \inf\{c \text{ vérifiant (3.6)}\}.$$

L'ensemble de tous les opérateurs linéaires p -lattice sommants est noté par :

$$\Lambda_p(X, Y) = \{T : E \longrightarrow F \mid \text{les opérateurs linéaires } p\text{-lattice sommants}\}.$$

Proposition 3.6.1 Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur p -lattice sommant alors $T : E'' \longrightarrow F''$ c'est aussi un opérateur p -lattice sommant.

Preuve. Soit E un espace de Banach, F un espace de Banach lattice. Si $T : E'' \longrightarrow F''$ c'est aussi un opérateur p -lattice sommant, alors $T : E \longrightarrow F$ doit être un opérateur p -lattice sommant aussi. Alors, considérez $x_1'', \dots, x_n''$ dans E'' . Nous devons trouver une estimation appropriée pour $\left\| \left(\sum_{i=1}^n |T'' x_i''|^p \right)^{1/p} \right\|$.

Pour chaque ensemble fini c dans l'unité balle B_q de $(R^q, \|\cdot\|_q)$, défini par

$$y_c'' = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n a_i T'' x_i'', a = (a_1, \dots, a_n) \in c \cup \{0\} \right\}.$$

Puis, avec (3.6), on a $\left(\sum_{i=1}^n |T'' x_i''|^p \right)^{1/p} = \sup y_c''$. La famille $\{y_c''\}$ augmente pas de vecteurs positifs dans F'' , norme délimité, et donc il est $\sigma(F'', F''')$ - Cauchy et $\sigma(F'', F')$ - relativement compact.

En particulier y_c'' a un point d'accumulation y_0'' pour le $\sigma(F'', F''')$ topologie, et y_c'' converge

à y_0'' dans $\sigma(F'', F''')$. On peut monter que $y_c'' = \sup_c y_0''$.

Alors, étant donné $\epsilon \geq 0$ il existe $y' \in F'$ tel que $y' \geq 0$, $\|y'\| \leq 1$ et

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{i=1}^n |T'' x_i''|^p \right)^{1/p} \right\| &= \|y_0''\| \leq \langle y_0'', y' \rangle + \epsilon = \lim_c \langle y_c'', y' \rangle + \epsilon \\ &\leq \langle y_{c_0}'', y' \rangle + 2\epsilon \end{aligned}$$

Pour un ensemble fini $c_0 = \{a^1, \dots, a^n\}$ dans B_q , avec $0 \in c_0$ avec *** , II, 5, 5 et II, 4, 2 :

$$\begin{aligned} \langle y_{c_0}'', y' \rangle &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^j T'' x_i'', 1 \leq j \leq m \right\}, y' \geq 0 \\ &= \sup \left\{ \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_i^j \langle T'' x_i'', y' \rangle \right), y'^1 + \dots + y'^m = y', y'^j \geq 0 \right\} \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_i^j \langle x_i'', T' y_j' \rangle \right) + \epsilon \end{aligned}$$

Pour $y_1', \dots, y_m'$ dans F' avec $y_j' \geq 0$, $1 \leq j \leq m$ et $y_1' + \dots + y_m' = y'$.

Nous utilisons le principe de réflexivité local, avec $G = [x_1'', \dots, x_n''] \subset E''$, et $H = [T' y_1', \dots, T' y_m'] \subset$

E' : étant donné $t \geq 0$, il y a un opérateur $R : G \longrightarrow E$ tel que $\|R\| \leq 1 + t$, et

$\langle x_i'', x' \rangle = \langle R x_i'', x' \rangle$ pour tout $x' \in H$.

écriture $x_i = R x_i'' : \langle x_i'', T' y_j' \rangle = \langle x_i, T' y_j' \rangle = \langle T x_i, y_j' \rangle, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Puis :

$$\begin{aligned} \|y_0''\| &\leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_i^j \langle T x_i, y_j' \rangle \right) + 3\epsilon \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^j T x_i, 1 \leq j \leq m \right\}, \sum_{j=1}^m y_j' + 3\epsilon \\ &\leq \left\| \left(\sum_{i=1}^n |T x_i|^p \right)^{1/p} \right\| + 3\epsilon. \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse, T est p -lattice sommant.

$$\|y_0''\| \leq \lambda_p(T) \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x' \rangle|^p \right)^{1/p}, x' \in B_{E'} \right\} + 3\epsilon.$$

Enfin, pour tout x' dans $B_{E'}$, $|\langle x_i, x' \rangle| = |\langle Rx_i'', x' \rangle| = |\langle x_i'', R'x' \rangle|$ ou $R'x' : G \longrightarrow K$ est une forme linéaire continue avec $\|R'x'\| \leq 1 + t$.

Avec Théorème de Hahn-Banach, il existe une extension x''' de x' à E'' , avec $\|x'''\| \leq 1 + t$: et par conséquent

$$|\langle x_i'', R'x' \rangle| = |\langle x_i'', x''' \rangle| = (1 + t) \left| \left\langle x_i'', \frac{x'''}{1 + t} \right\rangle \right|$$

ou $x'''/(1 + t) \in B_{E''''}$.

Par conséquent

$$\sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x' \rangle|^p \right)^{1/p}, x' \in B_E' \right\} \leq (1 + t) \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i'', x''' \rangle|^p \right)^{1/p}, x''' \in B_{E''''} \right\}$$

Nous avons obtenu que pour chaque $\epsilon \geq 0$ et chaque $t \geq 0$

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |T''x_i''|^p \right)^{1/p} \right\| \leq \lambda_p(T)(1 + t) \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i'', x''' \rangle|^p \right)^{1/p}, x''' \in B_{E''''} \right\} + 3\epsilon.$$

puis T'' est p -lattice sommant, avec $\lambda_p(T'') \leq \lambda_p(T)$. ■

Remarque 3.6.1 Le résultat est vrai aussi pour $p = \infty$ ($T : E \longrightarrow F$ est dit à être ∞ -lattice sommant s'il existe une constante $K \geq 0$ telle que pour chaque famille finie $\{x_1, \dots, x_n\}$ dans E

$$\|\cup_{i=1}^n |Tx_i|\| \leq K \max \{\|x_i\|, 1 \leq i \leq n\}.$$

Bibliographie

- [1] E. DUBINSKY, A. PEKZYŃSKI AND H. P. ROSENTHAL, *On Banach spaces for which $\Pi_p(\mathfrak{L}_\infty; E) = B(\mathfrak{L}_\infty; E)$. *Studia Math.* 44 (1972), 617-634.*
- [2] A. DVORETZKY, *Some results on convex bodies in Banach spaces (Proc. Sympos. Linear Spaces. Jerusalem, 1961), Jerusalem Academic Press, Jerusalem; Pergamon, Oxford, 1961. pp. 123-160.*
- [3] J. L. KRIVINE. *Théorèmes de factorization dans les espaces réticules. Séminaire Maurey-Schwartz, 1973-74. exp. 22-23.*
- [4] *Sous espaces de dimension finie des espaces de Banach réticules, Ann. of Math. (2) 104 (1976). 1-29.*
- [5] J. LINDENSTRAUS AND L. TZAFRIRI, *Classical Banach spaces. Vol. II Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York. 1979.*
- [6] B. MAUREY, *Type et cotype dans les espaces munis de structures locales inconditionnelles. Sem. Maurey-Schwartz, 1973-74, exp. 24-25.*
- [7] B. MAUREY AND G. PISIER. *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach. Studia Math.* 58 (1976), 45-90.
- [8] H. P. ROSENTHAL, *On subspaces of L_p , Ann of Math. (2) 97 (1973), 344-373.*
- [9] H. H. SCHAEFFER, *Banach lattices and positive operators. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York. 1974.*

- [10] L. P. YANOVSKII, *On summing and lattice summing operators and characterization of AL-spaces. Sibirsk. Mat. Z* 20 (1979). 401-408. (Russian)
- [11] LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L. : *Classical Banach Spaces, I and II. Springer-Verlag, Berlin, 1996.*
- [12] SCHAEFER, H.H. : *Banach Lattices and Positive Operators. Springer, Berlin, 1974.*
- [13] MEYER-NIEBERG, P. : *Banach lattices. Universitext, Springer-Verlag, Berlin 1991.*
- [14] BEZIS, H. : *Analyse fonctionnelle, Théorie et application. Dunod, 1983.*
- [15] HENGARTNER, W., LAMBERT, M., REISCHER, C. : *Introduction à l'analyse Fonctionnelle. Les Presses de l'Université du Québec, 1981.*
- [16] JERZY SZULGA. *On lattice summing operators, mathematical society Volume X7. Number 2. February 1983.*
- [17] BEATRIZ PORRAS POMARES. *REPRESENTATION OF γ -LATTICE SUMMING OPERATORS. Canad. Math. Bull. Vol. 35 (2), 1992 pp. 267-277 .*

ملخص المذكرة باللغة العربية :الغرض من هذه الأطروحة هو إجراء دراسة تفصيلية لعمل السيد Jerzy SZULGA في عام 1983 بعنوان " On lattice summing operators" المنشور في مجلة AMS حيث قدم الشروط اللازمة والكافية للنوع الجديد من المؤثرات الخطية الشبكية الجمعية مع وضع شروط حول فضاءات بناخ البداية X و فضاءات بناخ الوصول Y وهي فضاءات بناخ مرتبة و شبكية. بحيث يتم جعت كل مؤثر حطي جمعي يصبح جمعي شبكي حيث $T: X \rightarrow Y$.