UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option :Analyse fonctionnelle

Par

DARRAF Fadila

Sujet

Sur les opérateurs linéaires (q,p;Y)-sommants

Devant le jury :

Mr.MEZRAG Lahcène	**Prof. Univ de M'sila**	**Président**
Mr.TALLAB Abdelhamid	**M.A.AUniv de M'sila**	**Rapporteur**
Mr.DAHIA Elhadj	**Dr. Univ de M'sila**	**Examinateur**

Promotion : 2015 / 2016

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Malgré tout le soin apporté à la rédaction de ce mémoire, il est possible que quelques erreurs soient toujours en présentées dans ce travail.

A terme de cette étude, j'ai le plaisir et le devoir de remercier en premier lieu le bon dieu, le tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage pour accomplir cette tâche.

Avec une immense estimation, j'exprime mes plus grands remerciements à ***Monsieur A. TALLAB****, qui m'a encadrée d'une manière exemplaire: de compétence et de disponibilité à mon égard.*

Je tiens à exprimer tous mes respects à mes parents, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours encouragée.

Mes remerciements à tous les professeurs du département de Mathématiques.

Je ne saurais aussi oublier mes amis et mes collègues qui ont participé de loin ou de prés et qui m'ont aidée à l'élaboration de ce mémoire.

Résumé

Nous intéressons ici à étudier une classe d'opérateurs, que nous appellerons les opérateurs $(q, p; Y)$-sommants, avec quelques propriétés générales, et nous donnerons quelques exemples, ensuite nous montrerons le théorème de Pietsch pour cette classe d'opérateur pour $(p = q)$. Puis on utilisera les notions de $(q, p; Y)$-sommants pour montrer quelques théorèmes dans la théorie des opérateurs sommants.

Mots clés : Espace de Banach,espace compact de Hausdorff, Produit tensoriel injective, Les opérateurs p-sommant et (p, q)-sommant, les opérateurs $(q, p; Y)$-sommants, Théorème du domination de Pietsch, et les opérateurs (p, Y)-sommants, les opérateurs intégraux.

Notations générales

$L^p(\mu)$	Espace des classes d'équivalence $p.p$ des fonctions $\mathcal{T}$-mesurable.
$\mathcal{C}(K)$	Espace des fonctions continues de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}$.
$l_p(X)(\text{resp.}l_p^n(X))$	Espace des suites $(x_i)(\text{resp.}(x_i)_{1\leq i\leq n})$ dans X absolument p-sommables.
$l_p^\omega(X)(\text{resp.}l_p^{n\ \omega}(X))$	Espace des suites $(x_i)(\text{resp.}(x_i)_{1\leq i\leq n})$ dans X faiblement p-sommables.
l_p	Espace des suites scalaires.
$\mathcal{L}(X,Y)$	Espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y.
$\sigma(X,X^*)$	Topologie faible définie sur X.
$\sigma(X^*,X)$	Topologie $*-$faible définie sur X^*.
B_X	Boule unité fermé de X .
$(\Omega,\mathcal{A},P)$	Espace de probabilités.
$\mathcal{B}$	Tribu borélienne.
$L^0(E)$	Espace des classes d'équivalence $p.s$ des variables aléatoires à valeurs dans E.
$L^p(E)$	Espace des $X\in L^0(E)$ telles que $\Vert X(.)\Vert\in L^p(\Omega,\mathcal{A},P)$.
$L^p(\mu,E)$	Espace des classes d'équivalence $p.p$ des fonctions $(\mathcal{T}\text{-}\mathcal{B})$-mesurables.
$\Pi_{p,q}(X,Y)$	Espace de Banach des opérateurs linéaires (p,q)-sommants de X dans Y.
$\Pi_p(X,Y)$	Espace de Banach des opérateurs linéaires p-sommants de X dans Y.
$\mathbb{E}(X)$	L'espérance de X.

Table des matières

Introduction

La notion d'opérateurs linéaires p-sommants remonte à Grothendieck dans les années 1950, mais seulement en 1967 et 1968, les travaux classiques de Pietsch [17] et Lindenstrauss-Pełczyński [15] précisés les idées précieuses de Grothendieck; et ont clairement contribué au développement de cette notion. Dans ce travail on va étudier la notion des opérateurs $(q, p; Y)$-sommants qui est introduit par Kislyakov dans 1992 et présenter aussi le théorème de domination pour cette catégorie d'opérateurs pour $p = q$ qui est démontrer par Kislyakov [13] en utilisant des nouvelles techniques trouvées dans [21], [4], [22]. Une version générale du théorème domination de Pietsch démontré dans [21] est une version améliorée d'un résultat similaire dans [4] (voir aussi [22]). Le but de ce travail est de regrouper quelques résultats importants qui sont dédiés au développement de quelques théorèmes de sommabilité des opérateurs linéaires de type $(q, p; Y)$-sommants.

On va étudie la notion des opérateurs linéaires $(q, p; Y)$-sommants et les relations entre ces opérateurs avec les opérateurs (q, p)-sommants et les opérateurs intégraux. Pietsch a établie que si T est p-sommant et S est q-sommant, alors ST est r-sommants(voir 2.1.5 dans le chapitre) avec $r = \min\left\{1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right\}$. Ce résultat est généralisé par N.Tomczak [28] où il a prouvé que si S est (s, t)-sommants alors ST est(r, q)-sommants, où $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} \leq 1, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{t} \leq 1$. Notre but est de représenter une généralisations de résultat de N.Tomczak pour les operateurs (p, Y)-sommants qui a été de démontré par O.Blasco et T.Signes dans [2].

Notre travail est réparti en deux chapitres:

Dans le premier chapitre, on donne un aperçu général sur les opérateurs isomorphismes isométriques, puis la topologie faible et $*-$faible et les opérateurs linéaires bornés et aussi les opérateurs compacts et faiblement compacts et quelques notions fondamentales de probabilités et quelques définitions (la suite de Rademacher Bernoulli, Produit tensoriel des espaces vectoriels, formes bilinéaires, puis le produit tensoriel des espaces de Banach,norme projective, norme injective, les normes raisonnables,...etc.), enfin on définit le type et cotype de Rademacher et quelques propriétés.

Le deuxième chapitre, on va définir, les espaces de suites p-sommables et faiblements sommables et la classe des opérateurs p-sommants. On va rappeler aussi dans ce chapitre les opérateurs (q, p)-sommants. Au plus quelques théorèmes par exemple le théorème de domination de Pietsch et l'inclusion et le théorème de Grothendieck, on va chercher à étudier, la relation entre ces opérateurs et les opérateurs $(q, p; Y)$-sommants. Puis la composition des opérateurs (p, Y)-sommants. Enfin on va voir la relation entre les opérateurs intégraux et les opérateurs 1-sommants et intégraux.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques définitions essentielles

On désignera par X et Y deux espaces de Banach et X^*, Y^* sont leurs espaces duaux, et rappelons que le bidual de X noté X^{**} est le dual de X^* et qu'on peut muni de la norme

$$\forall\ \xi \in X^{**},\ \ \|\xi\|_{X^{**}} = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |< \xi, x^* >| \, .$$

Définition 1.1.1 *Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ entre X et Y est dit borné s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|T(x)\| \leq C \|x\| \, , \text{ pourtout } x \in X. \tag{1.1.1}$$

Dans ce cas, pour tout $x \in X$, on définit

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf \{C : \|T(x)\| \leq C \|x\|\} \\ &= \sup\nolimits_{x \in B_X} \|T(x)\| \\ &= \sup\nolimits_{\|x\|=1} \|T(x)\| \\ &= \sup\nolimits_{x \neq 0} \tfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} . \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de X dans Y qui est un espace de Banach sur $\Bbbk(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ muni de la norme définit par (1.1.2). *La boule unité fermée de X sera désignée par B_X.*

Définition 1.1.2 (Isomorphisme, isométrie) *L'application linéaire $T : X \to Y$ est dite isomorphisme si T est bijective continue et T^{-1}continue. De plus si $\|T(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$, on dit que T est une isométrie. Si l'isomorphisme $T : X \to T(X)$ vérifier $\|T(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$, on dit que T est une isométrie injective et on écrit $T : X \hookrightarrow Y$.*

Définition 1.1.3 *Un espace de Banach Y est* ***finiment représentable*** *dans un espace de Banach X si pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout sous-espace E de Y de dimension finie, il existe une application linéaire $T : E \to X$, avec*

$$\|x\| \leq \|T(x)\| \leq (1+\varepsilon)\|x\|, \ x \in E.$$

Définition 1.1.4 (Topologies faible et $*$-faible) *Sur l'espace X. On définit la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ noté aussi ω qui est la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les formes linéaires sur X. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de X; et $x \in X$. On dit que converge faiblement vers x et on écrit $x = \omega - \lim_{n\to\infty} x_n$ si et seulement si*

$$\langle x^*, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x^*, x_n\rangle, \forall x^* \in X^*$$

Sur l'espace X^* muni à la topologie de la norme$\|.\|_{X^*}$ et la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$, est définie la topologie $*-$faible (préfaible) $\sigma(X^*, X)$ note aussi ω^*qui est la topologie la moins fine sur X^* rendant continues toutes les application linéaires.

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_x & : & X^* & \to & \mathbb{k} \\ & & x^* & \mapsto & \varphi_x(x^*) = \langle x^*, x\rangle . \end{array}$$

Soit $(x_n^*)_{n\geq 1}$ une suite de X^* , $x^* \in X^*$. On dit que $(x_n^*)_{n\geq 1}$ converge préfaiblement vers x^*dans X^* et on écrit $x^* = \omega^* - \lim_{n\to\infty} x_n^*$ si et seulement si

$$\langle x, x^*\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, x_n^*\rangle, \forall x \in X$$

Définition 1.1.5 *Un espace de Banach X est dit réflexif si l'application*

$$\begin{array}{rcccl} J & : & X & \to & X^{**} \\ & & x & \mapsto & J(x) = \langle x, x^*\rangle \end{array}$$

est bijective. Notons que si X est un espace normé et si l'application canonique $J : X \to X^{**}$ est bijective, alors nécessairement X est un espace de Banach, car X^{**} est un espace de Banach et J est une application linéaire bijective et isométrique.

Exemple 1.1.1

1. Les espaces normés de dimension finies sont réflexifs.

2. Pour tout $p \in]1, \infty[$, l_p est réflexif.

Définition 1.1.6 *Un sous-ensemble E de X est relativement compact si son adhérence $\overline{E}$ est compacte. Le sous-ensemble E est dit précompact si son complété est compact.*

Définition 1.1.7 (Les opérateurs compacts) *Un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dit compact s'il transforme toute partie bornée de X en une partie relativement compact de Y i.e.,($\forall$ B borneé dans X, $\overline{T(B)}$ compact). Autrement dit, T est compact si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de X, la suite $(T(x_n))_n$ admet une sous-suite convergente. On note $\mathcal{K}(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires compacts de X dans Y .On pose $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X)$.*

Définition 1.1.8 *Un opérateur linéaire borné $T : X \to Y$ est faiblement compact ($T \in \mathcal{W}(X, Y)$), si $T(B_X)$est relativement faiblement compact de Y (i.e., $\overline{T(B_X)}$ faiblement compact de Y).*

Théorème 1.1.1 *(**Eberlein-Šmulian,** [5])*

L'opérateur $T : X \to Y$ est faiblement compact, si est seulement si, donnée une suite bornée $(x_n) \subset X$, alors $T(x_n)$ possède une sous-suite faiblement convergente dans Y.

Remarque 1.1.1 *Soit $T : X \to Y$ un opérateur. Si X ou Y sont réflexifs, alors T est faiblement compact.*

1. *Un sous-ensemble $A \subset X$ (X un normé) est relativement faiblement compact si la fermeture faible de A est compact de la topologie faible de X.*

2. *Soit X un espace de Banach. Alors B_X est faiblement compact, si et seulement si, X est réflexif.*

On appelle espace de probabilité un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ une probabilité sur $\mathcal{A}$, de masse totale 1, Ω représente l'ensemble de toutes les éventualités possibles.

Théorème 1.1.2 (L'inégalite de Hôlder) *Soient $q, p \in \left]0, +\infty\right[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ et $(x_i)_i$,$(y_i)_i \in X$ on a*

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{1.1.3}$$

Théorème 1.1.3 (L'inégalite de Hôlder généralisé) *Soient $r, p, q \in \left]0, +\infty\right[$ telle que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\|x_i\| \|y_i\|)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1.4}$$

1.2 Représentation sur un produit tensoriel

1.2.1 Produit tensoriel des espaces vectoriels

Dans cette section $X; Y, Z$ sera espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{k}$ telle que($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.2.1 ***(formes bilinéaire)*** *Une application $A : X \times Y \to Z$ est bilinéaire si elle est linéaire pour chaque variable.i.e.,*

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) &= \alpha_1 A(x_1, y) + \alpha_2 A(x_2, y) \\ A(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) &= \beta_1 A(x, y_1) + \beta_2 A(x, y_2) \end{aligned}$$

Pour tout $x, x_1, x_2 \in X$ et $y, y_1, y_2 \in Y$ et $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{k}(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Désignons $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ l'espace des applications bilinéaires de $X \times Y$ dans Z. Lorsque $Z = \mathbb{k}$, désignent $\mathcal{B}(X \times Y, \mathbb{k}) = \mathcal{B}(X \times Y)$.

Définition 1.2.2 *Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel libre généré par l'ensemble $X \times Y$ et $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$ le sous-espace engendré par les éléments de la forme*

$$\begin{gathered} (\alpha x_1 + x_2, y) - \alpha(x_1, y) - (x_2, y), \\ (x, \alpha y_1 + y_2) - \alpha(x, y_1) - (x, y_2). \end{gathered}$$

où $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1 y_2 \in Y$ et $\alpha \in \Bbbk$. Par définition, le produit tensoriel de X et Y est l'espace vectoriel quotient $X \otimes Y := \mathcal{F}/\mathcal{N}$.

Définition 1.2.3 *Soient X et Y des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Un produit tensoriel de X et Y est un espace vectoriel Z sur $\mathbb{R}$ avec une application bilinéaire $\phi : X \times Y \to Z$ tel que pour tout espace vectoriel V et toute bilinéaire $\psi : X \times Y \to V$, il existe une application linéaire unique $\tilde{\psi} : Z \to V$ tel que $\psi = \tilde{\psi} \circ \phi$, appelé la" Propriété universelle "du produit tensoriel. telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \underset{\to}{\phi} & Z \\ \psi \downarrow & \swarrow \tilde{\psi} & \\ V & & \end{array}$$

On rappelle que l'image d'un couple $(x, y) \in X \times Y$ par le morphisme universelle $\phi : X \times Y \to Z$ se note $x \otimes y \in Z$.

Proposition 1.2.1 *Pour toute application bilinéaire $\psi : X \times Y \to V$, il existe un unique application linéaire $\tilde{\psi} : Z \to V$ tel que*

$$\tilde{\psi}(x \otimes y) = \psi(x, y) \text{ pour tout } x \in X \text{ et } y \in Y. \tag{1.2.1}$$

Preuve. Définir une application linéaire $\hat{\psi} : \mathcal{F} \to V$ par

$$\hat{\psi}\left(\sum_i \alpha_i (x_i, y_i)\right) := \sum_i \alpha_i \psi(x_i, y_i)$$

Bilinéarité de ψ implique $\hat{\psi}(\mathcal{N}) = 0$

$$\hat{\psi}\left((\alpha x_1 + x_2, y) - \alpha(x_1, y) - (x_2, y)\right) = \psi(\alpha x_1 + x_2, y) - \alpha\psi(x_1, y) - \psi(x_2, y) = 0.$$

et de même pour l'autre type de vecteurs couvrants. Par conséquent, ψ descend à une application linéaire $\tilde{\psi} : \mathcal{F}/\mathcal{N} = X \otimes Y \to V$, $\tilde{\psi}([x]) := \hat{\psi}(x)$.

Par construction,

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(x \otimes y) &= \tilde{\psi}([(x,y)]) \\ &= \hat{\psi}(x,y) \\ &= \psi(x,y)\end{aligned}$$

(Unicité) Depuis $X \otimes Y$ est engendré par les produits tensoriels purs, chaque application linéaire est déterminée par ses valeurs sur ces éléments. ■

Définition 1.2.4 ***(Produit tensoriel de deux vecteurs)****Soient $x \in X$, $y \in Y$. On définit $x \otimes y$ comme étant une forme linéaire sur l'espace de formes bilinéaires $\mathcal{B}(X \times Y)$ comme suite*

$$\begin{aligned} x \otimes y : \quad \mathcal{B}(X \times Y) &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ A \quad &\longmapsto \quad (x \otimes y)(A) = A(x,y)\end{aligned}$$

Définition 1.2.5 ***(Produit tensoriel des espaces vectoriels et le rang d'un tenseur)*** *On définie $X \otimes Y$ le sous-espace de $\mathcal{B}(X \times Y)^*$ telle que*

$$X \otimes Y = span\,\{x \otimes y : x \in X, y \in Y\} \tag{1.2.2}$$

i.e., toute application u de $X \otimes Y$ de la forme

$$u = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes y_i$$

Le plus petit nombre m pour lesquels il existe une représentation de u contenant m termes est appelé le rang de u. Enfin, nous définissons un produit tensoriel de deux opérateurs.

Définition 1.2.6 *Soient $T_1 : X_1 \to X_2$ et $T_2 : Y_1 \to Y_2$ définie $T_1 \otimes T_2 : X_1 \otimes Y_1 \to X_2 \otimes Y_2$ pour être unique transformation linéaire qui satisfait*

$$\begin{aligned} T_1 \otimes T_2 : \quad X_1 \otimes Y_1 \quad &\to \quad X_2 \otimes Y_2 \\ (T_1 \otimes T_2)(x \otimes y) \quad &= \quad (T_1 x) \otimes (T_2 y)\end{aligned}$$

Proposition 1.2.2 ***(Propriétés du produit tensoriel)*** *Soit $(x,y) \mapsto x \otimes y$ une application bilinéaire vérifier les propriétés suivants*

1. $(x_1 + x_2)\otimes\, y = x_1 \otimes\, y + x_2 \otimes\, y,$

2. $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$,

3. $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$,

4. $0 \otimes x = x \otimes 0 = 0$.

Proposition 1.2.3 *Si $\{e_i\}_{i\in I}$ et $\{f_j\}_{j\in I}$ sont des bases pour X, Y respectivement, puis$\{e_i \otimes f_j\}_{i,j}$est une base pour $X \otimes Y$. Pour X et Y sont de dimension finie on a*

$$\dim(X \otimes Y) = \dim(X) \dim(Y). \tag{1.2.3}$$

Preuve. Désignons $B := \{v_i \otimes w_j : i \in I, j \in J\}$. Il est clair que la linéaire de B contient tous les produits tenseurs purs $v \otimes w$. Par conséquent, B couvre $V \otimes W$. Pour voir que B est linéairement indépendant.

Considérer les deux bases $\{\alpha_i : i \in I\}$ dans V^* et $\{\beta_j : j \in J\}$ dans W^*, respectivement. Ils sont définis par les conditions

$$\delta\alpha_k(v_i) = \delta_{k,i},\ \delta\beta_l(w_j) = \delta_{l,j},$$

pour tout i, $k \in I$ et j, $l \in J$. Compte tenu des nombres $c_{i,j} \in K$, avec seulement un nombre fini de $c_{i,j} \neq 0$, de telle sorte que

$$\sum_{i,j} c_{i,j} v_i \otimes w_j = 0,$$

alors

$$0 = (\alpha_k \otimes \beta_l)\left(\sum_{i,j} c_{i,j} v_i \otimes w_j\right) = \sum_{i,,j} c_{i,j}\,(\alpha_k \otimes \beta_l)\,(v_i \otimes w_j) = \sum_{i,,j} c_{i,j}\alpha_k(v_i)\beta_l\,(w_j) = c_{k,l}$$

Pour tout $k \in I, l \in J$. Ainsi, B est linéairement indépendant, en effet. ∎

1.2.2 Produit tensoriel des espaces de Banach

Dans cette section, nous considérons deux espaces de Banach $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$, et on définie deux normes sur le produit tensoriel algébrique $X \otimes Y$.

Définition 1.2.7 ***(Norme projectiver sur un produit tensoriel)*** *Pour $u \in X \otimes Y$ on a*

$$\|u\|_{\pi} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X \|y_i\|_Y : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\} \tag{1.2.4}$$

Par des normes tensoriels, la norme projective est évidemment la plus grande norme tensoriel.

Proposition 1.2.4 *[24] $\|.\|_{\pi}$ est une norme sur $X \otimes Y$ et $\|x \otimes y\|_{\pi} = \|x\|_X \|y\|_Y$.*

Nous désignerons par $X \otimes_{\pi} Y$ est le produit tensoriel $X \otimes Y$ muni de la norme projective $\|.\|_{\pi}$. Sauf si les espaces X et Y sont de dimension finie, cet espace n'est pas complet, même si X et Y sont des espaces de Banach. On note par $X \hat{\otimes}_{\pi} Y$ le complété de $X \otimes_{\pi} Y$.

Définition 1.2.8 ***(Norme injective sur un produit tensoriel)*** *Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$, si l'on considère la forme bilinéaire associée $B_u(\varphi, \psi) = \sum \varphi(x_i).\psi(y_i)$ telle que: $\varphi \in X^*, \psi \in Y^*, \varepsilon > 0$, puis $u \to Bu$ est un prolongement algébrique de $X \otimes Y$ à $B(X^*, Y^*)$.*

$$\|u\|_{\varepsilon} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) \right| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \varphi \in B_{X^*}, \psi \in B_{Y^*} \right\} \tag{1.2.5}$$

Proposition 1.2.5 *Si X, Y sont de dimension finie alors $(X \hat{\otimes} Y)^* = X^* \hat{\otimes} Y^*$.*

Définition 1.2.9 (Les normes raisonnables) *Une norme sur X et Y est dite raisonnable si l'application bilinéaire $(x, y) \to x \otimes y$ de $X \times Y$ dans $X \otimes Y$ est de norme ≤ 1, et si de même $\left(x', y'\right) \to x' \otimes y'$ est une application bilinéaire de norme ≤ 1 de $X' \times Y'$ dans le dual de l'espace normé $X \otimes Y$.*

Désignant la norme de ce dual par α', ces conditions signifient que $\alpha(x \otimes y) \leq \alpha(x)\alpha(y)$ et $\alpha'(x' \otimes y') \leq \alpha'(x')\alpha'(y')$ pour $x \in X$, $y \in Y$, $x' \in X'$, $y' \in Y'$. $X' \otimes Y'$ s'identifie alors à un sous-espace vectoriel du dual de l'espace normé $X \otimes Y$. La norme α' induite sur $X' \otimes Y'$ par ce dual est aussi une norme raisonnable. On désigne par $X \hat{\otimes}_{\alpha} Y$ le complété de $X \otimes Y$ pour la norme raisonnable α.

Exemple 1.2.1 *Les normes projective et injective sur $X \otimes Y$ sont raisonnables*

1. $\pi(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$,

2. $\varepsilon(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$,

3. *Il existe une norme α est dite raisonnable telle que $\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$.*

Chapitre 2

Les opérateurs$(q, p; Y)$-sommants

2.1 Opérateurs (p, q)-sommants

2.1.1 Espace des suites p-sommables

Définition 2.1.1 *On note par $l_p(X)$ (resp. $l_p^n(X)$) l'espace des suites $(x_i)_i$ (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X absolument p-sommables, muni de la norme*

$$\|(x_i)\|_{l_p(X)} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \\ \sup_i \|x_i\|, p = \infty \ . \end{cases} \tag{2.1.1}$$

$$(resp.\ \left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_{l_p^n(X)} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p < \infty \\ \sup_{1\leq i\leq n} \|x_i\|,\ p = \infty). \end{cases}$$

D'une façon analogue, on désigne par l_p l'espace des suites scalaires (α_i) telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty,$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|(\alpha_i)\|_{l_p} = \|(\alpha_i)\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \\ \sup_i |\alpha_i|,\ p = \infty. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Lemme 2.1.1 *L'espace c_0 est l'espace des suites scalaires (α_i) telle que $\lim\limits_{i\to\infty}\alpha_i = 0$. C'est un sous espace fermé de l_∞, donc un espace de Banach pour la norme*

$$\|(\alpha_i)\|_\infty = \sup_i |\alpha_i| \tag{2.1.3}$$

Définition 2.1.2 *On note par $l_p^\omega(X)$ (resp. $l_p^{n\ \omega}(X)$) l'espace des suites $(x_i)_i$ (resp. $(x_i)_{1\le i\le n}$) dans X faiblement p-sommables, muni de la norme*

$$\|(x_i)\|_{l_p^\omega(X)} = \begin{cases} \sup\limits_{\|\xi\|_{X^*}\le 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|< x_i,\xi >|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty \\ \sup\limits_i\left\{\sup\limits_{\|\xi\|_{X^*}\le 1}|< x_i,\xi >|\right\}, & p=\infty. \end{cases}$$

$$(\text{resp. } \left\|(x_i)_{1\le i\le n}\right\|_{l_p^{n\ \omega}(X)}) = \begin{cases} \sup\limits_{\|\xi\|_{X^*}\le 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|< x_i,\xi >|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty \\ \sup\limits_{\substack{\|\xi\|_{X^*}\le 1\\ 1\le i\le n}}|< x_i,\xi >|, & p=\infty. \end{cases}$$

Proposition 2.1.1

1. *Pour $1\le p\le\infty$, on a $l_p(X)\subseteq l_p^\omega(X)$, de plus*

$$\|(x_i)\|_{l_p^\omega(X)} \le \|(x_i)\|_{l_p(X)}.$$

2. Si $p=\infty$, *on a $l_\infty(X) = l_\infty^\omega(X)$ et*

$$\|(x_i)\|_{l_\infty(X)} = \|(x_i)\|_{l_\infty^\omega(X)}.$$

3. *$l_p(X) = l_p^\omega(X)$ pour tout $1\le .p<\infty$ si et seulement si $\dim(X)$ est finie.*

Le lemme classique suivant, qui exprime que le dual de $l_p^n(X)$ s'identifie isométriquement à $l_{p^*}^n(X^*)$.

Lemme 2.1.2 *Soit $1\le p,p^*<+\infty$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^*}=1$. Pour tout $\alpha=(\alpha_i)_{1\le i\le n}\in l_p^n$ et $\beta=(\beta_i)_{1\le i\le n}\in l_p^n$ on a*

$$\|\alpha\|_p = \sup_{\|\beta\|_{p^*}\le 1}\left\{\left|\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\right|\right\}.$$

Lemme 2.1.3 *Soit* $1 \leq p, p^* < +\infty$ *tel que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$. *Pour tout* $x_1, ..., x_n \in X$ *et* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ *on a*

$$\left\| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{l_p^n \, \omega(X)} = \sup_{\|\lambda\|_{p^*} \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\|.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \left\| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{l_p^n \, \omega(X)} &= \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{2.1.2}{=} \sup_{\|\xi\| \leq 1} \sup_{\|\lambda\|_{p^*} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi(x_i) \right|, \\ &= \sup_{\|\lambda\|_{p^*} \leq 1} \left(\sup_{\|\xi\| \leq 1} \left| \xi \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \right| \right), \\ &= \sup_{\|\lambda\|_{p^*} \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\|. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ∎

2.1.2 Les opérateurs (p, q)-sommants

Définition 2.1.3 *Soit* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. *On dira que* T *est* (p, q)*-sommants pour* $(1 < p,\ q < \infty)$, *s'il existe une constante* $C > 0$, *telle que pour tout* $x_1, ..., x_n \in X$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\|\xi\|_{X^*} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |< x_i, \xi >|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.1.4}$$

On note $\Pi_{p,q}(X, Y)$ *l'espace de Banach des opérateurs linéaires* (p, q)*-sommants de* X *dans* Y *muni de la norme*

$$\pi_{p,q}(T) = \inf \{ C \text{ vérifiant } 2.1.4 \}. \tag{2.1.5}$$

Pour $p = q$ *on obtient les opérateurs* p*-sommants et on note* $\Pi_p\ (X, Y)$ *l'espace de Banach des opérateurs linéaires* p*-sommants de* X *dans* Y *muni de la norme*

$$\pi_p(T) = \inf \{ C \text{ vérifiant } 2.1.4 \}. \tag{2.1.6}$$

Si $p = \infty$, *c'est simplement la continuité(i.e.,*$\Pi_p\ (X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$*)*

Autrement dit, soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $1 \leq p < \infty$ on dit que T est p-sommant, et on écrit $T \in \Pi_p(X,Y)$; s'il existe une canstante $C > 0$ tel que pour toute $(x_i)_{i=1}^n \subset X$, on ait

$$\left\|(T(x_i))_{i=1}^n\right\|_p \leq C \left\|(x_i)_{i=1}^n\right\|_{p,w}. \tag{2.1.7}$$

On note par

$$\Pi_p(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ linéaires } p\text{-sommants}\}$$

Pour tout $T \in \Pi_p(X,Y)$ on pose

$$\pi_p(T) = \inf \{C : \textit{vérifiant} 2.1.7\} \tag{2.1.8}$$

Exemple 2.1.1 *Soient K un espace compact, μ une mesure positive sur K et $1 \leq p < \infty$*

1. *Pour tout $\varphi \in L_p(\mu)$; l'opérateur de multiplication*

$$\begin{array}{cccc} T_\varphi & : & C(K) & \to & L_p(\mu) \\ & & f & \mapsto & f.\varphi \end{array}$$

est p-sommant avec $\pi_p(T) = \|\varphi\|_p$.

2. *L'opérateur canonique*

$$\begin{array}{cccc} J_p & : & C(K) & \to & L_p(\mu) \\ & & f & \mapsto & f \end{array}$$

est p-sommant avec $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

Remarque 2.1.1 *Il est clair que pour tout $T \in \Pi_p(X,Y)$ on a $\|T\| \leq \pi_p(T)$ puisque si on prend $n = 1$ dans 2.1.7 i.e., $x_1 = ... = x_n = x \in X$, on trouve*

$$\|T(x)\| \leq \pi_p(T) \|x\|$$

ce qui donne $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \leq \pi_p(T)$.

On a les résultats suivants sur les opérateurs p-sommants. Pietsch a démontré que les opérateurs p-sommants sont faiblement compacts.

Théorème 2.1.1 (Théorème de domination de Pietsch) [3]*Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est un opérateur linéaire p-sommant $(1 \leq p < \infty)$, si et seulement si s'il existe une probabilité régulière sur l'espace compact $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$, obtenu en munissant la boule unité de X^* de la topologie $*$ -faible, telle que*

$$\|T(x)\| \leq \pi_p(T) \left(\int_K |\langle x, x^* \rangle|^p \, d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \forall x \in X. \tag{2.1.9}$$

Théorème 2.1.2 *Soit $T : X \to Y$ un opérateur p-sommant $(1 \leq p < \infty)$. Alors*

1. *T est faiblement compact.*

2. *T il transforme les suites faiblement convergentes en suites convergeant en norme (ou, on dira que T un opérateur de Dunford-Pettis)*

Preuve. 1)Vient, pour $p > 1$, de faire que T se factorise par l'espace réflexif L_p, puis pour $p = 1$, du théorème d'inclusion.

2) Soit (x_n) une suite faiblement nulle de X. D'aprés l'inégalité 2.1.9 on a

$$\|T(x_n)\| \leq \pi_p(T) \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x_n, x^* \rangle|^p \, d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il résulte immédiatement du théorème de convergence dominée de Lebesgue que $\lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\| = 0$. Alors T est un opérateur de Dunford-Pettis. Ce qui termine la preuve. ■

Théorème 2.1.3 (Théorème d'inclusion) *Soient $1 \leq p, q, r < \infty$, Soit $p \leq r$, supposons que $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, alors*

$$\Pi_{p,q}(X,Y) \subseteq \Pi_{r,s}(X,Y).$$

Théorème 2.1.4 [5]*Soit $1 \leq q < p < \infty$, soit K un espace compact, et Y un espace de Banach, pour $T : \mathcal{C}(K) \to Y$, on a*

$$T \text{ est } (p,1)\text{-sommants} \Leftrightarrow T \text{ est } (p,q)\text{-sommants.} \tag{2.1.10}$$

Lemme 2.1.4 [5]*Soit K un espace compact, pour $1 \leq p < \infty$, soit $T : \mathcal{C}(K) \to Y$ est un opérateur p-sommants. Si $p < q < \infty$, on a*

$$\pi_q(T) \leq \|T\|^{1-\frac{p}{q}} \pi_p(T)^{\frac{p}{q}}.$$

Théorème 2.1.5 (Multiplication de Pietsch) *Pour* $1 \leq p,q,r < \infty$ *telle que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Si* $T \in \Pi_p(X,Y)$, $S \in \Pi_q(X,Y)$, *donc* $ST \in \Pi_r(X,Y)$ *et* $\pi_r(ST) \leq \pi_p(T).\pi_q(S)$.

Lemme 2.1.5 *Pour* $x_1, ..., x_n \in X$, *et* $v : l_\infty^n \to X$, *tel que* $v(e_i) = x_i$, $1 \leq i \leq n$, *on a l'opérateur* v *est* 2*-sommants et* $\pi_2(v) \leq c\,\|v\|$.

Théorème 2.1.6 (Le théorème de Grothendieck) [5] *Tout opérateur borné de* $L^1(\mu)$ *dans* $L^2(\lambda)$ *est* 1*−sommant. i.e.,*

$$\mathcal{L}(L^1(\mu), L^2(\lambda)) = \Pi_1(L^1(\mu), L^2(\lambda)) \tag{2.1.11}$$

Avec $\pi_1(T) \leq k_G\,\|T\|$ *où* k_G *est a constante universelle de Grothendieck.*

2.2 Opérateurs$(q,p;Y)$-sommants

On va introduire la notion des operateurs$(q,p;Y)$-sommants qui a introduit par Kislyakov en 1992(voir [13]) .

Définition 2.2.1 *Soit* $1 \leq p \leq q < \infty$, *un opérateur* $T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ *est dit* $(q,p;Y)$*-sommants s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour toute suite finie* $u_1, u_2, ..., u_n \in X \otimes Y$, *nous avons*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|T(u_k)\|_Z^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{k=1}^{n} \|u_k(x^*)\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \tag{2.2.1}$$

où $u_k(x^*) = \sum_{j=1}^{n_k} \langle x^*, x_{j,k}\rangle\, y_{j,k}$, *pour* $u_k = \sum_{j=1}^{n_k} x_{j,k} \otimes y_{j,k}$, $y_{j,k} \in Y$ *et* $x_{j,k} \in X$.

La classe des opérateurs linéaires$(q,p;Y)$*-sommants notée par* $\Pi_{q,p}^Y(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ *muni de la norme suivante*

$$\pi_{q,p}^Y(T) = \inf\{C \text{ vérifiant } 2.2.1\}$$

Si $q = p$ *on note par* $\Pi_p^Y(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ *et* $\pi_p^Y(T)$ *Pour* $Y = \mathbb{k}$ *on a* $\Pi_{q,p}^{\mathbb{k}}(X\hat{\otimes}_\varepsilon \mathbb{k}, Z) = \Pi_{q,p}(X,Z)$ *voir* [7], [5], [15], [18], [19] *ou* [20]

Proposition 2.2.1

1. $\forall\, T \in \Pi_{q,p}^Y(X\hat{\otimes}_\epsilon Y, Z)$, T *est continue et* $\|T\| \leq \pi_{q,p}^Y(T)$.

2. $(\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon \mathbb{k}, Z), \pi^Y_{q,p}(T))$ *est un sous espace vectoriel normé de* $\mathcal{L}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$.

Proposition 2.2.2 *[2]ou[13]L'espace* $\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ *est un espace de Banach muni de la norme* $\pi^Y_{q,p}(T)$.

Preuve. *i)*$\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ est un sous espace vectoriel $\mathcal{L}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$?

*a)*Soient $T, S \in \Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$. Soient $u_1, u_2, ..., u_n \in X \otimes Y$.

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^n \|(T+S)(u_k)\|_Z^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
= &\left(\sum_{k=1}^n \|T(u_k)+S(u_k)\|_Z^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq &\left(\sum_{k=1}^n \|T(u_k)\|_Z^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^n \|S(u_k)\|_Z^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq &\ \pi^Y_{q,p}(T)\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^n \|u_k(x^*)\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} + \pi^Y_{q,p}(S)\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^n \|u_k(x^*)\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
= &\left(\pi^Y_{q,p}(T)+\pi^Y_{q,p}(S)\right)\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^n \|u_k(x^*)\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'ou $T+S \in \Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ et $\pi^Y_{q,p}(T+S) \leq \pi^Y_{q,p}(T) + \pi^Y_{q,p}(S)$.

*b)*Soit $\alpha \in \mathbb{k}$ et $T \in \Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n \|\alpha T(u_k)\|_Z^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{k=1}^n \|T(\alpha u_k)\|_Z^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \pi^Y_{q,p}(T).\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^n \|\alpha u_k(x^*)\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= |\alpha|\,\pi^Y_{q,p}(T).\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^n \|u_k(x^*)\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

On a, alors

$$\pi^Y_{q,p}(\alpha T) \leq |\alpha|\,\pi^Y_{q,p}(T).$$

D'autre part

$$\pi^Y_{q,p}(T) = \pi^Y_{q,p}(\frac{1}{\alpha}(\alpha T)) \leq \frac{1}{|\alpha|}\pi^Y_{q,p}(\alpha T)$$

Donc

$$\pi^Y_{q,p}(\alpha T) \geq |\alpha|\, \pi^Y_{q,p}(T),$$

D'ou

$$\pi^Y_{q,p}(\alpha T) = |\alpha| \;\; \pi^Y_{q,p}(T).$$

c)Soit $\pi^Y_{q,p}(T) = 0$; on a $\|T\| \leq \pi^Y_{q,p}(T) = 0 \Rightarrow \|T\| = 0 \Rightarrow T = 0$

Finalement, $\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ est un sous espace vectoriel normé $\mathcal{L}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$.

$ii)\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ est complet.

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$

D'après la Proposition 2.2.1 on a

$$\|T_n - T_m\| \leq \pi^Y_{q,p}(T_n - T_m)$$

Donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$. Alors converge vers une limite $T \in \mathcal{L}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$.

Soient $\varepsilon > 0$ donné et k_0 un entier. Soient $n, m \geq k_0$, tels que

$$\pi^Y_{q,p}(T_n - T_m) \leq \varepsilon$$

Soient $u_1, u_2, ..., u_n \in X \otimes Y$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \|(T_n - T_m)(u_k)\|_Z^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \pi^Y_{q,p}(T_n - T_m). \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|u_k(x^*)\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \varepsilon \;\sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|u_k(x^*)\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

En faisant tendre m vers l'infinie.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|(T_n - T)(u_k)\|_Z^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi^Y_{q,p}(T_n - T). \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|u_k(x^*)\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

On a montrer que

$$(T_n - T) \in \Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z) \text{ et } \pi^Y_{q,p}(T_n - T) \leq \varepsilon.$$

Enfin

$$T = T - T_n + T_n,$$

On a

$$T - T_n \in \Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z) \text{ et } T_n \in \Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z),$$

Donc

$$T \in \Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z).$$

Ce qui prouve $\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ que est bien un espace vectoriel complet. Alors $\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ est un espace de Banach muni de la norme $\pi^Y_{q,p}(T)$. Ce qui termine la preuve. ■

Maintenant nous présentons le théorème de domination pour cette catégorie d'opérateurs pour $p = q$ qui est démontré par Kislyakov [13]en utilisant des nouvelles techniques trouvées dans $[21], [4], [22]$.

Une version générale du théorème domination de Pietsch démontré dans [21] est une version améliorée d'un résultat similaire dans [4] (voir aussi [22]).

Définition 2.2.2 *Soient X, Y et V (arbitraires) ensembles non vides, $\mathcal{H}(X,Y)$ une famille non vide de X dans Y, G un espace de Banach et K un espace compact de Hausdorff. Soit*

$$R\colon K \times V \times G \longrightarrow [0,\infty) \text{ et } S\colon \mathcal{H}(X,Y) \times V \times G \longrightarrow [0,\infty)$$

deux applications arbitraires et $1 \leq q < \infty$. une application $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ est (R-S)-abstracts q-sommant s'il existe une constante $C \geq 0$ de telle sorte que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} S(f, x_j, b_j)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{\varphi\in K} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, b_j)^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.2.2}$$

pour tous $x_1, \ldots, x_m \in V$, $b_1, \ldots, b_m \in G$ et $m \in \mathbb{N}$.

Supposons que R est tel que

$$R_{x,b}\colon K \longrightarrow [0,\infty) \text{ définie par: } R_{x,b}(\varphi) = R(\varphi, x, b) \tag{2.2.3}$$

est continue pour chaque $x \in V$ et $b \in G$. Le théorèm de domination de Pietsch de [21] lit comme suit

Théorème 2.2.1 (Généralisation du théoréme domination de Pietsch) *Supposons que S est arbitraire,R satisfait 2.2.3 et soit $(1 \leq p < \infty)$. On dit que $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ est (R-S)-abstracts p-sommant, si et seulement s'il existe une constante $C \geq 0$ et une mesure de* *probabilités sur K telle que*

$$S(f,x,b) \leq C\left(\int_K R(\varphi,x,b)^p\, d\mu(\varphi)\right)^{1/p} \tag{2.2.4}$$

pour toute $x \in V$ et $b \in G$.

Théorème 2.2.2 *[13]Soit $1 \leq p < \infty$, un opérateur $T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ est (p,Y)-sommants si et seulement s'il existe une mesure de probabilités μ sur (B_{X^*},ω^*) et une constante $C>0$ telle que pour tout $u \in X \otimes Y$ on a*

$$\|T(u)\|_Z^p \leq C^p \int_{B_{X^*}} \|u(x^*)\|_Y^p\, d\mu(x^*) \tag{2.2.5}$$

et $\pi_p^Y(T) = \{\inf C$ vérifiant (2.2.5)$\}$.

Preuve. On choisit les paramètres

$$V = X\hat{\otimes}_\varepsilon Y,$$
$$G = \mathbb{R},$$

$K = B_{X^*}$, qui est un espace de Hausdorff compact dans la topologie de la convergence faible sur E, $\mathcal{H}$ est un ensemble de toutes les applications de $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ à Z et R et S sont définies par

$$S\colon \mathcal{H} \times (X\hat{\otimes}_\epsilon Y) \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty),\ S(T,u,c) = |c|\|T(u)\|_Z$$

$$R\colon B_{X^*} \times (X\hat{\otimes}_\epsilon Y) \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty),\ R(x^*,u,c) = |c|\|u(x^*)\|_Y$$

D'après la Définition 2.2.2 il en résulte que T est (p,Y) -sommants si et seulement si T est (R-S)-abstracts p-sommant. donc on a $S(f,x,b) \leq C\left(\int_K R(\varphi,x,b)^p\, d\mu(\varphi)\right)^{1/p}$, Ce qui termine la preuve. ■

Définition 2.2.3 *Pour chaque opérateur borné $T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ on peut considère $\phi(T) = T^\# : Y \to \mathcal{L}(X,Z)$ définie par $T^\#(y)(x) = T(x \otimes y)$, telle que $x \in X$ et $y \in Y$. Il est clair que cela est un borné i.e., $\phi(\mathcal{L}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)) \subseteq \mathcal{L}(Y,\mathcal{L}(X,Z))$*

Corollaire 2.2.1 *Si $1 \leq p \leq q < \infty$, on a*

$$\Pi_p^Y\left(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z\right) \subseteq \Pi_q^Y\left(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z\right)$$

Définition 2.2.4 *Un opérateur $T : C(\Omega, X) \rightarrow Y$ telle que Ω est compact sépare,est appelé un opérateur p-dominé [8] s'il existe une constante $C > 0$ et une mesure de probabilités μ sur Ω telle que*

$$\|T(f)\|^p \leq C\int_\Omega \|f(t)\|^p \, d\mu(t) \tag{2.2.6}$$

Remarque 2.2.1 *[19]Si $X = C(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur l'espace compact de Hausdorff Ω, l'opérateur $T : C(\Omega)\hat{\otimes}_\varepsilon Y \rightarrow Z$ est 1-sommant si et seulement si $T^\# : C(\Omega) \rightarrow \Pi_1(Y, Z)$ est 1-sommant.*

Dans [22], les auteurs nous montrent une version abstraite de principe de l'inclusion, il suit la ligne de la version générale du théorème domination de Pietsch, Pour des raisons techniques, le cadre abstrait présente est légèrement différents de l'un des l'a noté ci-dessus. Soient X, Y, V, G, W (arbitraires) ensembles non vides, Z un espace vectoriel et $\mathcal{H}(X, Y)$ une famille non vide des applications de X dans Y. Considérons

$$R \colon Z \times G \times W \longrightarrow [0, \infty)$$
$$S \colon \mathcal{H}(X, Y) \times Z \times G \times V \longrightarrow [0, \infty)$$

Soit $1 \leq p \leq q < \infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\sup_{w\in W} \sum_{j=1}^{m} R\left(z_j, g_j, w\right)^p < \infty \text{ et } \sup_{v\in V} \sum_{j=1}^{m} S(f, z_j, g_j, v)^q < \infty.$$

Pour chaque m entier positif et $z_1, ..., z_m \in Z$ et $g_1, ..., g_m \in G$, $f \in \mathcal{H}(X, Y)$ dire (R-S)-abstracts (q, p)-sommants (notation $f \in RS_{(q;p)}(X, Y)$) s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left(\sup_{v\in V} \sum_{j=1}^{m} S(f, z_j, g_j, v)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sup_{w\in W} \sum_{j=1}^{m} R\left(z_j, g_j, w\right)^p\right)^{1/p}.$$

Pour toutes $z_1, ..., z_m \in Z$, $g_1, ..., g_m \in G$ et $m \in N$. On dira que S et R sont multiplicatifs dans la variable z si

$$R\left(\lambda z,g,w\right)=\left|\lambda\right|R\left(z,g,w\right),$$
$$S\left(f,\lambda z,g,v\right)=\left|\lambda\right|S\left(f,z,g,v\right).$$

Théorème 2.2.3 *Si*

$$\begin{aligned}&p_j\le q_j \textit{ pour } j=1,2,\\&1\le p_1\le p_2<\infty,\\&1\le q_1\le q_2<\infty,\\&\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{1}{q_1}\le\tfrac{1}{p_2}-\tfrac{1}{q_2}.\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

et S et R sont multiplicatifs dans la variable z on a $RS_{(q_1,p_1)}\left(X,Y\right)\subset RS_{(q_2,p_2)}\left(X,Y\right).$

Théorème 2.2.4 *Si pj et qj être comme dans* 2.2.7, *alors*

$$\Pi^Y_{(q_1,p_1)}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y,Z)\subset\Pi^Y_{q_2,p_2}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y,Z).\tag{2.2.8}$$

Preuve. Soit $1\le p\le q<\infty$, puis prenant

$$Z=\mathbb{R},G=X\hat{\otimes}_\epsilon Y,W=B_{X^*},\ V=\{0\}$$

et $\mathcal{H}(X,Y)$ est l'ensemble de toutes les applications linéaires de X à Y et R et S sont définies par

$$R:\mathbb{R}\times(X\hat{\otimes}_\epsilon Y)\times B_{X^*}\longrightarrow[0,\infty)\ ,$$

$$R(C,u,x^*)=|C||u(x^*)|$$

$$S\colon\mathcal{H}(X;Y)\times\mathbb{R}\times(X\hat{\otimes}_\epsilon Y)\times\{0\}\longrightarrow[0,\infty)\ ,$$

$$S(T,C,u,0)=|C|\|T(u)\|_Z$$

Il faut que T est $(q,p;Y)$-sommants si et seulement si elle est(R-S)-abstracts (q,p)-sommant. D'après le Théorème 2.2.3 nous obtient le théorème d'inclusion pour cette classe d'opérateurs. ■

Proposition 2.2.3 *Si T est un opérateur (p,Y)-sommants si et seulement si $T^\#$ est p-sommant.*

Preuve.

1) T est (p,Y)-sommants $\Rightarrow T^{\#}$ est p-sommant,

Nous avons $\left\|T^{\#}(y)(x)\right\|_Z = \|T(x\otimes y)\|_Z$et par le Théorème 2.2.2 on a

$$\begin{aligned} & \left\|T^{\#}(y)(x)\right\|_Z \\ \leq\ & \pi_p^Y(T)\left(\int_{B_{X^*}} \|x\otimes y(x^*)\|_Y^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ =\ & \pi_p^Y(T)\left(\int_{B_{X^*}} \|\langle x(x^*), y\rangle\|_Y^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Alors $T^{\#}$ est p-sommant et $\pi_p\left(T^{\#}\right) \leq \pi_p^Y(T)$.

2)Pour montrer l'inverse, nous pouvons prendre $u = x\otimes y$, et le Théorème 2.2.2 donne

$$\begin{aligned} & \|T(u)\| \\ =\ & \|T(x\otimes y)\|_Z \\ =\ & \left\|T^{\#}(y)(x)\right\|_Z \\ \leq\ & \pi_p\left(T^{\#}\right)\left(\int_{B_{X^*}} \|((y)(x))(x^*)\|_Y^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq\ & \pi_p\left(T^{\#}\right)\left(\int_{B_{X^*}} \|(x\otimes y)(x^*)\|_Y^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq\ & \pi_p\left(T^{\#}\right)\left(\int_{B_{X^*}} \|(u)(x^*)\|_Y^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Alors T est (p,Y)-sommants et $\pi_p^Y(T) \leq \pi_p\left(T^{\#}\right)$. Ce qui termine la preuve. ■

Proposition 2.2.4 [2]*Nous avons toujours* $\Pi_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z) \subseteq \Pi_{q,p}^Y(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$.

Preuve. Soit $u_1, u_2, ..., u_n \in X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ une suite finie et nous avons

$$\|(u_k)\|_{l_p^w(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y)} = \sup\left\{\left(\sum_{k=1}^n |\langle x^*\otimes y^*, u_k\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}};\ x^*\in B_{X^*},\ y^*\in B_{Y^*}\right\}$$

Et

$$\langle u(x^*), y^*\rangle = \sum \langle x^*, x_j\rangle\langle y^*, y_j\rangle = \langle x^*\otimes y^*, u\rangle$$

Pour tout $u = \sum_{j=1}^n x_j\otimes y_j \in X\otimes Y$ et par conséquent, si $u_1, u_2, ..., u_n \in X\otimes Y$ et nous avons obtenu

$$\|(u_k)\|_{l_p^w(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y)} \leq \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left\{\left(\sum_{j=1}^n \|u_j(x^*)\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

Par conséquent, nous avons l'inclusion suivante

$$\Pi_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z) \subseteq \Pi_{q,p}^Y(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$$

Ce qui termine la preuve. ■

Proposition 2.2.5 [2]*Soit* $1 \leq p \leq q < \infty$. *Si* $\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z) = \Pi_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$, *alors* $\mathcal{L}(Y,Z) = \Pi_{q,p}(Y,Z)$. *En particulier* $\Pi^Y_p(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Y) = \Pi_p(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Y)$ *si et seulement si* $\dim(Y) < \infty$.

Preuve. Supposons $\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z) = \Pi_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ et à faire prendre $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, fixer $x_0^* \in X^*$ et on considère $T_{x_0^*,A} : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ donner par $T_{x_0^*,A}(u) = A(\langle u, x_0^*\rangle)$.

ll est clair qu'il est $(1,Y)$-sommants(en particulier $(q,p;Y)$-sommants) par hypothése $T_{x_0^*,A} \in \Pi_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$

Soit $(y_j)_{j=1}^\infty \in l_p^w(Y)$ et $x_0 \in B_X$ avec $\langle x_0^*, x_0\rangle \neq 0$ puis

$$T_{x_0^*,A}((y_j \otimes x_0)) = A(\langle x_0^*; x_0\rangle\, y_j) = \langle x_0^*; x_0\rangle\, A(y_j) \in l_q(Z)$$

cela montre que $A \in \Pi_{q,p}(Y,Z)$. Ce qui termine la preuve. ■

Corollaire 2.2.2 [27] *On a* $\Pi^X_1(C(\Omega,X),Y) = \Pi_1(C(\Omega,X),Y)$ *si et seulement si* X *est de dimension finie.*

1. *Si les opérateurs* (q,p)*-sommants on a l'inclusion suivante* $\Pi^Y_{q_1,p_1}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z) \subseteq \Pi^Y_{q_2,p_2}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ *si* $1 \leq p_2 \leq p_1 \leq q_1 \leq q_2 < \infty$ *ou si* $p_1 \leq p_2, q_1 \leq q_2$ *et* $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$.

2. $\Pi^Y_p(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z) = \Pi^Y_2(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ *pour chaque* $2 < p < \infty$ [13].

3. $\Pi^Y_2(C(\Omega)\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z) = \mathcal{L}\ (C(\Omega)\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ (*voir le Théorème* 2.1.6).

Remarque 2.2.2 *Le résultat ci-dessus se prolonge à la suite de* [1], *où il a été montré que si* $T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ *est p-sommant pour* $(1 \leq p < \infty)$, *alors* $T^\# : Y \to \mathcal{L}(X,Z)$ *est p-sommant.*

Proposition 2.2.6 [2]*Soit* $1 \leq p \leq q < \infty$

1. $\phi(\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)) \subseteq \mathcal{L}(Y, \Pi_{q,p}(X,Z))$,

2. *Si* $\phi(\Pi^Y_{q,p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)) \subseteq \Pi_{q,p}(Y, \mathcal{L}(X,Z))$ *alors* $\mathcal{L}(Y,Z) = \Pi_{q,p}(Y,Z)$. *En particulier si* $\phi(\Pi^Y_p(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Y)) \subseteq \Pi_p(Y, \mathcal{L}(X,Y))$ *pour* $1 \leq p < \infty$ *alors* $\dim(Y) < \infty$.

Preuve. 1.Soit $T : X\hat{\otimes}_{\varepsilon}Y \to Z$ un opérateur $(q,p;Y)$-sommants et $T^{\#}(y) \in \Pi_{q,p}(X,Z)$ et $y \in Y$, soit $x_1, x_2, ..., x_n \in X$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} \left\|T^{\#}(y)(x_j)\right\|_Z^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \left\|T(x_j \otimes y)\right\|_Z^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \pi_{q,p}^Y(T).\sup_{x^*\in B_{X^*}} \left\{\sum_{j=1}^{n} \left\|\langle x^*, x_j\rangle\, y\right\|_Y^p\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \|y\|_Y\,.\pi_{q,p}^Y(T).\sup_{x^*\in B_{X^*}} \left\{\sum_{j=1}^{n} \left|\langle x^*; x_j\rangle\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Donc $T^{\#}(y) \in \Pi_{q,p}(X,Z)$ avec $\Pi_{q,p}(T^{\#}(y) \leq \|y\|_Y\,.\pi_{q,p}^Y(T)$.

2. Soit $x_0 \in X$ et $x_0^* \in X^*$ de telle sorte que $\|x_0\| = 1$ et $\langle x_{0,} x_0^*\rangle = \|x_0^*\| = 1$, pour chaque $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, on considère l'operateur $T_{x_0^*,A} : X\hat{\otimes}_{\varepsilon}Y \to Y$ définie par $T_{x_0^*,A}(u) = A(\langle u, x_0^*\rangle)$, qui est $(1,Y)$-sommants puis $T_{x_0^*,A}^{\#} \in \Pi_{q,p}(Y, \mathcal{L}(X,Y))$Donc

$$\begin{aligned} \pi_{q,p}^Y(T_{x_0^*,A}^{\#}).\sup_{y^*\in B_{Y^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\langle y_j, y^*\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|T_{x_0^*,A}^{\#}(y_j)\right\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|T_{x_0^*,A}(x_0 \otimes y_j)\right\|_Y^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|A(y_j)\right\|_Y^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

2.2.1 La composition des opérateurs (p,Y)-sommants

Pietsch a etudie que si T est p-sommant et S est q-sommant, alors ST est r-sommant(voir 2.1.5 dans ce chapitre) avec $r = \min\left\{1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right\}$. Le resultat est généralisé par N.Tomczak [28], il a prouvé que si S est (s,t)-sommants alors ST est(r,q)-sommants, où $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} \leq 1, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{t} \leq 1$. On va réprésenter une généralisations du resultat de N.Tomczak pour les operateurs $(p;Y)-$sommants elle est démontré par O.Blasco et T.Signes dans [2].

Lemme 2.2.1 [2]*Soit* $1 \leq p < \infty$ *on dit que* $T : X\hat{\otimes}_{\varepsilon}Y \to Z$ *un opérateur* (p,Y)*-sommants s'il existe une mesure de probabilités* μ *sur* (B_{X^*}, ω^*) *tel que pour tout* $z^* \in Z^*$*et s'il existe* *une fonction non négative $f_{z^*} \in L_{p'}(B_{X^*},\mu)$ vérifiant*

$$|\langle z^*, T(u)\rangle| \leq \int\limits_{B_{X^*}} \|\langle u, x^*\rangle\|_Y \, f_{z^*}(x^*)d\mu(x^*)$$

Pour tout $u \in X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ et $\|f_{z^*}\|_{L_{p'}} \leq \pi_p^Y(T)\,\|z^*\|$.

Preuve. Comme T est (p,Y)-sommants, d'après le Théorème 2.2.2 on peut trouver la mesure de probabilités μ sur (B_{X^*},ω^*), un sous-espace fermé $X_p(Y)$ de la $L_p(\mu,Y)$ et un opérateur $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X_p(Y),Z)$, de telle sorte que $\tilde{T}j_{p^i X\hat{\otimes}_\varepsilon Y} = T$ et $\left\|\tilde{T}\right\| = \pi_p^Y(T)$, où un opérateur $i_{X\hat{\otimes}_\varepsilon Y} : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to C(B_{X^*})\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ est le plongement isométrique définie par

$$i_{X\hat{\otimes}_\varepsilon Y}\left(\sum x_j \otimes y_j\right) = \sum i_x(x_j) \otimes y_j.$$

i_X est l'intégration naturelle de X dans $C(B_{X^*})$, et j_p est la restriction à $i_{X\hat{\otimes}_\varepsilon Y}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y)$ du j_p d'inclusion du $j_p : C(B_{X^*},Y) \to Lp(\mu,Y)$. De plus, pour tout $u \in X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$,

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \tilde{T}^*(z^*), j_{p^i X\hat{\otimes}_\varepsilon Y}(u)\right\rangle\right| &= \left|\left\langle z^*, \tilde{T}j_{p^i X\hat{\otimes}_\varepsilon Y}(u)\right\rangle\right| \\ &\leq \|z^*\|_{Z^*}\left\|\tilde{T}\right\|\left\|j_{p^i X\hat{\otimes}_\varepsilon Y}(u)\right\|_{Lp(\mu,Y)} \\ &= \pi_p^Y(T)\,\|z^*\|_{Z^*}\left\|j_{p^i X\hat{\otimes}_\varepsilon Y}(u)\right\|_{Lp(\mu,Y)}\end{aligned}$$

Autrement dit, $\tilde{T}^*(z^*) \in (X_p(Y))^*$ avec $\left\|\tilde{T}^*(z^*)\right\| \leq \pi_q^Y(T)\,\|z^*\|_{Z^*}$. Puis, par l'extension du théorème de Hahn-Banach et la dualité $(L_p(\mu,Y))^* = V^{p'}(\mu,Y^*)$ (voir par exemple [8]), on peut trouver un vecteur évaluée mesure $F_{z^*} : \mathcal{B} \to Y^*$ avec p' bornée de telle sorte que la variation $|F_{z^*}|_{p'} \leq \pi_p^Y(T)\,\|z^*\|_{Z^*}$ et $F_{z^*}|_{(X_p(Y))^*} = \tilde{T}^*(z^*)$. Ensuite, pour tout $u \in X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$, nous avons

$$\begin{aligned}\langle z^*, T(u)\rangle &= \left\langle \tilde{T}^*(z^*), j_{p^i X\hat{\otimes}_\varepsilon Y}(u)\right\rangle \\ &= \left\langle F_{z^*}, j_{p^i X\hat{\otimes}_\varepsilon Y}(u)\right\rangle \\ &= \textstyle\int_{B_{X^*}} \langle u, x^*\rangle\, dF_{z^*}(x^*),\end{aligned}$$

alors

$$|\langle z^*, T(u)\rangle| \leq \textstyle\int_{B_{X^*}} \|\langle u, x^*\rangle\|_Y \, d\,|F_{z^*}|\,(x^*).$$

D'un autre côté, on sait qu'il existe une fonction non négative $f_{z^*} \in L_{p'}(B_{X^*},\mu)$ avec

$$|F_{z^*}|(E) = \int_E f_{z^*} d\mu.$$

Pour tous $E \in \mathcal{B}$ et $\|f_{z^*}\|_{L_{p'}} = |F_{z^*}|_{p'} \leq \pi_p^Y(T)\|z^*\|_{Z^*}$.

Donc

$$|\langle z^*, T(u)\rangle| \leq \int_{B_{X^*}} \|\langle u, x^*\rangle\|_Y f_{z^*}(x^*) d\mu(x^*).$$

Ce qui termine la preuve. ■

Théorème 2.2.5 *[2]$T \in \Pi_p^Y(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$ et $S \in \Pi_{s,t}(Z,W)$, donc l'opérateur $ST : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \rightarrow W$ est $(r,q;Y)$-sommants où $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} \leq 1$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{t} \leq 1$ et $\pi_{r,q}^Y(ST) \leq \pi_{s,t}(S).\pi_p^Y(T)$.*

Preuve. Soit $(u_i)_{i=1}^n$ une suite finie d'éléments dans l'espace $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ et $u_i = \sigma_i v_i$ où $\sigma_i = \left(\int\limits_{B_{X^*}} \|\langle u_i, x^*\rangle\|_Y^q d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}}$.

Puis par l'inégalités de Hôlder nous avons

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|ST(u_i)\|_W^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |\sigma_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|ST(v_i)\|_W^s\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \pi_{s,t}(S) \|(\sigma_i)_{i=1}^n\|_{l_p^n} . \sup_{z^*\in B_{Z^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle z^*, T(v_i)\rangle|^t\right)^{\frac{1}{t}} \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Nous avons estimé l'expression dernières , note que

$$\begin{aligned} \|(\sigma_i)\|_{l_p^n} &= \left(\int\limits_{B_{X^*}} \sum_{i=1}^n \|\langle u_i, x^*\rangle\|_Y^q d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n \|\langle u_i, x^*\rangle\|_Y^q\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque T est (p,Y)-sommants, par le Lemme 2.2.1 on a

$$|\langle z^*, T(v_i)\rangle| \leq \int\limits_{B_{X^*}} \|\langle v_i, x^*\rangle\|_Y f_{z^*}(x^*) d\mu(x^*).$$

Que nous observons, donc

$$|\langle z^*, T(v_i)\rangle| \leq \sigma_i^{-1} \int\limits_{B_{X^*}} \|\langle u_i, x^*\rangle\|_Y^{\frac{q}{p}} \|\langle u_i, x^*\rangle\|_Y^{\frac{q}{t}} \; |f_{z^*}(x^*)|^{\frac{p'}{t}} |f_{z^*}(x^*)|^{\frac{p'}{q'}} d\mu(x^*)$$

En utilisant l'inégalité de Hôlder deux fois, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle z^*, T(v_i)\rangle| &\leq \sigma_i^{-1}\sigma_i \left(\int\limits_{B_{X^*}} \left(\|\langle u_i, x^*\rangle\|_Y^{q} \; |f_{z^*}(x^*)|^{p'} \right)^{\frac{p'}{t}} \left(|f_{z^*}(x^*)|^{p'} \right)^{\frac{p'}{q'}} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \left(\int\limits_{B_{X^*}} \|\langle u_i, x^*\rangle\|_Y^{q} \; |f_{z^*}(x^*)|^{p'} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{t}} \|f_{z^*}\|_{L_{p'}}^{\frac{p'}{q'}}. \end{aligned}$$

Puis

$$|\langle z^*, T(v_i)\rangle| \leq \|f_{z^*}\|_{L_{p'}}^{\frac{p'}{q'}} \left(\int\limits_{B_{X^*}} \|\langle u_i, x^*\rangle\|_Y^{q} \; |f_{z^*}(x^*)|^{p'} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{t}}$$

Résumant sur $i = 1, 2, ..., n$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle z^*, T(v_i)\rangle|^t \right)^{\frac{1}{t}} &\leq \|f_{z^*}\|_{L_{p'}}^{\frac{p'}{q'}} \left(\int\limits_{B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} \|\langle u_i, x^*\rangle\|_Y^{q} \; |f_{z^*}(x^*)|^{p'} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{t}} \\ &\leq \|f_{z^*}\|_{L_{p'}}^{\frac{p'}{q'}} \|f_{z^*}\|_{L_{p'}}^{\frac{p'}{t}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\langle u_i, x^*\rangle\|^{q} \right)^{\frac{1}{t}} \\ &\leq \|f_{z^*}\|_{L_{p'}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\langle u_i, x^*\rangle\|^{q} \right)^{\frac{1}{t}} \\ &\leq \pi_p^Y(T) \|z^*\|_{Z^*} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\langle u_i, x^*\rangle\|^{q} \right)^{\frac{1}{t}}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|ST(u_i)\|_W^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \pi_{s,t}(S)\pi_p^Y(S). \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\langle u_i, x^*\rangle\|^{q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

2.3 Les opérateurs intégraux

Définition 2.3.1 *Un opérateur linéaire borné T entre X et Y est appelé un opérateur intégral si la forme bilinéaire τ définit un élément de $(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y^*)^*$, où τ est induite par T selon la formule $\tau(e, x^*) = x^*(Te)(e \in X, x^* \in Y^*)$. Nous allons définir la norme intégrale de T,* *notée* $\|T\|_{int}$ *par*

$$\|T\|_{int} = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^*(Te_i)\right| : \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes x_i^*\right\|_{\varepsilon} \leq 1\right\}.$$

L'espace de tous les opérateurs intégraux de X *dans* Y *sera notée* $I(X,Y)$.

Définition 2.3.2 *Nous dirons que* X *est un* $\mathcal{L}_\infty-$*espace si, pour une* $\lambda > 1$, *nous avons que pour chaque sous-espace de dimension finie* B *de* X, *il existe un sous-espace de dimension finie* E *de* X *contenant* B, *et un opérateur linéaire borné inversible* $T : E \to l_\infty^{\dim E}$ *tel que* $\|T\|\,\|T^{-}\| \leq \lambda$.

Proposition 2.3.1 *[23]L'espace* X *est un* $\mathcal{L}_\infty-$*espace, si et seulement si pour tout espace* Y *nous avons que* $I(X,Y) = \Pi_1(X,Y)$. *Nous allons utiliser cette caractérisation* $\mathcal{L}_\infty-$*espace dans la suite. Enfin, nous notons la caractérisation suivante de* 1*-sommant des opérateurs* (*appelé droit semi-intégral par Grothendieck dans*[9]).

Proposition 2.3.2 *Les propriétés suivantes à propos d'un opérateur linéaire borné* T *de* X *à* Y *sont équivalentes*

1. *Si* T *est* 1*-sommant,*

2. *Il existe un espace de Banach* Y_1, *et une injection isométrique* $\varphi : Y \to Y_1$, *de telle sorte que* $\varphi \circ T : X \to Y_1$ *est un opérateur intégral.*

Pour plus de détailler voir [6], [10]ou [19].

Remarque 2.3.1 *[16] Si* $T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ *est p-sommant, alors* $T^{\#} : Y \to \Pi_p(X,Z)$ *est p-sommant, nous avons*

$$\phi(\Pi_p(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)) \subset \Pi_p(Y,\ \Pi_p(X,Z)). \tag{2.3.1}$$

2.3.1 Les opérateurs 1-sommants et integraux

Dans cette section, nous allons étudier les opérateurs 1-sommants, et les opérateurs l'intégraux sur $X\hat{\otimes}_\epsilon Y$. Nous allons utiliser la Proposition 2.3.2 de relier ces deux idées. Premier de tous, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.3.1 [6]*Soit $T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ un opérateur linéaire borné. Désignons par $i : Z \to Z^{**}$ le plongement isométrique de Z dans Z^{**}. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $T \in I(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$,

2. $\hat{\imath} \circ T \in I(X, I(Y, Z^{**}))$, *où* $\hat{\imath} : I(Y,Z) \to I(Y, Z^{**})$ *est défini par* $\hat{\imath}(U) = i \circ U$ *chaque* $U \in I(Y,Z)$

En particulier, si $T^{\#} \in I(X, I(Y,Z))$, alors $T \in I(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$.

Théorème 2.3.2 [16]*Soit $T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ un opérateur linéaire borné. Si T est intégral, puis $T^{\#} : X \to I(Y,Z)$ est 1-sommant. Si en autre X est un $\mathcal{L}_\infty-$espace, puis $T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ est intégral si et seulement si $T^{\#} : X \to I(Y,Z)$ est intégral.*

Preuve. Tout d'abord, nous allons montrer que, si $T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ est un opérateur intégral, puis $T^{\#}$ est dans $\Pi_1(X, I(Y,Z)$ et $\pi_1(T^{\#}) \leq \|T\|_{int}$. Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ dans X, et fixer $\varepsilon > 0$. Pour chaque $i \leq n$, il existe $n_i \in N$, $(y_{ij})_{j\leq n_i} \in Y$, et$(z^*_{ij})_{j\leq n_i} \in Z^*$, de sorte que $\left\|\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \otimes z^*_{ij}\right\|_\varepsilon \leq 1$, et

$$\left\|T^{\#}x_i\right\|_{int} \leq \sum_{j=1}^{n_i} z^*_{ij}(T(x_i \otimes y_{ij})) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Comme T est un opérateur intégral, et

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} x_i \otimes y_{ij} \otimes z^*_{ij}\right\|_\varepsilon \leq \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)| : \|x^*\| \leq 1, x^* \in X^*\right\},$$

Il en résulte que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} z^*_{ij}(T(x_i \otimes y_{ij})) \leq \|T\|_{int} \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)| : \|x^*\| \leq 1, x^* \in X^*\right\}.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|T^{\#}x_i\right\|_{int} \leq \|T\|_{int} \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)| : \|x^*\| \leq 1, x^* \in X^*\right\} + \varepsilon.$$

Maintenant, si en plus X est $\mathcal{L}_\infty-$espace, puis par [23], en effet l'opérateur $T^{\#}$ est intégral. Ce qui termine la preuve. ■

Théorème 2.3.3 *[16]Si X est un $\mathcal{L}_\infty-$espace, alors l'opérateur linéaire bornée $T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ est 1-sommant si et seulement si $T^{\#} : X \to \Pi_1(Y, Z)$ est 1-sommant.*

Preuve. Soit $T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to Z$ être telle que $T^{\#} : X \to \Pi_1(Y, Z)$ est 1-sommant. Depuis X est un $\mathcal{L}_\infty-$espace, il résulte de [25] que $T^{\#} : X \to \Pi_1(Y, Z)$ est un opérateur intégral. Soit φ désignent le plongement isométrique de Z dans $C(B_{Z^*})$, l'espace de toutes les fonctions scalaires continues sur la boule unité B_{Z^*} de Z^* avec sa topologie $*$-faible. Ce induit une isométrie

$$\hat{\varphi} : \Pi_1(Y, Z) \to \Pi_1(Y, C(B_{Z^*})),$$
$$\hat{\varphi}(U) = \varphi \circ U \text{ pour tout } U \in \Pi_1(Y, Z).$$

Maintenant, il résulte de [26], telle que $\Pi_1(Y, C(B_{Z^*}))$ est isométrique à $I(Y, C(B_{Z^*})))$, par conséquent, nous pouvons supposer que $\hat{\varphi} \circ T^{\#} : X \to I(Y, C(B_{Z^*}))$ est un opérateur intégral. De plus, il est facile de vérifier que $(\varphi \circ T)^{\#} = \hat{\varphi} \circ T^{\#}$. D'après le Théorème 2.3.1 l'opérateur $\varphi \circ T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to C(B_{Z^*})$ est un opérateur intégral, et donc T est en $\Pi_1(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y, Z)$, par Proposition 2.3.2 . Ce qui termine la preuve. ■

Remarque 2.3.2 *L'implication inverse est vraie pour $Y = C(\mathbb{k})$(voir [27]) ou si Y est un B_{Z^*}(voir [16]) on a $\phi(\Pi_1(X \otimes Y, Z)) = \Pi_1(Y, \Pi_1(X, Z))$ pour Y est un $\mathcal{L}_\infty-$espace.*

Bibliographie

[1] R. Bilyeu, and P. Lewis, Some Mapping Properties of Representing Measures, Ann.Math Pure Appl. CIX(1976) p. $273 - 287$.

[2] Oscar Blasco and Teresa Signes, Remarks on $(q; p; Y)$-summing opera-tors, Quaestiones Mathematicae $25(2002), 1 - 7$.

[3] G. Botelho, D.M. Pellegrino, P. Rueda, Pietsch's factorization theorem for dominated polynomials, J.Math. Anal. 243(2007), $257 - 269$.

[4] Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda, A unified Pietsch Domination Theorem, J. Math. Anal. Appl. $365(2010), 269 - 276$.

[5] J. Diestel et H. Jarchow et A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge University. Press. Cambridge, 1995.

[6] J. Diestel, and J.J. Uhl Jr., Vector Measures, Math Surveys, 15, AMS, Providence,RI(1977).

[7] A. Defant and K. Floret, Tensor norms and operator ideals, North-Holland, Amsterdam, 1993.

[8] N. Dinculeanu, Vector Measures, Pergamon Press, New York, 1967.

[9] A. Grothendick, Produits tensoriels topologiques et espaces nucl´eaires, Mem. A.M.S. $16, (1955)$.

[10] G.J.O. Jameson, Summing and Nuclear Norms in Banach Space Theory,LMSST 8, Cambridge University Press (1987).

[11] H. Jarchow, Locally convex spaces, Teuber, Stuttgart, 1981.

[12] J. P. Kahane, *Sur les sommes vectorielles*, C. R. Acad. Sci. Paris 259(1964), $2577-2580$. (French).

[13] S.V.Kislyakov, Absolutely summing operators on disk algebra; St. Petrsburg Math. J.**3**(4) (1992), $705-774$.

[14] A.Y.Khintchine, *Ueber dyadische brűche*, Math.Z.18 (1923) , $109-116$.

[15] J. Lindenstrauss and A. Pelczy nski, Absolutely summing operators in Lp-spaces and their applications, Studia Math. 29(1968), $275-326$.

[16] S. Montgomery-Smith and P. Saab, p-Summing operators on injective tensor products of spaces, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 120A (1992), $283-296$.

[17] A. Pietch, Absolut p-summierende in Abbildungen in normierten Raumen. Studia Math. 28 (1967).

[18] A. Pietsch, Operator Ideals, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[19] G. Pisier, Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces,AMS CBMS 60, Providence RI(1986).

[20] P. Wojtaszczyk, Banach Spaces for Analysts, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[21] D. Pellegrino and J. Santos, A general Pietsch Domination Theorem, J. Math. Anal. Appl. 375(2011), $371-374$.

[22] D. Pellegrino, J. Santos and J.B. Seoane-Sepúlveda, Some techniques on non linear analysis and applications, Adv. Math. 229(2012), $1235-1265$.

[23] J.R. Retherford, and C. Stegall, Fully Nuclear and Completely Nuclear Operators with applications to $\pounds_1$ and $\pounds_\infty$ spaces, T.A.M.S., 163, (1972) p. $457-492$.

[24] R. A. Ryan, Introduction to tensor products of Banach spaces. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London Ltd., London, 2002.

[25] B. SMITH, Some Bounded Linear Operators On the Spaces $C(\Omega, E)$ and $A(K, E)$, Ph.D. Dissertation, The University of Missouri-Columbia, 1989.

[26] C. STEGALL, Characterization of Banach spaces whose duals are $L1$ spaces, Is. J. of Math, 11, (1972) p. $299 - 308$. (1992), no. $3 - 4, 283 - 296$.

[27] C. SWARTZ, Absolutely summing and dominated operators on spaces of vector-valued continuos functions, Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973), $123 - 131$.

[28] N. TOMCZAK, A remark on $(s;t)$-absolutely summing operators in Lp-spaces, Studia Math. $35(1970), 97 - 100$.