

# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du diplôme de :

## MASTER

En Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Présenté par :

**CHEGUELOUFA Mourad**

## Thème

Analyse numérique du comportement  
dynamique du rotor d'une pompe centrifuge  
par la méthode des éléments finis

Devant le jury composé de:

NOM et Prénom	Grade	Qualité
<b>ZAOUI Moussa</b>	Professeur	Président
<b>MENASRI Nouredine</b>	Professeur	Encadrant
<b>LATRACHE Mohamed</b>	MCB	Examineur

Année Universitaire : 2024 / 2025

N° d'ordre : GM/...../2025

## Remerciements

Avant tout, je remercie Allah, le Tout-Puissant, de m'avoir accordé la santé, la patience, la volonté, le courage et la force nécessaires pour surmonter toutes les difficultés rencontrées tout au long de mon parcours.

J'adresse mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Noureddine Menasri, enseignant à l'Université de M'sila, pour avoir dirigé ce mémoire, pour ses conseils judicieux et son encadrement de qualité.

Mes remerciements vont également au Docteur Noureddine Aimeur, assistant et co-encadrant de ce travail, pour son accompagnement, ses observations constructives et son implication précieuse dans la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma gratitude particulière à Monsieur Yacine Deia et Monsieur Mohamed El Arbi Ben Ziane, ingénieurs à la société SONATRACH, pour leur accueil chaleureux, leur encadrement sur le terrain, ainsi que pour les précieuses informations et explications qu'ils m'ont fournies durant mon stage.

Je remercie aussi les membres du jury, le Professeur Moussa ZAOUI et le Docteur Mohamed LATRACHE, pour avoir accepté d'évaluer mon travail, ainsi que pour leurs remarques pertinentes et enrichissantes.

Toute ma reconnaissance et tout mon respect vont à mes parents, mon épouse, mes enfants ainsi que mes frères et sœurs, pour leur soutien moral, leurs encouragements constants et leur présence précieuse tout au long de ce parcours.

Enfin, j'adresse un salut amical et respectueux à tous mes amis, collègues et à toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, à l'accomplissement de ce travail.

## ملخص

تُعدّ الآلات الدوّارة، مثل المضخات والتوربينات (أو الآلات التوربينية)، من العناصر الأساسية في الصناعة الحديثة منذ عدة سنوات. وتُستخدم المضخات بشكل خاص في معظم القطاعات الصناعية، بما في ذلك صناعة المحركات. ولضمان الأداء الأمثل لهذه الأنظمة، من الضروري مراقبة سعة تشوه العمود ومعرفة ترددات الرنين لتفادي حدوث اهتزازات مفرطة في النظام. إذ إن زيادة الاهتزاز تؤدي إلى انخفاض الكفاءة، وارتفاع مستوى الضجيج، وقد تتسبب في إتلاف النظام، مثل: حدوث فشل بالتعب، وتلف في المحامل، واحتكاك بين الدوّار والجزء الثابت. لذلك، فإن دراسة ديناميكا الآلات الدوّارة أصبحت أكثر أهمية من أي وقت مضى. ويُقدم هذا العمل دراسة عددية للسلوك الديناميكي لدوّار مضخة طرد مركزي، باستخدام طريقة العناصر المحدودة. وقد تم تنفيذ عملية النمذجة باستخدام برنامج ANSYS بالاعتماد على طريقة العناصر المحدودة، من أجل تحديد حالات الرنين الممكنة، وأشكال التشوه الذاتي، والسرعات الحرجة للدوّار.

**الكلمات المفتاحية:** مضخات الطرد المركزي، ديناميكا الدوّارات، العناصر المحدودة، التحليل النمطي.

## **Abstract**

Rotating machines, such as pumps and turbines (or turbomachines), have been indispensable components of modern industry for many years. In particular, pumps are used in most industrial sectors, including the oil and gas industry. To optimize and guarantee the performance of these systems, it is essential to control the amplitude of shaft deformation and to know the resonance frequencies, in order to avoid excessive system vibration. Excessive vibration amplitude can lead to reduced efficiency, excessive noise and system damage, such as fatigue failure, bearing damage or friction between rotor and stator.

The study of rotating machine dynamics is therefore more important today than ever before.

The work presented in this thesis constitutes a numerical analysis of the dynamic behavior of the rotor of a centrifugal pump, using the finite element method.

Modeling was carried out using the finite element method and the ANSYS code, in order to determine possible resonance states, eigendeformations and critical rotor speeds.

**Key words:** Centrifugal pumps, Rotor dynamics, Finite elements, Modal analysis.

## **Résumé**

Les machines tournantes, telles que les pompes et les turbines (ou turbomachines), sont des éléments indispensables de l'industrie moderne depuis de nombreuses années. En particulier, les pompes sont utilisées dans la plupart des secteurs industriels, y compris celui des hydrocarbures. Pour optimiser et garantir les performances de ces systèmes, il est essentiel de contrôler l'amplitude de la déformation de l'arbre et de connaître les fréquences de résonance, afin d'éviter une vibration excessive du système. En effet, une amplitude de vibration trop élevée peut entraîner une réduction de l'efficacité, un bruit excessif, ainsi que des dommages au système, tels que : la défaillance par fatigue, l'endommagement des roulements, ou encore le frottement entre le rotor et le stator.

L'étude de la dynamique des machines tournantes est donc aujourd'hui plus importante que jamais.

Le travail présenté dans cette thèse constitue une analyse numérique du comportement dynamique du rotor d'une pompe centrifuge, en utilisant la méthode des éléments finis.

La modélisation a été réalisée à l'aide de la méthode des éléments finis et du code ANSYS, afin de déterminer les états de résonance possibles, les déformations propres et les vitesses critiques du rotor.

**Mots clés :** Pompes centrifuges, Dynamique des rotors, Éléments finis, Analyse modale.

## Table des matières

Remerciements .....	2
Table des matières .....	4
Liste des tableaux .....	7
Introduction générale.....	9

### Chapitre I : Généralité sur les pompes centrifuge

I.1. Introduction.....	12
I.2.Historique des pompes :.....	12
I.3.Généralités sur les pompes.....	13
I.4. Classification des pompes.....	13
I.4.1. Les pompes volumétriques :.....	14
I.4.1.1. Types de pompes volumétriques .....	14
I.4.1.2. Les avantages et les inconvénients des pompes volumétriques : .....	15
I.4.2. Les pompes roto-dynamiques.....	15
I.4.2.1 Les avantages et les inconvénients des pompes roto-dynamiques .....	16
I.5. Caractéristiques principales des pompes .....	17
I.5.1. Les pompes volumétriques.....	17
I.5.2.Caractéristiques des pompes roto-dynamiques .....	17
I.6. Les pompes centrifuges.....	19
I.6.1. Définition .....	19
I.6.2. Description d'une pompe centrifuge .....	19
I.6.3. Principe de fonctionnement d'une pompe centrifuge .....	20
I.6.4. Classification des pompes centrifuges .....	21
I.6.5. Théorie des pompes centrifuges .....	23
I.6.5.1. Caractéristiques des pompes centrifuges .....	23
I.6.5.2. Triangle des vitesses.....	23
I.6.5.3. Les courbes caractéristiques de la pompe centrifuge .....	24
I.7.Couplage d'une pompe centrifuge .....	28
I.8.Conclusion .....	31

### Chapitre II : Modélisation des rotors par la méthode des éléments finis

II.1. Introduction: .....	33
II.2. Modélisation des systèmes des rotors.....	33
II.2.1. Méthodologie et hypothèses de modélisation .....	33
II.2.2. Équation du mouvement : Formulation algébrique .....	34

II.2.2.1. Disque.....	36
II.2.2.2. Arbre.....	36
II.2.2.3. paliers .....	39
II.2.2.4. Le balourd .....	40
II. 3.Modélisation des rotors par éléments finis .....	41
II.3.1. Expressions des énergies des éléments du rotor .....	41
II.3.1.1. Energie de déformation d'un élément de rotor.....	41
II.3.1.2. Energie cinétique d'un élément de rotor .....	42
II.3.2. Formulation matricielle.....	43
II.3.2.1. Formulation matricielle des équations du disque .....	43
II.3.2.2. Formulation matricielle des équations de l'arbre.....	44
II.3.2.3. Formulation matricielle des équations du palier .....	49
II.5. Conclusion .....	54

### **Chapitre III : Simulation du comportement dynamique du rotor d'une pompe centrifuge**

III.1. Introduction .....	56
III.2. Description .....	56
III.2.1.Schéma descriptif de la pompe .....	57
III.3. Analyse modèle du rotor d'une pompe centrifuge par logiciel Workbench ANSYS .....	58
III.3.1. Analyse modale.....	58
III.3.2. Méthodologie d'analyse dynamique du rotor à l'aide d'ANSYS Workbench : .....	58
III.3.3. Modèle géométrique : .....	59
III.3.5. Condition aux limites.....	61
III.3.6. Calcul des Coefficients de Rigidité et d'Amortissement des Paliers 'coussinets' .	62
III.3.6.1. Équation de Reynolds Dynamique.....	62
III.3.6.2. Classification des Paliers [19] : .....	62
III.3.6.3. Épaisseur du Film et Théorie des Perturbations .....	63
III.3.6.4. Dédution des Coefficients .....	63
III.3.6.5. Partie Calculatoire.....	63
III.3.7. Résultats numérique .....	65
III.3.7.1. Analyse modale.....	65
III.3.7.2.Diagramme de Campbell .....	65
III.3.7.3.Formes modales .....	66
Conclusion générale .....	72

## Liste des Figures

Figure I.1: Classification des pompes .....	14
Figure I.2: Pompe à Piston .....	14
Figure I.3: Pompe à membrane .....	14
Figure I.4: Pompe à lobes.....	14
Figure I.5: Pompe à engrenages .....	15
Figure I.6: Pompe à palettes.....	15
Figure I.7: Types des pompes roto-dynamiques .....	16
Figure I.8 : Domaine d'utilisation des pompes centrifuge.....	19
Figure I.9 : Pompe centrifuge monocellulaire (en porte à faux).....	19
Figure I.10 : Principe de fonctionnement d'une pompe centrifuge .....	21
Figure I.11: Pompe centrifuge monocellulaire.....	21
Figure I.12: Pompe centrifuge multicellulaire. ....	22
Figure I.13: - A - Roue à simple aspiration -B- Roue à Double aspiration.....	22
Figure I.14: les différents designs de volutes.....	22
Figure I.15: Triangle de vitesse d'une roue de pompe centrifuge.....	24
Figure I.16: Représentation des triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue.....	24
Figure I.17: Courbes caractéristiques de la pompe .....	25
Figure I.18 : Point de fonctionnement d'une pompe.....	25
Figure I.19: Evolution de la vitesse et de la pression dans une pompe centrifuge.....	28
Figure I.20: Caractéristique d'ensemble pour deux pompes en série .....	29
Figure I.21: Caractéristique d'ensemble pour deux pompes en parallèle .....	30
Figure II.1 : Composants de base d'une machine tournante.....	33
Figure II.2: Exemple de rotor.....	35
Figure II. 3: Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor .....	38
Figure II.4 : Amortissements et raideurs des paliers.....	39
Figure II.5 : Masse de balourd excentrée sur le disque .....	40
Figure II.6 : Degrés de liberté du disque .....	43
Figure II.7 : Degrés de liberté d'un élément arbre .....	44
Figure II.8 : Modèle de rotor avec éléments et nœuds.....	50
Figure III.4 : Méthodologie d'analyse dynamique du rotor à l'aide du logiciel ANSYS Workbench .....	59
Figure III.05 : conception du rotor .....	59
Figure III.06 : Géométrie de l'élément SOLID187.....	60

Figure III.07 : Maillage de rotor .....	61
Figure III.08 : Conditions aux limites du rotor.....	61
Figure III.09 : diagramme de Campbell .....	66
Figure III.11 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3000 tr/min : (B : Mode 2).....	67
Figure III.12 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3000 tr/min : (C : Mode 3).....	67
Figure III.14 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3500 tr/min : (A : Mode 1).....	68
Figure III.15 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3500 tr/min : (B : Mode 2).....	68
Figure III.17 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3500 tr/min : (D : Mode 4).....	69
Figure III.18 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 4000 tr/min : (A : Mode 1).....	69
Figure III.19 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 4000 tr/min : (B : Mode 2).....	69
Figure III.21 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 4000 tr/min : (D : Mode 4).....	70

## **Liste des tableaux**

Tableau I.01 : Les avantages et les inconvénients des pompes volumétriques.....	15
Tableau I.02 : Les avantages et les inconvénients des pompes roto-dynamiques.....	17
Tableau I.03 : Caractéristiques des pompes .....	18
Tableau II.01 : Nœuds et déplacements associés aux éléments du rotor. ....	49
Table III.01 : Fréquence naturelle .....	64

# **Introduction générale**

## **Introduction générale**

Les machines tournantes telles que les pompes, les turbines (ou turbomachines) et les compresseurs sont devenues depuis de nombreuses années des éléments indispensables pour l'industrie moderne. D'une manière générale, les turbomachines ont pour but d'assurer un échange d'énergie entre un rotor tournant à vitesse constante et un débit permanent de fluide. Dans les centrales électriques, les groupes turboalternateurs permettent la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique. Dans la plupart des industries, les pompes sont présentes pour assurer la circulation des fluides. Les machines tournantes sont aussi des composants pour la plupart des véhicules : turboréacteur pour un avion, turbocompresseur automobile, turbines de bateaux ou de sous-marins.

Les performances de ces systèmes sont sans cesse améliorées afin d'augmenter leur rendement, de diminuer leur poids ou leur bruit. Pour cela, l'amplitude de déformation de l'arbre doit être maîtrisée et ses fréquences de résonance connues afin d'éviter une trop grande vibration du système. En effet, une trop grande amplitude de vibration engendre un moindre rendement, un bruit trop important, et peut même aboutir à l'endommagement du système : rupture par fatigue, endommagement des paliers, frottement rotor/stator. L'étude de la dynamique des machines tournantes est donc plus que jamais d'actualité.

**L'objectif** principal de cette étude est de réaliser une analyse numérique du comportement dynamique du rotor d'une pompe à cinq étages, modèle GUINARD DVMX 6.8.11 E. Cette étude par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel ANSYS afin de déterminer les vitesses critiques par diagramme de Campbell, la stabilité et les performances vibratoires du système dans des conditions opérationnelles.

Nous avons structuré notre travail en trois parties, chacune développée sous forme de chapitre :

- Le premier chapitre, intitulé "Généralités sur les pompes", est consacré à la présentation des notions fondamentales concernant les pompes, leurs différents types ainsi que leurs principales caractéristiques.

- Le deuxième chapitre, intitulé "Modélisation des rotors par la méthode des éléments finis", aborde le phénomène de tournoisement et introduit la notion de vitesse critique. Les vibrations latérales du modèle élémentaire de Laval/Jeffcott y sont étudiées d'abord sans paliers, puis avec des paliers isotropes et enfin anisotropes. Ce chapitre présente également la procédure et les outils nécessaires à une analyse précise du comportement vibratoire des arbres ou rotors,

illustrée par un exemple de modélisation permettant de montrer la constitution de la matrice globale.

- Le troisième chapitre, intitulé "Simulation numérique", est dédié au développement d'une simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor d'une pompe centrifuge de type GUINARD DVMX 6.8.11 E, à l'aide de la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel ANSYS WORKBENCH.

Enfin, notre travail se conclut par une conclusion générale.

# **Chapitre I : Généralité sur les pompes centrifuge**

## **I.1. Introduction**

L'eau, ressource vitale est omniprésente sur Terre, n'est pas toujours disponible dans les quantités et aux endroits nécessaires à son exploitation optimale. Face à cette contrainte, l'homme a créé et développé des systèmes permettant le captage, le transport et la mise en pression des fluides, au cœur desquels se trouvent les pompes.

Les pompes jouent un rôle essentiel dans de nombreux systèmes industriels, notamment dans le transport de fluides dans les secteurs de l'énergie, de la pétrochimie, de l'agroalimentaire et de l'hydraulique. Leur fonctionnement repose sur la transformation de l'énergie mécanique fournie par un moteur en énergie cinétique puis en énergie de pression du fluide.

Du point de vue technique, une pompe permet soit de refouler un liquide d'un point à basse pression vers un point à plus haute pression, soit de soulever un liquide d'un niveau inférieur à un niveau supérieur. Il en existe plusieurs types, notamment les pompes centrifuges, les pompes volumétriques, chacune adaptée à des conditions d'utilisation spécifiques. Parmi les composants clés d'une pompe centrifuge, le rotor occupe une place centrale, en assurant la conversion énergétique et en déterminant en grande de partie la performance dynamique de la machine.

## **I.2. Historique des pompes :**

Depuis l'Antiquité, le besoin de pomper des liquides – en particulier l'eau – s'est imposé comme une nécessité vitale pour l'agriculture, l'irrigation, l'approvisionnement domestique et la lutte contre les incendies. Ce besoin a conduit au développement des premières technologies de pompage. L'une des plus célèbres est la vis d'Archimède, inventée au 3<sup>e</sup> siècle avant Jésus-Christ, capable de déplacer des volumes importants d'eau à faible hauteur. Cette invention est encore utilisée aujourd'hui, notamment dans le traitement des eaux usées.

Au fil du temps, d'autres systèmes ingénieux voient le jour, comme la pompe Noria, utilisant l'énergie hydraulique pour élever l'eau à des hauteurs allant jusqu'à 30 mètres grâce à un mécanisme de godets montés sur une roue. Vers 1600, l'apparition des systèmes tige-manivelle permet la création des premières pompes à piston manuelles. L'arrivée de la machine à vapeur révolutionne ensuite ces systèmes en leur fournissant une force motrice beaucoup plus importante, permettant l'extraction d'eau depuis de grandes profondeurs, notamment dans les mines.

Cependant, les véritables fondements scientifiques de la mécanique des fluides apparaissent à la Renaissance et se développent au 18<sup>e</sup> siècle. À la fin du 15<sup>e</sup> siècle, Léonard de Vinci s'intéresse aux phénomènes liés au mouvement de l'eau et propose plusieurs concepts hydrotechniques. Par la suite, Evangelista Torricelli établit la loi de l'écoulement des liquides

à travers un orifice, et Blaise Pascal, vers 1750, énonce la loi de transmission de la pression dans les liquides.

Ces lois fondamentales sont ensuite structurées et approfondies par Daniel Bernoulli et Leonhard Euler. En 1738, Bernoulli publie une équation essentielle du mouvement des fluides, reliant pression ( $p$ ), vitesse ( $v$ ) et hauteur ( $H$ ), aujourd'hui connue sous le nom d'équation de Bernoulli. De son côté, Euler élabore l'équation fondamentale des machines hydrauliques à aubes, posant les bases théoriques des pompes modernes.

Parmi ces machines, la pompe centrifuge s'impose comme l'un des dispositifs les plus utilisés pour le transport des liquides, grâce à son fonctionnement basé sur la transformation de l'énergie cinétique en pression. Elle joue aujourd'hui un rôle central dans de nombreux domaines de l'ingénierie, de l'industrie à la production d'énergie.

### **I.3. Généralités sur les pompes**

Les pompes sont des machines hydrauliques conçues pour transférer un fluide d'un point à un autre en augmentant son énergie, notamment sa pression et/ou son altitude. Elles permettent ainsi d'assurer l'écoulement du fluide dans un circuit donné. Le terme « turbomachine » désigne de manière générale les machines tournantes qui échangent de l'énergie avec un fluide s'écoulant de manière continue à travers un rotor

Un premier critère de classification des turbomachines repose sur la nature du fluide mis en œuvre :

- Les machines à fluide compressible telles que les compresseurs.
- Les machines à fluide incompressible telles que les pompes et les ventilateurs.

Concernant les pompes, celles-ci peuvent être classées en deux grandes catégories selon leur principe de fonctionnement : les pompes volumétriques et les pompes roto-dynamiques, qui seront abordées ultérieurement.

### **I.4. Classification des pompes**

Les pompes peuvent être classées en deux grandes familles selon leur principe de fonctionnement : (cf. Figure I.1)

- Les pompes volumétriques.**
- Les pompes roto-dynamiques.**

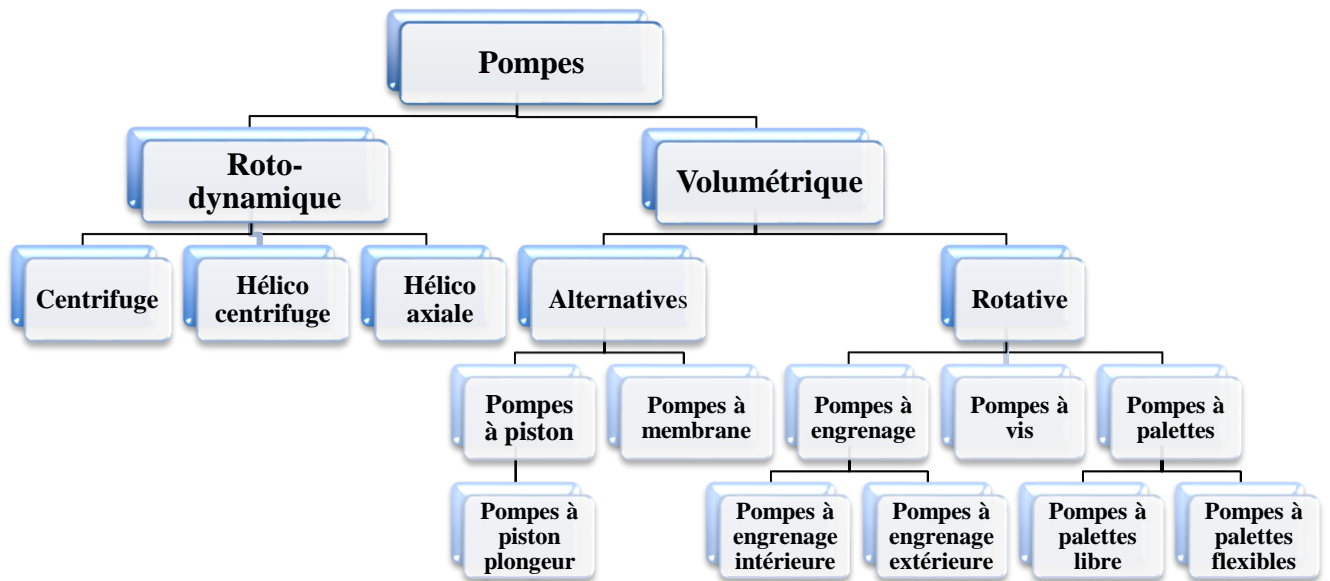


Figure I.1: Classification des pompes

#### I.4.1. Les pompes volumétriques :

Les pompes volumétriques sont des dispositifs dans lesquels le liquide est déplacé de manière proportionnelle au mouvement d'un organe mobile, comme un piston ou un diaphragme. Le liquide est mis en mouvement en étant progressivement transféré de la chambre d'aspiration vers celle de refoulement.

##### I.4.1.1. Types de pompes volumétriques : [1]

- a) **Pompes volumétriques alternatives** : fonctionnent par un mouvement de va-et-vient (ex. : pompes à piston, à membrane).



Figure I.2: Pompe à Piston



Figure I.3: Pompe à membrane

- b) **Pompes volumétriques rotatives** : utilisent un mouvement de rotation pour déplacer le fluide (ex. : pompes à engrenages, à palettes, à lobes).

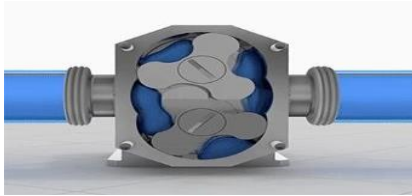


Figure I.4: Pompe à lobes

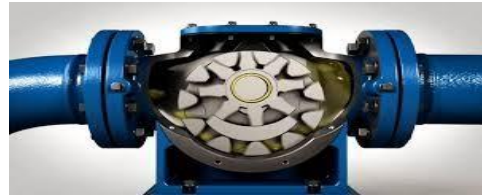


Figure I.5: Pompe à engrenages

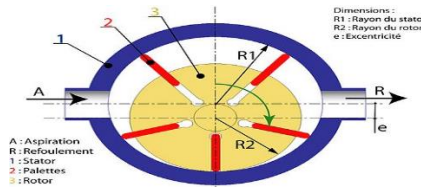


Figure I.6: Pompe à palettes

### I.4.1.2. Les avantages et les inconvénients des pompes volumétriques :

Aventages	Inconvénient
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Débit constant</b> : Le débit est indépendant de la pression de refoulement (jusqu'à une certaine limite), ce qui les rend très précises.</li> <li>- <b>Auto-amorçantes</b> : Elles peuvent amorcer le fluide sans besoin de remplissage préalable.</li> <li>- <b>Capables de pomper des fluides visqueux</b> : Idéales pour des liquides épais (huiles, sirops, boues...).</li> <li>- <b>Haute pression possible</b> : Elles peuvent fonctionner à haute pression sans grosse perte d'efficacité.</li> <li>- <b>Bonne précision pour les dosages</b> : Très utilisées dans les systèmes de dosage et d'injection (industrie pharmaceutique, alimentaire...).</li> <li>- <b>Peu sensibles à l'air ou aux gaz dans le liquide</b> : Elles continuent à fonctionner même si le liquide contient des bulles d'air.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Coût plus élevé</b> : Généralement plus chères à l'achat et à l'entretien que les pompes centrifuges.</li> <li>- <b>Entretien plus fréquent</b> : Pièces mobiles internes (pistons, engrenages, membranes...) sujettes à l'usure.</li> <li>- <b>Risque de surpression</b> : Si le refoulement est bloqué, la pompe continue de pousser, ce qui peut entraîner des dégâts (d'où la nécessité de soupapes de sécurité).</li> <li>- <b>Pulsations possibles</b> : Certaines pompes (comme les à piston ou à diaphragme) produisent un débit pulsé qui peut nécessiter un amortisseur.</li> <li>- <b>Moins adaptées aux gros débits</b> : Pas idéales pour des applications où un grand volume de liquide doit être déplacé rapidement.</li> </ul>

Tableau I.01 : Les avantages et les inconvénients des pompes volumétriques

### I.4.2. Les pompes roto-dynamiques

Les pompes roto-dynamiques sont des turbomachines qui convertissent l'énergie mécanique fournie par un rotor en énergie hydraulique (potentielle et cinétique) du fluide. Cette transformation permet d'augmenter la pression et/ou le débit du fluide transporté. Elles sont largement utilisées dans les domaines industriels, agricoles et domestiques pour le pompage de liquides.

On distingue trois grands types de pompes roto-dynamiques, selon la direction principale de l'écoulement du fluide par rapport à l'axe de rotation :

- Pompes centrifuges ‘à écoulement radiale’
- Pompes Hélico centrifuges ‘à écoulement diagonal’
- Pompes Hélico Axiales ‘à écoulement axiales’

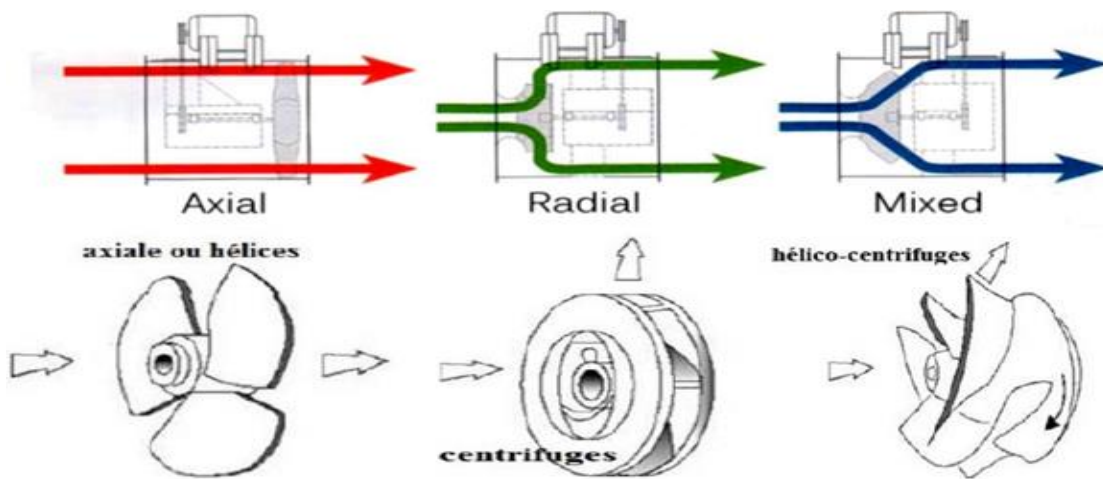


Figure I.7: Types des pompes roto-dynamiques [1].

### I.4.2.1 Les avantages et les inconvénients des pompes roto-dynamiques

Aventages	Inconvénient
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Débit continu et régulier</b> : Idéal pour les applications nécessitant un écoulement constant.</li> <li>• <b>Bonne adaptation aux grands débits</b> : Capables de pomper de gros volumes de liquide à faible pression.</li> <li>• <b>Coût initial et d'entretien relativement bas</b> : Leur conception simple les rend économiques à l'achat et à entretenir.</li> <li>• <b>Faible encombrement</b> : Généralement compactes pour leur capacité.</li> <li>• <b>Possibilité de fonctionnement en continu</b> : Peuvent tourner longtemps sans interruption.</li> <li>• <b>Facilité d'automatisation</b> : Compatible avec les systèmes de contrôle modernes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Moins efficaces à basse pression ou bas débit</b> : Leur performance chute si la charge est trop faible.</li> <li>• <b>Sensibles à la cavitation</b> : Risque élevé si les conditions d'aspiration ne sont pas optimales.</li> <li>• <b>Pas adaptées aux liquides très visqueux</b> : Le rendement diminue fortement avec la viscosité.</li> <li>• <b>Moins précises pour les applications de dosage</b> : Contrairement aux pompes volumétriques.</li> <li>• <b>Peu performantes à vide</b> : Elles nécessitent généralement une amorce (remplissage préalable).</li> <li>• <b>Comportement dépendant du système</b> : Le débit varie avec la pression, ce qui complique leur</li> </ul>

Tableau I.02 : Les avantages et les inconvénients des pompes roto-dynamiques

Parmi les pompes roto-dynamiques, les pompes centrifuges sont les plus couramment utilisées, couvrant plus de 85 % des besoins dans les industries pétrolières et gazières. Cette prédominance s'explique par plusieurs raisons : une construction simple, une utilisation facile et robuste, un coût relativement faible, une maintenance et des réparations aisées, ainsi qu'un fonctionnement peu bruyant.

## **I.5. Caractéristiques principales des pompes**

### **I.5.1. Les pompes volumétriques**

- Présence de chambres qui s'ouvrent et se ferment alternativement, assurant l'aspiration et le refoulement.
- Un organe mobile principal ; souvent un piston, mais pouvant aussi être une membrane ou un engrenage ; pousse ou aspire le liquide.
- Elles fournissent un débit faible mais constant, indépendant de la pression.
- Elles peuvent générer une pression de refoulement élevée, ce qui les rend idéales pour les liquides visqueux ou les systèmes nécessitant un dosage précis

### **I.5.2. Caractéristiques des pompes roto-dynamiques**

- L'énergie est transférée au fluide par un organe rotatif, tel qu'une roue ou une hélice, qui génère un mouvement continu du fluide.
- Le débit est généralement élevé, mais il est directement influencé par la pression et la résistance du système.
- Fonctionnement fluide et uniforme, adapté aux applications où la variation du débit est acceptable, mais moins précis pour les systèmes nécessitant un dosage exact.
- Elles sont moins adaptées aux liquides visqueux, car la performance diminue avec l'augmentation de la viscosité.
- La pression générée est relativement faible, ce qui les rend idéales pour des applications à basse pression et pour des débits élevés.
- Les pompes roto-dynamiques sont souvent utilisées dans des applications industrielles nécessitant des débits importants avec une faible variation de pression, comme les systèmes de refroidissement ou les systèmes d'irrigation.

Caractéristiques	Volumétriques	Roto-dynamiques
Gamme de débit	0 à 100 m <sup>3</sup> .h-1	0 à 10000 m <sup>3</sup> .h-1
Gamme de pression	0 à 10000 bars	0 à 20 bars
Construction	Tous matériaux	
Amorçage	En général oui	En général non
Réversibilité	En général oui	En général non
Viscosité dynamique	0 à 100000 CST	0 à 300 CST
Température	Selon matériaux	
Vitesse d'entraînement max	0 à 100 tr.min-1	3600 à 5000 tr.min-1
Produit abrasifs et chargés	Selon types et constructions	
Protection contre surpression	Nécessaire	En général non nécessaire
Diversité des types	Très grand	Moyenne
Pulsation	De peu à beaucoup	Négligeable en général
Etanchéité	Garniture Mécanique Tresse Ou rarement coupleur magnétique	Garniture Mécanique Tresse Ou de plus en plus rotor noyé coupleur magnétique

Tableau I.03 : Caractéristiques des pompes [1][2]

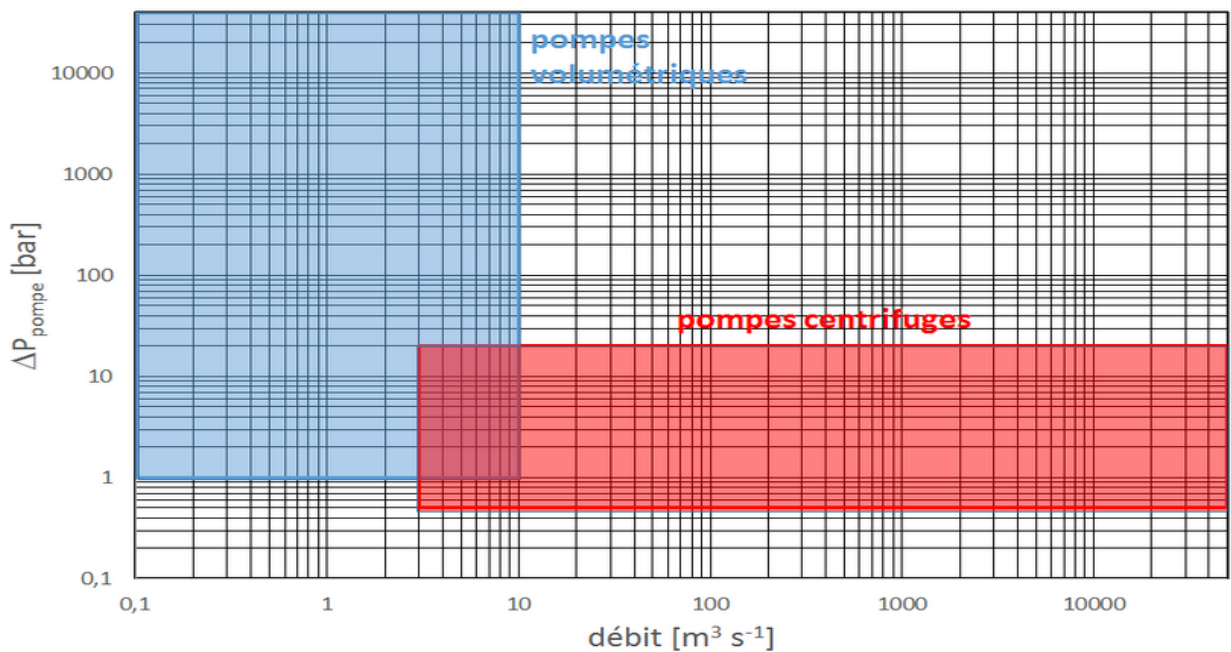


Figure I.8 : Domaine d'utilisation des pompes centrifuge. [1]

## I.6. Les pompes centrifuges

### I.6.1. Définition

Une pompe centrifuge, est un dispositif hydraulique à système ouvert dans lequel la pression du fluide est générée par des forces centrifuges induites par un rotor en mouvement. Contrairement aux pompes volumétriques, elle n'assure pas le transport du fluide par variation de volume ou confinement dans une cavité mobile. Ici, le fluide n'est pas déplacé par une paroi solide, mais plutôt mis en mouvement par un champ de forces (centrifuges et parfois axiales). Le fonctionnement de la pompe dépend de lois hydrodynamiques, qui varient selon : le type de roue (impulseur) utilisée, le mode d'exploitation (débit, charge, vitesse), et les propriétés du fluide transporté (viscosité, densité, etc.).

### I.6.2. Description d'une pompe centrifuge

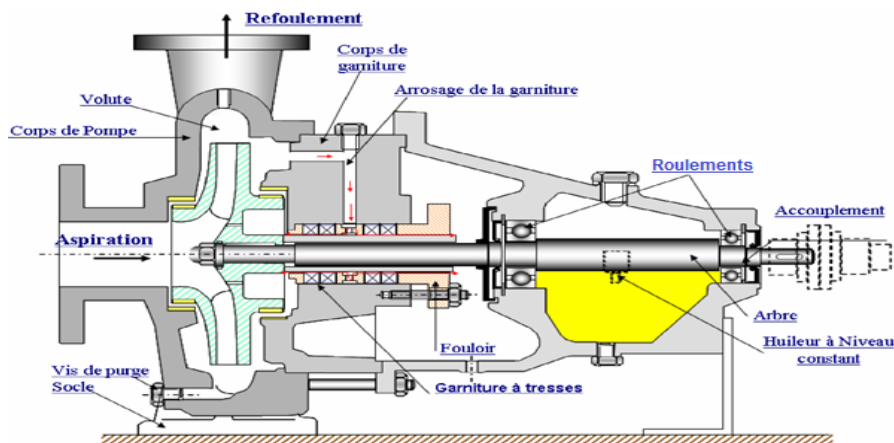


Figure I.9 : Pompe centrifuge monocellulaire (en porte à faux). [1]

### Constitution d'une pompe centrifuge

La forme la plus simple d'une pompe centrifuge est la pompe monocellulaire à roue en porte-à-faux. Cette pompe se compose de deux ensembles principaux : les éléments fixes et les pièces tournantes.

#### a) Les éléments fixes

- **Le corps de pompe** : il comprend les tubulures et les brides d'aspiration et de refoulement, la volute, ainsi que les pieds de fixation sur le châssis.
- **Le corps de garniture** : situé à l'arrière du corps de pompe, il est traversé par l'arbre et contient le système d'étanchéité (garnitures mécaniques ou tresses).
- **Le corps de palier** : il abrite les roulements ou les paliers à coussinet ainsi que le système de lubrification. Il est souvent muni d'un support (béquille).

**b) Le rotor (ensemble mobile) :** il est composé des éléments suivants :

- **Un arbre** sur lequel sont montés :
  - Une roue (ou impulseur),
  - Un accouplement pour la liaison avec la machine motrice,
  - Divers éléments comme les chemises d'arbre, les déflecteurs, les joints labyrinthes, les écrous de fixation, etc.
- **Les éléments de liaison avec les parties fixes soumises au frottement**, notamment :
  - Les roulements,
  - La garniture d'étanchéité.

Parmi ces pièces, l'impulseur et la volute sont directement responsables de la fonction de pompage, où s'opèrent les variations de vitesse et de pression du liquide

### **I.6.3. Principe de fonctionnement d'une pompe centrifuge**

Le fonctionnement d'une pompe centrifuge peut être décomposé en trois étapes principales : l'aspiration, l'accélération et le refoulement.

#### ▪ **L'aspiration**

Lorsque la pompe est amorcée, c'est-à-dire remplie de liquide, le fluide est aspiré par le centre de la roue (le moyeu du rotor) à travers un conduit appelé distributeur. Ce dernier assure la transition du fluide depuis la conduite d'aspiration jusqu'à l'entrée de la roue. L'effet de rotation du rotor entraîne une diminution de pression à l'entrée, ce qui provoque l'aspiration continue du liquide et maintient ainsi l'amorçage.

#### ▪ **L'accélération**

Le rotor, entraîné par l'arbre moteur, transmet au fluide une énergie mécanique convertie en énergie cinétique. Le liquide, capté entre les aubes de la roue, est accéléré et projeté radialement vers l'extérieur sous l'effet de la force centrifuge.

#### ▪ **Le refoulement**

Le fluide quitte la roue avec une vitesse élevée et pénètre dans un carter en spirale appelé volute, ou dans un diffuseur selon la configuration de la pompe. Ces éléments jouent le rôle d'un conduit divergent : la section croissante permet de réduire la vitesse du fluide tout en augmentant sa pression. Ce processus transforme l'énergie cinétique acquise dans la roue en énergie de pression, permettant ainsi d'obtenir un débit sous pression à la sortie de la pompe, exprimé en hauteur manométrique de refoulement.

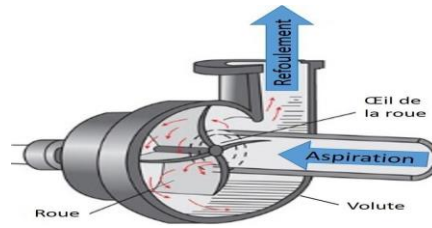


Figure I.10 : Principe de fonctionnement d'une pompe centrifuge [01].

#### I.6.4. Classification des pompes centrifuges

Les caractéristiques qui différencient les pompes centrifuges découlent des caractéristiques de calcul (débit utile,  $Q$ , hauteur manométrique,  $H$ , vitesse de rotation,  $n$ , et NPSH), des propriétés du fluide, des exigences techniques sur le site de l'installation, ainsi que des prescriptions en vigueur spécifiées dans les lois ou dans les ouvrages de référence technique. [03]

Cette extrême diversité nécessite un grand nombre de modèles, lesquels sont classés selon plusieurs critères. Les principales caractéristiques des modèles sont

- Le nombre d'étages :
  1. Monocellulaire : une seule impulseur (roue) sur l'arbre.
  2. Multicellulaire : avec plusieurs impulseurs sur l'arbre disposés en série.



Figure I.11: Pompe centrifuge monocellulaire. [4]

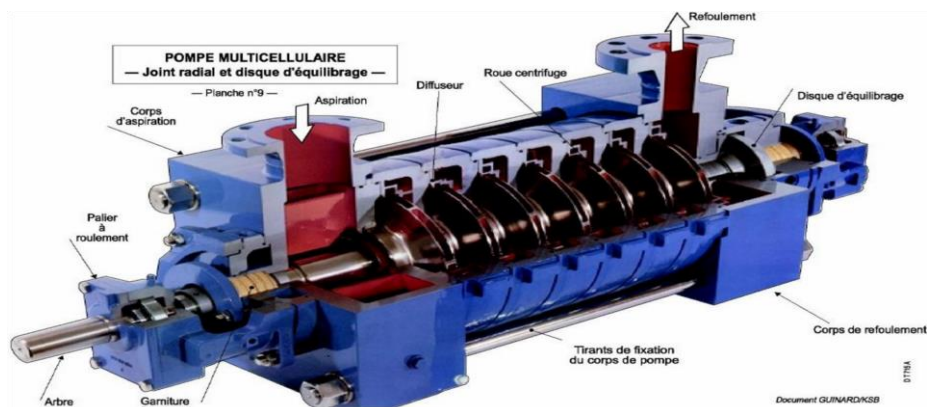


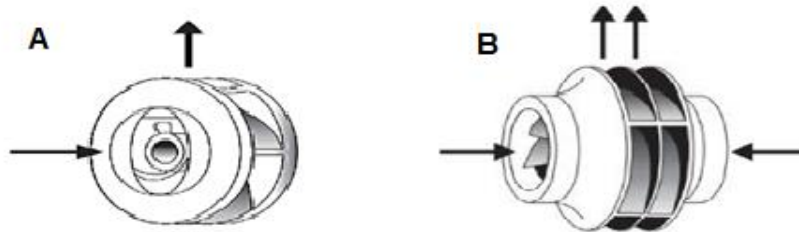
Figure I.12: Pompe centrifuge multicellulaire. [4]

- La disposition de l'axe de la pompe :
  1. Pompe en position verticale (l'orientation de l'axe verticale).

2. Pompe horizontale.

➤ Le nombre de flux d'aspiration de la roue :

1. **Simple flux:** Le fluide entre par un seul côté de la roue.
2. **Double flux:** Le fluide entre par deux côtés opposés ; réduit les efforts axiaux et augmente le débit.



**Figure I.13:** - A - Roue à simple aspiration -B- Roue à Double aspiration.

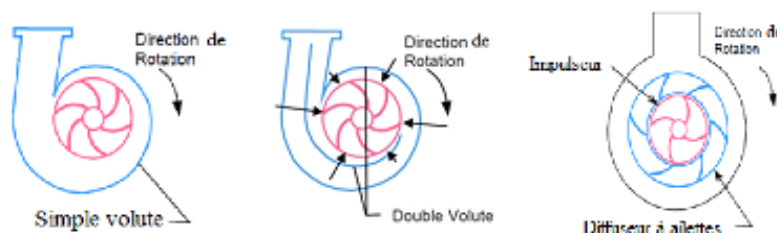
➤ **Le type de roue :** les roues sont regroupées en trois catégories générales selon la direction de l'écoulement du fluide à grande vitesse : *radiale*, *axiale* ou *mixte*, en fonction de la vitesse spécifique de rotation. [5] [6] [7]

➤ L'immersion du moteur :

1. **À sec:** Moteur séparé du fluide pompé.
2. **Immergé / submersible:** Moteur dans le fluide mais moteur protégé.
3. **Rotor noyé:** Moteur totalement immergé, souvent pour applications spéciales.

➤ Type de corps:

1. **Radial (volute):** courant pour la majorité des applications.
2. **Axial (tubulaire):** pour débits élevés à faible pression.



**Figure I.14:** les différents designs de volutes. [05].

➤ Le fluide transporté: (abrasif, agressif, nocif)

1. Pompe à usage normal
2. Pompe à boue
3. Pompe à acide
4. Pompe à gasoil et essence

## I.6.5. Théorie des pompes centrifuges

### I.6.5.1. Caractéristiques des pompes centrifuges

Une pompe centrifuge est définie par plusieurs grandeurs caractéristiques essentielles :

**-Hauteur Manométrique Totale (HMT) :** différence d'énergie entre l'entrée et la sortie de la pompe, exprimée en mètres de colonne de fluide.

**-Rendement ( $\eta$ ) :** rapport entre la puissance hydraulique utile et la puissance mécanique absorbée.

**-Puissance :** énergie par unité de temps fournie au fluide.

**-NPSH (Net Positive Section Head) :** hauteur nette d'aspiration disponible, indispensable pour éviter les phénomènes de cavitation

### I.6.5.2. Triangle des vitesses

Le triangle des vitesses est un outil fondamental en mécanique des fluides appliquée aux machines tournantes. Il permet de visualiser et d'analyser les vitesses du fluide au sein de la machine, en particulier à l'entrée et à la sortie des aubages (pales). Bien que la géométrie des roues et la courbe caractéristique de la pompe puissent être estimées autrement, le tracé du triangle des vitesses reste essentiel pour concevoir et optimiser ces machines.

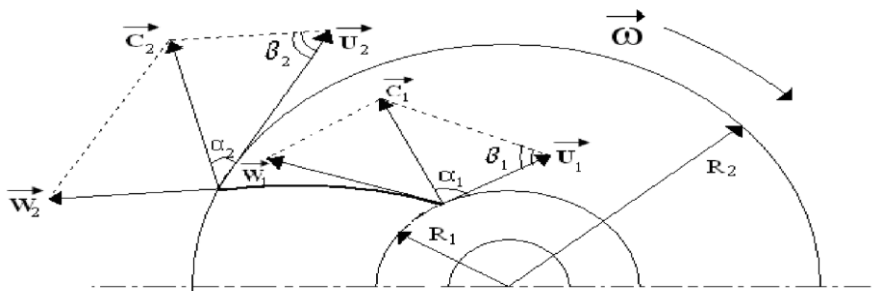
Dans une roue en rotation (rotor), les pales entraînent le fluide avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

Grâce au principe de composition des vitesses, on peut établir la relation suivant  $\vec{C} = \vec{W} + \vec{U}$   
Où:

- $\vec{C}$  C'est la vitesse absolue du fluide, mesurée dans le référentiel fixe de la machine (comme celui du distributeur, du stator ou du diffuseur).
- $\vec{W}$  C'est la **vitesse relative** du fluide par rapport au rotor (ce que "voit" la pale).
- $\vec{U}$  est la **vitesse d'entraînement** due à la rotation de la roue ; c'est la vitesse du point de contact entre le fluide et la roue, dans un mouvement de rotation pure :

$$\vec{U} = \omega \cdot \vec{r} \phi$$

Le triangle des vitesses est donc construit à partir de ces trois vecteurs, souvent représentés en bout de pale à l'entrée ou à la sortie, et les **angles formés** (comme l'angle d'incidence ou d'écoulement) permettent d'optimiser la forme des aubages et la performance de la machine.



**Figure I.15:** Triangle de vitesse d'une roue de pompe centrifuge [8]

Par conséquent, les états du mouvement à l'entrée et à la sortie de la roue, tournant à vitesse angulaire constante, sont représentés par deux triangles des vitesses " " l'un à l'entrée et l'autre à la sortie " " illustrant la relation vectorielle fondamentale

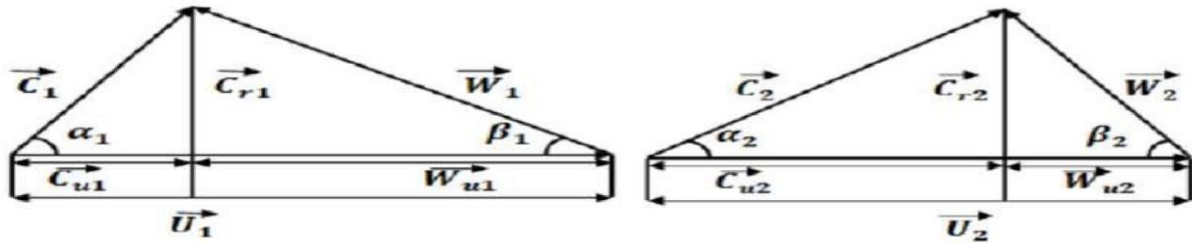


Figure I.16: Représentation des triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue [8]

### I.6.5.3. Les courbes caractéristiques de la pompe centrifuge

#### I.6.5.3.1. Les courbes fournies par le constructeur

Pour véhiculer un liquide d'un point à un autre, une pompe centrifuge doit fournir une certaine pression sous forme de hauteur, appelée hauteur manométrique totale (HMT). Cette grandeur dépend des conditions d'aspiration et de refoulement, autrement dit de l'augmentation de pression que la pompe peut communiquer au fluide. La HMT représente la hauteur de liquide qui peut être obtenue dans la tuyauterie de refoulement par rapport au niveau du liquide à l'aspiration.

Si l'on considère  $P_a$  comme la pression mesurée à l'aspiration de la pompe (en bar absolu), et  $P_r$  celle au refoulement, la HMT peut être approximativement définie par la relation suivante

$$HMT = \frac{P_r - p_a}{\rho g} (m) \quad (I.1)$$

Pour chaque pompe, une courbe de variation de la hauteur en fonction du débit volumique  $H_{mt}(Q_v)$  est fournie par le constructeur. Elle est établie à partir d'un essai sur banc de test. Selon le type de pompe, son rôle, et ses spécifications techniques, la courbe caractéristique peut présenter des formes différentes. La forme de la roue, le nombre et l'inclinaison des aubages, ainsi que la géométrie de la volute, permettent au constructeur d'adapter la courbe aux exigences spécifiques de l'utilisateur. Le rendement de la pompe ( $\eta$ ) est défini comme le rapport entre la puissance hydraulique reçue par le liquide et la puissance mécanique fournie à l'arbre de la pompe. Ce rendement varie avec le débit et est généralement représenté sous forme de courbe, également fournie par le constructeur (cf. Figure I.15). Le rendement

permet de déterminer la puissance mécanique à fournir à la pompe, à partir de la puissance hydraulique. Le meilleur rendement correspond au débit nominal, pour lequel la hauteur nominale et la puissance nominale sont définies. La puissance sur l'arbre est une caractéristique essentielle de la pompe, car elle permet de déterminer les spécifications du moteur d'entraînement. Cette puissance se calcule à partir de la connaissance de la hauteur, du débit, du rendement et de la densité du fluide

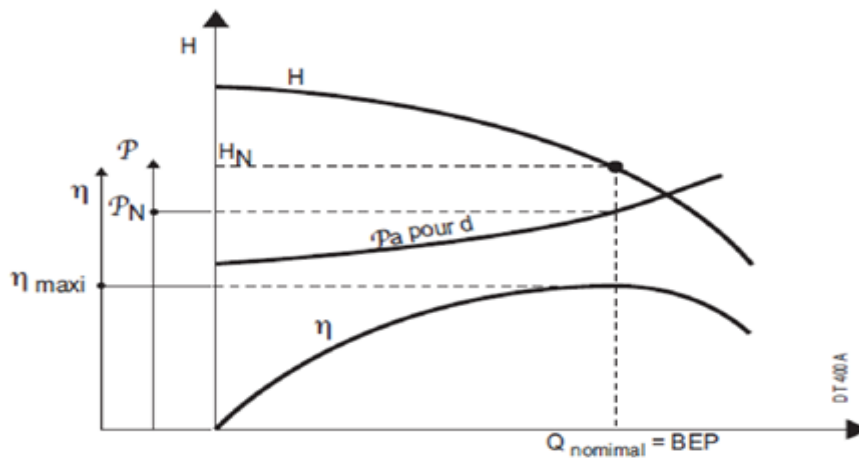


Figure I.17: Courbes caractéristiques de la pompe[1].

### I.6.5.3.2. Courbe du système et Point de fonctionnement

Le point de fonctionnement de la pompe est déterminé en identifiant l'intersection entre la courbe caractéristique de l'installation hydraulique et la courbe HMT( $Q_v$ ) de la pompe.

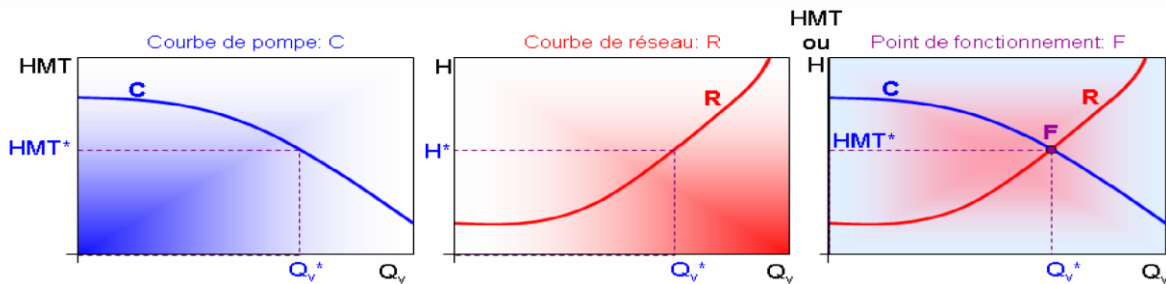


Figure I.18 : Point de fonctionnement d'une pompe[1].

La courbe caractéristique de l'équipement ou du réseau hydraulique est déterminée à partir des pertes de charge enregistrées dans l'ensemble de l'installation. Ces pertes, qui influencent directement les performances globales du système, se répartissent en trois grandes catégories :

- a. **Pertes mécaniques** : -Perte dans paliers radiaux, Perte dans paliers axiaux, Pertes d'accouplement, Pertes dans la garniture mécanique.

- b. Pertes par fuites :** Fuite d'une garniture d'ouïe mono étage, Fuite dans une garniture d'ouïe bi étage, Fuite sur barrage arrière d'une roue équilibrée, Fuite au piston d'équilibrage, Fuite à l'extrémité des aubes, Fuites externes.
- c. Pertes hydrauliques :** Les pertes dans le conduit d'amenée, Les pertes dans les roues, Les pertes dans les diffuseurs lisses, Les pertes dans les canaux de retour, Les pertes dans la volute ; le diffuseur droit et le coude pour les pompes hélices, Les pertes des organes situés sur les conduits (pipe) entre les pompes et les puits Injecteurs.

### 1. Calcul des pertes de charge linéaires :

Les pertes de charge associées à l'écoulement dans des conduites droites de section circulaire obéissent généralement à la relation suivante.

$$HL = \frac{\lambda.L.V^2}{2d.g} \quad (I.2)$$

- $\lambda$ : Le coefficient de frottement des tuyauteries      -L: Longueur de la conduite  
 -d: Diamètre de la conduit      -V: Vitesse d'écoulemen

Le coefficient de frottement des conduites, noté  $\lambda$ , dépend exclusivement du type d'écoulement du fluide transporté ainsi que de la rugosité relative de la tuyauterie, exprimée par le rapport  $\varepsilon/D$ . L'écoulement est quant à lui défini par le nombre de Reynolds,  $Re$ , dans le cas de tuyaux à section circulaire.

$$Re = \frac{\rho.v.d}{\mu} \quad (I.3)$$

$\rho$ : Masse volumique du liquide

$\mu$ : Viscosité cinématique

Le coefficient de frottement des conduites,  $\lambda$ , est obtenu à partir du diagramme de Moody, en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et du rapport de rugosité relative  $\varepsilon/D$ .

### 2. Calcul de pertes de charge singulières:

Les pertes de charge engendrées par les robinets et les raccords de tuyauterie s'expriment sous la forme suivante :

$$H_s = \frac{K.V^2}{2g} \quad (I.4)$$

**K:** Le coefficient de perte de charge

**V:** Vitesse d'écoulement

### I.6.5.3.2. Puissance :

La puissance disponible au niveau de l'arbre d'entraînement de la roue de la pompe est appelée puissance absorbée de la pompe ( $P_a$ ). La puissance transmise au fluide est appelée puissance hydraulique utile ( $P_u$ )

$$P_u = \rho . g . Q_v . HMT \quad (I.5)$$

$\rho$  : La masse volumique du liquide pompé

$Q_v$ : Le débit

HMT: La hauteur manométrique

$Q_v$ : débit volumique (m<sup>3</sup>/s)

$$P_a = C\omega \quad (I.8)$$

**C:** couple Moteur (N/m)

### I.6.5.3.3. Rendement global :

Le rendement global d'une pompe est le rapport entre l'énergie utile fournie au fluide et l'énergie absorbée par la pompe. Il est toujours inférieur à l'unité.

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} \quad (I.9)$$

### I.6.5.3.4. NPSH (Net Positive Suction Head)

Le coût d'une station de pompage est directement lié à la hauteur de charge nette à l'aspiration (Net Positive Suction Head), connue sous le nom de NPSH :

Pour la pompe, le NPSH requis est la hauteur correspondant à la chute de pression statique entre l'aspiration et un point de la roue où la pression est la plus basse. Il est fourni par le constructeur sous forme de courbe.

Pour l'installation, le NPSH disponible est la hauteur totale de charge absolue mesurée par rapport au plan de référence, diminuée de la hauteur correspondant à la tension de vapeur du liquide. Il dépend uniquement de l'installation et doit être calculé.

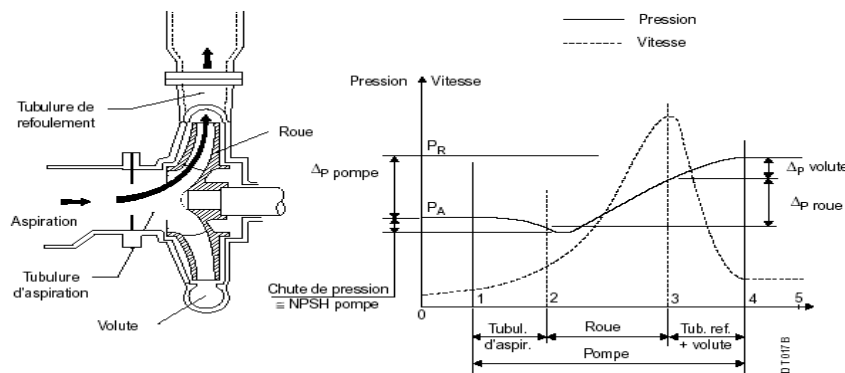
$$NPSH \text{ disponible} = hasb + \frac{P_a - TV}{\rho g} \sum H \quad (I.8)$$

**$P_a$**  : La pression d'aspiration

**$TV$**  : La tension de vapeur d fluide (GPL)

**$Hasp$**  : Hauteur d'aspiration

**$\Sigma H$**  : Somme de toutes les pertes de charge de l'installation



**Figure I.19:** Evolution de la vitesse et de la pression dans une pompe centrifuge [6]

Il est crucial que le NPSH disponible dépasse le NPSH requis, en gardant une marge de sécurité d'au moins 0,5 m, pour prévenir que la pompe ne fonctionne dans des conditions proches de la cavitation

## I.7. Couplage d'une pompe centrifuge

Fonctionnement en série et en parallèle

Dans les systèmes de pompage complexes, il est souvent nécessaire d'associer plusieurs pompes centrifuges afin de satisfaire des exigences de débit ou de hauteur manométrique supérieures à celles qu'une seule pompe peut fournir. Deux configurations principales sont alors possibles : le couplage en série et le couplage en parallèle. Pour simplifier l'étude de ces montages, on introduit le concept de pompe équivalente, dont la courbe caractéristique est déduite des caractéristiques individuelles des pompes associées

### a - Fonctionnement en série

Le couplage en série est utilisé lorsque l'on souhaite augmenter la hauteur manométrique totale disponible tout en maintenant le même débit. Cette configuration est couramment rencontrée dans les cas suivants:

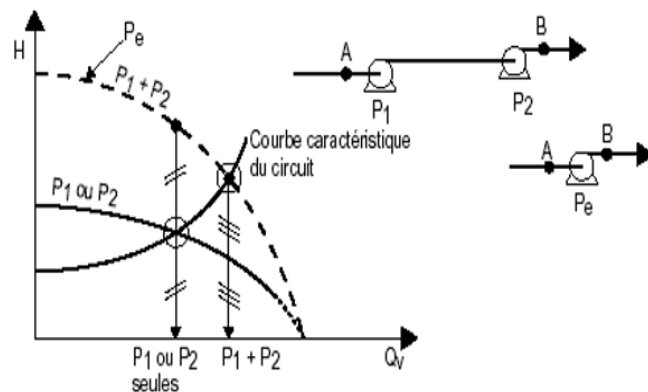
- Les pipelines de grande longueur, où des stations de pompage intermédiaires sont installées pour compenser les pertes de charge ;
- Les colonnes de distillation, dont le circuit d'alimentation est souvent équipé de deux pompes en série (pré-pompe et pompe principale) pour garantir la pression nécessaire au bon fonctionnement de la colonne ;
- Les systèmes munis d'une pompe booster, chargée de suralimenter la pompe principale afin d'améliorer ses conditions d'aspiration.

Dans cette configuration, le débit reste identique pour les deux pompes, tandis que la hauteur manométrique totale est égale à la somme des hauteurs fournies par chacune des pompes:

$$H_{total} = H_1(Q) + H_2(Q) \quad (I.9)$$

où  $Q$  est le débit commun et  $H_1$ ,  $H_2$  les hauteurs manométriques respectives des deux pompes.

Un exemple de courbe caractéristique pour deux pompes en série est présenté ci-dessous :



**Figure I.20:** Caractéristique d'ensemble pour deux pompes en série [4]

### b. Fonctionnement en parallèle

Le couplage en parallèle est utilisé lorsqu'on souhaite augmenter le débit disponible tout en maintenant la même hauteur manométrique. Cette configuration est très répandue dans les installations où le débit varie en fonction de la demande, comme dans les réseaux de distribution d'eau, les circuits de refroidissement, ou encore les systèmes d'arrosage industriel.

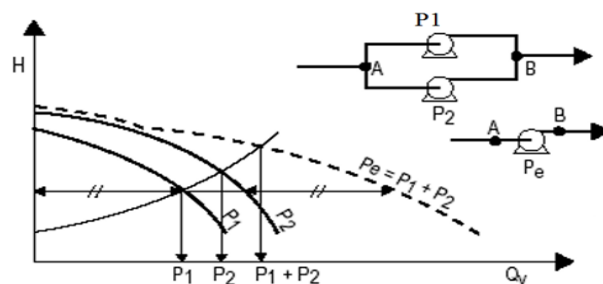
Dans un montage en parallèle:

- Les deux pompes refoulent dans une conduite commune ;
- La hauteur manométrique reste la même pour les deux pompes, tandis que le débit total est égal à la somme des débits fournis par chaque pompe à cette hauteur

$$Q_{total} = Q_1(H) + Q_2(H) \quad (I.10)$$

Où  $H$  est la hauteur commune et  $Q_1, Q_2$  les débits respectifs des deux pompes à cette hauteur.

Cette disposition permet aussi d'assurer une **redondance** (sécurité de fonctionnement) : en cas de défaillance d'une pompe, la deuxième peut continuer à fonctionner, même si le débit est réduit



**Figure I.21:** Caractéristique d'ensemble pour deux pompes en parallèle [4]

L'exploitation de deux pompes en parallèle est assez délicate et peut conduire à des incidents notamment dus à l'absence de débit dans l'une d'elles. Cette disposition exige des pompes dont les caractéristiques sont voisines mais aussi des circuits identiques entre les points A et B. Le risque est qu'une pompe fournisse plus d'énergie que l'autre, ce qui empêche cette dernière de débiter. La règle de base pour éviter tout incident est de ne pas faire tourner les 2 pompes si 1 seule est suffisante.

## I.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une vue d'ensemble sur les pompes, en retraçant leur historique, en les classant selon leurs principes de fonctionnement, et en détaillant leurs caractéristiques principales. Une attention particulière a été accordée aux pompes centrifuges, qui occupent une place essentielle dans les applications industrielles grâce à leur simplicité, leur fiabilité et leur efficacité. À travers l'étude de leur constitution, de leur principe de fonctionnement et de leur modélisation théorique, ce chapitre pose les bases nécessaires pour approfondir l'analyse et la sélection des pompes adaptées aux différents systèmes hydraulique.

# **Chapitre II : Modélisation des rotors par la méthode des éléments finis**

## II.1. Introduction:

La modélisation des systèmes de rotors joue un rôle fondamental dans l'analyse et la conception des machines tournantes, telles que les turbines, les moteurs électriques, les compresseurs et autres équipements rotatifs. Ces systèmes dynamiques sont caractérisés par des phénomènes complexes induits par la rotation, comme l'effet gyroscopique, les déséquilibres dynamiques, les forces de frottement dans les paliers et les sollicitations variables en service. Comprendre et anticiper ces phénomènes est essentiel pour garantir la stabilité, la fiabilité et les performances des machines. Dans ce contexte, la méthode des éléments finis (MEF) s'est imposée comme un outil de référence pour la modélisation des systèmes de rotors. Grâce à sa capacité à représenter avec précision des géométries complexes, des propriétés de matériaux hétérogènes et des conditions aux limites réalistes, la MEF permet d'analyser le comportement mécanique et dynamique du rotor dans son ensemble. Elle offre notamment la possibilité de calculer les fréquences propres, les modes de vibration, les vitesses critiques et d'évaluer les instabilités potentielles dues aux effets dynamiques de la rotation. L'intégration de la MEF dans la modélisation des rotors permet ainsi une approche prédictive rigoureuse, essentielle pour optimiser la conception des composants, anticiper les défaillances et améliorer les performances globales des systèmes tournants. Ce couplage entre la physique de la rotation et la puissance numérique de la MEF constitue aujourd'hui un pilier de l'ingénierie moderne appliquée aux machines tournantes.

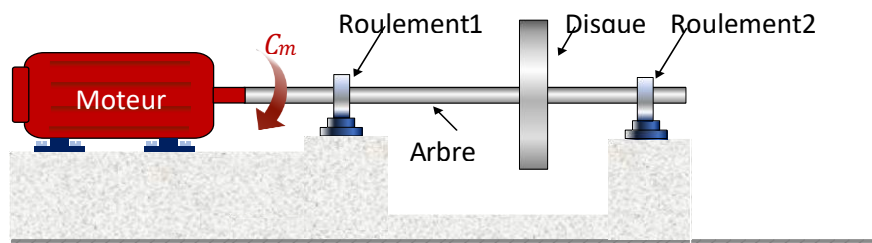


Figure II.1 : Composants de base d'une machine tournante [9]

## II.2. Modélisation des systèmes des rotors

### II.2.1. Méthodologie et hypothèses de modélisation

Le rotor est généralement constitué de plusieurs éléments d'arbre et de paliers qui le supportent. Il peut également comporter un ou plusieurs disques, ainsi qu'un déséquilibre dynamique ou d'autres sources de forces extérieures (cf. Figure II.1). La présence inévitable de défauts de fabrication ou de fonctionnement peut engendrer l'apparition de forces perturbatrices pendant la rotation. Ces irrégularités, qu'elles soient d'origine mécanique ou thermique, doivent être rigoureusement prises en compte dans le processus de modélisation. Chaque composant du

rotor fait l'objet d'une modélisation spécifique, qui sera ensuite intégrée dans le modèle global du système rotorique [10] [11]

- **Hypothèse de linéarité:** Le comportement du rotor est supposé linéaire, ce qui implique que les déformations restent dans le domaine élastique et que les forces sont proportionnelles aux déplacements.
- **Modèle de rotor simplifié:** Le rotor est modélisé comme un système constitué d'un arbre flexible, d'un disque rigide (représentant la roue de la pompe), et de paliers supportant l'ensemble.
- **Effets gyroscopiques:** Les effets gyroscopiques dus à la rotation du disque sont pris en compte, car ils influencent significativement la dynamique du rotor à haute vitesse.
- **Balourd:** Une masse non équilibrée (balourd) est considérée comme la principale source d'excitation dynamique.
- **Conditions aux limites:** Les paliers sont modélisés comme des éléments de raideur et d'amortissement, avec des propriétés définies.
- **Matériau isotrope:** L'arbre et le disque sont supposés constitués de matériaux isotropes avec des propriétés mécaniques uniformes.

La méthodologie consiste à décomposer le rotor en éléments finis, à établir les équations du mouvement pour chaque composant, puis à assembler ces équations pour former un système global résolu numériquement.

### II.2.2. Équation du mouvement : Formulation algébrique

Les éléments théoriques utilisés pour obtenir les équations du mouvement d'un système en rotation sont exposés ici. Cela permet de définir aussi bien un modèle analytique d'analyse qu'un modèle par éléments finis, à usage plus général.

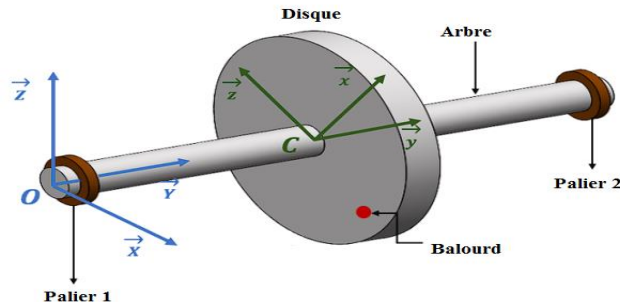
L'équation générale du mouvement d'un système rotorique peut être exprimée sous la forme suivante, selon la seconde loi de Newton appliquée aux systèmes dynamiques :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (\text{II.2.1})$$

- $[M]$  : Matrice de masse du système
- $[C]$  : Matrice d'amortissement, incluant les effets visqueux et gyroscopiques.
- $[K]$  : Matrice de raideur.

- $\{\ddot{u}\}, \{\dot{u}\}, \{u\}$ : Vecteurs de déplacement, vitesse et accélération, respectivement.
- $\{F(t)\}$ : Vecteur des forces externes, incluant les forces dues au balourd.

Cette équation est adaptée à chaque composant du rotor (disque, arbre, paliers) et aux forces d'excitation (balourd).



**Figure II.2:** Exemple de rotor [10]

Les éléments de base des rotors sont l'arbre, les disques et les paliers.

Les expressions des énergies cinétiques sont nécessaires pour caractériser l'arbre, le disque et le balourd (cf. Figure II.2).

L'énergie potentielle est nécessaire pour caractériser l'arbre. Le travail virtuel est calculé pour les forces dues aux paliers. Les équations générales du rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes:

- L'énergie cinétique  $T$ , l'énergie de déformation  $U$  et le travail virtuel  $\delta W$  sont calculés pour tous les éléments du système.
- Une méthode de discrétisation est choisie: la méthode de Rayleigh-Ritz convient bien aux systèmes simples et conduit à un faible nombre de degrés de liberté, tandis que la méthode des éléments finis est mieux adaptée aux applications réelles.
- Les équations de Lagrange sont utilisées pour déterminer les équations du mouvement.

Équation du mouvement (formalisme de Lagrange) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i \quad (\text{II.2.2})$$

Où

$i = 1, 2, 3, \dots, N$ , avec  $N$  est le nombre de degrés de liberté.

$\dot{q}_i$  : vitesse généralisée associée,

$q_i$  : Coordonnées généralisées indépendantes.

$F_i$  : force généralisée appliquée sur  $q_i$ .

$T$  : Énergie cinétique du système.

$U$ : Énergie potentielle du système.

### II.2.2.1. Disque

Le disque est, supposée rigide. Son comportement dynamique est gouverné par son énergie cinétique, incluant les effets de translation et de rotation.

L'énergie cinétique  $T_d$  du disque est donnée par :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{d_x} (\dot{\theta}_x + \dot{\theta}_z^2) + \frac{1}{2} I_{d_y} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\theta}_z \theta_x) \quad (\text{II.2.3})$$

Où:

- $\frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2)$  : Energie cinétique d'un élément en translation dans plan.
- $\frac{1}{2} I_{d_x} (\dot{\theta}_x + \dot{\theta}_z^2)$  : Energie cinétique de rotation de l'élément atour des axes x et z.
- $\frac{1}{2} I_{d_y} \Omega^2$  : Terme constant représentant l'énergie de rotation du disque.il n'a pas d'influence sur équation du mouvement.
- $\frac{1}{2} I_{d_y} \Omega \dot{\theta}_z \theta_x$  : représente l'effet gyroscopique (Coriolis).

**Énergie potentielle** : Le disque n'a pas d'énergie de déformation (rigide), mais une énergie potentielle peut être associée aux forces externes (par exemple, gravité, si pertinente).

### II.2.2.2. Arbre

#### a) Énergie cinétique de l'arbre

L'arbre est modélisé comme une poutre flexible de type Timoshenko, afin de prendre en compte les effets de cisaillement

L'énergie cinétique  $T$  d'un élément d'arbre est donnée par:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho S_a \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho I_a \left[ \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 \right] + \Omega I_a \left[ \theta_a \frac{\partial \theta_x}{\partial t} - \theta_x \frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right] \right\} dy$$

Où:

- $\rho$  : Masse volumique de l'arbre.
- $S_a$  : aire de la section transversale de l'arbre.
- $I_a$  : moment d'inertie polaire de la section.
- $u, w$ : déplacements transversaux (dans les directions perpendiculaires à l'axe de l'arbre).
- $\theta_x, \theta_z$  : rotations angulaires autour des axes x et z respectivement
- $\theta_a$  : variable angulaire liée à la rotation de référence (souvent l'axe longitudinal)

- $L$  : Longueur de l'élément d'arbre.
- $\Omega$  : vitesse angulaire de rotation constante de l'arbre
- $\frac{\partial}{\partial t}$  : dérivée partielle par rapport au temps (indique la vitesse ou la vitesse angulaire)

Cette formule représente l'énergie cinétique totale, incluant:

- **La translation** (premier terme, énergie cinétique de translation)
- **La rotation** (deuxième terme, énergie cinétique de rotation)
- **L'effet gyroscopique** (troisième terme, couplage entre rotation et vitesses angulaires induit par la rotation à la vitesse  $\Omega$ )

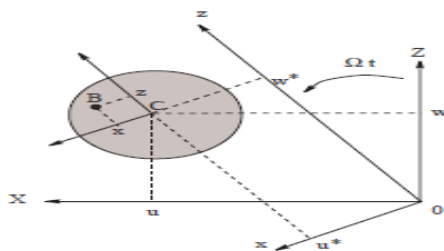
### b) L'énergie de déformation de l'arbre

L'énergie de déformation n'est pas influencée par le mouvement du support, car elle dépend uniquement des contraintes. Elle est donc liée au déplacement relatif de l'arbre par rapport au support. Dans cette analyse, les effets de cisaillement sont négligés.

Les notations suivantes sont utilisées, comme illustré dans la figure II.2 :

- $C$  représente le centre géométrique de l'arbre,
- $B(x, z)$  est un point typique de la section,
- $E$  est le module de Young du matériau,
- $\epsilon, \sigma$  désignent respectivement la déformation et la contrainte,
- $u^*, w^*$  correspondent aux déplacements du centre géométrique selon les axes  $x$  et  $z$  dans le repère mobile.

Le déplacement d'un point de la section droite s'exprime en considérant seules les déformations dues à la flexion, les effets de cisaillement ne sont pas pris en compte.



**Figure II. 3:** Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor

La déformation en flexion d'un point de l'arbre, situé aux coordonnées  $x$  et  $z$  dans le repère  $R$ , s'exprime par :  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_{nl}$  avec :

- Déformation linéaire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (\text{II.2.5})$$

- Déformation non linéaire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{nl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{II.2.6})$$

L'expression générale de l'énergie de déformation du rotor en flexion est alors :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t [\boldsymbol{\sigma}] d\tau \quad (\text{II.2.7})$$

On considère  $V$  comme le volume de l'arbre, et  $\boldsymbol{\sigma}$  la contrainte de flexion. La contrainte et la déformation sont reliées par la relation :  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$  donc

$$U = \frac{E}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}_l^2 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_l \boldsymbol{\varepsilon}_{nl}) d\tau \quad (\text{II.2.8})$$

En raison de la symétrie de l'arbre par rapport aux axes  $x$  et  $y$

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} \boldsymbol{\varepsilon}_l d\tau = \mathbf{0} \quad (\text{II.2.9})$$

Le troisième terme de l'intégrale (II.7), qui traduit l'effet d'une force axiale, est négligé dans le cadre de cette étude. En se référant à l'équation (II.4)

$$\int_V \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left( -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (\text{II.2.10})$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left( x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xy \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (\text{II.2.11})$$

En raison de la symétrie, le troisième terme de (II.11) est nul. En introduisant les inerties de section :

$$I_x = \int_S z^2 dS \quad (\text{II.2.12})$$

$$\int_S xz dS = 0$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II.2.13})$$

Pour éliminer les termes périodiques explicitement liés au temps, et en tenant compte des caractéristiques des paliers, l'énergie de déformation doit être exprimée en fonction des composantes  $U$  et  $W$  du déplacement dans le repère  $R_0$ . Le passage de  $\mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{w}^*$  à  $u$ ,  $w$  est donné par la figure II.3.

$$\begin{cases} u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{II.2.14})$$

En utilisant les valeurs de  $u^*$  et  $w^*$  telles que définies dans (II.14)

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_s \left( \sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II.2.15})$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left( \cos^{-1} \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^{-1} \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) + I_s \left( \sin^{-1} \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \cos^{-1} \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \quad (\text{II.2.16})$$

Pour un arbre symétrique où ( $I_x = I_z = I_a$ ) L'expression de l'énergie potentielle devient :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z (\cos^{-1} \Omega t + \sin^{-1} \Omega t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + (\sin^{-1} \Omega t + \cos^{-1} \Omega t) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \quad (\text{II.2.17})$$

Finalement :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \quad (\text{II.2.18})$$

### II.2.2.3. Paliers

En général, les paliers sont considérés comme non rigides (paliers hydrodynamiques). Les forces générées par ces paliers résultent du déplacement de l'arbre et sont de nature élastique (raideur) et dissipative (amortissement). Le palier est modélisé selon le modèle de Kelvin dans chaque direction perpendiculaire à l'axe de l'arbre, ce qui permet de prendre en compte les effets de raideur et d'amortissement (cf. Figure II.4) [10]

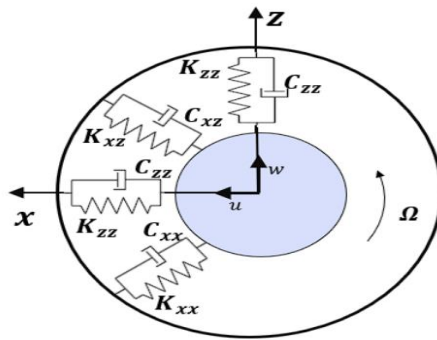


Figure II.4 : Amortissements et raideurs des paliers [10]

Les caractéristiques associées à ces efforts sont :

- $K_x x, K_z z, C_x x, C_z z$  : Raideur et amortissement selon les directions  $x$  et  $z$  de l'arbre.
- $K_x z, K_z x, C_x z, C_z x$  : Il s'agit de raideurs et d'amortissements dans une direction ( $x$  ou  $z$ ), mais influencés par l'autre direction. Ils représentent des constantes de couplage.

Le travail virtuel de ces forces :

$$\delta W = -K_{xx}u\delta u - K_{xz}w\delta u - K_{zz}w\delta w - K_{zx}u\delta w - C_{xx}u\dot{\delta u} - C_{xz}w\dot{\delta u} - C_{zz}w\dot{\delta w} - C_{zx}u\dot{\delta w} \quad (\text{II.2.19})$$

$$\text{Où : } \delta W = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (\text{II.2.20})$$

$F_u$  et  $F_w$  : les composantes des forces généralisées.

En utilisant les deux équations II.19 et II.20, on obtient :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xz} \\ K_{zx} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.21})$$

#### II.2.2.4. Le balourd

Le balourd constitue l'une des principales sources d'excitation dynamique dans les systèmes rotoriques. Il est généralement causé par une masse excentrée  $m_b$  située à une distance  $d$  de l'axe de rotation. Lors de la rotation, cette masse génère une force centrifuge qui agit de manière périodique sur le rotor.

La Figure II.5 illustre la position de cette masse déséquilibrée  $m_i$  par rapport à l'axe géométrique de l'arbre. La distance  $= O_i M_i$ ,  $O_i$  représente le vecteur entre le centre de la section de l'arbre  $O_i$  et la position de la masse. L'angle  $\alpha_t$  définit la position angulaire de la masse par rapport à un repère tournant de référence.

Dans notre modèle, on suppose que la masse  $m$  est solidaire de l'arbre et suit ses déformations. Son énergie cinétique doit donc être prise en compte dans le calcul énergétique du système

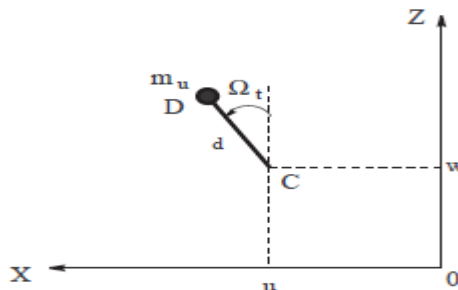


Figure II.5 : Masse de balourd excentrée sur le disque

$$T_b = \frac{m_b}{2} \left( \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega u d \cos \Omega t - 2\Omega w d \sin \Omega t \right) \quad (\text{II.2.22})$$

## II. 3. Modélisation des rotors par éléments finis

### II.3.1. Expressions des énergies des éléments du rotor

Dans l'étude du comportement dynamique des machines tournantes, l'analyse des énergies associées aux éléments du rotor constitue une étape fondamentale. Ces énergies, qu'elles soient cinétique, potentielle ou de déformation, permettent de mieux comprendre les interactions internes du système et d'anticiper son comportement en fonctionnement. Cette section présente les expressions analytiques des différentes formes d'énergie mises en jeu dans les éléments constitutifs du rotor, en tenant compte de leur nature (rigide ou flexible) et des conditions de fonctionnement.

La structure est constituée de N éléments :

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (\text{II.3.1})$$

$$T = \sum_{i=0}^N T_i \quad (\text{II.3.2})$$

$$R = \sum_{i=0}^N R_i \quad (\text{II.3.3})$$

Où :

$U_i$  : L'énergie de déformation.

$T_i$  : L'énergie cinétique.

$R_i$  : La fonction de dissipation de l'élément  $i$ .

Les forces généralisées sont déterminées en exprimant le travail virtuel des forces extérieures. Dans la dynamique des rotors  $R_i$  sont négligés quand les systèmes tournent à grandes vitesses.

#### II.3.1.1. Energie de déformation d'un élément de rotor

L'énergie de déformation d'un élément s'exprime de manière générale par

$$U_i = \frac{1}{2} \int \varepsilon^t \sigma d\tau \quad (\text{II.3.4})$$

Le vecteur de déplacement  $d$  d'un point quelconque de l'élément est exprimé en fonction du vecteur  $\delta$ , qui regroupe l'ensemble des déplacements nodaux, au moyen d'une matrice  $N$ . Cette matrice résulte des hypothèses formulées sur la distribution des déplacements à l'intérieur de l'élément. On obtient ainsi une relation de la forme :

$$d = N(y)\delta \quad (\text{II.3.5})$$

Après dérivation :

$$\varepsilon = \frac{\partial d}{\partial y} = B(y)\delta \quad (\text{II.3.6})$$

Il s'agit de la relation qui établit le lien entre les déformations et les déplacements aux nœuds.

La relation entre les contraintes et les déformations s'exprime par :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (\text{II.3.7})$$

La matrice D, qui est carrée et symétrique, est constituée de termes dépendant des propriétés mécaniques des matériaux, notamment le module de Young E et le coefficient de Poisson  $\nu$ . En remplaçant les équations (II.3.6) et (II.3.7) dans l'équation (II.3.4), on obtient la relation suivante :

$$U_i = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B}(\mathbf{y})\delta)^t \mathbf{D} \mathbf{B}(\mathbf{y})\delta d\tau \quad (\text{II.3.8})$$

$$= \frac{1}{2} \delta^t \left[ \int \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\tau \right] \delta \quad (\text{II.3.9})$$

Susceptible de prendre la forme suivante :

$$U_i = \frac{1}{2} \delta^t \mathbf{K} \delta \quad (\text{II.3.10})$$

Où

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\tau$$

La matrice de raideur de l'élément est symétrique, car la matrice D est symétrique, tout comme la matrice résultante du produit  $\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B}$

### II.3.1.2. Energie cinétique d'un élément de rotor

La formule générale de l'énergie cinétique d'un élément s'exprime comme suit :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho V^2 d\tau \quad (\text{II.3.11})$$

Où :

$\rho$ : La masse volumique d'élément arbre.

$V$  : La vitesse d'un point de l'arbre est obtenue en dérivant par rapport au temps le déplacement  $d$  donné par (II.3.5), ce qui donne :

$$V = \mathbf{N}(\mathbf{y}) \frac{d\delta}{dt} = \mathbf{N}(\mathbf{y}) \dot{\delta} \quad (\text{II.3.12})$$

En substituant (II.3.12) dans (II.3.11) et en considérant que  $V^2 = (\mathbf{N}\dot{\delta})^t \mathbf{N}\dot{\delta}$  On aura :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (\mathbf{N}\dot{\delta})^t \mathbf{N}\dot{\delta} d\tau \quad (\text{II.3.13})$$

$$= \frac{1}{2} \delta^t \left[ \int \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} d\tau \right] \dot{\delta} \quad (\text{II.3.14})$$

Qui se présente sous la forme suivante :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t \mathbf{m} \dot{\delta} \quad (\text{II.3.15})$$

Où:

$$\mathbf{m} = \int \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} d\tau$$

La matrice de masse d'un élément d'arbre est également symétrique, tout comme la matrice K.

### II.3.2. Formulation matricielle

#### II.3.2.1. Formulation matricielle des équations du disque

Le disque est représenté par un nœud doté de quatre degrés de liberté : deux translations,  $u$  et  $w$ , ainsi que deux rotations,  $\theta$  et  $\Psi$ , effectuées respectivement autour des axes  $x$  et  $z$  (cf. Figure II.6).

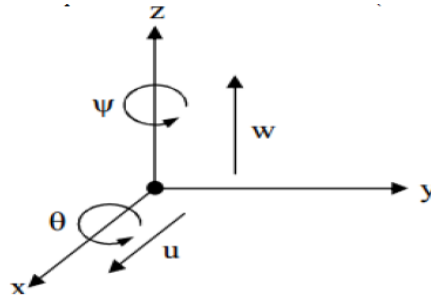


Figure II.6 : Degrés de liberté du disque

Le vecteur des déplacements nodaux  $\delta$  peut s'exprimer sous la forme :  $\delta = [u, w, \theta, \Psi]^T$ .

La matrice de masse ainsi que la matrice gyroscopique sont dérivées en appliquant les équations de Lagrange à cette expression.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_i} \left[ \frac{1}{2} M_d (\dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\Psi} \dot{\theta}) \right] - \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_i} \left\{ \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\Psi} \dot{\theta}) \right\} \right\} \quad (\text{II.3.16})$$

Où cela se passera-t-il donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I'_{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy'} \\ 0 & 0 & I_{dy'} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.17})$$

Avec :

$$M_d = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I'_{dx} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.18})$$

Et

$$G_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy'} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (II.3.19)$$

$M_d$  Étant la matrice masse et  $G_d$  la matrice gyroscopique.

### II.3.2.2. Formulation matricielle des équations de l'arbre

Les résultats présentés portent sur un élément arbre symétrique, modélisé par un élément poutre à section constante. L'élément fini employé possède deux nœuds et quatre degrés de liberté (voir figure II.7).

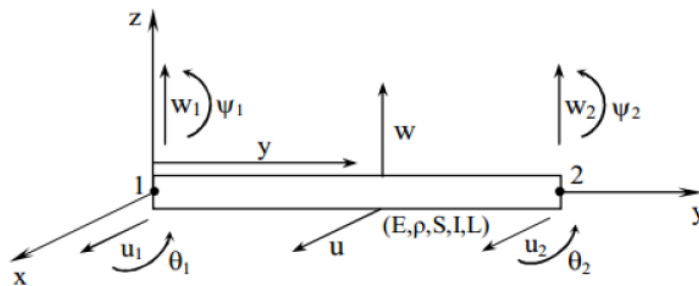


Figure II.7 : Degrés de liberté d'un élément arbre

La fonction de déplacement  $w$ , perpendiculaire à la poutre (arbre), est exprimée par un polynôme d'interpolation de degré trois.

$$w = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 \quad (II.3.20)$$

L'inclinaison ou la rotation autour de l'axe  $z$  est déterminée par la dérivée de la fonction de déplacement  $w$ .

$$\theta = \frac{\partial w(y)}{\partial y} = a_2 + 2a_3 y + 3a_4 y^2 \quad (II.3.21)$$

Les constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$  sont obtenues en imposant les conditions aux limites sur les polynômes (II.3.20) et (II.3.21).

Pour :

$$y=0 \text{ (nœud 1) on } a \begin{cases} w_1 = a_1 \\ \theta_1 = a_2 \end{cases}$$

Système (a)

Pour  $y = L$  (nœud 2) on

$$a \begin{cases} w_2 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \\ \theta_2 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2 \end{cases}$$

Système (b)

Après avoir résolu le système (b) et en remplaçant les constantes  $\mathbf{a1}$  et  $\mathbf{a2}$  par leurs valeurs on trouve :

$$\mathbf{a1} = \mathbf{w1}$$

$$\mathbf{a2} = \boldsymbol{\theta1}$$

$$\mathbf{a3} = 3 \frac{\mathbf{w2} - \mathbf{w1}}{L^2} - \frac{\boldsymbol{\theta2} + 2\boldsymbol{\theta1}}{L}$$

$$\mathbf{a4} = -2 \frac{\mathbf{w2} - \mathbf{w1}}{L^3} + \frac{\boldsymbol{\theta1} + \boldsymbol{\theta2}}{L^2}$$

On remplace les valeurs des constants  $\mathbf{a1}$ ,  $\mathbf{a2}$ ,  $\mathbf{a3}$ ,  $\mathbf{a4}$  dans  $w$  pour avoir :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{y}) = & \left( \mathbf{1} - \frac{3\mathbf{y}^2}{L^2} + \frac{2\mathbf{y}^3}{L^3} \right) \mathbf{w1} + \left( \mathbf{y} - \frac{2\mathbf{y}^2}{L} + \frac{\mathbf{y}^3}{L^2} \right) \boldsymbol{\theta1} + \left( \frac{3\mathbf{y}^2}{L^2} - \frac{2\mathbf{y}^3}{L^3} \right) \mathbf{w2} \\ & + \left( -\frac{\mathbf{y}^2}{L} + \frac{\mathbf{y}^3}{L^2} \right) \boldsymbol{\theta2} \end{aligned} \quad (\text{II.3.22})$$

Ou bien :

$$\mathbf{w}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{y}) \boldsymbol{\delta}_i \quad (\text{II.3.23})$$

Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\boldsymbol{\delta} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\Psi}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\Psi}_2]^t \quad (\text{II.3.24})$$

Il est ensuite divisé en deux vecteurs de déplacement, chacun correspondant à une direction spécifique :

$$\boldsymbol{\delta u} = [\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\Psi}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\Psi}_2]^t \quad (\text{II.3.25})$$

$$\boldsymbol{\delta w} = [\mathbf{w}_1, \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{w}_2, \boldsymbol{\theta}_2]^t \quad (\text{II.3.26})$$

Il est ensuite scindé en deux vecteurs de déplacement, chacun associé à une direction particulière.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_1(\mathbf{y}) \boldsymbol{\delta u} \quad (\text{II.3.27})$$

Et

$$\mathbf{w} = \mathbf{N}_2(\mathbf{y}) \boldsymbol{\delta w} \quad (\text{II.3.28})$$

Où

$\mathbf{N1}$  et : sont les vecteurs des fonctions de forme classique d'un élément de poutre en flexion.

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{y}) = \left[ \mathbf{1} - \frac{3\mathbf{y}^2}{L^2} + \frac{2\mathbf{y}^3}{L^3}; -\mathbf{y} + \frac{2\mathbf{y}^2}{L} - \frac{\mathbf{y}^3}{L^2}; \frac{3\mathbf{y}^2}{L^2} - \frac{2\mathbf{y}^3}{L^3}; \frac{\mathbf{y}^2}{L} - \frac{\mathbf{y}^3}{L^2} \right] \quad (\text{II.3.29})$$

$$\mathbf{N}_2(\mathbf{y}) = \left[ \mathbf{1} - \frac{3\mathbf{y}^2}{L^2} + \frac{2\mathbf{y}^3}{L^3}; \mathbf{y} - \frac{2\mathbf{y}^2}{L} + \frac{\mathbf{y}^3}{L^2}; \frac{3\mathbf{y}^2}{L^2} - \frac{2\mathbf{y}^3}{L^3}; -\frac{\mathbf{y}^2}{L} + \frac{\mathbf{y}^3}{L^2} \right] \quad (\text{II.3.30})$$

Où  $\mathbf{N1}(\mathbf{y})$  et  $\mathbf{N2}(\mathbf{y})$  sont obtenues, en posant  $\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{y} + \mathbf{a}_3\mathbf{y}^2 + \mathbf{a}_4\mathbf{y}^3$

Avec la rotation autour de  $\mathbf{x}$  donnée par  $\theta = -\frac{\partial u(y)}{\partial y}$ .

Ainsi, les relations définissant les déplacements et les pentes sont les suivantes :

$$\theta = \partial w / \partial y \quad (\text{II.3.31})$$

$$\Psi = -\partial u / \partial y \quad (\text{II.3.32})$$

Le nombre total de degrés de liberté par nœud étant de quatre, les matrices élémentaires de l'arbre sont de dimension  $8 \times 8$ . Elles sont obtenues en remplaçant les variables  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\theta$  et  $\Psi$  par leurs expressions dans les énergies cinétiques et de déformation de l'arbre

### a) L'énergie cinétique

En remplaçant les équations (II.3.27) et (II.3.28), ainsi que leurs dérivées, dans l'expression (II.3.33), on obtient la forme compacte suivante :

$$T_a = \frac{\rho s}{2} \int_0^L \left[ \delta \mathbf{u}^t N_1^t N_1 \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{w}^t N_2^t N_2 \delta \mathbf{w} \right] dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[ \delta \mathbf{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \mathbf{w} \right] dy + \rho I L \Omega^2 - 2 \rho I \Omega \int_0^L \delta \mathbf{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \mathbf{w} dy \quad (\text{II.3.33})$$

En substituant (II.3.27) et (II.3.28) ainsi que leurs dérivées dans (II.3.33) on aura la forme compacte suivante :

$$T_a = \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}^t M_1 \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{w}^t M_2 \delta \mathbf{w} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}^t M_3 \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{w}^t M_4 \delta \mathbf{w} + \delta \mathbf{u}^t M_5 \delta \mathbf{w} + \rho I L \Omega^2 \quad (\text{II.3.34})$$

Les matrices obtenues sont d'ordre  $4 \times 4$ . M1 et M2 correspondent aux matrices classiques de masse, tandis que M3 et M4 traduisent l'effet secondaire de l'inertie de rotation de la section autour d'un diamètre. La matrice M5, quant à elle, représente l'effet gyroscopique. Le terme constant n'apporte aucune contribution dans l'application des équations de Lagrange. Ainsi, l'expression (II.3.34) se simplifie comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = (M_c + M_g) \ddot{\delta} + G \dot{\delta} \quad (\text{II.3.35})$$

$M_c$  et  $M_g$  sont respectivement dérivées des matrices M1, M2, M3 et M4, tandis que G est obtenue à partir de M5. Les matrices correspondantes sont donc les suivantes :

$$M_1 = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & -22L \\ 13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.36})$$

$$M_2 = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.37})$$

$$M_3 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.38})$$

$$M_4 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.39})$$

$$M_5 = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.40})$$

Regroupons les matrices présentant les mêmes propriétés.  $M_c = M_1 + M_2$  et  $M_g = M_3 + M_4$   
D'où :

$$M_c = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 & 0 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.41})$$

$$M_g = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.42})$$

$$G = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.43})$$

## b) L'énergie de déformation

En appliquant les expressions (II.3.29) et (II.3.30) à l'équation de l'énergie de déformation donnée par la formule (II.3.10), on obtient :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \delta u^t \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^1} \delta u + \delta w^t \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \frac{dy^2}{\delta} w \right] dy \quad (\text{II.3.44})$$

Où

$$U_a = \frac{EI}{2} \left[ \delta u^t \left( \int_0^L \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} dy \right) \delta u + \delta w^t \left( \int_0^L \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} dy \right) \delta w \right] \quad (\text{II.3.45})$$

Que l'on peut exprimer sous forme simplifiée :

$$U_a = \frac{1}{2} \delta u^t K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t K_2 \delta w \quad (\text{II.3.46})$$

Où

$$K_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.47})$$

$$K_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.48})$$

**K1** et **K2** représentent les matrices de raideur classiques.

La matrice globale **K** :

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \Psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.49})$$

Dans l'hypothèse où l'effet de cisaillement est pris en compte, la matrice adopte la forme suivante

$$K = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L \end{bmatrix} \quad (II.3.50)$$

La grandeur représentant le cisaillement est :  $\alpha = \frac{12EI}{GS_r L^2}$ ,

Où :

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  : Module de cisaillement.

$\nu$  : le coefficient de poisson.

$S_r \approx S$  : (section réduite).

### II.3.2.3. Formulation matricielle des équations du palier

En général, l'effet des pentes des moments est négligé au niveau des appuis. Seules les forces généralisées  $F_u$  et  $F_w$ , associées respectivement aux déplacements  $u$  et  $w$ , sont prises en compte. En tenant compte de l'équation (3.1.30), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\psi \\ F_w \\ F_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & K_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zx} & 0 & K_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \psi \\ w \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & C_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & C_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (II.3.51)$$

La première correspond à une matrice de raideur, tandis que la seconde représente une matrice d'amortissement. Ces matrices sont généralement asymétriques et peuvent varier de façon notable en fonction de la vitesse de rotation.

### III.3.2.4. Formulation matricielle des équations du balourd

En appliquant les équations de Lagrange à l'expression de l'énergie cinétique d'un balourd, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{T_b}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{T_b}{\partial \delta} = -m_b d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (II.3.52)$$

Avec

$$\delta = [u \quad w]^t.$$

### II.3.3. Exemple de Montage de Matrices Globales

Considérons le modèle de rotor étudié, représenté sur la figure II.8, composé de quatre nœuds et de cinq éléments : un disque, un palier et trois segments d'arbre de même longueur.

$$l = l_1 = l_2 = l_3 = L/3 .$$

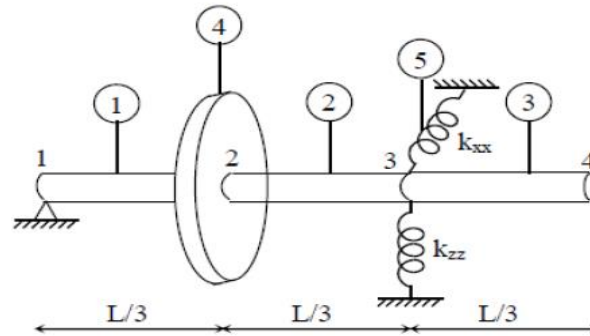


Figure II.8 : Modèle de rotor avec éléments et nœuds. [12] [13]

Dans le modèle ci-dessus, les nœuds de chaque élément - qu'il s'agisse de l'arbre, du palier ou du disque - sont associés aux nœuds du rotor conformément au tableau ci-dessous

Nombre d'élément	Type d'élément	Nœuds du rotor	Vecteur de déplacements $\delta$
1	Arbre	1-2	$u_1, w_1, \theta_1, \Psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2$
2	Arbre	2-3	$u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2, u_3, w_3, \theta_3, \Psi_3$
3	Arbre	3-4	$u_3, w_3, \theta_3, \Psi_3, u_4, w_4, \theta_4, \Psi_4$
4	Disque	2	$u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2$
5	Palier	3	$u_3, w_3$

Tableau II.01 : Nœuds et déplacements associés aux éléments du rotor.

Les matrices globales de masse, de rigidité et de Coriolis sont construites en assemblant les matrices élémentaires conformément au tableau. Chaque matrice globale résulte de la somme des matrices correspondantes des trois éléments.

- *Matrice globale classique de masse*

$M_{ct} =$

$$\begin{matrix}
 \frac{\rho sl}{420} \\
 \left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 156 & 0 & 0 & -221 & 54 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 156 & 221 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 221 & 41^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -221 & 0 & 0 & 41^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 54 & 0 & 0 & -131 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -131 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 131 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -131 & 156 & 0 & 0 & 221 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 156 & -221 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & -221 & 41^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & -31^2 & 221 & 0 & 0 & 41^2
 \end{array} \right]
 \begin{matrix}
 u_1 \\
 w_1 \\
 \theta_1 \\
 \psi_1 \\
 u_2 \\
 w_2 \\
 \theta_2 \\
 \psi_2 \\
 u_3 \\
 w_3 \\
 \theta_3 \\
 \psi_3 \\
 u_4 \\
 w_4 \\
 \theta_4 \\
 \psi_4
 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

$l_1 = l_2 = l_3 = l = L/3 = 0, 13333 \text{ m}$

• *Matrice globale représentant l'effet gyroscopique*

$M_{gt}$

$$\begin{matrix}
 \frac{\rho sl}{420} \\
 \left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 36 & 0 & 0 & -36 & -36 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 36 & 31 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 31 & 41^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -31 & 0 & 0 & 41^2 & 361 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -36 & 0 & 0 & 31 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -31 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 31 & 0 & 0 & -1^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 36 & 0 & 0 & 31 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 36 & -31 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & -31 & 41^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -1^2 & 31 & 0 & 0 & 41^2
 \end{array} \right]
 \begin{matrix}
 u_1 \\
 w_1 \\
 \theta_1 \\
 \psi_1 \\
 u_2 \\
 w_2 \\
 \theta_2 \\
 \psi_2 \\
 u_3 \\
 w_3 \\
 \theta_3 \\
 \psi_3 \\
 u_4 \\
 w_4 \\
 \theta_4 \\
 \psi_4
 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

$l_1 = l_2 = l_3 = l = L/3 = 0, 13333 \text{ m}$

• *Matrice globale représentant l'effet gyroscopique*



- Matrice globale du disque, incluant les composantes de masse et gyroscopiques.)

$$M_d = \begin{bmatrix} 16,47 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16,47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9,247 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,247 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\psi}_2 \end{Bmatrix}$$

$$+ \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1861 \\ 0 & 0 & 0,1861 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_2 \end{Bmatrix}$$

Avec  $M_d = 16,7 \text{ Kg}$   $I_{dx} = 9,247 \cdot 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$  et  $I_{dy} = 0,1861 \text{ Kg}$

## **II.5. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une modélisation complète des systèmes de rotors en utilisant la méthode des éléments finis. Après avoir établi les hypothèses de modélisation et formulé les équations du mouvement à travers les différentes composantes du système (disque, arbre, paliers et balourd), nous avons dérivé les expressions énergétiques nécessaires pour la formulation matricielle. Cette approche a permis de construire les matrices globales représentant le comportement dynamique du rotor. Ces fondations serviront de base essentielle pour les analyses numériques ultérieures, telles que l'étude des fréquences propres, des réponses dynamiques, et des effets du balourd sur la stabilité du système.

# **Chapitre III : Simulation du comportement dynamique du rotor d'une pompe centrifuge**

### **III.1. Introduction**

La simulation numérique constitue depuis longtemps un outil essentiel dans l'analyse de la dynamique et des vibrations des structures, notamment grâce aux avancées notables dans le domaine du calcul scientifique et des performances des systèmes informatiques. Aujourd'hui, plusieurs logiciels permettent de modéliser et de simuler avec précision le comportement dynamique des structures rotatives. Parmi les plus utilisés figurent ANSYS, ABAQUS, COMSOL, MATLAB, entre autres. Dans le cadre de cette étude, nous avons choisi le logiciel ANSYS, reconnu pour sa robustesse, sa fiabilité et sa large adoption dans le secteur industriel. Il s'appuie sur la méthode des éléments finis (FEM), qui permet de traiter des problèmes complexes avec un haut degré de précision. Ces dernières années, les capacités de simulation en dynamique rotationnelle ont considérablement progressé, rendant possibles des analyses plus fines tout en optimisant les temps de calcul. L'objectif principal de cette étude est de réaliser une analyse numérique du comportement dynamique du rotor d'une pompe à cinq étages, modèle GUINARD DVMX 6.8.11 E. Cette analyse, fondée sur la méthode des éléments finis, vise à déterminer les vitesses critiques à l'aide du diagramme de Campbell, ainsi qu'à évaluer la stabilité et les performances vibratoires du système dans des conditions opérationnelles.

### **III.2. Description**

GEP (groupe électropompe) GUINARD DVMX 6.8.11 E5 est une pompe centrifuge à cinq étages. La rotation de cette pompe est assurée par un accouplement avec un moteur électrique d'une puissance de 1600 kW. Ce dernier est alimenté par un variateur de vitesse à fréquence (VVF), ce qui contribue à améliorer les performances de la pompe et à garantir son bon fonctionnement. La pompe est équipée des éléments suivants : des manomètres sur l'aspiration et le refoulement, des sondes de température sur le corps de la pompe et les paliers, des capteurs de vibration sur les paliers de la pompe et du moteur, ainsi que des détecteurs de fuite sur les garnitures mécaniques. Elle comprend également le corps de la pompe et ses composants, le mobile de la pompe et ses composants, ainsi que la garniture d'étanchéité.

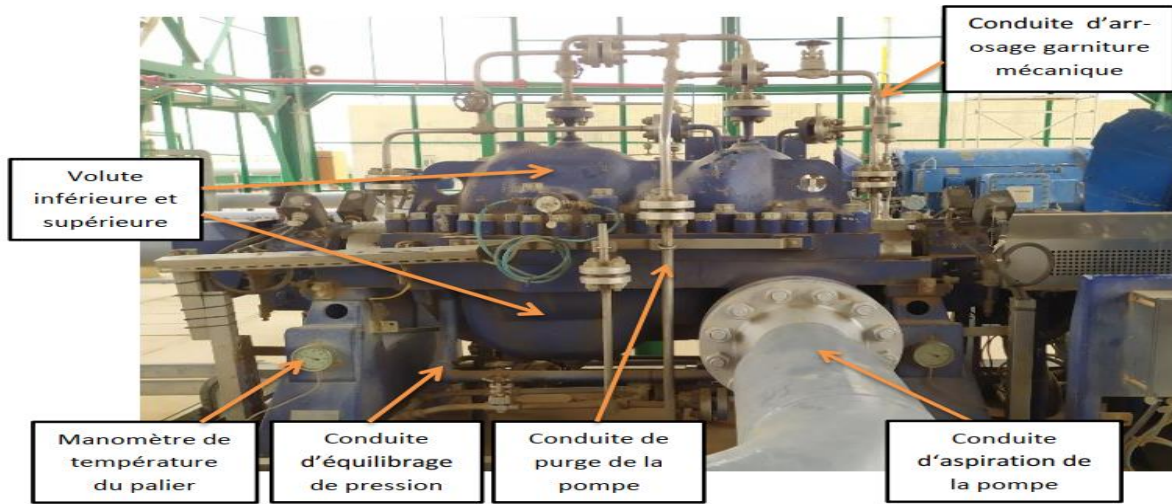


Figure III.01 : Groupe électropompe GUINARD DVMX 6.8.11 E 5



Figure III.02 : l'Arbre de la pompe GUINARD DVMX 6.8.11 E 5

### III.2.1. Schéma descriptif de la pompe

Pour la nomenclature, voir l'annexe 01

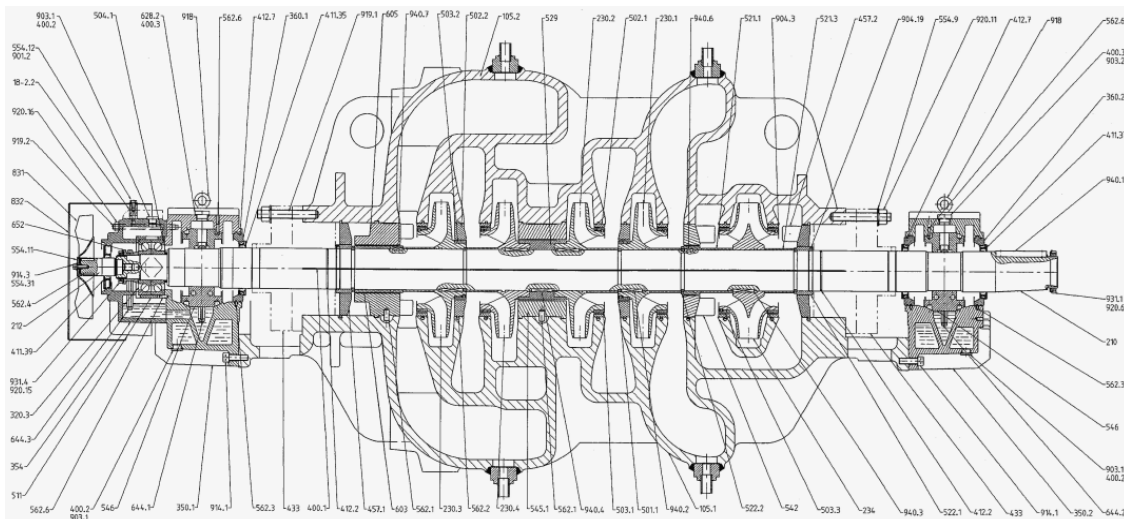


Figure III.03 : Plan de coupe pompe GUINARD DVMX 6.8.11 E 5

### **III.3. Analyse modèle du rotor d'une pompe centrifuge par logiciel Workbench ANSYS**

#### **III.3.1. Analyse modale**

Une analyse modale détermine les caractéristiques vibratoires (fréquences propres et modes propres correspondants) d'une structure ou d'un composant de machine. Elle peut servir de point de départ à d'autres types d'analyses, par exemple en détectant les corps libres lors d'une analyse de contact ou en indiquant le pas de temps nécessaire à une analyse transitoire. De plus, les résultats de l'analyse modale peuvent être utilisés dans une simulation dynamique ultérieure, utilisant des méthodes de superposition de modes, comme une analyse de réponse harmonique. Les fréquences propres et les modes propres sont des paramètres essentiels pour la conception d'une structure soumise à des charges dynamiques

Pour l'analyse modale d'un système de palier rotor multi-DOF, l'équation du mouvement peut être écrite comme suit :

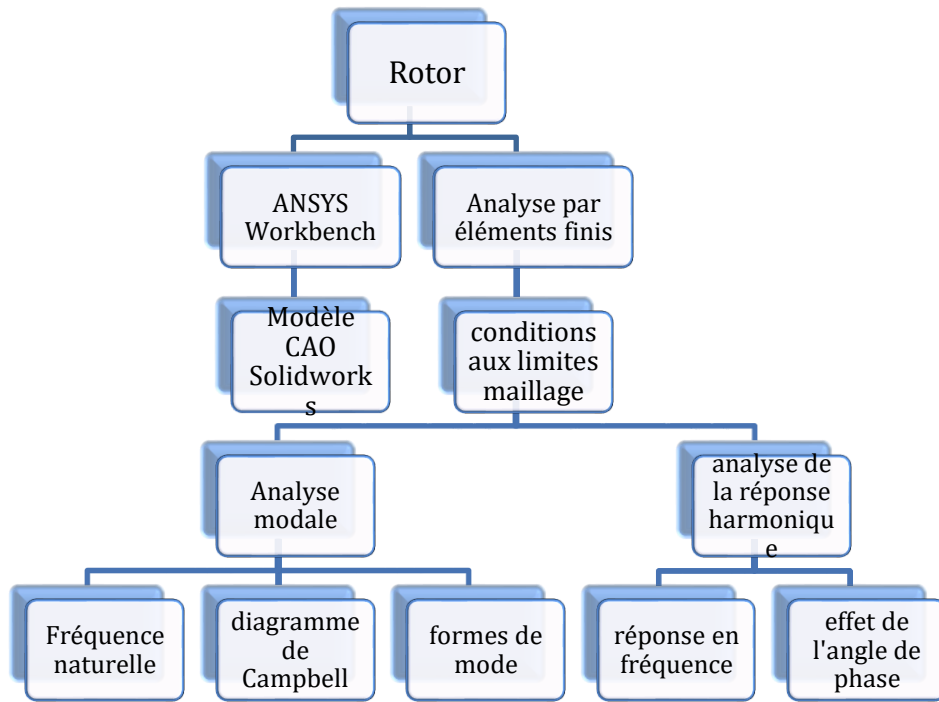
$$[M]\{\ddot{u}\} + ([D] + [G])\{\dot{u}\} + ([S] + [H])\{u\} = \{F(t)\}$$

La matrice M, définie positive mais pas nécessairement diagonale, est appelée matrice de masse (ou d'inertie). Les matrices G et H, respectivement symétrique et antisymétrique, sont appelées matrices gyroscopique et circulatoire. Les matrices D et S, indéfinies et non symétriques, sont appelées respectivement matrice d'amortissement et matrice de rigidité.

#### **III.3.2. Méthodologie d'analyse dynamique du rotor à l'aide d'ANSYS**

##### **Workbench :**

En général, la réalisation de simulations numériques de la dynamique de rotation à l'aide d'ANSYS Workbench nécessite de suivre une série d'étapes ou de procédures. Ces étapes peuvent être représentées sous forme d'un organigramme illustrant l'analyse de la dynamique de rotation à l'aide du logiciel ANSYS (Figure III.4)

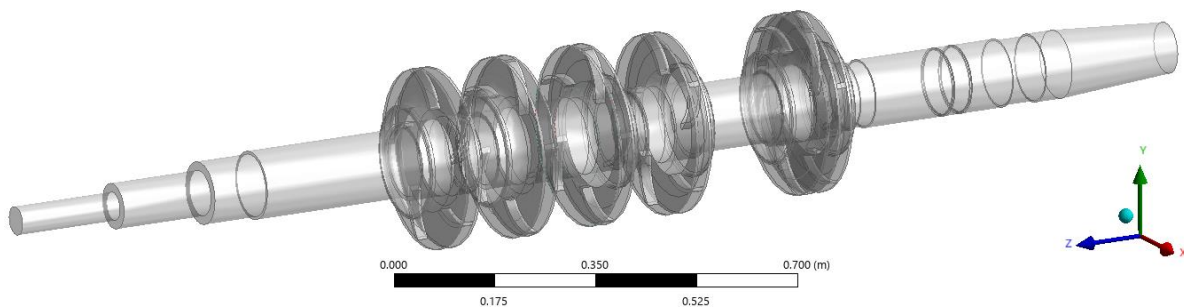


**Figure III.4 :** Méthodologie d'analyse dynamique du rotor à l'aide du logiciel ANSYS Workbench

### III.3.3. Modèle géométrique :

La conception du rotor par logiciel SOLIDWORK2018 :

Le logiciel **SOLIDWORKS 2018** est un outil de conception assistée par ordinateur (CAO) qui permet de créer des modèles 3D détaillés de pièces mécaniques. Il est largement utilisé dans l'industrie pour sa simplicité d'utilisation, sa précision et sa capacité à modéliser des formes complexes. Dans le cadre de ce travail, SOLIDWORKS a été utilisé pour réaliser la **modélisation géométrique du rotor** de la pompe centrifuge, étape préalable essentielle avant l'analyse par la méthode des éléments finis. Ce modèle prend en compte les principales caractéristiques géométriques du rotor, nécessaires pour une simulation dynamique fidèle.



**Figure III.05 :** conception du rotor

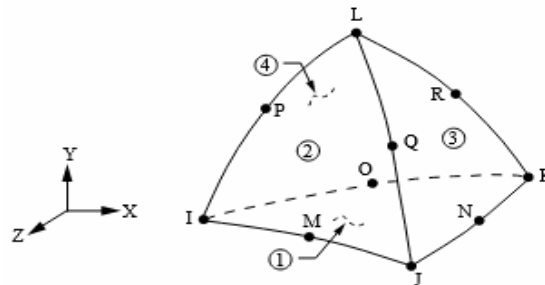
**III.3.4. Maillage**

Le processus de maillage est une étape critique et essentielle dans ANSYS, car il doit être précis pour obtenir des résultats fiables lors des simulations utilisant la méthode des éléments finis (FEM). La grille est constituée d'éléments comportant des nœuds, qui servent à représenter la géométrie et varient selon le type d'élément utilisé. Le principe consistant à effectuer des calculs à l'intérieur d'un nombre limité d'éléments, puis à interpoler les résultats sur l'ensemble du volume, peut représenter un défi lorsqu'il s'agit d'un objet continu, en raison du grand nombre de degrés de liberté dont dispose un tel objet. Toutefois, un maillage stratégique permet de réduire efficacement ces degrés de liberté et d'éviter qu'ils ne deviennent infinis.

Plusieurs méthodes de maillage sont disponibles dans ANSYS Workbench, notamment la méthode mécanique, la méthode des éléments tétraédriques, ainsi que celle à base d'éléments hexaédriques dominants. [14] [15].

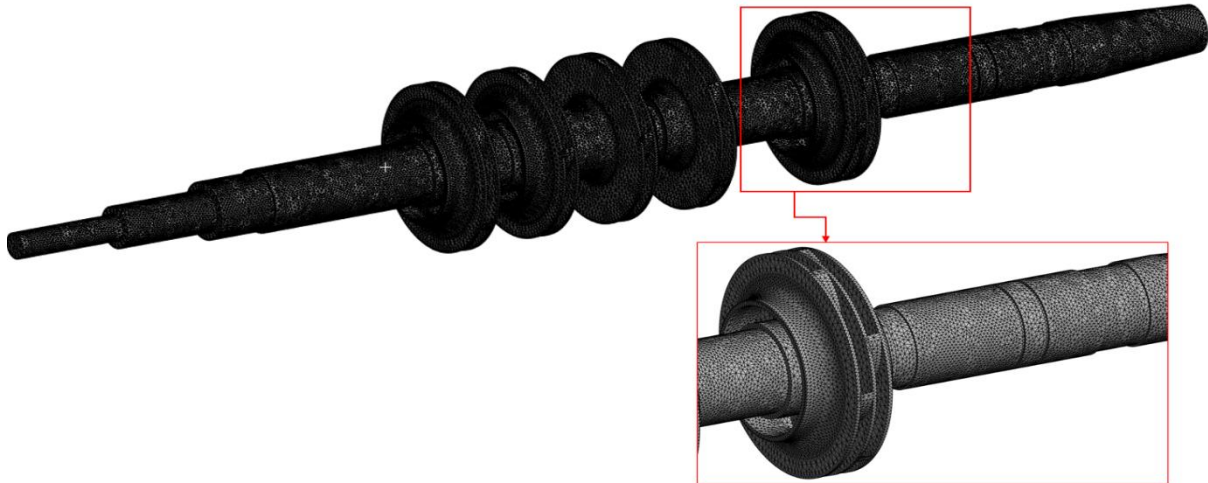
Les composants de l'arbre ont été maillés en utilisant le type d'élément SOLID187.

**L'élément SOLID187** est un élément 3D d'ordre élevé à 10 nœuds. L'élément a un comportement de déplacement quadratique et est bien adapté à la modélisation de maillages irréguliers (tels que ceux produits par divers systèmes de CAO/FAO). [16]



**Figure III.06 : Géométrie de l'élément SOLID187 [16]**

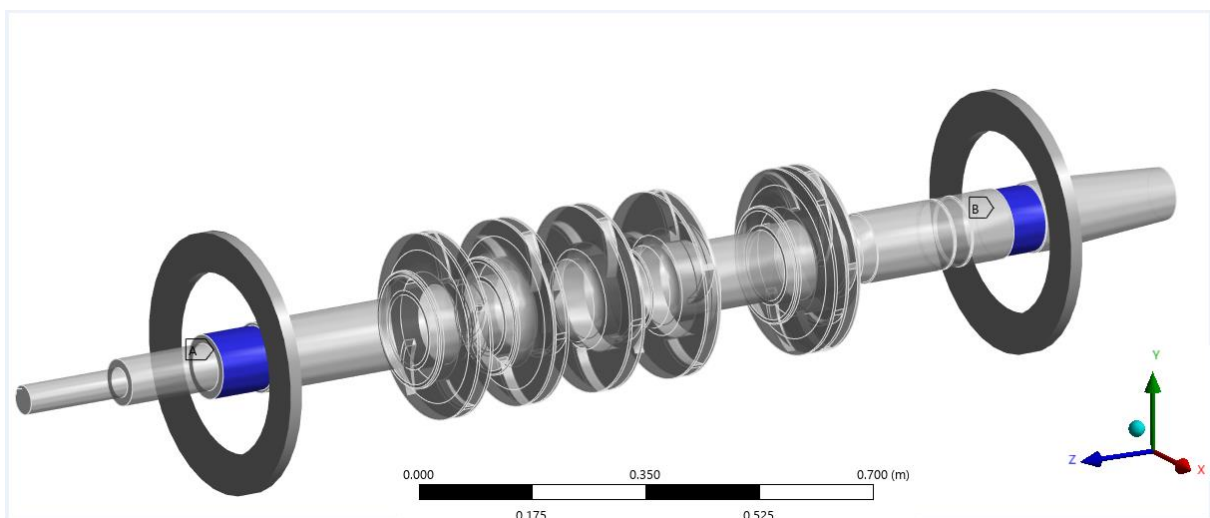
Le maillage du modèle contient 306265 éléments et 552041 nœuds, comme le montre la Figure III.7.



**Figure III.07 :** Maillage de rotor

### III.3.5. Condition aux limites

Après avoir modélisé la structure du rotor à l'aide du logiciel SolidWorks et l'avoir importée dans ANSYS Workbench pour effectuer une analyse modale (Modal Analysis), les conditions aux limites appliquées en fonction des conditions de fonctionnement du modèle de rotor étudié sont décrites ci-après. Les paliers ont été créés sur la base de support dans l'onglet « Contexte de connexion » (Connection Context) au niveau du plan X–Y, ce qui a permis de contraindre les mouvements de translation et de rotation selon les axes X et Y. Les emplacements des paliers ont également été définis avec précision sur l'arbre, comme illustré dans la figure III.08. En outre, les données de raideur et d'amortissement propres à chaque palier ont été introduites afin d'assurer une représentation fidèle du comportement des paliers dans le cadre de l'analyse.



**Figure III.08 :** Conditions aux limites du rotor

### **III.3.6. Calcul des Coefficients de Rigidité et d'Amortissement des Paliers ‘coussinets’**

Les paliers (*Fluid Film Bearings*) sont des éléments mécaniques utilisant un film mince d'huile pour séparer les surfaces en mouvement, réduisant le frottement et supportant des charges radiales ou axiales. Les **coefficients de rigidité** ( $K_{ij}$ ) et **coefficients d'amortissement** ( $C_{ij}$ ) sont essentiels pour analyser la stabilité dynamique des systèmes tournants (*Rotordynamique*). [17]

**-Rigidité** ( $K_{ij}$ ) : Résistance du palier à la déformation sous charge.

**-Amortissement** ( $C_{ij}$ ) : Capacité à dissiper l'énergie vibratoire.

#### **III.3.6.1. Équation de Reynolds Dynamique**

La pression dans le film d'huile est décrite par [18] :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\eta \left( U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right)$$

**Variables :**

$h(x, y, t)$  : Épaisseur du film.

$p(x, y, t)$  : Pression.

$\eta$  : Viscosité dynamique.

$U = R\omega$  : Vitesse de surface.

#### **III.3.6.2. Classification des Paliers [19]:**

Type de palier	Condition L/D	Hypothèse principale	Modélisation
Court ( <i>Short Bearing</i> )	<0,5	Gradients axiaux négligés	Modèle simple
Long ( <i>Long Bearing</i> )	>1,0	Gradients circonférentiels négligés	Modèle axial
Fini ( <i>Finite Bearing</i> )	$0,5 \leq L/D \leq 1,0$	Aucune simplification possible	Résolution numérique

**III.3.6.3. Épaisseur du Film et Théorie des Perturbations**

**A) Épaisseur du Film**

$$h = C(1 + \varepsilon \cos(\theta - \phi))$$

- C: Jeu radial.
- $\varepsilon = e/C$ : Rapport d'excentricité.

**B) Perturbations Petites**

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon, \quad \phi = \phi_0 + \Delta\phi$$

$$\Delta h = C(\Delta\varepsilon \cos \theta + \varepsilon_0 \Delta\phi \sin \theta)$$

**III.3.6.4. Dédution des Coefficients**

**A) Forces Hydrodynamiques**

$$F_e = \int p \cos \theta \, dA, \quad F_\phi = \int p \sin \theta \, dA$$

**B) Coefficients Adimensionnels**

$$(K_{\ddot{u}}) = -\frac{\partial F_i}{\partial q_j}, \quad (C_{\dot{u}}) = -\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}_j}$$

**III.3.6.5. Partie Calculatoire**

**1. Données**

Paramètre	Valeur	Unité
Rayon de l'arbre (R)	0.048	m
Longueur du palier (L)	0.085	m
Rapport L/D	0.885	-
Jeu radial (C)	0.00025	m
Vitesse de rotation ( $\omega$ )	373	rad/s
Viscosité ( $\eta$ )	0.0352	Pa.s
Excentricité ( $\epsilon_0$ )	0.6	-

**2. Étapes de Calcul**

**a) : Fonction de Distribution  $f(\varepsilon_0)$**

$$f(\varepsilon_0) = - \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon_0^2}} \approx 0.286$$

**b) : Coefficients de Rigidité Adimensionnels**

$K_{ee}=5.6, K_{\phi\phi}=3.3$  (Relation empiriques)

**c) : Coefficients d'Amortissement Adimensionnels**

$$b_{ee} = \frac{2}{373} 5,6 \approx 0.03, \quad b_{\phi\phi} = \frac{2}{373} 3,3 \approx 0.018$$

**d) : Charge Statique (W)**

$$W = \frac{\eta\omega RL}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0^2)^2} \approx 12,500N$$

**e) : Conversion en Valeurs Absolues**

**Rigidité :**

$$K_{ee} = \frac{5.6.12,500}{0.00025} \approx 280MN/m, \quad K_{\phi\phi} = 165 MN/m$$

**-Amortissement :**

$$C_{ee} = \frac{5.6.12,500}{0.00025.373} \approx 40 KN_S /m, \quad C_{\phi\phi} = 24 KN_S/m$$

### III.3.6.6. Résultats Finaux

Coefficient	Valeur Absolue
$K_{ee}$	280 MN/m
$K_{\phi\phi}$	165 MN/m
$C_{ee}$	40 kN.s/m
$C_{\phi\phi}$	24 kN.s/m

### III.3.7. Résultats numérique

#### III.3.7.1. Analyse modale

Une **simulation numérique de l'analyse modale** a été réalisée à différentes vitesses : **3000 tr/min, 3500 tr/min** et **4000 tr/min**. Ces vitesses ont été choisies en raison du fait que la vitesse de fonctionnement du rotor est de **3560 tr/min**. **Quatre modes** ont été identifiés à chaque vitesse, ce qui a été jugé suffisant pour effectuer l'analyse modale.

À partir de ces paramètres, les **fréquences naturelles du rotor** ont été extraites, comme indiqué dans le **Table III.01** Le **diagramme de Campbell** a également été établi, et il a été constaté que les valeurs des fréquences enregistrées sont proches, **à l'exception de la fréquence enregistrée dans le quatrième mode à une vitesse de 3500 tr/min**, où la valeur de la fréquence naturelle était **plus élevée** que celles des autres modes.

N°	numéro de mode	Vitesse de rotation (RPM)	Fréquence naturelle [Hz]
01	03	3000	81.941
02	04		82.556
03	05		277.77
04	06		285.46
05	09	3500	81.914
06	10		82.584
07	11		277.72
08	12		285.51
09	15	4000	81.884
10	16		82.613
11	17		277.66
12	18		285.58

**Table III.01:** Fréquence naturelle

#### III.3.7.2. Diagramme de Campbell

L'analyse modale du rotor permet d'extraire le diagramme de Campbell, illustré à la Figure III.09, qui sert à examiner l'évolution des fréquences propres en fonction des différentes vitesses de rotation du rotor. Il permet également d'identifier les vitesses critiques et de déterminer le seuil de stabilité

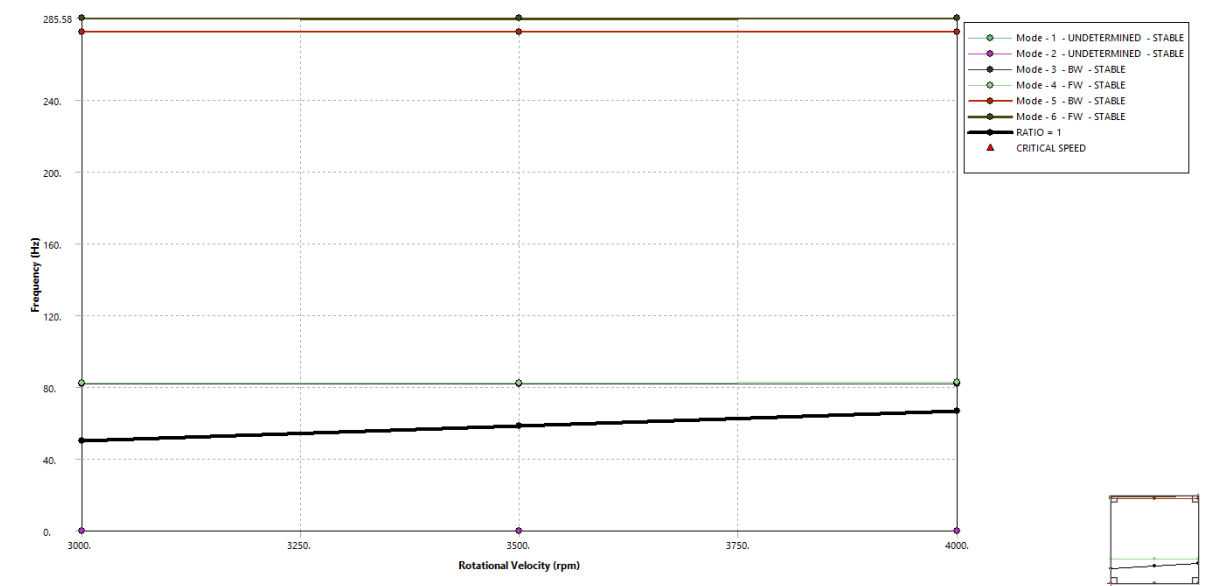


Figure III.09 : diagramme de Campbell

Dans notre cas, lors de l'analyse du diagramme de Campbell du rotor, aucune intersection n'a été observée entre les courbes des fréquences propres et la droite de vitesse de rotation ( $\omega = \Omega$ ), dans la plage proche des vitesses de fonctionnement (3 000, 3 500 et 4 000 tr/min).

Cela renforce l'hypothèse selon laquelle les vitesses critiques se situent en dehors de cette plage (c'est-à-dire inférieures à 3 000 ou supérieures à 4 000 tr/min), ou bien que l'amortissement du système et/ou sa conception géométrique atténuent les effets dynamiques associés aux vitesses critiques dans cette zone.

### III.3.7.3. Formes modales

Les formes modales (modes de vibration du rotor) obtenues à partir de l'analyse modale sont présentées dans les Figures III.08 à III.19 correspondant respectivement aux vitesses de 3000, 3500 et 4000 tr/min

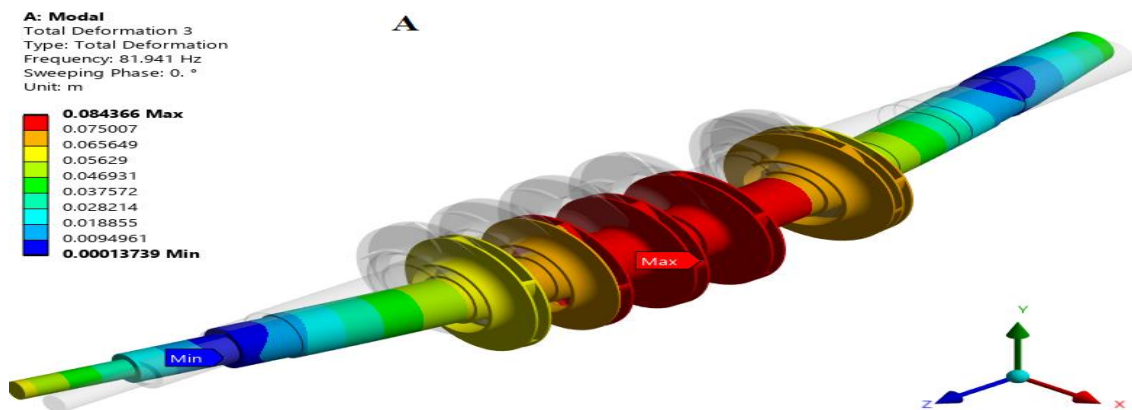


Figure III.10 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3000 tr/min : (A : Mode 1)

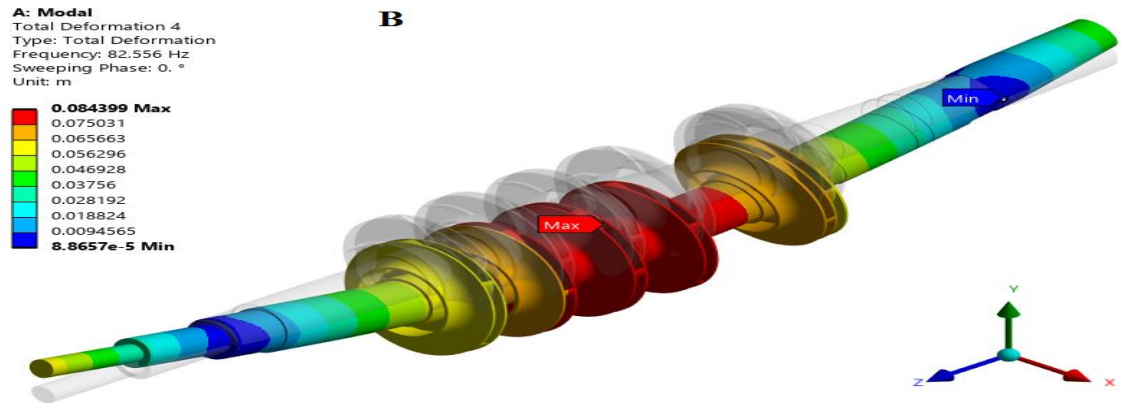


Figure III.11 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3000 tr/min : (B : Mode 2)

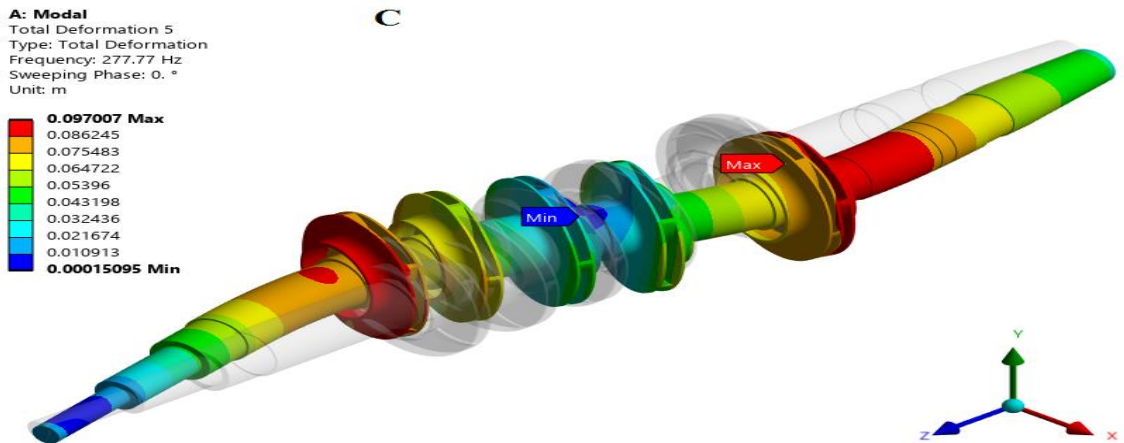


Figure III.12 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3000 tr/min : (C : Mode 3)

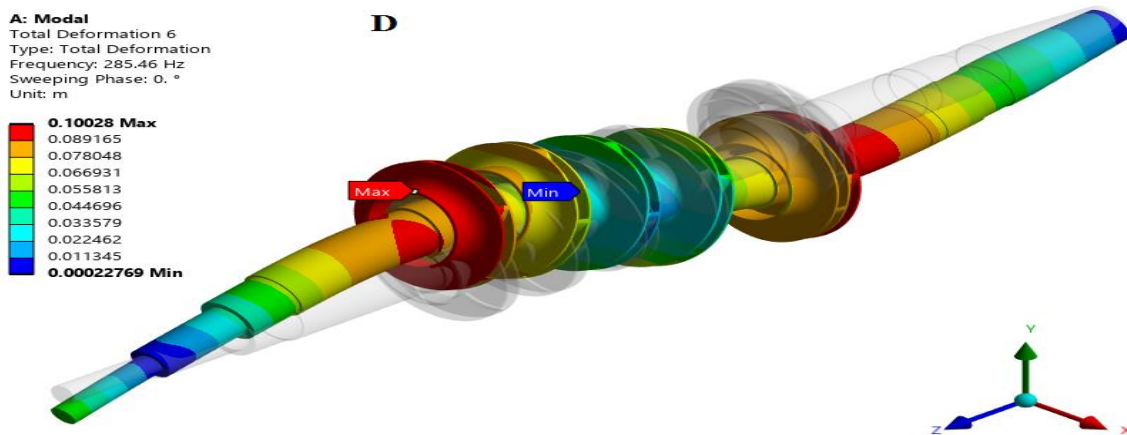


Figure III.13 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3000 tr/min : (D : Mode 4)

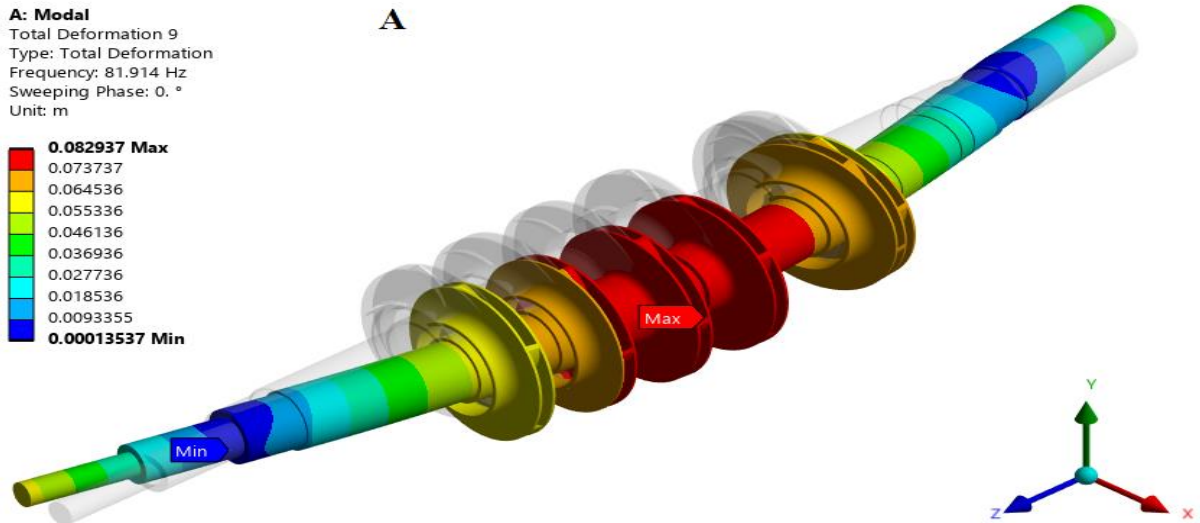


Figure III.14 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3500 tr/min : (A : Mode 1)

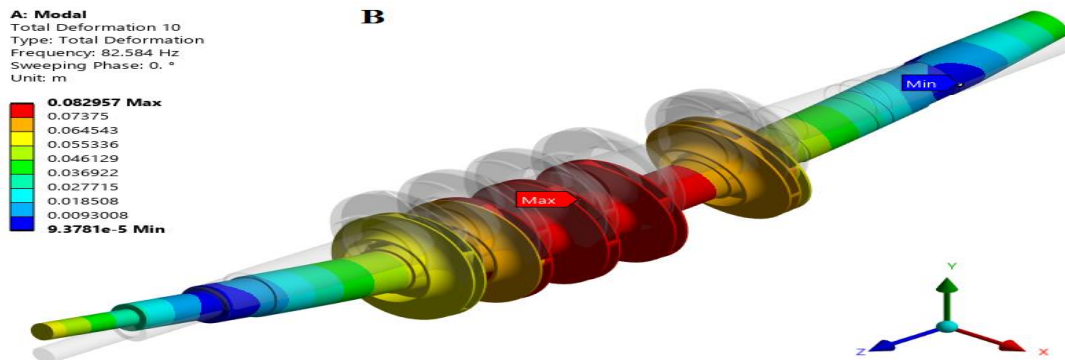


Figure III.15 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3500 tr/min : (B : Mode 2)

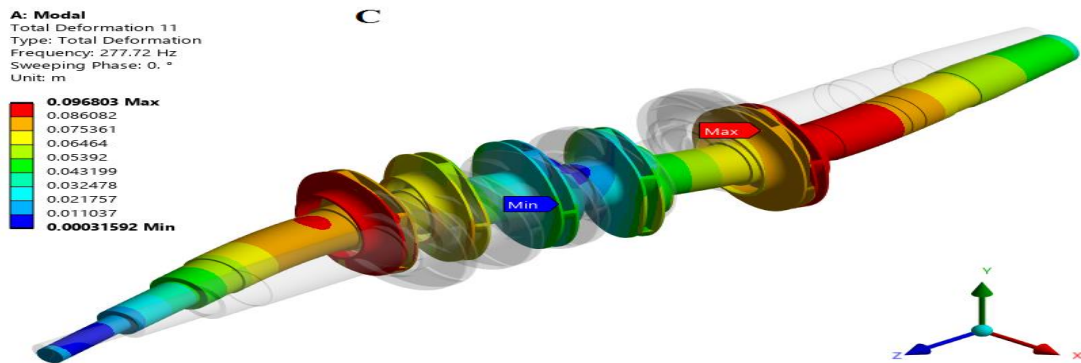


Figure III.16 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3500 tr/min : (C : Mode 3)

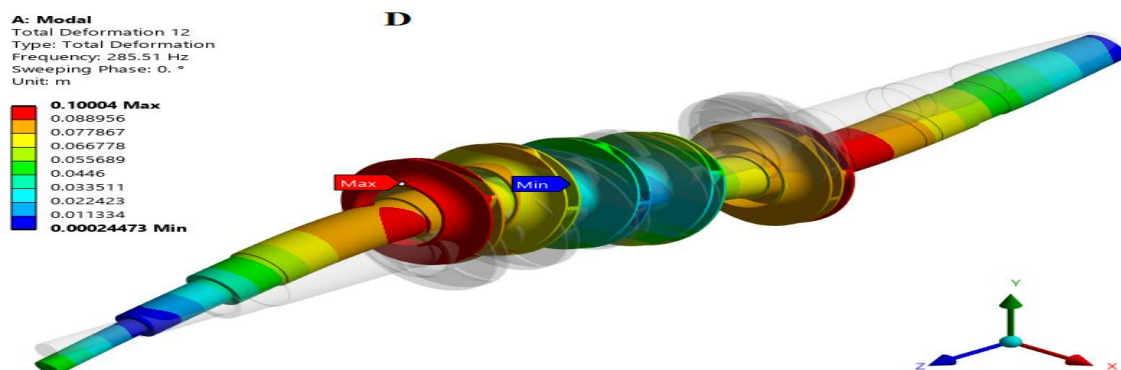


Figure III.17 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 3500 tr/min : (D : Mode 4)

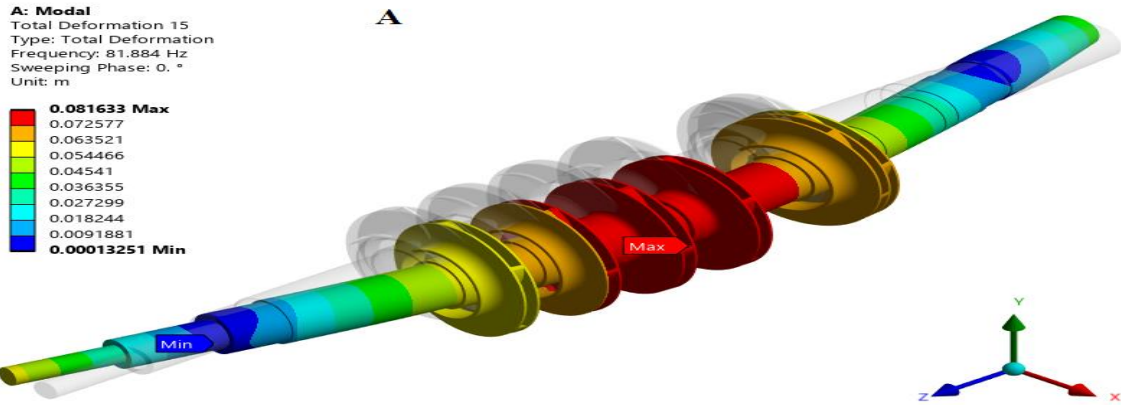


Figure III.18 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 4000 tr/min : (A : Mode 1)



Figure III.19 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 4000 tr/min : (B : Mode 2)

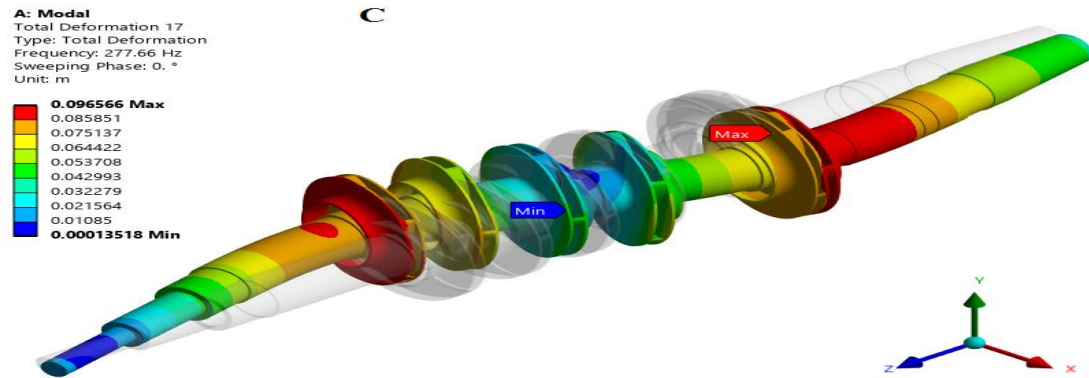


Figure III.20 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 4000 tr/min : (C : Mode 3)

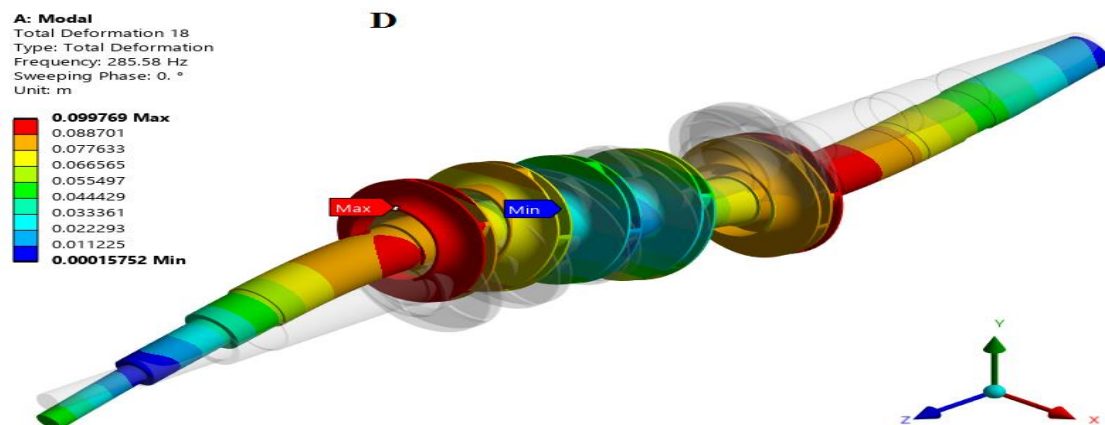


Figure III.21 : Formes de mode à une vitesse de rotation de 4000 tr/min : (D : Mode 4)

D'après l'analyse des modes de vibration, il a été observé que la déformation maximale reste presque constante à différentes vitesses de rotation. À 3000 tr/min, la déformation maximale varie de 0,084366 mm à 0,10028 mm pour les modes un à quatre. À 3500 tr/min, elle se situe entre 0,082937 mm et 0,10004 mm, tandis qu'à 4000 tr/min, la déformation du premier au quatrième mode varie entre 0,081633 mm et 0,099769 mm. Ces résultats indiquent que les valeurs maximales de déformation observées à travers les différents modes de vibration et vitesses de rotation sont très faibles par rapport à la taille globale du rotor.

# **Conclusion générale**

## **Conclusion générale**

La simulation numérique s'est révélée être un outil fondamental pour comprendre le comportement dynamique d'un système et évaluer l'influence de ses paramètres sur son fonctionnement. Dans ce travail, une étude numérique du comportement dynamique d'un système rotorique a été menée. Elle a reposé sur l'utilisation intégrée de SOLIDWORKS pour la modélisation géométrique et d'ANSYS Workbench pour l'analyse par la méthode des éléments finis (FEM), appliquée à un rotor de pompe centrifuge à cinq étages (modèle GUINARD DVMX 6.8.11 E).

L'objectif principal était d'évaluer les réponses vibratoires du rotor dans différentes conditions de fonctionnement, notamment à travers une analyse modale et l'élaboration d'un diagramme de Campbell afin d'identifier les vitesses critiques potentielles et les fréquences propres du système.

Les simulations, réalisées à trois vitesses de rotation (3 000, 3 500 et 4 000 tr/min), ont permis d'identifier quatre modes principaux de vibration pour chaque régime. Les résultats ont montré une déformation maximale faible et relativement constante sur l'ensemble de la plage de vitesses étudiée. Par ailleurs, aucune intersection entre les courbes des fréquences propres et la ligne de vitesse ( $\omega = \Omega$ ) n'a été observée sur le diagramme de Campbell. Cela suggère que les vitesses critiques se trouvent en dehors de la plage de fonctionnement normale, ou que les effets dynamiques sont atténués par la configuration géométrique et l'amortissement du système.

Ces résultats traduisent un bon comportement dynamique du rotor dans la plage considérée, confirmant ainsi la fiabilité de son fonctionnement en conditions nominales. Ce constat est également en adéquation avec les observations en service, la pompe fonctionnant effectivement sans problèmes significatifs de vibration à ces vitesses, ce qui témoigne de la stabilité de la conception et de l'efficacité du système.

En somme, cette étude met en évidence le rôle crucial de la simulation numérique dans l'optimisation de la conception, la vérification de la stabilité, et l'amélioration des performances vibratoires des systèmes rotatifs. Elle ouvre également la voie à des recherches futures plus approfondies, incluant notamment des analyses translationnelles, non linéaires ou couplées (thermomécaniques), afin de mieux appréhender le comportement des systèmes dans des conditions de fonctionnement plus complexes. Enfin, la modélisation couplée fluide-structure (CFD-FEM) pourrait offrir une compréhension plus globale de l'interaction entre le rotor et le

fluide, ainsi que de l'effet de l'usure des roulements sur le comportement vibratoire global du système.

## Bibliographie

- [1] **BOUHALA Mohammed & MOHAMADI Slimane** thèse de master Diagnostique et analyse de la dégradation des équipements pétroliers : -Application à la pompe centrifuge GUINARD DVMX 6.8.11 E 5- en opération à la station de pompage SP3 de M'sila – Univ boumerdes 2021/2022
- [2] **Formation TOTAL: MAINTENANCE MECANIQUE LES POMPES** Manuel deformation EXP-MN-SE090-FR Dernière révision : 26/11/2008.
- [3] Détermination pompes centrifuges KSB Aktiengesellschaft, Zentrale Kommunikation (V5), D-67225 Frankenthal (Pfalz) Allemagne
- [4] **Séminaire Pompes centrifuges entretien et maintenance IAP/E.SK/PTHM** du 30/06/2024 à 04/07/2024.
- [5] **KENNOUCHE Ouardia** thèse de master Etude et maintenance de la pompe centrifuge DVMX 6.8.11 /E5 De la station de pompage SP3 - RTC Bejaia- Univ BEJAIA 2017/2018
- [6] **D. Craig Sever and CHARLES T.** « Centrifugal Pumps: Overview of Design, Operation and Malfunctions Bently Nevada Corporation Hatchover view of design1999.
- [7] **JEAN Poulain** : « pompe rotodynamique, présentation description » B4300, Techniques de l'ingénieur, Génie mécanique, 2003.
- [8] **Atsmane zineddine & Adria aissa abdessamed\_** thèse de master Simulation numérique d'un écoulement autour d'une roue d'une pompe centrifuge-Université -Ouargla
- [9] **Emna SGHAIER \_Thèse de doctorat** Dynamique des rotors à très hautes vitesses en régime non stationnaire Identification par le filtre de Kalman- Uni Paris-Saclay le 10 mars 2020
- [10] **AIMEUR Noureddine \_Thèse de doctorat** Contribution to the dynamic study of a rotor by finite elements– Univ boumerdes 2023/2024
- [11] **Z. Dakel**, “Stabilité et dynamique non linéaire de rotors embarqués,” Ph.D. dissertation, Lyon, INSA, 2014.
- [12] **BELAHRICHE SALAHA.** « Analyse dynamique des corps continus en rotation : application aux arbres moteur »
- [13] **Aimeur Noureddine** thèse de master « Etude dynamique d'un rotor par éléments finis » - Univ M'sila 2018/2019
- [14] **B. Grunwald**, “Vibration analysis of shaft in solidworks and ansys,” 2018.
- [15] **H. I. Mansoor**, M. Al-Shammari, and A. Al-Hamood, “Theoretical analysis of the vibrations in gas turbine rotor,” in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 671, no. 1. IOP Publishing, 2020, p. 012157.

- [16] ANSYS. inc., “Element Reference,” vol. 15317, no. November, p. 9, 2024R1.
- [17] Vance, J. M., Zeidan, F. Y., & Murphy, B. G. (2010). *Rotordynamics of Turbomachinery*. Wiley.
- [18] D. Dowson - Fluid Film Lubrication, Osborne Reynolds Centenary\_ Proceedings (Leeds-Lyon Symposium on Tribology Proceedings) (1987)
- [19] Hamrock, B. J., Schmid, S. R., & Jacobson, B. O. (2004). *Fundamentals of Fluid Film Lubrication* (2nd ed). CRC Press
- [20] Gunter, E. J. (2007). *Dynamic Stability of Rotor-Bearing Systems*.
- [21] Documentation SONATRACH

## Annexe: nomenclature [21]

Nomenclature / Bill of material :		F125192	Pompe / Pump :	DVMX 6.8.11E - 5 STAGES	Révision : 00		
Plan en coupe / Sectional dwg :		F125191	O.C. :	1600094	Date : 20/09/05		
			Projet :	P-296 & P-297	Page : 2 / 6		
Rep Item	Qté Qty	Désignation Description		Plan Drawing	Matière Material	Code article Codification	Rév Rev
105.1	1	1/2 CORPS INF. DVMX6.8.11E.5ET	BOTTOM 1/2 PUMP CASING	F115350D	A216gr.WCB	2C016645	
105.2	1	1/2 CORPS SUP. DVMX6.8.11E.5ET	TOP 1/2 PUMP CASING	F115350D	A216gr.WCB	2C016646	
13-18.1	3	FENDEUR A 82X 32X 6	ANTI-SWIRL	F103965	X2CrNiMo17-12-2	70036657	
13-18.2	3	FENDEUR B 82X 32X 6	ANTI-SWIRL	F103966	X2CrNiMo17-12-2	70036658	
18-2.2	3	PATTE-FIXATION M.8X 47	ANCHORING CLIP	630654B	X2CrNi18-9	70048365	
210	1	ARBRE 96X2248 RUNOUT	SHAFT	F11523205	42CrMo4	20016581	
212	1	ARBRE INTERMED. DIA:42/L6:121	INTERMEDIATE SHAFT	F112793	X30Cr13	70049953	
230.1	1	ROUE BAQUEE(IN)317,5X36-48(ASP) P296/7	IMPELLER WITH RING	F103496AP	A743gr.CA-6NM	2C016535	
230.2	1	ROUE 1 BAQUEE IN317,5X36-48(ASP) P296/7	IMPELLER WITH 1 RING	F103496AP	A743gr.CA-6NM	2C016547	
230.3	1	ROUE BAQUEE(IN)317,5X36-48(REF) P296/7	IMPELLER WITH RING	F103497AP	A743gr.CA-6NM	2C016549	
230.4	1	ROUE 1 BAQUEE IN317,5X36-48(REF) P296/7	IMPELLER WITH 1 RING	F103497AP	A743gr.CA-6NM	2C016550	
234	1	ROUE ASP.BAQUEE 317,5X30-54 5A P-295/7	SUCTION IMPELLER WITH RING S	F115356AP	A743gr.CA-6NM	2C016529	
320.3	2	ROUL. 7312 60-130X 31	BALL BEARINGS, ANGULAR CONTACT	P6A4001	Acier/Cage 16le	79000011	
350.1	1	CORPS PALIER BUTEE 105/ 370X 210	BEARING HOUSING	F105034N	A352gr.LCB	2C016628	
350.2	1	C. PALIER RADIAL 105/ 370X 210	BEARING HOUSING	F105035Q	A352gr.LCB	2C016632	
354	1	CORPS DE BUTEE 145/ 270X 160	THRUST BEARING HOUSING	F105804	A352gr.LCB	70048363	
360.1	1	COUVERCL-PALIER 125/ 168X 24	BEARING COVER	F113967	Tu20MV6	70048359	
360.2	2	COUVERCL-PALIER 125/ 168X 24	BEARING COVER	F113967	Tu20MV6	70048359	
400.1	1	JOINT PLAT PREDEC. DVMX 6.8.11E 5ET.	GASKET	F112567-5	SAM-NA603	70050968	
400.2	8	JOINT PLAT 22 / 26 X2	FLAT GASKET	P6A2002	SAM-NA601	70012998	
400.3	2	JOINT PLAT 27,5/ 32 X2	FLAT GASKET	P6A2002	SAM-NA601	70013156	
411.35	1	BAQUE ETANCHEITE 8.W. 95/ 125X 16	SEALING GASKET 8.W. 95/ 125X 16	F113951J	Métallurgie sur plan	70049491	
411.37	2	BAQUE ETANCHEITE 8.W. 95/ 125X 16	SEALING GASKET 8.W. 95/ 125X 16	F113951J	Métallurgie sur plan	70049491	
411.39	1	BAQUE ETANCHEITE 8.W. 42/ 100X 16	SEALING GASKET 8.W. 42/ 100X 16	F113951A	Métallurgie sur plan	70048361	
412.2	2	JOINT TORIQUE 88 X 3	O-RING	P6A2001	FPM (Viton)	70026543	
412.7	3	JOINT TORIQUE 152,07X 2,62	O-RING	P6A2001	NBR (Nitrile)	70048511	
433	2	GARNITURE MECAN. DVMX 3.4.9N/HH 6ET.	MECHANICAL SEAL	F6M0222	Métallurgie fournisseur	2C016253	

DAVID BROWN GUINARD PUMPS S.A.S. B.P. 435 - 74200 ANNECY Cedex - FRANCE

Nomenclature / Bill of material :		F125192	Pompe / Pump :	DVMX 6.8.11E - 5 STAGES	Révision : 00		
Plan en coupe / Sectional dwg :		F125191	O.C. :	1600094	Date : 20/09/05		
			Projet :	P-296 & P-297	Page : 3 / 6		
Rep Item	Qté Qty	Désignation Description		Plan Drawing	Matière Material	Code article Codification	Rév Rev
457.1	1	GRAIN DE FOND 115/ 226X 28	GLAND RING	F115200	X30Cr13	70050514	
457.2	1	GRAIN DE FOND 115/ 226X 65	GLAND RING	F115201	A743gr.CA-6NM	70050513	
501.1	5	BAQUE PLUS PART. 90/ 101X 8	MULTIPLE RING	F103962	X30Cr13	70024658	
502.1	6	BAQUE D'USURE 200/ 226X 25	CASING WEAR RING	F106494	X30Cr13	70030449	
502.2	2	BAQUE D'USURE 140/ 226X 28	CASING WEAR RING	F106492	X30Cr13	70030465	
503.1	4	BAQUE USURE ROUE 185/ 201X 25	IMPELLER WEAR RING	Z599208	X30Cr13	70002531	
503.2	2	BAQUE USURE ROUE 125/ 141X 28	IMPELLER WEAR RING	Z59919B	X30Cr13	70002530	
503.3	2	BAQUE USURE ROUE 187/ 201X 25	IMPELLER WEAR RING	F115370B	X30Cr13	70050747	
504.1	1	BAQUE-ENTRETOISE 60/ 70X 11	SPACER RING	F103397C	Tu20MV6	70036667	
511	1	BAQUE-CENTRAGE 118/ 144X 68	CENTERING RING	F105756	Tu20MV6	70036551	
521.1	5	CHEMISE D'ETAPE 96/ 104X 75	STAGE SLEEVE	F103960	X30Cr13	70024655	
521.3	1	CHEMISE-ENTRETOI 96/ 104X 69	SPACER SLEEVE	F103961	X30Cr13	70024656	
522.1	2	CHEMISE ETRANGL.95,2/114,2X 44	THROTTLE SLEEVE	F115202B	X30Cr13	70050512	
522.2	1	CHEMISE ETRANGL. 96/ 115X 48	THROTTLE SLEEVE	F103959	X30Cr13	70024636	
529	1	CHEMISE-PALIER 96/139,7X 113	BEARING SLEEVE	F118521A	X30Cr13	2C008158	
542	1	DOUILLE ETRANGL. 115/ 226X 74	THROTTLING BUSH	F106496	A743gr.CA-6NM	70030447	
545.1	1	COUSSINET 140/ 226X 114	BEARING BUSH	F106500AP	X30Cr13	70050510	
546	2	COUSSINET-ROTOU (DIAMETRE 90)	JOURNAL BEARING	F106398B	Métallurgie fournisseur	70031529	
554.1	31	RONDELLE 1,5X41 / 60	WASHER	F103274K	X5CrNiMo17-12-2	70024691	
554.10	4	RONDELLE PLATE ZB M 10 C	WASHER	P6A2513	Classe 6	70004406	
554.11	1	RONDELLE 11/ 45X 6	WASHER	630904	CuAl9Ni5Fe4	70053874	
554.12	3	RONDELLE PLATE ZB M 8 C	WASHER	P6A2513	Classe 6	70004404	
554.2	14	RONDELLE 1,5X54 / 82	WASHER	F103274L	X5CrNiMo17-12-2	70021437	
554.11	1	RONDELLE DENT DEC B Z-B	SERRATED LOCK WASHER	P6A2514	Acier ressort	70022548	
554.7	2	RONDELLE PLATE ZB M 16 C	WASHER	P6A2513	Classe 6	70004411	
554.9	8	RONDELLE PLATE ZB M 20 C	WASHER	P6A2513	Classe 6	70004415	
560.1	2	GOUPIL CONIE FIL. 20X 160	TAPER PIN WIHT EXT.THREAD,UNHAR.	P6A1507	X29CrS13	70004171	

DAVID BROWN GUINARD PUMPS S.A.S. B.P. 435 - 74200 ANNECY Cedex - FRANCE

Nomenclature / Bill of material :		F125192	Pompe / Pump :	DVMX 6.8.11E - 5 STAGES	Révision : 00	
Plan en coupe / Sectional dwg :		F125191	O.C. :	1600094	Date : 20/09/05	
			Projet :	P-296 & P-297	Page : 4 / 6	
Rep Item	Qté Qty	Désignation Description	Plan Drawing	Matière Material	Code article Codification	Rév Rev
560.2	4	GOUPILLE CONI FIL 10X 65	TAPER PIN WITH EXT. THREAD, UNHAR.	P6A1507	X29CrS13	7C004164
562.1	2	GOUPILLE CYLIND. B 12 X 26 H9	CYLINDRICAL PIN	P6A1504	X2CrNiMo17-12-2	7C007477
562.2	11	GOUPILLE CYLIND. 8X 10	CYLINDRICAL PIN	P67721	X2CrNiMo17-12-2	7C003148
562.3	3	GOUPILLE CYLIND. B 4 X 12	CYLINDRICAL PIN	P6A1504	XC100	7C020901
562.4	2	GOUPILLE CYLIND. B 4 X 30	CYLINDRICAL PIN	P6A1504	XC100	7C022817
562.5	4	GOUPILLE CYLIND. B 6 X 14 H8	CYLINDRICAL PIN	P6A1504	XC100	7C021476
562.6	3	GOUPILLE CYLIND. B 6 X 14 H8	CYLINDRICAL PIN	P6A1504	XC100	7C021476
59-48	2	GRILLE DE PROTEC REF.30013 TRICO	GRATING	F113670	ZINC	70045969
603	1	PISTON D'EQUILIB 96/138X117	BALANCING PISTON	F103880E	X30Cr13	70050187
605	1	DOUILLE D'EQUILIB 138/226X141	BALANCING BUSH	F106499E	A743gr.CA-6NM	70050508
628.1	4	INDICAT.NIV.+JT 1/4"PD6 CYL	LEVEL INDICATOR	P6A3004	TECHNOPOLYMERE	70013323
628.2	6	INDICAT.NIV.+JT 3/4"PD6 CYL	LEVEL INDICATOR	P6A3004	TECHNOPOLYMERE	7C047311
638	2	GRAIS.NEV.CONST TRICO(REF.30003)	CONSTANT-LEVEL OILER	F112985	Métallurgie fournisseur	70045967
644.1	1	BAGUE DE LUBRIF. 180/200X 16	LUBRICATION RING 180/200X 16	631744V	CuSn12	2C017124
644.2	1	BAGUE DE LUBRIF. 180/200X 16	LUBRICATION RING 180/200X 16	631744V	CuSn12	2C017124
644.3	1	BAGUE DE LUBRIF. 124/140X 13	LUBRICATION RING	631744T	CuSn12	70036666
652	1	CHEMISE LUBRIFI. 55/80X 35	LUBRICATION SLEEVE	630597	Tu20Mv6	70036669
730.11	2	MAMELON CYL.ZB SCH80 1/4"NPT X 4"	LONG NIPPLE	P6A1031	A106gr.B	70031870
730.12	2	MAMELON CYL.ZB SCH80 1/4"NPT X 70	LONG NIPPLE	P6A1031	A106gr.B	70053876
731.11	2	TE S.3000 1/4" NPT ZB	TEE	P6A1008	A105	70053875
831	1	VENTILATEUR HELI 244/ 33X 41	FAN IMPELLER	F103894	NYLON	70011193
832	1	CAPOT DE VENTIL.T9 322X 197	FAN HOOD	F113926	Acier	70048364
900.1	6	VIS TETE FRAISEE FHC M 8- 16/ 16	COUNTERSUNK HEAD SCREW	P6A1524	Classe A4-50	70049805
901.2	3	VIS HEXAGO Z-B H M 8- 12/ 12	HEXAGON HEAD SCREW	P6A1502	Classe 6-8	70003174
902.1	31	GOUJON FILETE M39X4 39X215	STUD	F103275M	SA193gr.B7	70024680
902.2	8	GOUJON FILETE M52X3 52X241	STUD	F103275N	SA193gr.B7	70024681
902.3	4	GOUJON FILETE M52X3 52X308	STUD	F103275P	SA193gr.B7	70024682

DAVID BROWN GUINARD PUMPS S.A.S. B.P. 435 - 74920 ANNECY Cedex - FRANCE

Nomenclature / Bill of material :		F125192	Pompe / Pump :	DVMX 6.8.11E - 5 STAGES	Révision : 00	
Plan en coupe / Sectional dwg :		F125191	O.C. :	1600094	Date : 20/09/05	
			Projet :	P-296 & P-297	Page : 5 / 6	
Rep Item	Qté Qty	Désignation Description	Plan Drawing	Matière Material	Code article Codification	Rév Rev
902.4	1	GOUJON FILETE M52X3 52X333	STUD	F103275Q	SA193gr.B7	70024683
902.5	1	GOUJON FILETE M52X3 52X445	STUD	F103275BR	SA193gr.B7	70036595
903.1	8	BOUCHON CHC ZB 1/2"6AZ	THREADED PLUG	P6A1019	Acier	7C013159
903.10	4	BOUCHON M. TH 1/4" NPT ZB	THREADED PLUG	P6A1007	A105	70053873
903.2	2	BOUCHON CHC ZB 3/4"6AZ	THREADED PLUG	P6A1019	Acier	70013324
904.19	6	VIS HC CUVETTE M 6- 6	HEXAGON SOCKET SET SCREW	P6A1528	Classe A4-50	70012994
904.3	24	VIS HC CUVETTE M 6- 6	HEXAGON SOCKET SET SCREW	P6A1528	Classe A4-50	70012994
904.5	2	VIS HC TETON L6 M 20- 70	HEXAGON SOCKET SET SCREW	P6A1528	Classe 6-8	70003341
904.5	4	VIS HC CUVETTE M 8- 16 ZB	HEXAGON SOCKET SET SCREW	P6A1528	Classe 6-8	70003298
914.1	10	VIS CHC ZB M 16- 50/ 50	SOCKET HEAD CAP SCREW	P6A1525	Classe 8-8	70016850
914.3	1	VIS CHC M 8- 25/ 25	SOCKET HEAD CAP SCREW	P6A1525	CuAl9Ni5Fe4	70053872
914.7	8	VIS CHC ZB M 10- 50/ 32	SOCKET HEAD CAP SCREW	P6A1525	Classe 8-8	70003322
918	4	ANNEAULEVAGE MALE 6.O.D 8 L= 15	LIFTING EYE-BOLT (MALE LARGE EYE)	P6A1017	Acier estampé	7C013157
919.1	8	TIGE FILETEE ZB M 20X 170	THREADED ROD	P6A1501	SA193gr.B7	70056636
919.2	4	TIGE FILETEE ZB M 12X 150	THREADED ROD	P6A1501	SA193gr.B7	70036665
920.1	31	ECROU BORGNE ZB M 39X4 58X84	CAP NUT	F103794D	SA194gr.2H	70002709
920.10	2	ECROU HEXAGONAL HH M 16 ZB	HEXAGON NUT	P6A1503	SA194gr.2H	70002716
920.11	8	ECROU HEXAGONAL HH M 20 ZB	HEXAGON NUT	P6A1503	SA194gr.2H	70002720
920.12	4	ECROU HEXAGONAL H M 10 Z-B	HEXAGON NUT	P6A1503	Classe 8	70004263
920.15	1	ECROU A ENCOCHES KM 11	CASTLE NUT	P6A1518	Acier	70002780
920.15	4	ECROU HEXAGONAL HH M 12 ZB	HEXAGON NUT	P6A1503	Classe 8	70004268
920.2	14	ECROU BORGNE ZB M 52X3 80X115	CAP NUT	F103794J	SA194gr.2H	70024695
920.6	1	ECROU A ENCOCHES KM 15	CASTLE NUT	P6A1518	Acier	70002775
931.1	1	RONDELLE FREIN MB 15	EXTERNAL TAB WASHER	P6A2511	C35E	70002859
931.4	1	RONDELLE FREIN MB 11	EXTERNAL TAB WASHER	P6A2511	C35E	70002855
940.1	1	CLAVETTE PARALL. A 22X 14X 122	KEY A 22X 14X 122	F103383EG	X6CrNiMoTi17-12	70028456
940.2	4	CLAVETTE PARAL. B 8X 7X 50	PARALLEL KEY	P6A2501	X6CrNiMoTi17-12	70004196

DAVID BROWN GUINARD PUMPS S.A.S. B.P. 435 - 74920 ANNECY Cedex - FRANCE

Nomenclature / Bill of material :		<b>F125192</b>	Pompe / Pump :	<b>DVMX 6.8.11E - 5 STAGES</b>	Révision : 00	
Plan en coupe / Sectional dwg :		<b>F125191</b>	O.C. :	<b>1600094</b>	Date : 20/09/05	
			Projet :	<b>P-296 &amp; P-297</b>	Page : 6 / 6 -	
Rep Item	Qté Qty	Désignation Description	Plan Drawing	Matière Material	Code article Coaification	Rév Rev
940.3	1	CLAVETTE PARAL B 8X 7X 50 PARALLEL KEY	P6A2501	X6CrNiMoTi17-12	70004196	
940.4	1	CLAVETTE PARAL B 8X 7X 50 PARALLEL KEY	P6A2501	X6CrNiMoTi17-12	70004196	
940.6	1	CLAVETTE PARAL B 8X 7X 20 PARALLEL KEY	P6A2501	X6CrNiMoTi17-12	70027080	
940.7	1	CLAVETTE PARAL B 8X 7X 20 PARALLEL KEY	P6A2501	X6CrNiMoTi17-12	70027080	
Fin de nomenclature / End of parts list						