

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT PHYSIQUE
N° Ph/TH/01/2023



DOMAINE : Sciences de la matière
FILIERE : Physique
OPTION : PHYSIQUE THEORIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par: wissame Bencharif

Intitulé

**Dynamique quantique d'un oscillateur
harmonique couplé dépendant du temps à 2D**

Soutenu le 20 / 06 /2023 devant le jury composé de:

Maireche Abdelmadjid

Université de M'sila

Président

Medjber Salim

Université de M'sila

Rapporteur

Medjedel Soheyb

Université de M'sila

Examineur

Année universitaire : 2022/2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



Dedicace

Grâce à dieu, ce mémoire a été réalisé c'est avec une très grande joie que je dédie ce travail à :

Ma mère et mon père pour leur dévouement, leurs amours leurs sacrifices et leurs encouragements.

Je prie le bon dieu de bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils seront toujours fiers de nous.

*À mes chers parents «**layaché et Daoud Fatiha**».*

*À toutes mes sœurs «**chaima, Inass**».*

*À mon cher et unique frère «**Mabrouk**».*

À mes oncles et tantes.

*À toute ma grande famille «**Bencherif et Daoud**».*

*À tout le groupe de **physique***

À tous nos enseignants du primaire jusqu'à l'Université

Remerciements

*Je tiens à remercier **ALLAH** qui nous donne la force de faire ce modeste travail.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma gratitude au Professeur Dr **Medjber Salim** Pour tous ses conseils et informations qui ont contribué à enrichir le sujet de notre étude dans ses différents aspects.*

*Mes remerciements à tous les membres de jury (**Pr. Maireche Abdelmadjid** et **Dr. Medjedel Soheyb**) qui ont acceptés de juger ce travail et d'y apporter leurs cautions.*

Je remercie aussi tous les professeurs de département de physique.

Je ne peux pas aussi oublier nos amis et nos collègues en ligne et proche, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près et qui nous ont aidé l'élaboration de ce mémoire

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction Générale | 1 |
| Introduction | 2 |
| Chapitre I : L'équation de Schrödinger | 4 |
| 1-introduction | 5 |
| 2- Naissance de l'équation de Schrödinger..... | 5 |
| 3- l'équation de Schrödinger | 5 |
| 4-Solution de l'équation de Schrödinger | 6 |
| 4.1-Introduction | 6 |
| 4.2-La fonction d'onde | 6 |
| 4.3-L'équation de Schrödinger indépendante du temps (stationnaire)..... | 6 |
| 4.3-1-L'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension..... | 7 |
| 4.3-2-L'équation de Schrödinger stationnaire à deux dimensions | 7 |
| 4.3.3-L'équation de Schrödinger stationnaire à trois dimensions | 7 |
| 5-Les méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire | 9 |
| 5. 1-Méthodes numériques..... | 9 |
| 5.2-Méthodes analytiques | 9 |
| 5.2.1- la méthode de perturbation..... | 9 |
| 5.2-2- La méthode variationnelle | 12 |
| 5-2-3-La méthode de Nikiforov-Uvarov(N-U)..... | 13 |
| 6-Les méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps | 14 |
| a-Méthodes exactes | 14 |
| b- Méthodes approximatives | 16 |
| c -La méthode des invariants..... | 18 |
| Chapitre II : Oscillateur harmonique dépendant du temps | 20 |
| 1. Introduction | 21 |
| 2. Oscillateur harmonique avec masse et fréquence variables | 21 |
| Chapitre III :Dynamique quantique d'un oscillateur couplé dépendant du temps | |
| 2D | 38 |
| 1. Introduction | 26 |

| | |
|---|-----------|
| 2. L'invariant classique..... | 26 |
| 3. Opérateur d'invariant quantique..... | 28 |
| 4-Valeurs propres et fonctions d'onde | 30 |
| 5. Application | 33 |
| Conclusion..... | 35 |
| Conclusion..... | 36 |
| Bibliographies | 37 |

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction

Le problème quantique des oscillateurs harmoniques bidimensionnels dépendants du temps est potentiellement applicable dans l'analyse des propriétés dynamiques de divers systèmes en physique. Dans ce sens, la conséquence physique du couplage de deux potentiels additifs a suscité l'intérêt de plus de 30 ans après les différents rapports de Kim et al. [1, 2, 3, 4]. Abdalla a étudié la mécanique quantique des oscillateurs couplés dépendants du temps associés à un amplificateur paramétrique et un convertisseur de fréquence [5]. Le propagateur pour un oscillateur harmonique couplé dépendant du temps et entraîné dont les fréquences et les masses varient au cours du temps a été étudié par Benamira en utilisant les méthodes des intégrales de chemin [6].

Si nous mentionnons quelques exemples de systèmes physiques et de phénomènes associés modélisables par des oscillateurs couplés dépendant du temps, ce sont des nano-circuits électroniques mésoscopiques [7, 8], systèmes optomécaniques couplés [9], l'effet d'Aharonov-Bohm [10], résonances cyclotrons [11] et intrication dans les modèles Heisenberg XY à deux qubits [12]. En outre, les propriétés quantiques d'un électron libre, dont la masse effective dépend du temps sous l'influence d'un champ magnétique externe, sont étudiés à la fois dans les jauges de Landau et de l'asymétrie utilisant des modèles d'oscillateurs bidimensionnels [13-16]. Aroze et Rivera [17] ont étudiés le comportement dynamique des électrons modélisables par un mouvement oscillatoire à 2D en présence d'un champ magnétique dépendant du temps. Ils ont analysé l'évolution temporelle de toutes les fonctions d'onde correspondantes sous l'hypothèse que l'état initial est une superposition de niveaux de Landau.

Selon la tendance de recherche mentionnée ci-dessus, nous décrivons la dynamique d'un oscillateur couplé dépendant du temps général dans cette recherche. On utilisera la méthode des opérateurs invariants [18-20], pour traiter les systèmes hamiltoniens complexes variant avec le temps. La méthode est introduite par Lewis [18,19], et maintenant elle est devenue un outil très utile pour développer la théorie quantique pour le cas où l'hamiltonien du système dépend explicitement du temps. Une méthode de transformation unitaire sera également adoptée afin de simplifier le problème de quantification du système. Les fonctions d'onde exactes pour l'oscillateur couplé général dépendant du temps seront dérivées en utilisant les états propres de l'opérateur invariant.

Notre mémoire est structuré comme suit : Le premier chapitre est consacré à l'équation de Schrödinger stationnaire et non stationnaire (dépendante du temps) avec ces méthodes de solution, dans le deuxième chapitre on présente la solution de l'équation de Schrödinger pour le modèle de

l'oscillateur harmonique à 1D avec masse et fréquence variables. Au dernier chapitre, on détaille l'étude Dynamique quantique d'un oscillateur couplé dépendant du temps à deux dimensions.

CHAPITRE I

L'ÉQUATION DE

SCHRÖDINGER

1-introduction

En physique quantique, en vertu de la dualité onde-corpuscule, la particule est décrite par une fonction d'onde dont nous décrirons la signification et l'équation qui donne son évolution spatiale et temporelle (l'équation de Schrödinger).

L'équation de Schrödinger a été proposée de façon inductive par Erwin Schrödinger en 1925 [21]. C'est une équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Sa forme générale est une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport au temps, et du second ordre par rapport aux coordonnées de l'espace ordinaire. L'équation de Schrödinger joue un rôle fondamental en mécanique quantique par analogue à l'équation de Newton en mécanique classique, car c'est elle qui régit l'évolution dans le temps du système physique.

2- Naissance de l'équation de Schrödinger

Le 20ème siècle a connu l'apparition de l'une des deux grandes théories physiques du siècle ; la physique quantique. Tout au début de la mécanique quantique on a été confronté au problème de l'explication des états discrets d'un atome. En mécanique classique l'état d'un système physique est donné par la résolution des équations du mouvement du système. Par contre, en mécanique quantique l'état du système est déterminé par la résolution de l'équation de Schrödinger. Cette équation a été proposée par E. Schrödinger en 1925. De Broglie et Schrödinger ont ainsi pu développer un parallélisme entre la mécanique classique et l'optique et parvenir à la conception de la mécanique ondulatoire [21].

Découverte par le physicien Erwin Schrödinger en 1925, l'équation de Schrödinger est une équation d'onde qui généralise l'approche ci-dessus de De Broglie aux particules massives non relativistes soumises à une force d'énergie potentielle.

3- L'équation de Schrödinger

Après le quatrième postulat de la mécanique quantique l'équation de Schrödinger s'écrit [22-26] :

$$\hat{H}\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-1})$$

Pour une particule libre, on a :

$$\hat{H} = \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad (\text{I-2})$$

Lorsque la particule est plongée dans un potentiel scalaire $V(r)$ (par exemple le potentiel d'un oscillateur harmonique) l'Hamiltonien du système s'écrit comme suit:

$$\hat{H} = \hat{T} + V(r) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \quad (\text{I.3})$$

4-Solution de l'équation de Schrödinger

4.1-Introduction

Il y a deux types de l'équation de Schrödinger : l'équation de Schrödinger indépendante du temps (stationnaire) et l'équation de Schrödinger dépendante du temps (non stationnaire). Dans cette partie, nous allons présenter la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

4.2-La fonction d'onde

La fonction d'onde c'est la solutions de l'équation de Schrödinger d'un système quantique et il représente le postulat quantique, qui décrit le mouvement des particules quantiques, et donne toutes les informations des états quantiques (par exemple un électron dans l'atome) .En générale la fonction d'onde dépend de l'espace et du temps $\psi(\vec{r}, t)$.

La fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ doit satisfaire les conditions suivantes:

- Elle doit être continue pour \vec{r} .
- La dérivé $\vec{\nabla}\Psi$ doit être continue, ces contraintes sont appliquées sous condition de la limite sur les solutions.
- Elle doit être normalisée. C'est-à-dire :

$$\int \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)d^3r = \int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = 1 \quad (\text{I-4})$$

avec $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ est la densité de probabilité.

4.3-L'équation de Schrödinger indépendante du temps (stationnaire)

L'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles, du premier ordre par rapport au temps et du second ordre par rapport aux coordonnées de l'espace ordinaire. L'équation de Schrödinger est dite stationnaire si l'hamiltonien du système physique ne dépend pas explicitement du temps, auquel l'énergie totale est conservée, donc l'équation de Schrödinger donne des solutions spécifiques de la forme :

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-iEt/\hbar}\varphi(\vec{r}) \quad (\text{I-5})$$

où E : l'énergie, et $\varphi(\vec{r})$ satisfait l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}) \quad (\text{I-6})$$

4.3-1-L'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension

Si une particule de masse m se déplaçant sur l'axe x , soumise à un potentiel $V(x)$, pour déterminer les niveaux d'énergie, et les fonctions d'ondes associées nous devons résoudre l'équation de Schrödinger unidimensionnelle suivante:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\varphi(x) = E\varphi(x) \quad (\text{I-7})$$

où $-\infty < x < +\infty$.

4.3-2-L'équation de Schrödinger stationnaire à deux dimensions

Dans ce cas le potentiel dépend de deux dimensions, et l'équation de Schrödinger s'écrit comme suit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + V(x, y)\right]\varphi(x, y) = E\varphi(x, y) \quad (\text{I-8})$$

4.3.3-L'équation de Schrödinger stationnaire à trois dimensions

Dans ce cas la particule se déplaçant dans un potentiel qui dépend de \vec{r} ($V(\vec{r})$) qui soit central ou non central. Il est préférable d'utiliser les coordonnées sphériques qui sont mieux adaptées à laplacien Δ qui s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \quad (\text{I-9})$$

Avec

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \quad (\text{I-10})$$

où L : est l'opérateur du moment cinétique et $0 < r < +\infty$, et θ, φ sont les angles polaire $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

L'Hamiltonien s'écrit:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) \quad (\text{I-11})$$

ce qui permet d'écrire l'équation Schrödinger pour un potentiel central $V(r)$ sous la forme :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \right\} \Psi(r, \theta, \varphi) = E\Psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{I-12})$$

a) La séparation des variables

L'expression (I-10) montre que toute la dépendance en θ, φ est contenue dans l'opérateur L^2 et on a $[H, L^2] = 0$ et $[H, L_z] = 0$. Les trois observables H, L^2, L_z admettent un système complet de fonctions propres [22-26]; de sorte que l'on a

$$H\Psi(r, \theta, \varphi) = E\Psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{I-13})$$

$$L^2\Psi(r, \theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2\Psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{I-31})$$

$$L_z\Psi(r, \theta, \varphi) = m\hbar\Psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{I-14})$$

Les fonctions propres communes à L^2 et L_z correspondants aux valeurs de l et m fixées sont les harmonique sphérique $Y_l^m(\theta, \varphi)$. Les fonctions $\Psi(r, \theta, \varphi)$ sont donc forcément le produit d'une fonction radial $R(r)$ par les harmonique sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$, soit :

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{I-15})$$

En utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} L^2\Psi(r, \theta, \varphi) &= L^2R(r) Y_l^m(\theta, \varphi) = R(r)L^2Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &= l(l+1)\hbar^2R(r)Y_l^m(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (\text{I-16})$$

on aboutit à l'équation radiale suivante :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right\} R(r) = ER(r) \quad (\text{I-17})$$

où encore

$$\left\{ \frac{d^2R(r)}{dr^2} + 2 \frac{dR(r)}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] \right\} R(r) = 0 \quad (\text{I-18})$$

avec l : est le nombre quantique orbital.

À cause de l'interprétation probabiliste due à M. Born en 1926 [27] des fonctions d'onde, les solutions de l'équation de Schrödinger doivent appartenir à l'espace de Hilbert. En plus de l'équation de Schrödinger, les solutions de cette dernière doivent vérifier l'équation de continuité suivante:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{J}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{I-19})$$

avec

$$\rho(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t)^* \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-20})$$

représente la densité de probabilité et

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m} [\psi^*(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi^*(\vec{r}, t)] \quad (\text{I-21})$$

est le vecteur de la densité de courant.

5-Les méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire

5.1-Méthodes numériques

On cite par exemple :

- Méthode d'Euler
- Heun
- Euler améliorée
- Runge et Kutta
- Approximations successives...

5.2-Méthodes analytiques

5.2.1- la méthode de perturbation

Cette méthode s'applique dans le cas d'un système stationnaire où l'Hamiltonien est écrit sous la forme [23]:

$$H = H_0 + W, \quad (\text{I-22})$$

où H_0 est un opérateur indépendant du temps et dont on connaît les valeurs propres et les états propres et W est un opérateur dont les éléments de matrice dans une représentation donnée sont petits par rapport à ceux de H_0 .

H_0 est appelé « hamiltonien non perturbé » et W est appelé « perturbation ». Si W ne dépend pas du temps, la perturbation est dite stationnaire.

Pour assurer que W est plus petit que H_0 on introduit un paramètre réel λ , que l'on impose d'être ($\lambda \ll 1$), ce qui permet d'écrire :

$$H(\lambda) = H_0 + \lambda V, \quad (\text{I-23})$$

V est de l'ordre de H_0 .

Pour $\lambda = 0$, $H(\lambda)$ coïncide avec l'hamiltonien non perturbé H_0 .

Les valeurs propres et les vecteurs propres $E(\lambda)$ et $|\psi(\lambda)\rangle$ de $H(\lambda)$ dépendent en général de λ .

Dans cette méthode, nous allons résoudre de manière approchée l'équation aux valeurs propres de $H(\lambda)$ en développant les énergies et les états propres de $H(\lambda)$ en série de puissance du paramètre λ qu'on appellera paramètre de perturbation.

a -La résolution de l'équation de perturbation aux valeurs propres de $H(\lambda)$

L'équation aux valeurs propres de $H(\lambda)$ s'écrit :

$$H(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle, \quad (\text{I-24})$$

En remplaçant $H(\lambda)$ par l'expression (1-23), l'équation (1-24) devient:

$$(H_0 + \lambda V) |\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle. \quad (\text{I-25})$$

On sait que $\lambda \ll 1$, on admet que $E(\lambda)$, et $|\psi(\lambda)\rangle$ peuvent être développés en puissance de λ sous la forme :

$$E(\lambda) = \varepsilon_0 + \lambda \varepsilon_1 + \lambda^2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda^p \varepsilon_p + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \varepsilon_p, \quad (\text{I-26})$$

et

$$|\psi(\lambda)\rangle = |\psi^0\rangle + \lambda |\psi^1\rangle + \dots + \lambda^p |\psi^p\rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p |\psi^p\rangle. \quad (\text{I-27})$$

Nous reportons ces développements dans l'équation (1-25), on obtient :

$$(H_0 + \lambda V) \left(\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p |\psi^p\rangle \right) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \varepsilon_p \right) \left(\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p |\psi^p\rangle \right). \quad (\text{I-28})$$

L'égalité des coefficients de puissances successive de λ dans les deux membres donne un ensemble des équations appelées équation de perturbation:

Pour les termes d'ordre 0 : (λ^0)

$$(H_0 - \varepsilon_0) |\psi^0\rangle = 0. \quad (\text{I-29})$$

Pour les termes d'ordre 1: (λ^1)

$$(H_0 - \varepsilon_0) |\psi^1\rangle + (W - \varepsilon_1) |\psi^0\rangle = 0. \quad (\text{I-30})$$

Pour les termes d'ordre 2: (λ^2)

$$(H_0 - \varepsilon_0) |\psi^2\rangle + (W - \varepsilon_1) |\psi^1\rangle - \varepsilon_2 |\psi^0\rangle = 0. \quad (\text{I-31})$$

Pour les termes d'ordre p : (λ^p)

$$(H_0 - \varepsilon_0) |\psi^p\rangle + (V - \varepsilon_1) |\psi^{p-1}\rangle - \varepsilon_2 |\psi^{p-2}\rangle \dots - \varepsilon_p |\psi^0\rangle = 0. \quad (\text{I-32})$$

On négligeant dans le développement de $E(\lambda)$, et $|\psi(\lambda)\rangle$ les termes d'ordre supérieur à 2, c'est-à-dire on se limitera en fait aux trois premières équations.

b-La correction d'énergie

On a trouvé la correction à l'énergie d'ordre 1 jusqu' à l'ordre 2 par la projection des équations de perturbation (I-30) et ((I-31) sur l'état $|\psi^0\rangle$ qui donne en tenant compte ,

$$\langle \psi^0 | \psi^0 \rangle = 1. \quad (\text{I-33})$$

La correction au premier ordre à l'énergie non dégénéré est égale à la valeur moyenne de la perturbation W dans l'état non-perturbé $|\phi_n\rangle$, donc :

$$\varepsilon_1 = \langle \psi^0 | V | \psi^0 \rangle = \langle \phi_n | V | \phi_n \rangle, \quad (\text{I-34})$$

avec:

$$H_0 |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle. \quad (\text{I-35})$$

La correction à l'énergie au deuxième ordre s'écrit comme suit:

$$\varepsilon_2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \phi_n | V | \phi_m \rangle|^2}{E_n - E_m}. \quad (\text{I-36})$$

c-La correction au vecteur propre

La correction au 1^{er} ordre du vecteur propre est une superposition linéaire de tous les états non perturbés autre que $|\phi_n\rangle$. Cette correction s'écrit sous la forme:

$$|\psi^1\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m | V | \phi_n \rangle}{E_n - E_m} |\phi_m\rangle. \quad (\text{I-37})$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres de l'Hamiltonien perturbé H s'obtiennent en utilisant les développements (1-26) et (1-27). On obtient donc :

$$|\psi\rangle = |\phi_n\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \phi_n | W | \phi_m \rangle|^2}{E_n - E_m} |\phi_m\rangle + \dots \quad (\text{I-38})$$

et

$$E = E_n + \langle \phi_n | W | \phi_n \rangle + \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \phi_n | W | \phi_m \rangle|^2}{E_n - E_m} + \dots \quad (\text{I-39})$$

5.2-2- La méthode variationnelle

On sait que la méthode des perturbations stationnaire nécessite la connaissance des valeurs propres et des vecteurs propres associés au Hamiltonien non perturbé H_0 , mais quand on ne peut pas décomposer le hamiltonien total H du système en une partie principale H_0 et une perturbation W , ce qui rend la résolution de l'équation aux valeurs propres de H très difficile [28]. Dans ce cas, il nécessite de connaître l'énergie de l'état fondamental, donc pour résoudre ce problème on a alors recours à la méthode variationnelle [24], qu'est un outil d'approximation simple mais très utile dans de nombreux problèmes de physique quantique ou il est très difficile à connaître la solution exacte. Elle est basée sur des étapes mathématique que nous allons résumés comme suit [25] :

a-Principe de la méthode

Au début, en considérant un système physique de Hamiltonie H indépendant du temps et supposons que nous connaissons ses vecteurs propres $|\phi_n\rangle$ et les valeurs propres E_n associé à H où ses valeurs sont discrètes et non dégénérées (pour la simplification).

Donc on a:

$$H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle. \quad (\text{I-40})$$

Tout vecteur $|\psi\rangle$ de l'espace des états peut être toujours développé sur la base des vecteurs propres de H :

$$|\psi\rangle = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n | \psi \rangle , \quad (\text{I-41})$$

et : $E_0 \leq E_n$

La valeur moyenne de l'énergie du système dans l'état $|\psi\rangle$ donnée par :

$$\langle H \rangle = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} . \quad (\text{I-42})$$

Si on remplace $|\psi\rangle$ par son expression nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle &= \sum_n E_n |\langle \varphi_n | \psi \rangle|^2 \geq E_0 \sum_n |\langle \varphi_n | \psi \rangle|^2 \\ &= E_0 \langle \psi | \psi \rangle . \end{aligned} \quad (\text{I-43})$$

La moyenne d'une série de nombre est plus grande que le plus petit des nombres de cette série où E_0 est la valeur propre la plus petite de H , donc :

$$\langle H \rangle = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \geq E_0 , \quad (\text{I-44})$$

qui désigne que quel que soit le choix de l'état $|\psi\rangle$, la valeur moyenne de l'énergie est toujours supérieure ou égale à l'énergie de l'état fondamental.

5-2-3-La méthode de Nikiforov-Uvarov(N-U)

En général, l'équation de Schrödinger qui peut être obtenue avec différents potentiels prend la forme suivante [29]:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{s^2(1 - \alpha_3 s)^2} \right] \psi = 0 \quad (\text{I-45})$$

Pour $\alpha_3 \neq 0$, la solution de l'équation (I-45) est donnée par :

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{\left(\alpha_{10} - 1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10} - 1\right)} (1 - 2\alpha_3 s) \quad (\text{I-46})$$

où $P_n^{(\alpha, \beta)}(s)$ est le polynôme de Jacobi.

Le spectre de l'énergie est obtenu a partir de l'équation :

$$\alpha_2 n - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3 \alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0 \quad (\text{I-47})$$

Pour $\alpha_3 = 0$, la solution devient:

$$\psi = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13}s} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s) \quad (\text{I-48})$$

où $L_n^\alpha(s)$ est le polynôme de Laguerre.

Les paramètres α_i sont donnés par :

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1) \quad (\text{I-49})$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3) \quad (\text{I-50})$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1 \quad (\text{I-51})$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4 \alpha_5 - \xi_2 \quad (\text{I-52})$$

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3 \quad (\text{I-53})$$

$$\alpha_9 = \alpha_3 \alpha_7 + \alpha_3^2 \alpha_8 + \alpha_6 \quad (\text{I-54})$$

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8} \quad (\text{I-55})$$

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) \quad (\text{I-56})$$

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8} \quad (\text{I-57})$$

et

$$\alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) \quad (\text{I-58})$$

6-2 Les méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps

Il ya deux méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps : les méthodes exactes et les méthodes approximatives.

a-Méthodes exactes

a.1-Transformations unitaires

Il est important de se rappeler que pour décrire l'évolution du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ dans l'espace de Hilbert, on doit choisir un système d'axes ou un référentiel.

Le choix de référentiel n'a pas de raison d'être unique, c'est-à-dire que l'on est libre de passer à un autre système d'axes. Chaque fois que l'on change de référentiel, on change de point de vue et par conséquent on observe le système physique sous un angle différent. En pratique, pour passer d'un référentiel à un autre, on utilise des opérateurs unitaires U qui peuvent être indépendants ou dépendants du temps et qui satisfont la condition [30]:

$$U^+U = UU^+ = 1 \quad (\text{I-59})$$

où U^+ est l'opérateur adjoint de U . Généralement, pour un Hamiltonien dépendant du temps, on utilise des opérateurs unitaires dépendants du temps qui transforment le vecteur d'état de la façon suivante :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = U^{-1}|\psi(t)\rangle \quad (\text{I-60})$$

Dans le nouveau référentiel, le nouvel Hamiltonien s'écrit :

$$\tilde{H}(t) = U(t)^{-1}H(t)U(t) - i\hbar U(t)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}U(t) \quad (\text{I-61})$$

a.2- L'opérateur d'évolution

Du fait de la correspondance linéaire entre $|\psi(t_0)\rangle$ et $|\psi(t)\rangle$, il existe un opérateur linéaire $U(t, t_0)$ tel que:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (\text{I-62})$$

Dans le cas particulièrement simple où l'Hamiltonien H du système ne dépend pas du temps, l'opérateur $U(t, t_0)$ a une forme simple:

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \quad (\text{I-63})$$

Effectivement, en prenant la dérivée partielle par rapport au temps de la fonction (I-64) on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = HU(t, t_0) \quad (\text{I-64})$$

On note que l'équation (I-64) présente le même degré de difficulté que l'équation de Schrödinger, mais elle présente plus d'avantage lors de l'utilisation des méthodes d'approximation. L'opérateur

d'évolution total peut être ainsi décomposé en un produit d'opérateurs d'évolutions temporelles infinitésimales :

$$U(t, t_0) = U(t, t_k)U(t_k, t_{k-1}) \dots \dots \dots U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) \quad (\text{I-65})$$

On peut choisir t_0, t_1, \dots, t_k de telle sorte que les intervalles entre eux soient égaux. Donc $U(t, t_0)$ peut s'écrire :

$$U(t, t_0) = \prod_{i=1}^N U_i(t_i, t_i - \Delta t) \quad (\text{I-66})$$

a-3- Changement de représentation

Il est possible d'utiliser une nouvelle représentation appelé la représentation de Heisenberg. Dans cette représentation la dépendance par rapport au temps est transférée des vecteurs d'états aux observables. Bien entendu l'évolution du système ne peut plus être décrite à partir de la fonction d'onde, ce qui nous conduit à une équation d'évolution des opérateurs (A_H opérateur quelconque écrit en description de Heisenberg),

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = [A_H(t), H(t)] + i\hbar \left(\frac{d}{dt} A_S(t) \right)_H \quad (\text{I-67})$$

La représentation d'interaction semble être une description intermédiaire entre la description de Schrödinger et celle de Heisenberg. Ces représentations sont strictement équivalentes, mais leur utilité réside dans le fait que certaines propriétés quantiques sont plus immédiatement apparentes dans l'une que dans l'autre.

b- Méthodes approximatives

On peut citer :

b-1-La théorie de perturbation

L'idée générale de la méthode est de dégager les effets principaux qui rendent compte globalement du comportement du système, et ensuite de détailler certaines quantités qui découlent d'effets secondaires moins importants [25].

Donc l'Hamiltonien du système s'écrit :

$$H(t) = H_0(t) + \lambda W(t) \quad (\text{I-68})$$

où $H_0(t)$ est un Hamiltonien d'une équation de Schrödinger que l'on sait intégrer exactement et $W(t)$ une fonction quelconque et λ vérifie: $\lambda \ll 1$.

Il est montré que l'opérateur d'évolution vérifie l'équation suivante:

$$U(t, t_0) = U^{(0)}(t, t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0) \quad (\text{I-69})$$

avec : $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$, et $U^{(0)}(t, t_0)$ est la solution de l'équation non perturbée.

avec la condition initiale : $U^{(0)}(t, t_0) = 1$ et les $U^{(n)}(t, t_0), \forall n \geq 1$ sont donnés par :

$$U^{(n)}(t, t_0) = (i\hbar)^{-n} \lambda^n \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_1 U^0(t, t_n) W(t_n) U^0(t_n, t_{n-1}) W(t_{n-1}) \dots U^0(t_2, t_1) W(t_1) U^0(t_1, t_0) \quad (\text{I-70})$$

b-2-La méthode variationnelle

Cette méthode s'appuie sur le théorème de Ritz, qui stipule que la valeur moyenne de l'Hamiltonien calculée par rapport à une fonction d'onde $|\Psi(t)\rangle$, c'est-à-dire :

$$\langle H(t) \rangle = \frac{\langle \Psi(t) | H(t) | \Psi(t) \rangle}{\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle} \quad (\text{I-71})$$

est stationnaire si elle avoisine l'une de ces valeurs propres. Alors, pour trouver les valeurs propres de l'Hamiltonien on choisit une fonction d'essai appropriée dépendante d'un certain paramètre, et en variant par rapport au paramètre les valeurs propres de l'Hamiltonien correspondent aux valeurs α_i pour lesquelles la valeur moyenne est extrémale [12].

b-3-L'approximation soudaine

Supposant que le système est soumis à un champ extérieur pendant un intervalle de temps, on appelle approximation soudaine, l'approximation appliquée dans le cas limite $T \rightarrow 0$, elle s'énonce comme suit [22] :

« ... A la limite où $T \rightarrow 0$, c'est-à-dire dans le cas du passage infiniment rapide, l'état dynamique du système reste inchangé ... ».

$$\lim_{T \rightarrow 0} U(T + t_0, t_0) = 1 \quad (\text{I-72})$$

b-4-L'approximation adiabatique

Dans l'autre cas extrême où l'hamiltonien du système varie lentement avec le temps, c'est-à-dire $T \rightarrow \infty$; on parle de l'une des méthodes les plus puissantes en mécanique quantique : l'approximation adiabatique. Parmi l'une des résultats de ces applications dans la solution de

l'équation de Schrödinger dépendante du temps : la phase de Berry où phase géométrique. À travers ce dernier on peut donner aux lecteurs une interprétation sur le rôle de l'approximation adiabatique dans la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps.

c -La méthode des invariants

1-Introduction

Parmi les méthodes les plus puissantes et qui donnent des solutions exactes de l'équation de Schrödinger dépendante du temps, nous avons la méthode des invariants.

2- La solution de l'équation de Schrödinger

On considère l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad (\text{I-73})$$

où H est l'Hamiltonien du système.

La solution générale de l'équation de Schrödinger est les états propres de l'invariant multiplié par un facteur de phase dépendant du temps [18,19] :

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{i\alpha_\lambda(t)} \varphi_\lambda(\vec{r}, t) \quad (\text{I-74})$$

avec

$$I \varphi_\lambda(\vec{r}, t) = \lambda \varphi_\lambda(\vec{r}, t) \quad (\text{I-75})$$

λ est constant.

Et I vérifie les deux relations suivantes :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0 \quad (\text{I-76})$$

$$I^+(t) = I(t) \quad (\text{I-77})$$

2-1-Le choix d'invariant

- ✓ L'une des méthodes les plus simple pour déterminer l'invariant dynamique est l'utilisation de l'algèbre de Lie. Supposons que l'Hamiltonien $H(t)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des générateurs (T_1, T_2, \dots, T_n) d'une algèbre de Lie fermée sous la forme

$$H(t) = \sum_i^n \alpha_i(t) T_i \quad (\text{I-78})$$

En cherchant l'invariant $I(t)$ qui se décompose complètement sur cette algèbre. Choisissons alors $I(t)$ sous la forme

$$I(t) = \sum_i^n \beta_i(t) T_i \quad (\text{I-79})$$

- ✓ Si l'hamiltonien n'est pas combinaison linéaire des générateurs de l'algèbre de Lie, l'invariant contient généralement les termes de l'Hamiltonien.

CHAPITRE II

OSCILLATEUR HARMONIQUE

DÉPENDANT DU TEMPS

Oscillateur harmonique dépendant du temps

1. Introduction

L'oscillateur harmonique est d'une importance fondamentale en physique, car un modèle utilisé dans de nombreux domaines tels que l'électricité, l'électronique, l'optique et la matière condensée et aussi il est considéré comme très important en théorie quantique, car il intervient dans tous les problèmes impliquant des oscillations quantiques, telles que les vibrations moléculaires et cristallines, et c'est aussi un système simple que nous savons parfaitement résoudre l'équation de Schrödinger.

2. Oscillateur harmonique avec masse et fréquence variables

Dans cette partie, nous proposons de résoudre l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique dont la masse et la fréquence varient avec le temps. Pour résoudre l'équation de Schrödinger, on utilise la méthode des invariants. La méthode des invariants introduite par Lewis et Riesenfeld [18,19] fournit une méthode typique et puissante pour étudier ce système. L'intérêt principal de ce problème est qu'il peut être vu comme un modèle exactement soluble, et offre de multiples applications dans la description des systèmes physiques dans différents domaines de la physique.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[\frac{p^2}{2M(t)} + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) x^2 \right] \psi(x, t) \quad (\text{II-1})$$

avec:

$$H = \frac{p^2}{2M(t)} + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) x^2 \quad (\text{II-2})$$

où H est l'hamiltonien du système, c'est un opérateur auto-adjoint explicitement dépendant du temps .

Où x est une coordonnée canonique et $p = -i \frac{\partial}{\partial x}$ est l'opérateur de l'impulsion.

Les équations canoniques du mouvement sont :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{i\hbar} [x, H] = \frac{1}{M(t)} p \quad (\text{II-3})$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{i\hbar} [p, H] = -M(t) \omega^2(t) x \quad (\text{II-4})$$

Pour résoudre l'équation (1), on construit un invariant du système décrit par l'Hamiltonien dépendant du temps, on utilise l'approche algébrique (algèbre de Lie) [18, 19,31] ; soit la base hermitienne suivante :

$$T_1 = \frac{1}{2}p^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}\{p, x\}, \quad T_3 = \frac{1}{2}x^2, \quad (\text{II-5})$$

avec les relations de commutation

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_1, \quad [T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \quad [T_1, T_3] = -i\hbar T_2. \quad (\text{II-6})$$

On va donc essayer de trouver l'invariant I qui se décompose complètement dans cette algèbre de Lie. On prend alors I de la forme :

$$I(t) = \sum_{r=1}^3 \beta_r(t) T_r \quad (\text{II-7})$$

où les $\beta_r(t)$ sont des fonctions réelles de temps. Cela veut dire qu'on peut introduire la forme générale de nos invariant:

$$I(t) = \beta_1(t)T_1 + \beta_2(t)T_2 + \beta_3(t)T_3 \quad (\text{II-8})$$

En calculant les coefficients $\beta_r(t)$ qui doivent vérifier:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1(t) &= -\frac{2}{M}\beta_2(t) \\ \dot{\beta}_2(t) &= M\omega^2\beta_1(t) - \frac{\beta_3(t)}{M} \\ \dot{\beta}_3(t) &= 2M\omega^2\beta_1(t) \end{aligned} \quad (\text{II-9})$$

Ce système peut être simplifié en posant $\beta_1 = \rho^2$ où ρ est la solution de l'équation auxiliaire suivante :

$$\ddot{\rho} + \frac{M}{M}\dot{\rho} + \omega^2\rho = \frac{1}{M^2\rho^3} \quad (\text{II-10})$$

En utilisant l'équation (9) on arrive à déterminer

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -M\rho\dot{\rho} \\ \beta_3 &= \frac{1}{\rho^2}(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2) \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

Ainsi, l'invariant s'écrit sous la forme :

$$I(t) = \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 p^2 - M \rho \dot{\rho} (px + xp) + \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) x^2 \right\} \quad (\text{II-12})$$

Le point clef pour obtenir les fonctions propres de $I(t)$, est d'utiliser la transformation unitaire suivante :

$$\phi'_n(x, t) = U \phi_n(x, t) \quad (\text{II-13})$$

avec:

$$U = \exp \left[-\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} x^2 \right] \quad (\text{II-14})$$

Sous cette transformation unitaire l'équation aux valeurs propres devient :

$$\hat{I} \phi'_n(x, t) = \lambda_n \phi'_n(x, t) \quad (\text{II-15})$$

et:

$$\hat{I} = UIU^+ = \frac{1}{2} \left[\rho^2 p^2 + \frac{x^2}{\rho^2} \right] \quad (\text{II-16})$$

En définissant la nouvelle variable $\sigma = \frac{x}{\rho}$, on peut écrire l'équation aux valeurs propres comme suit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2} \right] \varphi_n(\sigma) = \lambda_n \varphi_n(\sigma) \quad (\text{II-17})$$

avec:

$$\phi'_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi_n(\sigma) \quad (\text{II-18})$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ est introduit dans l'équation (18) pour garantir la condition de normalisation :

$$\int \phi_n'^*(x, t) \phi'_n(x, t) dx = \int \varphi_n^*(\sigma) \varphi_n(\sigma) d\sigma = 1 \quad (\text{II-19})$$

La solution de l'équation (17) est:

$$\varphi_n(\sigma) = \left[\frac{1}{n! 2^n \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2} \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \sigma \right] \quad (\text{II-20})$$

où $\lambda_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right)$, et H_n est le polynôme d'Hermite d'ordre n . Alors:

$$\phi_n(x, t) = U^+ \phi'_n(x, t) \quad (\text{II-21})$$

$$\phi_n(x, t) = \left[\frac{1}{n! 2^n \rho \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{1/2} \exp \left[\frac{iM}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M\rho^2} \right) x^2 \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \left(\frac{x}{\rho} \right) \right] \quad (\text{II-22})$$

Maintenant, il ne reste qu'à trouver la phase $\alpha_n(t)$:

$$\hbar \dot{\alpha}(t) = \langle \phi_n | (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H) | \phi_n \rangle \quad (\text{II-23})$$

On a: $|\phi_n \rangle = U^+ |\phi'_n \rangle$ et: $\langle \phi_n | = \langle \phi'_n | U$

Pour cela, on utilise la solution de l'équation de Schrödinger, puis on passe de $\phi_n(x, t)$ à $\phi'_n(x, t)$, on obtient :

$$\hbar \dot{\alpha}(t) = \langle \phi'_n | \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho} x \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{i}{M\rho^2} \right] | \phi'_n \rangle \quad (\text{II-24})$$

où, on a utilisé l'équation auxiliaire (10) pour éliminer ω^2 de H . Ensuite, en substituant l'équation (18) dans l'équation (24), on obtient :

$$\hbar \dot{\alpha}(t) = \langle \phi_n | \left[-\frac{i}{M\rho^2} \right] | \phi_n \rangle \quad (\text{II-25})$$

En utilisant l'équation (15) et la normalisation de ϕ_n on trouve :

$$\alpha(t) = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2} \quad (\text{II-26})$$

Enfin, la solution de l'équation de Schrödinger (1) pour notre système est sous la forme suivante :

$$\psi(x, t) = \sum_n C_n \left[\frac{1}{n! 2^n \rho \sqrt{\pi \hbar}} \right]^{1/2} \exp \left[\frac{iM}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M\rho^2} \right) x^2 - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2} \right] H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \left(\frac{x}{\rho} \right) \right] \quad (\text{II-27})$$

CHAPITRE III

DYNAMIQUE QUANTIQUE

D'UN OSCILLATEUR

HARMONIQUE

COUPLÉ DÉPENDANT

DU TEMPS À 2D

Dynamique quantique d'un oscillateur couplé dépendant du temps à 2D

1. Introduction

Notre objectif principal dans ce travail est d'étudier la dynamique d'un oscillateur couplé dépendant du temps à 2D avec les masses et les coefficients de couplage variant exponentiellement avec le temps. On utilisera la méthode des opérateurs invariants, pour traiter les systèmes hamiltoniens complexes variant avec le temps. La méthode est introduite par Lewis et Riesenfeld [18,19], et maintenant elle est devenue un outil très utile pour développer la théorie quantique pour le cas où l'hamiltonien du système dépend explicitement du temps. Une transformation unitaire sera également adoptée afin de simplifier le problème de quantification du système. Les fonctions d'onde exactes pour l'oscillateur couplé dépendant du temps seront dérivées en utilisant les fonctions propres de l'opérateur invariant.

2. L'invariant classique

Bien que nous soyons intéressés par l'étude de la dynamique quantique de l'oscillateur couplé dépendant du temps, il peut être instructif de voir l'opérateur invariant classique du système avant de procéder à l'étude quantique principale. Pour cette raison, voyons d'abord la quantité invariante classique comme une étape préliminaire. L'hamiltonien classique de l'oscillateur couplé dépendant du temps que nous considérons dans ce travail est de la forme

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1(t)} + \frac{p_2^2}{2m_2(t)} + \frac{1}{2}(c_1(t)X_1^2 + c_2(t)X_2^2 + c_3(t)X_1X_2), \quad (\text{III-1})$$

Les paramètres $m_1(t)$, $m_2(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$ et $c_3(t)$ sont des fonctions arbitraires du temps. Pour notre étude nous avons choisit ces paramètres comme suit

$$\begin{cases} m_1(t) = m_{01}e^{\delta t} \\ m_2(t) = m_{02}e^{\delta t} \\ c_1(t) = c_{01}e^{\delta t} \\ c_2(t) = c_{02}e^{\delta t} \\ c_3(t) = c_{03}e^{\delta t} \end{cases}, \quad (\text{III-2})$$

$m_{01}, m_{02}, c_{01}, c_{02}, c_{03}$ et δ sont des constants. Notant que la relation pour les crochets de Poisson entre les variables canoniques (X_i, P_i) dans l'espace de phase est donnée par :

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (\text{III-3})$$

$$\{X_i, X_j\} = \{P_i, P_j\} = 0, \quad (\text{III-4})$$

Par le choix de la formule explicite des paramètres dépendant du temps, l'Hamiltonien de l'équation. (1) peut être utilisé pour décrire différents systèmes réels [32,33].

D'une part, un système oscillatoire couplé obéissant à une géométrie non commutative également été étudié au moyen de ce hamiltonien [34]. A partir des relations de base $\dot{X}_i = \partial H / \partial P_i$ et $\dot{P}_i = -\partial H / \partial X_i$, on peut facilement déduire les équations classiques du mouvement comme

$$\begin{cases} m_{01}\ddot{X}_1 + \delta m_{01}\dot{X}_1 + c_{01}X_1 + \frac{1}{2}c_{03}X_2 = 0 \\ m_{02}\ddot{X}_2 + \delta m_{02}\dot{X}_2 + c_{02}X_2 + \frac{1}{2}c_{03}X_1 = 0' \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

Pour trouver l'opérateur invariant classique du système, supposons que sa formule soit de la forme

$$I(t) = \frac{1}{2}\alpha_1(t)P_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2(t)P_2^2 + \beta_1(t)X_1P_1 + \beta_2(t)X_2P_2 + \frac{1}{2}\gamma_1(t)X_1^2 + \frac{1}{2}\gamma_2(t)X_2^2 + \frac{1}{2}\eta(t)X_1X_2 \quad (\text{III-6})$$

où $\alpha_i(t), \beta_i(t), \gamma_i(t)$ ($i = 1, 2$) et $\eta(t)$ sont des fonctions réelles dérivables de t , qui seront déterminées ultérieurement. Pour dériver les fonctions dépendantes du temps de $I(t)$, nous utilisons la condition que la dérivée totale temporelle de $I(t)$ soit nulle

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial I}{\partial X_i} \frac{\partial H}{\partial P_i} - \frac{\partial I}{\partial P_i} \frac{\partial H}{\partial X_i} \right] = 0 \quad (\text{III-7})$$

En insérant les Eqs. (1) et (6) dans l'équation. (7), on obtient les équations différentielles couplées pour $\alpha_i(t), \beta_i(t), \gamma_i(t)$ et $\eta(t)$ comme

$$\dot{\alpha}_1(t) = -\frac{2\beta_1(t)}{m_{01}}e^{-\delta t} \quad (\text{III-8})$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = -\frac{2\beta_2(t)}{m_{02}}e^{-\delta t} \quad (\text{III-9})$$

$$\dot{\beta}_1(t) = 2c_{01}e^{\delta t}\alpha_1(t) - \frac{\gamma_1(t)}{m_{01}}e^{-\delta t} \quad (\text{III-10})$$

$$\dot{\beta}_2(t) = 2c_{02}e^{\delta t}\alpha_2(t) - \frac{\gamma_2(t)}{m_{02}}e^{-\delta t} \quad (\text{III-11})$$

$$\dot{\gamma}_1(t) = 2c_{01}e^{\delta t}\beta_1(t) \quad (\text{III-12})$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = 2c_{02}e^{\delta t}\beta_2(t) \quad (\text{III-13})$$

$$\dot{\eta}(t) = c_{03}e^{\delta t}[\beta_1(t) + \beta_2(t)] \quad (\text{III-14})$$

En résolvant les équations couplées ci-dessus, on trouve

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{m_{01}}e^{-\delta t} \quad (\text{III-15})$$

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{m_{02}}e^{-\delta t} \quad (\text{III-16})$$

$$\beta_1(t) = \frac{\delta}{2} \quad (\text{III-17})$$

$$\beta_2(t) = \frac{\delta}{2} \quad (\text{III-18})$$

$$\gamma_1(t) = c_{01}(e^{\delta t} - 1) \quad (\text{III-19})$$

$$\gamma_2(t) = c_{02}(e^{\delta t} - 1) \quad (\text{III-20})$$

$$\eta(t) = c_{03}(e^{\delta t} - 1) \quad (\text{III-21})$$

Nous avons choisit les paramètres $\alpha_{01}, \alpha_{02}, \beta_{01}, \beta_{02}, \gamma_{01}, \gamma_{02}$ et η_0 égaux à zéro.

De la substitution de ces résultats dans l'Eq. (6), nous obtenons la quantité invariante comme suit :

$$I(t) = \frac{1}{2} \frac{e^{-\delta t}}{m_{01}} P_1^2 + \frac{1}{2} \frac{e^{-\delta t}}{m_{02}} P_2^2 + \frac{\delta}{2} X_1 P_1 + \frac{\delta}{2} X_2 P_2 + \frac{1}{2} c_{01} (e^{\delta t} - 1) X_1^2 + \frac{1}{2} c_{02} (e^{\delta t} - 1) X_2^2 + \frac{1}{2} c_{03} (e^{\delta t} - 1) X_1 X_2 \quad (\text{III-22})$$

Ceci est non seulement utile dans l'analyse dynamique dans le domaine classique [35], mais également étroitement lié à la dynamique quantique du système.

3. Opérateur d'invariant quantique

Sur la base du développement de la section précédente, il est maintenant simple d'obtenir l'invariant quantique du système. En remplaçant les variables canoniques dans l'invariant classique du système par les opérateurs quantiques correspondants, on obtient l'opérateur invariant quantique, tel que

$$I(t) = \frac{1}{2} \frac{e^{-\delta t}}{m_{01}} \hat{P}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{e^{-\delta t}}{m_{02}} \hat{P}_2^2 + \frac{\delta}{4} (\hat{X}_1 \hat{P}_1 + \hat{P}_1 \hat{X}_1) + \frac{\delta}{4} (\hat{X}_2 \hat{P}_2 + \hat{P}_2 \hat{X}_2) + \frac{1}{2} c_{01} (e^{\delta t} - 1) \hat{X}_1^2 + \frac{1}{2} c_{02} (e^{\delta t} - 1) \hat{X}_2^2 + \frac{1}{2} c_{03} (e^{\delta t} - 1) \hat{X}_1 \hat{X}_2 \quad (\text{III-23})$$

Utilisation des relations de commutation dans le domaine quantique

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_i] = i\hbar \delta_{ij} (i, j = 1, 2) \quad (\text{III-24})$$

on vérifie facilement que l'invariant satisfait l'équation de Liouville-von Neumann de la forme

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{I}, \hat{H}] = 0 \quad (\text{III-25})$$

Concernant l'étude des valeurs propres et des états propres du système, on peut adopter une méthode algébrique liée à l'opérateur quantique \hat{I} . Grâce à cela, il peut être possible d'obtenir les solutions quantiques et d'élucider les propriétés quantiques principales du système.

Afin d'obtenir les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur invariant, il est utile que nous réexprimions l'Eq. (23) en termes des opérateurs de création et d'annihilation. Pour ce faire, nous définissons les opérateurs d'annihilation \hat{a}_i et de création \hat{a}_i^+ canoniques dépendants du temps, respectivement, comme

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_1}} \left\{ \omega_1 \sqrt{m_{01}} e^{\frac{\delta t}{2}} \left(\hat{X}_1 \cos \frac{\theta}{2} - \hat{X}_2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{i}{\sqrt{m_{01}}} e^{-\frac{\delta t}{2}} \left[\left(\hat{P}_1 + \frac{\delta}{2} \hat{X}_1 \right) \cos \frac{\theta}{2} - \left(\hat{P}_2 + \frac{\delta}{2} \hat{X}_2 \right) \sin \frac{\theta}{2} \right] \right\} \quad (\text{III-26})$$

$$\hat{a}_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_1}} \left\{ \omega_1 \sqrt{m_{01}} e^{\frac{\delta t}{2}} \left(\hat{X}_1 \cos \frac{\theta}{2} - \hat{X}_2 \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{i}{\sqrt{m_{01}}} e^{-\frac{\delta t}{2}} \left[\left(\hat{P}_1 + \frac{\delta}{2} \hat{X}_1 \right) \cos \frac{\theta}{2} - \left(\hat{P}_2 + \frac{\delta}{2} \hat{X}_2 \right) \sin \frac{\theta}{2} \right] \right\} \quad (\text{III-27})$$

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_2}} \left\{ \omega_2 \sqrt{m_{02}} e^{\frac{\delta t}{2}} \left(\hat{X}_1 \cos \frac{\theta}{2} + \hat{X}_2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{i}{\sqrt{m_{02}}} e^{-\frac{\delta t}{2}} \left[\left(\hat{P}_1 + \frac{\delta}{2} \hat{X}_1 \right) \cos \frac{\theta}{2} + \left(\hat{P}_2 + \frac{\delta}{2} \hat{X}_2 \right) \sin \frac{\theta}{2} \right] \right\} \quad (\text{III-28})$$

$$\hat{a}_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_2}} \left\{ \omega_2 \sqrt{m_{02}} e^{\frac{\delta t}{2}} \left(\hat{X}_1 \cos \frac{\theta}{2} + \hat{X}_2 \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{i}{\sqrt{m_{02}}} e^{-\frac{\delta t}{2}} \left[\left(\hat{P}_1 + \frac{\delta}{2} \hat{X}_1 \right) \cos \frac{\theta}{2} + \left(\hat{P}_2 + \frac{\delta}{2} \hat{X}_2 \right) \sin \frac{\theta}{2} \right] \right\} \quad (\text{III-29})$$

Où ω_1 et ω_2 sont les fréquences modifiées qui sont données par

$$\omega_1^2 = \left(\frac{c_{01}}{m_{01}} \frac{e^{\delta t} - 1}{e^{\delta t}} - \frac{\delta^2}{4} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{c_{02}}{m_{02}} \frac{e^{\delta t} - 1}{e^{\delta t}} - \frac{\delta^2}{4} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{c_{03}(e^{\delta t} - 1)}{2\sqrt{m_{01}m_{02}}e^{\delta t}} \sin \theta \quad (\text{III-30})$$

$$\omega_2^2 = \left(\frac{c_{01}}{m_{01}} \frac{e^{\delta t} - 1}{e^{\delta t}} - \frac{\delta^2}{4} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{c_{02}}{m_{02}} \frac{e^{\delta t} - 1}{e^{\delta t}} - \frac{\delta^2}{4} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{c_{03}(e^{\delta t} - 1)}{2\sqrt{m_{01}m_{02}}e^{\delta t}} \sin \theta \quad (\text{III-31})$$

avec

$$\tan \theta = \frac{c_{03}}{2\sqrt{m_{01}m_{02}} \left[\frac{c_{01}}{m_{01}} - \frac{c_{02}}{m_{02}} \right]} \quad (\text{III-32})$$

Notant que les opérateurs, \hat{a}_i et \hat{a}_i^+ , obéissent aux propriétés habituelles des opérateur de création et d'annihilation, y compris la règle de commutation canonique du boson:

$$[\hat{a}_1, a_1^+] = 1 \quad (\text{III-33})$$

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_2] = 1 \quad (\text{III-34})$$

Maintenant l'opérateur invariant, Eq. (23), peut être réécrit en termes de \hat{a}_i et \hat{a}_i^+ comme

$$\hat{I}(t) = \hbar\omega_1 \left(\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(\hat{a}_2^+ \hat{a}_2 + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{III-35})$$

Ainsi, nous avons découplé l'opérateur invariant associé au système original à un couplage final. Ce découplage peut être très utile pour déplier la théorie quantique du système.

4-Valeurs propres et fonctions d'onde

Selon l'Eq. (35) qui est représenté en termes d'opérateurs numériques (opérateurs de nombre de particules), le les états propres de l'opérateur invariant sont les mêmes que les états propres, $|n_1, n_2, t\rangle$ de $\hat{a}_1^+ \hat{a}_1$ et de $\hat{a}_2^+ \hat{a}_2$, qui suient les relations

$$\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 |n_1, n_2, t\rangle = n_1 |n_1, n_2, t\rangle \quad (\text{III-36})$$

$$\hat{a}_2^+ \hat{a}_2 |n_1, n_2, t\rangle = n_2 |n_1, n_2, t\rangle \quad (\text{III-37})$$

À partir de l'état du point zéro, nous avons facilement les états normalisés:

$$|n_1 n_2 t\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} (\hat{a}_1^+)^{n_1} (\hat{a}_2^+)^{n_2} |0, 0, t\rangle \quad (\text{III-38})$$

$$\langle n_1, n_2, t | \hat{n}_1, \hat{n}_2, t \rangle = \delta_{n_1 \hat{n}_1} \delta_{n_2 \hat{n}_2} \quad (\text{III-39})$$

Sur cette base, le spectre de valeurs propres de \hat{I} peut s'écrire sous la forme

$$\lambda_{n_1, n_2} = \hbar \omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{III-40})$$

Maintenant, pour simplifier le problème, nous introduisons une transformation linéaire d'opérateurs canoniques (\hat{X}_i, \hat{P}_i) en un nouvel ensemble de variables $(\hat{Q}_i, \hat{\pi}_i)$, tel que

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{pmatrix} = e^{-\frac{\delta t}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_{01}}} \cos \frac{\theta(t)}{2} & \frac{1}{\sqrt{m_{02}}} \sin \frac{\theta(t)}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{m_{01}}} \sin \frac{\theta(t)}{2} & \frac{1}{\sqrt{m_{02}}} \cos \frac{\theta(t)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-41})$$

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \end{pmatrix} = e^{\frac{\delta t}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{m_{01}} \cos \frac{\theta(t)}{2} & \sqrt{m_{02}} \sin \frac{\theta(t)}{2} \\ -\sqrt{m_{01}} \sin \frac{\theta(t)}{2} & \sqrt{m_{02}} \cos \frac{\theta(t)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\pi}_1 \\ \hat{\pi}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-42})$$

Ensuite, nous pouvons exprimer les équations. (26)-(29) sous des formes simples en termes de \hat{Q}_i et $\hat{\pi}_i$ comme

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_1(t)}} [\omega_1(t)\hat{Q}_1 + i\hat{\pi}_1] \quad (\text{III-43})$$

$$\hat{a}_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_1(t)}} [\omega_1(t)\hat{Q}_1 - i\hat{\pi}_1] \quad (\text{III-44})$$

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_2(t)}} [\omega_2(t)\hat{Q}_2 + i\hat{\pi}_2] \quad (\text{III-45})$$

$$\hat{a}_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_2(t)}} [\omega_2(t)\hat{Q}_2 - i\hat{\pi}_2] \quad (\text{III-46})$$

Les fonctions d'onde dans la représentation \hat{X} , $|\bar{\psi}_{n_1, n_2}(t)\rangle$, sont liées à celles en représentation \hat{Q} par la relation unitaire de la forme

$$|\Psi_{n_1, n_2}(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi_{n_1, n_2}(t)\rangle \quad (\text{III-47})$$

Où \hat{U} est un opérateur unitaire dépendant du temps, qui est donné par

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_1(t)\hat{U}_2(t)\hat{U}_3(t)\hat{U}_4(t) \quad (\text{III-48})$$

avec

$$\hat{U}_1(t) = \exp\left[\frac{i}{2\hbar}(\hat{P}_1\hat{X}_1 + \hat{X}_1\hat{P}_1)\ln\left(\frac{m_{01}}{m_{02}}\right)^{1/4}\right] \times \exp\left[\frac{i}{2\hbar}(\hat{P}_2\hat{X}_2 + \hat{X}_2\hat{P}_2)\ln\left(\frac{m_{02}}{m_{01}}\right)^{1/4}\right] \quad (\text{III-49})$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_2(t) = \exp\left[\frac{i}{2\hbar}(\hat{P}_1\hat{X}_1 + \hat{X}_1\hat{P}_1)\ln(m_{01}m_{02}e^{2\delta t})^{1/4}\right] \\ \times \exp\left[\frac{i}{2\hbar}(\hat{P}_2\hat{X}_2 + \hat{X}_2\hat{P}_2)\ln((m_{01}m_{02}e^{2\delta t}))^{1/4}\right] \end{aligned}$$

(III-50)

$$\hat{U}_3(t) = \exp\left[-\frac{i\theta}{2\hbar}(\hat{P}_2\hat{X}_1 - \hat{P}_1\hat{X}_2)\right] \quad (\text{III-51})$$

$$\hat{U}_4(t) = \exp\left[-\frac{i\delta}{4\hbar}(\hat{X}_1^2 + \hat{X}_2^2)\right] \quad (\text{III-52})$$

notant que $\hat{U}_1(t)$ et $\hat{U}_2(t)$ dans Eqs. (49) et (50) sont les opérateurs de compression, alors que $\hat{U}_3(t)$ dans Eq. (51) l'opérateur de rotation caractérisé par l'angle variable avec le temps $\theta(t)$.

La solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial|\psi_{n_1, n_2}(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi_{n_1, n_2}(t)\rangle \quad (\text{III-53})$$

peut être écrit comme

$$|\psi_{n_1, n_2}(t)\rangle = e^{i\alpha_{n_1, n_2}(t)}|n_1, n_2, t\rangle \quad (\text{III-54})$$

où l'évolution de la phase $\alpha_{n_1, n_2}(t)$ satisfait l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_{n_1, n_2}(t) = \frac{1}{\hbar} \left\langle n_1, n_2, t \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right| n_1, n_2, t \right\rangle \quad (\text{III-55})$$

En résolvant l'Eq. (55) dans l'espace de configuration, on peut facilement confirmer que les phases sont données par

$$\alpha_{n_1, n_2}(t) = \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) \omega_1 t + \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \omega_2 t \quad (\text{III-56})$$

La dynamique quantique du système oscillatoire couplé variant avec le temps, décrite jusqu'à présent, peut être largement utilisée pour caractériser les propriétés quantiques pour divers systèmes physiques associés.

5. Application

Dans cette section, nous appliquons la théorie quantique du système pour évaluer les fluctuations et les produits d'incertitude pertinents, et montrer que les résultats correspondent à ceux connus précédemment.

Les fluctuations de la paire de variables de position et des variables de moment conjugué canoniques du système peuvent être définies respectivement comme

$$(\Delta \hat{X}_i) = \langle \psi_{n_1, n_2}(t) | \hat{X}_i^2 | \psi_{n_1, n_2}(t) \rangle - (\langle \psi_{n_1, n_2}(t) | \hat{X}_i | \psi_{n_1, n_2}(t) \rangle)^2 \quad (\text{III-57})$$

$$(\Delta \hat{P}_i) = \langle \psi_{n_1, n_2}(t) | \hat{P}_i^2 | \psi_{n_1, n_2}(t) \rangle - (\langle \psi_{n_1, n_2}(t) | \hat{P}_i | \psi_{n_1, n_2}(t) \rangle)^2 \quad (\text{III-58})$$

pour simplification, on s'intéresse au cas de l'état fondamental, où $n_1 = n_2 = 0$.

Nous avons alors pu évaluer les équations. (57) et (58) en utilisant l'Eq. (47), conduisant à

$$(\Delta \hat{X}_1)^2 = \frac{e^{-\delta t}}{m_{01}} \left(\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\omega_1} + \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\omega_2} \right) \frac{\hbar}{2} \quad (\text{III-59})$$

$$(\Delta \hat{X}_2)^2 = \frac{e^{-\delta t}}{m_{02}} \left(\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\omega_1} + \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\omega_2} \right) \frac{\hbar}{2} \quad (\text{III-60})$$

$$(\Delta\hat{P}_1)^2 = m_{01}e^{\delta t} \left[\omega_1 \left(1 + \frac{\delta^2}{4\omega_1^2} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \omega_2 \left(1 + \frac{\delta^2}{4\omega_2^2} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \frac{\hbar}{2} \quad (\text{III-61})$$

$$(\Delta\hat{P}_2)^2 = m_{02}e^{\delta t} \left[\omega_1 \left(1 + \frac{\delta^2}{4\omega_1^2} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \omega_2 \left(1 + \frac{\delta^2}{4\omega_2^2} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \frac{\hbar}{2} \quad (\text{III-62})$$

Pour les équations au dessus, on obtient les produits d'incertitude comme

$$(\Delta\hat{X}_1)^2(\Delta\hat{P}_1)^2 = \left[\left(1 + \frac{\delta^2}{4\omega_1^2} \right) \cos^4 \frac{\theta}{2} + \omega_2 \left(1 + \frac{\delta^2}{4\omega_2^2} \right) \sin^4 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\delta^2}{2\omega_1\omega_2} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \frac{\hbar^2}{4} \quad (\text{III-63})$$

$$(\Delta\hat{X}_2)^2(\Delta\hat{P}_2)^2 = \left[\left(1 + \frac{\delta^2}{4\omega_1^2} \right) \sin^4 \frac{\theta}{2} + \left(1 + \frac{\delta^2}{4\omega_2^2} \right) \cos^4 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\delta^2}{2\omega_1\omega_2} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \frac{\hbar^2}{4} \quad (\text{III-64})$$

Donc : $\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{P}_1 \geq \frac{\hbar}{2}$ et $\Delta\hat{X}_2\Delta\hat{P}_2 \geq \frac{\hbar}{2}$.

Nous voyons que les produits d'incertitude ci-dessus sont toujours plus grands que $\frac{\hbar}{2}$, qui est le produit d'incertitude minimal permise en mécanique quantique.

CONCLUSION

Conclusion

Nous avons étudié la dynamique quantique d'un oscillateur couplé dépendant du temps d'un système physique à partir de son hamiltonien sur la base de l'opérateur invariant méthode. L'opérateur invariant quantique du système a été obtenu et il a été montré qu'il obéit à l'équation de Liouville-Von-Neumann. Avec les opérateurs de création et d'annihilation, l'opérateur invariant est représenté comme une forme simple et conventionnelle qui est donnée par l'Eq. (35). Les fonctions propres de l'opérateur invariant quantique ont été dérivés dans l'état de Fock, sont identiques à ceux de $\hat{a}_i^+ \hat{a}_i$. Nous avons mis en place un opérateur de transformation unitaire qui relie les fonctions propres du système dépendant du temps à celles de l'oscillateur harmonique simple à 2D. Cet opérateur nous a permis de dériver les solutions quantiques du système par la relation de transformation unitaire. Les fonctions d'onde qui ont été obtenus ne diffèrent que par des phases dépendantes du temps, $\alpha_{n_1, n_2}(t)$, des fonctions propres de l'opérateur invariant quantique. Afin de montrer la validité de notre théorie quantique, nous l'avons appliquée à un cas simple où les masses et les coefficients de couplage varient de façon exponentielle avec le temps. Les produits d'incertitude du point zéro dans ce cas ont été obtenus, et nous avons confirmé qu'ils satisfont non seulement aux relations d'incertitude minimale mais coïncident avec celles de la recherche précédente.

BILIOGRAPHIES

Bibliographies

- [1] Kim Y S, Noz M E and Oh S H, 1979 Am. J. Phys. 47(10) 892.
- [2] Han D, Kim Y S and Noz M E, 1989 Phys. Lett. A 144(3) 111.
- [3] Kim Y S and Wigner E P, 1990 Phys. Lett. A 147(7) 343.
- [4] Han D, Kim Y S and Noz M E, 1995 J. Math. Phys. 36(8) 3940.
- [5] Abdalla M S, 1996 J. Phys. A: Math. Gen. 29(9) 1997.
- [6] Benamira F and Ghechi L, , 2003 Czechoslovak J. Phys. 53(9) 717.
- [7] Zhang S, Choi J R, Um C I and Yeon K H, t, 2001 Phys. Lett. A 289(4-5) 257.
- [8] Zhang S, Choi J R, Um C I and Yeon K H, 2002 Phys. Lett. A 294(5-6) 319.
- [9] Gröblacher S, Hammerer K, Vanner M R and Aspelmeyer M, 2009 Nature 460(7256) 724 [10] van der Wiel WG, Nazarov Yu V, De Franceschi S, Fujisawa T, Elzerman J M, Huizeling E W G M, Tarucha S and Kouwenhoven L P, 2003 Phys. Rev. B 67(3) 033307.
- [11] Kennedy T A, Wagner R, McCombe B and Tsui D, 1975 Phys. Rev. Lett. 35(15) 1031.
- [12] Sadiék G, Lashin E I and Abdalla M S, 2009 Physica B: Condens. Matt. 404(12) 1719.
- [13] Choi J R, , 2003 J. Phys.: Condens. Matt. 15(6) 823.
- [14] Menouar S, Maamache M and Choi J R, , 2010. Phys. Scr. 82(6) 065004.
- [15] Menouar S, Maamache M and Choi J R, 2010 Ann. Phys. 325(8) 1708.
- [16] Menouar S and Choi J R, 2015 Ann. Phys. 353 307.
- [17] Laroze D and Rivera R, 2006 Phys. Lett. A 355(4-5) 348.
- [18] Lewis H R Jr, 1968 J. Math. Phys. 9(11) 1976.
- [19] Lewis H R Jr. and Riesenfeld W B, 1969 J. Math. Phys. 10(8) 1458.
- [20] Lewis H R Jr, 1967 Phys. Rev. Lett. 18(13) 510.
- [21] E. Schrödinger, "The non relativistic equation of the de Broglie waves," Ann. Physik79(1926)361.
- [22] L. Landau et E. Lifchitz, mécanique quantique, édition mir 1975.
- [23] Boucheriha.H.'Introduction à la physique quantique'.Centre de publication universitaire : Tunis.(2002).
- [24] A.Messiah, Mécanique Quantique T1 (Dunod,Paris,1995) nouvelle édition.
- [25] C.C. Tannoudji, B. Diu, F. Laloe-Mécanique Quantique-T1 et T2- Hermann, Paris, nouvelle édition revue, corrigée et augmentée 1977.
- [26] D. J. Griffiths – Introduction to Quantum Mechanics – Prentice Hall, Inc. Toronto (1995).
- [27] M. Born, The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics nobel Lecture, December 11, 1954.
- [28] H.Boucheriha.'Introduction à la physique quantique'. Centre de publication universitaire : Tunis.(2002).
- [29] C.Tezcan and R. Sever 2009, Int.J.Theor.Phys 48 337.
- [30] M. Wagner, Unitary transformations in solid- state physics, (Elsevier Science Publisher, New York, 1986).
- [31] M. Maamache 1995, Phys. Rev. A 52, 936.
- [32] Abdalla M S, Perina J and Krepelka J, 2006 J. Opt. Soc. Am. B 23(6) 1146.

[33] Bykov A A, Gusev G M, Leite J R, Bakarov A K, Goran A V, Kudryashev V M and Toropov A I, 2001 Phys. Rev. B 65(3) 035302.

[34] Olver P J, Théorie classique des invariants, Presses Universitaires de Cambridge, Cambridge, 1999.

[35] Borodzik M et Friedl S, 2015 Algèbre. Géom. Topol. 15(1) 85

Abstract

In this work the dynamical and quantum properties of a 2D time-dependent coupled oscillator are studied on the basis of the theory of dynamical invariants. By introducing two pairs of annihilation and creation operators, it is possible to decouple the original invariant operator so that it becomes the one that describes two independent subsystems. The eigenvalue problem of this decoupled quantum invariant can be solved using a unitary transformation approach. According this method, we finally obtain the eigenfunctions of the invariant operator and the wave functions of the system in the Fock state. The wave functions that we have developed are necessary to study the quantum characteristics of the system. In order to show the validity of our theory, we apply our consequences to the derivation of canonical variable fluctuations and uncertainty products for a 2D oscillatory system whose masses and coupling coefficients vary exponentially.

Keywords: time-dependent coupled oscillator; invariant theory; unitary transformation; wave function

Résumé

Dans ce travail les propriétés dynamiques et quantiques d'un oscillateur couplé dépendant du temps à 2D sont étudiées sur la base de la théorie des invariants dynamiques. En introduisant deux paires d'opérateurs d'annihilation et de création, il est possible de découpler l'opérateur invariant d'origine pour qu'il devienne celui qui décrit deux sous-systèmes indépendants. Le problème des valeurs propres de cet invariant quantique découplé peut être résolu en utilisant une approche de transformation unitaire. Grâce à cette procédure, nous obtenons finalement les fonctions propres de l'opérateur invariant et les fonctions d'onde du système dans l'état de Fock. Les fonctions d'onde que nous avons développées sont nécessaires pour étudier les caractéristiques quantiques du système. Afin de montrer la validité de notre théorie, nous appliquons nos conséquences à la dérivation des fluctuations des variables canoniques et des produits d'incertitude pour un système oscillatoire à 2D dont les masses et les coefficients de couplage varient de façon exponentielle.

Mots clés : l'oscillateur couplé dépendant du temps, théorie d'invariant, transformation unitaire, fonction d'onde.

المخلص

في هذا العمل تمت دراسة الخصائص الديناميكية و الكوانتية لمهتز مترابط ثنائي الأبعاد متعلق بالزمن على أساس نظرية اللامتغيرات الديناميكية. من خلال إدخال زوجين من مؤثرات الاندثار و التوليد فصلنا مؤثر اللامتغير الأصلي الى مؤثرين مستقلين. تم حل مشكلة القيم الذاتية لهذا المؤثر المنفصل باستخدام تقريب التحويل الوحدوي. بفضل هذه الطريقة، تحصلنا أخيراً على القيم الذاتية ودوال الموجة لهذا النظام في فضاء فوك. تعتبر الدوال الموجية التي قمنا بتطويرها ضرورية لدراسة الخصائص الكمومية لهذا للنظام. من أجل إظهار صحة نظريتنا، طبقنا نتائجنا في اشتقاق تأرجح المتغيرات القانونية ومبدأ الأرتياب لنظام اهتزازي ثنائي الأبعاد تتغير كتله ومعاملات الاقتران بشكل أسي.

الكلمات المفتاحية

المهتز المترابط متعلق بالزمن، نظرية اللامتغير، التحويل الوحدوي، دالة الموجة .