



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématiques et numérique

Thème

*Continuité de certaines équations intégrales de type
Hammerstein dans les espaces d'Orlicz*

Présentée par :

DJELALI Hafsa

Soutenu publiquement le: xx/xx/2021.

Devant le jury composé de:

Président:	<i>GASMI Abdelkader</i>	Prof,	Université de M'sila
Encadreur:	<i>GAGUI Bachir</i>	M.C.A,	Université de M'sila
Examineur:	<i>NADIR Mostefa</i>	Prof,	Université de M'sila

Année universitaire 2020/2021

Remerciement

Avant toutes choses, je remercie Allah, le tout puissant, pour m'avoir donné la force et la patience .

Je tiens à remercier particulièrement Dr. Bachir GAGUI pour son soutien scientifique,

ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, ses précieux conseils, mais aussi

ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude.

Je désire aussi remercier Dr. Bachir GAGUI encore une fois pour avoir répondu à mes questions.

Enfin, je remercie ma famille et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à

la réalisation de ce travail.

Dédicace

Merci Allah de m'avoir donné la capacité de surmonter les difficultés dans ma carrière d'étude.

Je dédie ce travail au symbole de la tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur, pour

ma mère , elle a toujours voulu atteindre et réussir.

A mon père , qui a été la cause de mon courage et qui a été mon ombre durant toutes les années de mes études.

A mes soeurs, A mes frères.

A mes amies :Nawal, Nour, khawla, Hind, Amina

A tous ceux que j'aime

Je dédie ce travail.

Résumé

Dans ce travail, on présente un mémoire étudié les problèmes non linéaires concernant un type dans le domaine des équations intégrales particulièrement les équations intégrales de type Hammerstein, dont la forme générale est la suivante

$$H\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y, \varphi(y))dy$$

où Ω est un ensemble mesurable et les fonctions $k(., .)$, $f(., .)$ sont connues.

On a étudié la continuité de l'opérateur de Hammerstein H dans les espace d'Orlicz, on utilisé la méthode de décomposition, telle que :

1. la continuité de Fredholm sur l'espace d'Orlicz
2. la continuité de l'opérateur de Nemytskij

Table des matières

Remerciement	3
Dédicace	4
Résumé	5
Introduction	1
1 Généralité sur les espaces fonctionnels	2
1.1 Généralité	2
1.1.1 Espaces complets	3
1.1.2 Espaces de Banach	4
1.2 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$	4
1.3 Espace de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}(\Omega)$	5
2 Espace d'Orlicz	7
2.1 N-fonction	7
2.2 Fonction complémentaire de N-fonction	8
2.3 La condition Δ_2	11
2.4 Modulaire d'Orlicz	11
2.5 Les classes des espace d'Orlicz	11
2.6 La norme d'Orlicz	12
2.7 Espace d'Orlicz	13
2.7.1 Espaces E^Φ	14
3 Continuité des opérateurs de type Hammerstein dans espace d'Orlicz	15
3.1 Equation intégrales	15
3.2 Equations intégrales linéaires :	15
3.3 Equations intégrales non-linéaires :	16
3.4 Opérateurs dans les espaces $L^{p(x)}(\Omega)$	17
3.5 4 Opérateurs linéaires dans $L_\Phi(\Omega)$	18
3.5.1 Opérateur Intégral	19
3.6 Conditions de continuité des opérateurs intégraux linéaires	19
3.7 Opérateur de Nemytskij	25
3.8 continuité de condition	25

3.9	continuité des opérateurs Nemytskij	27
3.9.1	Continuité des opérateurs de type Hammerstein dans espace d'Orlicz	28
	Conclusion	29
	Bibliographie	29

Notations

(Ω, Σ, μ)	Espace mesure de mesure μ
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue
$\ f\ _{\Phi}^{\circ}$	la norme sur d'Orlicz
Φ	fonction d'Orlicz
Ω_0	$= \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_{\infty})$
p_*	$= \text{ess inf}_{\Omega_0} p(x), p^* = \text{ess sup}_{\Omega_0} p(x)$
\acute{p}_i	conjugué de p_i , i.e., $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{\acute{p}_i} = 1$
Ω	ouvert borné de \mathbb{R}^N .
$\partial\Omega$	frontière de Ω
$ \Omega $	mesure de l'ensemble Ω
$ E $	mesure de l'ensemble E
\mathbb{R}^N	espace euclidien réel de dimension n .
p.p.	presque partout.
$\text{supp}(f)$	support de la fonction f .
$L^0(\Omega)$	L'espace de toutes les classes d'équivalence des fonctions à valeurs réelles mesurables
$L^{\Phi}(\Omega)$	$\{u : \text{fonction mesurable sur } \Omega \exists \lambda > 0 : \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx < +\infty\}$ muni de la norme de Luxemburg
$\ u\ _{\Phi}$	$= \ u\ _{L^{\Phi}(\Omega)} = \left\{ \lambda > 0 \mid \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$.
$\text{co}(F)$	Codimension de l'ensemble F .
EFB	Espace fonctionnel de Banach.
$P(\Omega)$	Ensemble des partitions des éléments.
A	Opérateur intégral.
H	Opérateur intégral de Hammerstein.
EI	Equation intégrale.
$EIFS$	Equation intégrale de Fredholm de deuxième espèce.
$EIVS$	Equation intégrale de Volterra de deuxième espèce.
EIL	Equation intégrale linéaire.
$EINL$	Equation intégrale non-linéaire

Introduction

Le cadre général de ce mémoire est l'analyse non linéaire dans les espaces fonctionnels, associés à la géométrie de ces espaces. Dans Ce travail on étudier des équations intégrales non linéaires de type Hammerstein

$$H\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, \varphi(y)),$$

où φ est la fonction inconnue, k est le noyau donné, f une fonction donné.

La notion continuité dans l'analyse fonctionnelle est propriété topologique importante, nous allons dans ce travail de montrer la continuité de l'opérateur de Hammerstein, cette démonstration se basée sur une technique dite de décomposition, i.e., on décompose l'opérateur H en deux opérateurs A et N , tels que

$$H = AN_f$$

où A est l'opérateur intégral linéaire de Fredholm

$$A(\varphi)(x) = \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy$$

et où N_f est l'opérateur non linéaire de Nemytskij associé à f

$$N_f(u)(x) = f(x, u(x)).$$

La continuité de l'opérateur de Nemytskij N_f se faite par une technique délicate dite linéarisation, c-à-d, on peut écrire l'opérateur de Nemytskij sous la forme d'près l'estimation suivante

$$|N_f(u)(x)| = |N_f(u)(x)| \leq C|u(x)| + b|x|$$

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

Le premier chapitre :est généralité sur les espaces fonctionnels et leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, on parle sur la construction topologique de l'espace d'Orlicz et leur géométrie (espace vectoriel, norme,...etc).

Le dernier on trouve la continuité des opérateurs de type Hammerstein dans espace d'Orlicz

Chapitre 1

Généralité sur les espaces fonctionnels

1.1 Généralité

Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou C , on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R} , telle que cette fonction vérifie les propriétés suivantes

1. Séparation

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2. Homogénéité

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in k$$

3. Inégalité Triangulaire

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

tout espace vectoriel muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ est un espace vectoriel normé

Suites de Cauchy

Soit x_n une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$; on dit que la

suite x_n est de Cauchy si, on a la relation suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Lemme 1.1 Soit x_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contient une

sous suite x_{n_k} convergente vers x alors la suite x_n est aussi convergente vers le même élément x :

Preuve. Soit x_n une suite de Cauchy dans E alors, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$ on a

$$\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon,$$

De plus, la suite x_n admet une sous suite x_{n_k} convergente vers x

$$n_k \geq N_\varepsilon, \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon,$$

D'où, on peut écrire

$$\begin{aligned} \forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x\| &= \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_p - x_{n_k} + x_{n_k} - x\| < \varepsilon \end{aligned}$$

ce implique la convergence de la suite x_n vers l'élément x [6] ■

1.1.1 Espaces complets

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'éléments de E est une suite convergente dans E : Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

implique l'existence d'un élément $x \in E$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

1.1.2 Espaces de Banach

On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.

1.2 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Soient Ω un ensemble de \mathbb{R}^n et p un nombre positif pour $1 \leq p < \infty$ on note par $L^p(\Omega)$ les classes de toute les fonction mesurables μ définir dans Ω ou

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

la fonctionnelle $\|\cdot\|_p$ définie par :

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme dans $L^p(\Omega)$

Définition 1.1 Lorsque $p = \infty$, on définit l'espace des fonctions essentiellement bornées

comme suit :

$$L^\infty = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable telle que } \exists c \geq 0 : |f(x)| \leq c \mu\text{-p.p sur } E\},$$

dont la semi norme est

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} f = \inf \{c \geq 0, |f(x)| \leq c \mu\text{-p.p sur } E\}$$

où $\text{ess} f$ désigne le sup essentiel de f sur Ω

Définition 1.2 Soit ρ_p on définit la fonction ρ_p et $\| \cdot \|_p$ par

$$\rho_p(f) = \int_{\Omega} |f|^{p(x)} dx + \text{ess sup}_{\Omega} |f|$$

$$\|f\|_p = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_p\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

$\rho_p(f)$ et $\|f\|_p$ s'appelle modulaire et la norme de l'espace (respectivement)

Propriétés élémentaires

Pour tout $1 \leq p < \infty$, on note q l'exposant conjugué de p , c'est-à-dire

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

1.3 Espace de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}(\Omega)$

soient Ω un ensemble de \mathbb{R}^n on note par $L^{p(x)}(\Omega)$ c'est les classes de toutes les fonction u

telle que :

$$\rho_p(\lambda u) < \infty \text{ pour } \lambda > 0$$

Remarque 1.1 Si $|\Omega| = 0$, alors l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ c'est l'espace d'Orlicz.

1 L'espace dual de $L^{p(x)}(\Omega)$ c'est l'espace $L^{q(x)}$ ssi $p \in L^{\infty}(\Omega)$

2 L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace réflexif ssi

$$1 < \text{ess inf}_{\Omega} p(x) \leq \text{ess sup}_{\Omega} p(x) < \infty$$

Inégalités auxiliaires

Théorème 1.1 (Inégalité de Hölder)

Soit $p \in P(\Omega)$, pour toute fonction f dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ et pour toute $g \in L^{p(x)}(\Omega)$ on a l'inégalité suivante

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq r_p \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

avec la constante r_p définie par : $r_p = c_p + \frac{1}{p^*} - \frac{1}{p^*}$

Définition 1.3 On dit que la fonction M est convexe, s'elle est vérifiée l'inégalité suivante

$$M(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) \leq \alpha M(u_1) + (1 - \alpha)M(u_2)$$

pour tous α ($0 \leq \alpha \leq 1$).

Chapitre 2

Espace d'Orlicz

Introduction

Les espaces d'Orlicz sont une généralisation des espaces de Lebesgue. La théorie des espaces d'Orlicz a été proposée dans les années 1920 par Z.W Birnbaum et W. Orlicz. L'idée de base est de remplacer la fonction convexe $x \rightarrow |x|^p$ par une autre fonction convexe, croissante plus générale Φ dite N-fonction et les espaces ainsi obtenus sont appelés espaces d'Orlicz L_Φ . Dans les problèmes qui ont des non linéarités à croissance rapide (de type exponentiel) les espaces d'Orlicz L_Φ sont plus appropriés que les espaces de Lebesgue L^p

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats de ces espaces.

2.1 N-fonction

Une généralisation de la fonction définie par $\Phi(u) = |u|^p$, est donnée par la classe des

fonctions suivantes

Définition 2.1 Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ on dit que est une N-fonction (fonction de Young), si elle

vérifie les conditions suivantes :

- i) Φ continue, paire, convexe et $\Phi(0) = 0$
- ii) $\Phi(x) > 0$ pour tout $x > 0$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$$

en résulte que Φ est croissante et continue, on peut définir Φ de manière équivalente par sa dérivée Φ' , dont on exige que

Exemple 2.1 Les fonctions suivantes,

$$\psi(x) = \exp(|x|) - 1, \phi_p(x) = \frac{|x|^p}{p}, 1 \leq p < +\infty$$

est de fonction d'Orlicz. De plus, ϕ_p est une N-fonction.

2.2 Fonction complémentaire de N-fonction

Définition 2.2 si Φ est une N-fonction alors la fonction conjuguée (duale)

$\bar{\Phi} : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$ est définie par :

$$\bar{\Phi} = \sup \{xy - \Phi(x)\}$$

Définition 2.3 Soit Φ une fonction de Young (N-fonction) et la fonction conjuguée, alors $\bar{\Phi}$ aussi est une fonction de Young

Preuve. 1-Pour tout y , la relation $xy - \Phi(x) = 0$, si $x = 0$ i.e. $\bar{\Phi}(y) \geq 0$, donc il est trivial que

$$\bar{\Phi}(y) \geq 0$$

2-Si $0 \leq y_1 \leq y_2$, alors

$$xy_2 - \Phi(x) \geq xy_1 - \Phi(x), \text{ pour tout } x$$

implique $\bar{\Phi}(y_2) \geq \bar{\Phi}(y_1)$, alors $\bar{\Phi} \uparrow$.

Par définition, il existe un nombre $0 < x_0 < \infty$, tel que $\Phi(x_0) < \infty$, ainsi

$$\bar{\Phi}(y) \geq x_0 y - \Phi(x_0) \text{ pour tout } y$$

tend vers ∞ , si $y \rightarrow \infty$

Puisque Φ est convexe et $\Phi(0) = 0$, la fonction $\frac{\Phi(x)}{x}$ croissante vers une valeur positive, lorsque x tend vers l'infini.

On note par m la limite de cette fonction et on suppose que $0 < y < m$, alors

$$xy - \Phi(x) \rightarrow -\infty, \text{ si } x \rightarrow \infty$$

implique que $\bar{\Phi}(y)$ est finie.

$\mathfrak{3}$ - $\bar{\Phi}$ est convexe, si $0 \leq y_1 \leq y_2 < \infty$ et $0 < \lambda < 1$, alors

$$\begin{aligned} x(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) - \Phi(x) &= \lambda x y_1 + x y_2 - \lambda x y_2 - \Phi(x) \\ &= \lambda(x y_1 - \Phi(x)) + (1 - \lambda)(x y_2 - \Phi(x)) \\ &\leq \lambda \bar{\Phi}(y_1) + (1 - \lambda) \bar{\Phi}(y_2), \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

On prend le sup sur le membre à gauche, on trouve

$$\bar{\Phi}(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda \bar{\Phi}(y_1) + (1 - \lambda) \bar{\Phi}(y_2)$$

■

Inégalité de Young

Nous utilisons la ligne du raisonnement habituellement utilisée dans la dérivation de l'inégalité de Hölder géométriquement il est clair que l'inégalité suivante est vérifiée

$$uv \leq M(u) + N(v)$$

Définition 2.4 Soit Φ une N-fonction, et $\bar{\Phi}$ sa complémentaire, alors

on a l'inégalité de Young

$$uv \leq \Phi(u) + \bar{\Phi}(v)$$

Inégalité de Jensen

Soit φ une N-fonction

(i) Soit $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des nombres positifs, alors

$$\varphi\left(\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 \varphi(u_1) + \alpha_2 \varphi(u_2) + \dots + \alpha_n \varphi(u_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \quad (2.1)$$

(ii) Soit $\alpha = \alpha(x)$ définie et positive sur \mathbb{R} , alors

$$\varphi \left(\frac{\int_{\Omega} u(x) \alpha(x) dx}{\int_{\Omega} \alpha(x) dx} \right) \leq \frac{\int_{\Omega} \varphi(u(x)) \alpha(x) dx}{\int_{\Omega} \alpha(x) dx} \quad (2.2)$$

Inégalité de auxiliaire(Hölder)

Soient $f \in L_{\Phi}$ et $g \in L_{\Psi}$ deux fonction mesurables sur un espace mesuré (Φ, Σ, μ) avec Φ et Ψ deux N-foncoïn conjuguées alors $f, g \in L^1$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu \leq 2 \|f\|_{\Phi} \|g\|_{\Psi} \quad (2.3)$$

Preuve. pour presque par tout $x \in \Omega : |f| < \infty, |g| < \infty, \|f\|_{\Phi} \neq 0$ et $\|g\|_{\Psi} \neq 0$

$$\int_{\Omega} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) d\mu \leq 1 \text{ et } \int_{\Omega} \Psi \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Psi}} \right) d\mu \leq 1$$

on utilise l'inégalité de young

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y)$$

on pose

$$x = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}}, y = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Psi}}$$

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{\Phi}\|g\|_{\Psi}} \leq \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) + \Psi \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Psi}} \right)$$

et en intégrant sur Ω

$$\int_{\Omega} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{\Phi}\|g\|_{\Psi}} d\mu \leq \int_{\Omega} \left(\Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) + \Psi \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Psi}} \right) \right) d\mu$$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu \leq \|f\|_{\Phi}\|g\|_{\Psi} \int_{\Omega} \left(\Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) + \Psi \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Psi}} \right) \right) d\mu$$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu \leq 2 \|f\|_{\Phi}\|g\|_{\Psi} \leq \|f\|_{\Phi}\|g\|_{\Psi}$$

■

2.3 La condition Δ_2

Définition 2.5 on dit que la N-fonction $\Phi(u)$ satisfait la condition Δ_2 s'il existe une

constante $k > 0$ telle que

$$\Phi(2u) \leq K\Phi(u), u \geq u_0$$

pour une valeur positive de u_0

Exemple 2.2 On donne certains exemples de N-fonctions :

– $\Phi_1(u) = (1 + |u|)\log(1 + |u|)$ et $\Phi_2(u) = |u|^p; p > 1$ sont deux N-fonctions qui vérifient la condition Δ_2 :

– $\psi_1(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ et $\psi_2(u) = |u|^p - 1; p > 1$ sont deux N-fonctions qui ne vérifient pas la condition Δ_2

Notons que $\bar{\psi}_1 = \bar{\Phi}_1$ c'est-à-dire la N-fonction $\bar{\Phi}$ complémentaire d'une N-fonction Φ qui vérifie la condition (Δ_2) ne vérifie pas nécessairement la condition (Δ_2) .

2.4 Modulaire d'Orlicz

Définition 2.6 la fonctionnelle ,

$$\begin{aligned} \rho_\Phi & : M(\Omega) \rightarrow [0, \infty] \\ f & \rightarrow \rho_\Phi(f) = \int_\Omega \Phi(f(x)) d\mu \end{aligned}$$

est une modulaire convexe sur $M(\Omega)$ dite modulaire d'Orlicz

2.5 Les classes des espace d'Orlicz

nous d'abord présenterons et étudierons la structure des espaces d'Orlicz sur un espace de mesure arbitraire et nous spécialisons ensuite pour obtenir des résultats

particuliers soit l'espace mesuré (Ω, Σ, μ) ou Ω un certain ensemble de points et Σ est un δ algèbre

Remarque 2.1 1- soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ une fonction de Young ou la fonction de young

permette de que pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, si la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, alors $\Phi(f) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable

2- D'après la définition de la fonction de young, c'est une extension de la fonction réelle de Borel.

Définition 2.7 l'ensemble de toutes les fonction mesurables $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$\int_{\Omega} \Phi(|f|) d\mu < \infty$$

est noté par $\tilde{L}_{\Phi}(\mu)$

Remarque 2.2 1- $\tilde{L}_{\Phi}(\mu)$ l'ensemble des classes des espaces d'Orlicz

2- les classes d'Orlicz \tilde{L}_{φ} ne sont pas des espaces vectoriels

2.6 La norme d'Orlicz

Définition 2.8 Soit (Ω, Σ, σ) un espace mesuré.

soient $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et (Φ, ψ) couple.

complémentaire, de N- fonctions, alors on définit la norme d'Orlicz

$\|\cdot\|_{\Phi} : u \mapsto \|u\|_{\Phi}$, par

$$\|u\|_{\Phi} = \|u\|_{\Phi}^O = \sup \left\{ \int_{\Omega} |uv| du : \int_{\Omega} \psi(v) dy \leq 1 \right\}$$

les assertions juste prouvées nous permettrons de présenter la norme d'Orlicz dans l'ensemble L_{Φ} à l'aide d l'égalité suivante :

$$\|u\|_{\Phi} = \sup_{p(v,\psi) \leq 1} \left| \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \right|.$$

D'après la définition la norme ci-dessus, est que satisfaite les axiomes

habituels :

$$1-\|u\|_\varphi = 0 \text{ ssi } u(x) = 0 \text{ p.p;}$$

$$2-\|\alpha u\|_\varphi = \alpha\|u\|_\varphi;$$

$$3-\|u_1 + u_2\|_\varphi \leq \|u_1\|_\varphi + \|u_2\|_\varphi.$$

l'ensemble L_φ devient un espace linéaire normé qui s'appel l'espace d'Orlicz.

Définition 2.9 La norme Luxemburg :

$$\|f\|_L = \|f\|_\Phi^L = \inf \left\{ \lambda : \lambda > 0, \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}$$

La norme d'Amemiya :

$$\|f\|_A = \|f\|_\Phi^A = \inf_{l>0} \frac{1}{l} \left(1 + \int_\Omega \Phi [lf(x)] dx \right),$$

Remarque 2.3

Les deux normes $\|\cdot\|_\Phi^O$ et $\|\cdot\|_\Phi^L$ sont équivalentes :

$$\forall u \in L^\Phi(\Omega), \|u\|_\Phi^L \leq \|u\|_\Phi^O \leq 2\|u\|_\Phi^L$$

Preuve. voir[2] ■

2.7 Espace d'Orlicz

Définition 2.10 On définit l'espace d'Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} L_\Phi(\Omega) &= \left\{ f \in M(\Omega) \text{ telle que } \exists \lambda > 0 : \lambda f \in \tilde{L}_\Phi \right\} \\ &= \left\{ f \in M(\Omega) \text{ telle que } \int_\Omega \Phi(\lambda f(x)) d\mu < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\} \end{aligned}$$

Remarque 2.4 pour chaque fonction $u(x) \in L_\Phi$, nous avons

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\rho(v;\psi)} |(u, v)| \leq \rho(u, \Phi) + 1 \tag{2.4}$$

Théorème 2.1 *complétude*

L'espace d'Orlicz muni de la norme $\|\cdot\|_{\Phi}$, $(L_{\Phi}(\Omega), \|\cdot\|_{\Phi})$ est un Banach.

Corollaire 2.1 (*dual de l'espace d'Orlicz*)

Si Φ et $\bar{\Phi}$ vérifient la condition (Δ_2) , alors

$$(L_{\Phi}(\Omega))' = L_{\bar{\Phi}}(\Omega)$$

Remarque 2.5 L'espace d'Orlicz $L_{\Phi}(\Omega)$ peut-être muni d'une structure d'espace de Banach à l'aide d'autres normes distinctes de la norme d'Orlicz, telle que la norme de Luxemburg définie par

$$\|u\|_{\Phi}^L = \inf \left\{ k > 0 / \int_{\Omega} \Phi \left(\frac{u(x)}{k} \right) dx \leq 1 \right\}$$

2.7.1 **Espaces E^{Φ}**

Définition 2.11 On note la fermeture dans L_{Φ} de l'ensemble des fonctions bornées par

$$E^{\Phi} = \left(\overline{\left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \exists b > 0, |u(x)| \leq b, \forall x \in \Omega \right\}} \right)_{L_{\Phi}}$$

Chapitre 3

Continuité des opérateurs de type Hammerstein dans espace d'Orlicz

Dans ce chapitre, nous donnons des conditions pour la complète continuité des opérateurs intégraux linéaires entre espaces d'Orlicz. et nous donnons des conditions pour la continuité et

la bornitude de l'opérateur de Nemytskij entre espaces d'Orlicz. Enfin on étudié la continuité de l'opérateur H dans les espace d'Orlicz

3.1 Equation intégrales

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparaît sous le signe intégral. Nous allons s'intéresser

beaucoup plus aux équations intégrales non-linéaires dont les formes suivantes

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_{\Omega} k(x, t) F(x, t, \varphi(t)) dt$$

3.2 Equations intégrales linéaires :

Définition 3.1 1- On appelle équation intégrale de Fredholm (EIF) de seconde espèce,

une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

2- On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = 0$$

Définition 3.2 1- On appelle équation intégrale de Volterra (EIV) de seconde espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

2- On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$\lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = 0$$

3.3 Equations intégrales non-linéaires :

Définition 3.3 1- On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm (EINF) de

deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt = f(x)$$

2- On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt = 0$$

Définition 3.4 1- On appelle équation intégrale non-linéaire de Volterra (EINV) de deuxième espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt = f(x)$$

2- On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt = 0$$

Définition 3.5 1- On appelle équation intégrale de Urysohn une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_{\Omega} F(x, t, \varphi(t)) = g(t), t \in \Omega$$

où F et g sont des fonctions arbitraires.

2- On appelle équation intégrale de Hammerstein, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_{\Omega} k(x, t) f(t, \varphi(t)) = g(x) \quad t \in \Omega$$

Remarque 3.1 L'équation de Hammerstein est un cas particulier de l'équation de Urysohn.

3.4 Opérateurs dans les espaces $L^{p(x)}(\Omega)$

Dans cette on s'intéresse sur le rôle de la fonction maximale qui est l'on utilisera pour

estimer un opérateur intégral linéaire, et enfin la relation entre de cet opérateur est les

équations intégrales singulières de la forme suivante

$$Au(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} u(y) dy$$

et n'oublier pas l'estimation d'un opérateur intégral singulier par les opérateurs pseudo

différentiels, utilisant la fonction maximale, pour plus détaille concernant ce domaine

Soit l'opérateur intégral suivant

$$Kf(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy$$

où le noyau $K(x, y)$ est dominé par le noyau de différence, i.e.,

$$|k(x, y)| \leq A(|x - y|). \quad (3.1)$$

3.5 4 Opérateurs linéaires dans $L_{\Phi}(\Omega)$

On suppose que $\Phi(u)$ et $\psi(v)$ deux N-fonctions complémentaires. Soit $v(x)$ une fonction fixe dans $L_{\psi}(\Omega)$ d'après l'inégalité de Hölder 2.3 que la fonctionnelle linéaire

$$l(u) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, u(x) \in L_{\Phi}(\Omega) \quad (3.2)$$

est défini sur l'espace entier $L_{\Phi}(\Omega)$

L'inégalité

$$\|l\| = \|v\|_{\psi} \leq 2 \|l\| \quad (3.3)$$

est vérifiée, avec la note que $\|l\|$ la norme du fonctionnel $l(u)$

$$\|l\| = \sup_{\|u\|_{\Phi} \leq 1} |l(u)|$$

L'inégalité gauche dans 3.3, depuis l'inégalité de Hölder

$$|l(u)| = |(u, v)| \leq \|u\|_{\Phi} \|v\|_{\psi}$$

l'inégalité droite dans 3.3, d'après 2.4

$$\|v\|_{\psi} = \sup_{\rho(u, \Phi)} |u, v| \leq \sup_{\|u\|_{\Phi} \leq 2} |u, v| = 2 \|l\|$$

Nous rappelons que, pour chaque fonction $u(x) \in L_{\Phi}(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{\Phi} = \alpha^{\frac{1}{\varphi}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \left\{ \int_{\Omega} \Phi[u(x)] dx \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, donc

$$\begin{aligned} \|l\| &= \sup_{\|u\|_{\Phi} \leq 1} \left| \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right| = \sup_{\alpha^{\frac{1}{\varphi}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \left\{ \int_{\Omega} \Phi[u(x)] dx \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1} \left| \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right| \\ &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\varphi}} \beta^{\frac{1}{\beta}}} \sup_{\int_{\Omega} \Phi[u(x)] dx \leq 1} \left| \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right| \\ &= \frac{\|v\|_{\psi}}{\alpha^{\frac{1}{\varphi}} \beta^{\frac{1}{\beta}}} [3] \end{aligned}$$

3.5.1 Opérateur Intégral

On appelle Opérateur Intégral tout Opérateur linéaire A défini sous la forme

$$A(\varphi)(x) = \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy \quad (3.4)$$

3.6 Conditions de continuité des opérateurs intégraux linéaires

Dans cette partie on s'intéresse aux opérateurs intégraux de la forme

$$Au(x) = \int_{\Omega} k(x, y) u(y) dy \quad (3.5)$$

Le problème fondamental dans cette section consiste à l'étude des conditions où l'opérateur 3.5 est continu considéré comme un opérateur de L_{φ_1} dans L_{φ_2} , i.e. qu'il satisfait la condition

$$\|Au\|_{\varphi_2} \leq \|A\| \|u\|_{\varphi_2} \quad (3.6)$$

où $\|A\|$ est un certain nombre.

Nous rechercherons naturellement des conditions pour la continuité de A dans les diverses caractéristiques du noyau $k(x, y)$, le noyau appartient à un certain espace d'Orlicz, c'est-à-dire

l'intégrale est finie

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \varphi [\alpha k(x, y)] dx dy,$$

pour certain α .

Soit $\varphi(u)$ une N-fonction telle que, pour tout $u(x) \in L_{\varphi_1}$, $v(x) \in L_{\psi_2}$, on a

$$w(x, y) = u(x)v(y) \in L_{\varphi} \quad (3.7)$$

avec

$$\|w(x, y)\| \leq C \|u\|_{\varphi_1} \|v\|_{\psi_2} \quad (3.8)$$

où C est une constante.

On suppose le noyau $k(x, y)$ de l'opérateur intégral linéaire 3.5 appartient à l'espace L_{ψ} où $\psi(v)$ est la N-fonction complémentaire de la N-fonction $\varphi(u)$. Alors l'opérateur 3.5 appartient à l'espace $L_{\varphi_1} \mapsto L_{\varphi_2}$ est continue.

Preuve. En utilisant l'inégalité de Hölder et 3.8, pour $u(x) \in L_{\varphi}$, $v(x) \in L_{\psi}$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Au(x)v(x)dx &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} k(x, y)u(y)v(x)dx dy \\ &\leq \|k(x, y)\| \|w(x, y)\| \\ &\leq C \|k(x, y)\|_{\psi} \|w(x, y)\|_{\varphi} \end{aligned} \quad (3.9)$$

alors ce qui suit que l'opérateur A de L_{φ_1} dans L_{φ_2} .

Puisque $\|v\|_{\psi_2} \leq 2$ pour $\rho(v, \psi_2)$, d'après 3.9 alors

$$\|Au\|_{\varphi_2} = \sup_{\rho(v; \psi_2) \leq 1} \int_{\Omega} Au(x)v(x)dx \leq 2C \|k(x, y)\|_{\psi} \|u\|_{\varphi_1} \quad (3.10)$$

ainsi, l'opérateur A est borné et par conséquent, il est continu.[4] ■

Nous avons discuté de la continuité de l'opérateur intégrale suivant sur $C[a, b]$:

3.4

dans cette section, nous étudions les opérateur intégraux sur l'espace d'Orlicz

Théorème 3.1 pour tout $k(x, y) \in L^{\psi}([c, d] \times [a, b])$, afin qu'un opérateur intégral A

tel

que défini dans 3.4 qui transpose $L^{M_1} [a, b]$ en $L^{M_2} [c, d]$ est continue, il est nécessaire et suffisant qu'il existe du positif, les nombres α, β tels que

$$\Phi(\alpha uv) \leq M_1(u) N_2(v), u, v \geq \beta \quad (3.11)$$

où Φ et ψ , M_1 et N_1 , M_2 et N_2 , sont trois paires de fonctions complémentaires. [5]

Preuve. Nécessité : sinon, il existe des séquences croissantes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tel que

$$a_n \mapsto \infty, b_n \mapsto \infty \text{ et } \Phi\left(\frac{a_n b_n}{4^n}\right) > M_1(a_n) N_2(b_n), n = 1, 2, \dots$$

Notez que lorsque $u > 0$ nous avons

$$\Phi^{-1}(u) \psi^{-1}(u) > u.$$

En effet, il est facile de voir que

$$\Phi(v) = v (\Phi(v) / v) > \psi(\Phi(v) / v)$$

. Soit $\Phi(v) = u$ Ensuite nous obtenons l'inégalité ci-dessus par conséquent nous avons

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(M_1(a_n) N_2(b_n)) &> \frac{M_1(a_n) N_2(b_n)}{\Phi^{-1}(M_1(a_n) N_2(b_n))} \\ &> \frac{4^n M_1(a_n) N_2(b_n)}{a_n b_n} \\ \Psi\left(\frac{4^n M_1(a_n) N_2(b_n)}{a_n b_n}\right) &< M_1(a_n) N_2(b_n), \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer

$$M_1(a_1)(b-a) > 1, N_2(b_1)(d-c) > 1$$

Encore une fois, prenez une séquence $\{F_n\}$ d'intervalles non chevauchants dans $[a, b]$

et une séquence $\{G_n\}$ d'intervalles non chevauchants dans $[c, d]$ tels que

$$mes F_n = \frac{1}{2^n M_1(a_n)}, mes G_n = \frac{1}{2^n N_2(b_n)}, n = 1, 2, \dots$$

Définir une fonction sur $[c, d] \times [a, b]$ comme suit :

$$k_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n M_1(a_n) N_2(b_n)}{a_n b_n} \cdot \chi_{G_n \times F_n}(x, y)$$

où χ ci-dessus désigne la fonction caractéristique de $G_n \times F_n$.

Alors puisque

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d \Psi(K_0(x, y)) dx dy &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi\left(\frac{4^n M_1(a_n) N_2(b_n)}{a_n b_n}\right) mes G_n \times F_n \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

donc $k_0(x, y) \in L^\Psi([c, d] \times [a, b])$ Ensuite, mettez

$$x_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{F_n}(y), \quad y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_{G_n}(x)$$

Ensuite, il est facile de voir que

$$\int_a^b M_1(x_0(y)) dy = 1, \quad \int_c^d N_2(y_0(x)) dx = 1$$

Autrement dit, $x_0(y) \in L^{M_1}[a, b]$, $y_0(x) \in L^{N_2}[c, d]$.

Nous allons maintenant montrer que l'opérateur intégral A , tel que donné par 3.4

avec $k(x, y)$ remplacé par $k_0(x, y)$ n'est pas un opérateur continu de $L^{M_1}[a, b]$ dans $L^{M_2}[a, d]$, d'où une contradiction. En fait, il découle de théorème 2.1 de la section 1 par $\|x_0\|_{M_1}^0 \leq 2$ (conséquent)

$$\begin{aligned}
\|A_0\| &= \sup \{ \|A_0(x)\|_{M_2}^0 ; \|x\|_{M_1}^0 \leq 1 \} \\
&\geq \frac{1}{2} \|A_0(x_0)\|_{M_2}^0 \\
&\geq \frac{1}{2} \int_c^d A_0(x_0)(x) y_0(x) dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int_a^b \int_c^d k_0(x, y) x_0(y) y_0(x) dx dy \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.
\end{aligned}$$

Suffisance comme on peut le voir d'après 3.6 il suffit de montrer qu'il existe un nombre positif l tel que

$$\|x(y) y(x)\|_{\Phi}^0 \leq l \|x(y)\|_{M_1}^0 \|y(x)\|_{N_2}^0 \quad (3.12)$$

pour $x(y) \in L^{M_1}[a, b]$ et $y(x) \in L^{N_2}[c, d]$. En fait, nous pouvons supposer $\|x\|_{M_1}^0 > 0$, $\|y\|_{N_2}^0 > 0$ donc, si nous posons

$$F_1 = \{y \in [a, b] : |x(y)| / \|x\|_{M_1}^0 < \beta\}, F_2 = [a, b] \setminus F_1,$$

$$G_1 = \{x \in [c, d] : |y(x)| / \|y\|_{N_2}^0 < \beta\}, G_2 = [c, d] \setminus G_1,$$

puis par l'hypothèse, le théorème de Fubini et le théorème 2.1 de (la section 1, on obtient)

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\alpha x(y) y(x)}{\|x\|_{M_1}^0 \|y\|_{N_2}^0} \right\|_{\Phi}^0 &\leq 1 + \left\{ \int \int_{G_1 \times F_1} + \int \int_{G_1 \times F_2} + \int \int_{G_2 \times F_1} + \int \int_{G_2 \times F_2} \right\} \Phi \left(\frac{\alpha x(y) y(x)}{\|x\|_{M_1}^0 \|y\|_{N_2}^0} \right) dx dy \\
&\leq 1 + \Phi(\alpha\beta^2) \text{mes}G_1 \text{mes}F_1 + N_2(\beta) \text{mes}G_1 \int_{F_2} M_1 \left(\frac{|x(y)|}{\|x\|_{M_1}^0} \right) dy + \\
&\quad M_1(\beta) \text{mes}F_1 \int_{G_2} N_2 \left(\frac{|y(x)|}{\|y\|_{N_1}^0} \right) dx + \int_{G_2} N_2 \left(\frac{|y(x)|}{\|y\|_{N_1}^0} \right) dx \int_{F_2} M_1 \left(\frac{|x(y)|}{\|x\|_{M_1}^0} \right) dy \\
&\leq 2 + \Phi(\alpha\beta^2) (d-c)(b-a) + N_2(\beta) (d-c) + M_1(\beta) (b-a)
\end{aligned}$$

d'où le résultat suit en définissant

$$\alpha l = 2 + \Phi(\alpha\beta^2) (d-c)(b-a) + N_2(\beta) (d-c) + M_1(\beta) (b-a).$$

■

Définition 3.6 Opérateur compact complètement continu

l'opérateur T , est dite complètement continu, si elle est continue et compact

Définition 3.7 Soit la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, on dit que f est satisfait la condition de Carathéodory, si

- (i) La fonction $x \mapsto f(x, y)$ mesurable dans l'ensemble Ω , pour $y \in \mathbb{R}$
- (ii) La fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue dans \mathbb{R} , pour $x \in \Omega$

Définition 3.8 Soit la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, satisfait la condition de Carathéodory

, alors pour chaque fonction $\varphi(y)$ étant mesurable sur l'ensemble Ω nous définissons l'opérateur F de superposition comme

$$(F\varphi)y = f(y, \varphi(y)), y \in \Omega$$

L'opérateur F s'appelle aussi l'opérateur de Nemytskij

3.7 Opérateur de Nemytskij

Opérateur de Nemytskij (ou de superposition)

On considère l'opérateur non linéaire de Nemytskij

$$\begin{aligned} N_f & : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a; b]) \\ u & \longmapsto N_f(u) \end{aligned}$$

avec

$$N_f(u)(x) = f(x, u(x)).$$

Définition 3.9 Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^N et soit la fonction $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

L'application $N_f : u \rightarrow f(\cdot; u(\cdot))$, qui à chaque fonction $u : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ associe la fonction $N_f(u) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$N_f(u)(x) = f(x, u(x))$$

est appelée opérateur de Nemytskij (ou de superposition) associé à f .

Définition 3.10 Opérateur de Nemytskij

On dit qu'une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction Carathéodory, si l'application $(x, s) \mapsto f(x, s)$ est continue en x et mesurable en s .
l'opérateur F défini par

$$(F\varphi)(x) = f(x, \varphi(x))$$

est appelé opérateur de Nemytskij

3.8 continuité de condition

À première vue, il semble très difficile de formuler des conditions générales de continuité pour l'opérateur de superposition dans des espaces idéaux. Cependant,

de telles conditions existent. Pour formuler le résultat principal de cette section, une autre notion auxiliaire s'impose. Soit δ la fonction définie dans

$$\|x_n\| \leq 2^{-n}\delta, \|F_{x_n}\| > 2^n n (n = 1, 2, \dots)$$

Étant donné un sous-ensemble ouvert G d'un espace idéal X , soit

$$\delta(G) = \bigcup_{(x_0, r)} \{(s, u) : s \in \Omega, u \in R, |u - x_0(s)| \leq r\delta(s)\}, \quad (3.13)$$

où l'union est prise sur toutes les paires $(x_0, r) \in G \times (0, \infty)$ telles que la boule $\|x - x_0\| < r$ trouve dans G . Il est clair que $\delta(G)$ contient les graphes de toutes les fonctions

$x \in G$ (plus précisément, l'ensemble $\{s : (s, x(s)) \notin \delta(G)\}$ a une mesure zéro pour chaque $x \in G$). Évidemment, $\delta(G) = \Omega \times R$ si $G = X$; par contre, cela est vrai pour tout $G \subset X$ non vide si X est quasi-régulier.

Il ressort clairement de la définition qu'il existe une «interaction» étroite entre le comportement de l'opérateur de superposition F sur un ensemble $G \subseteq X$ et celui de la fonction génératrice f sur l'ensemble $\delta(G) = \Omega \times R$. Par exemple, si G est l'intérieur du domaine de définition $D(F)$ de F , les propriétés analytiques de F ne dépendent pas des propriétés de f à l'extérieur $\delta(G)$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver notre résultat de base sur la continuité de l'opérateur de superposition entre des espaces idéaux.

Théorème 3.2 *Soit f une fonction sup-mesurable, et supposons que l'intérieur G du domaine de définition $D(F)$ de l'opérateur de superposition F , généré par f et considéré comme un opérateur entre deux espaces idéaux X et Y , est non vide. Alors, si l'opérateur F est continu sur G , la fonction f est sup-équivalente à certains Carathéodory fonction sur $\delta(G)$. Inversement, si la fonction f est sup-équivalente à certains Carathéodory fonction sur $\delta(G)$ et l'espace Y est régulier, l'opérateur F est continu sur G . [1]*

3.9 continuité des opérateurs Nemytskij

Dans cette section, nous intéresserons aux différentes propriétés de continuité de l'opérateur de superposition entre les espaces d'Orlicz. Nous commençons par le théorème fondamentaux suivant :

Théorème 3.3 *soit f fonction sup mesurable et supposons que l'intérieur G du domaine de définition $D(F)$ de l'opérateur de superposition F généré par f et considéré comme un opérateur entre L^M et L^N , est non vide . Alors , si l'opérateur F est continu sur G , la fonction f est sup-équivalente à une fonction Carathéodory sur $\delta(G)$ (voir(3.13)). Inversement, si la fonction f est sup -équivalente à une fonction Carathéodory sur $\delta(G)$ et $N \in \Delta_2$, l'opérateur F est continu sur G*

\implies l'énoncé découle immédiatement de théorème 2.2 et du fait que l'espace d'Orlicz L^N est régulier si et seulement si $N \in \Delta_2$

À ce stade , nous donnons un exemple simple qui montre que la deuxième affirmation du théorème 2.3 est fausse si $N \notin \Delta_2$. Comme exemple "double" def $(u) = M(u)$ lemma 4.3, considérons la fonction

$$f(u) = N^{-1}(u) \tag{3.14}$$

où N est une fonction de Young (\cdot) qui ne satisfait pas une condition Δ_2 l'opérateur de superposition correspondant F est une fonction de l'espace L^1 dans l'espace L^N puisque $N[Fx] = \|x\|_1 < \infty$ pour $x \in L^1$. Cependant, F est discontinu à $x_0 = \theta$. pour voir cela, choisissez une fonction $y \in \setminus E_N$, et soit

$$y_n(s) = \begin{cases} y(s) & \text{si } |y(s)| \leq n, \\ 0 & \text{si } |y(s)| > n \end{cases}$$

Alors les fonction $x_n(s) = N(y(s) - y_n(s))$ appartiennent à l'espace L^1 et convergent vers θ . puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} N[y(s) - y_n(s)] ds = 0$. par contre la suite $Fx_n = y - y_n$ ne converge pas evers dans L^N sinon la fonction y serait dans la clôture de L^∞ par rapport à la norme Luxemburg (4.8), et appartiendrait donc à E^N , une contradiction.[1]

Théorème 3.4 (de carathéodory)

Soient F un sous ensemble d'un espace linéaire E et $co(F)$ de

dimension m . Alors pour chaque point x de $\text{co}(F)$ est une combinaison convexe de au plus de $m + 1$ point de F .

Définition 3.11 Opérateur de Hammerstein

La fonction f étant une fonction de Carathéodory on suppose Ω compact et considéré un noyau de green k associé à La fonction f

$$H\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy$$

3.9.1 Continuité des opérateurs de type Hammerstein dans espace d'Orlicz

Cet opérateur continu semble être une composition de l'opérateur intégral de Fredholm A de noyau k continu et de l'opérateur de Nemytskij N_f associé à f

$$H = A \circ N_f.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, on traite les équations intégrales non linéaires, cette étude concerne une propriété topologique importante c'est la continuité de l'opérateur de Hammerstein, tel que

$$Hu(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y, u)dy.$$

Le rôle essentiel c'est l'étude de la continuité de l'opérateur H dans l'espace d'Orlicz on utilise la continuité de Fredholm et la continuité de l'opérateur de Nemytskij (superposition) dans les espaces d'Orlicz

Bibliographie

- [1] J. Appell and P.P. Zabreiko, Nonlinear superposition operators, Spring, 1989.
- [2] F. Boulahta ,Espaces d'Orlices, Cours 2^{ème} année master mathématiques, Université de Bjaia.
- [3] B. GAGUI, Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz, Thèse doctorat science université de M'sila Algérie 2015.
- [4] M.A. Krasnoselskii and YA.B. Rutickii, Convex functions and Orlicz spaces, P. Nordhoff Ltd. Groningen, 1961.
- [5] W. Orlicz, Linear functional analysis, Series in real analysis Vol.4, World scientific Co.Pte.Ltd, 1992.
- [6] M.Nadir, cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila Algérie 2004.
- [7] M. Nadir and B. Gagui, two Points for the adaptive Method For the numerical Solution of Volterra Integral Equations, International Journal Mathematical Manuscripts, Vol 1 (2007), pp. 133-140.
- [8] M. Nadir and B. Gagui, A numerical approximation for solutions of Hammerstein integral equations in L_p spaces, Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences Vol 8 (2014), pp. 23-31.

ملخص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة خاصية الاستمرارية للمعادلات التكاملية الغير الخطية وبالاخص منها المعادلات المسماة بنوع هامرشتاين،

$$H\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y, \varphi(y))dy$$
 والتي يكون شكلها العام كما يلي

حيث Ω هي مجموعة قابلة للقياس والدالتان $f(\cdot)$, $k(\cdot, \cdot)$ معرفتين.

ولدراسة استمرارية المؤثر من الشكل H في فضاء اورليز و ذلك باستخدام تركيب مؤثرين الاول لفريدهولم والثاني مؤثر نيميتيشكي.

Abstract

In this memory we study the existence of solution the nonlinear integral equations, particularly equations of Hammerstein type whose general form is as follows

$$H\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y, \varphi(y))dy$$

Where Ω is a measurable set and the $k(\cdot, \cdot)$, $f(\cdot)$ are knowns functions.

For the continuity of the operator H in the Orlicz space we use the composition of the Fredholm's and on the Nemytskij's operators in the Orlicz spaces.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence de la solution des équations intégrales non linéaires particulièrement les équations intégrales de type Hammerstein dont la forme générale est la suivante

$$H\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y, \varphi(y))dy$$

où Ω est un ensemble mesurable et les fonctions $k(\cdot, \cdot)$, $f(\cdot)$ sont connues.

la continuité de l'opérateur H dans les espace d'Orlicz faite par la composition de deux opérateurs l'un est de Fredholm le deuxième est de Nemytskij