REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Thème

Problème inverse pour une équation de chaleur non locale avec conditions aux limites de type périodique

---

Présenté par :
M^{me} *NAFTI* Khaoula

Soutenu publiquement le : 17/06/2023.

Devant le jury composé de :

Président :	*GAGUI* Bachir	M.C.A.,	Université de M'sila
Encadreur :	*NOUIRI* Brahim	M.C.A.,	Université de M'sila
Examinateur :	*MIHOUBI* Farid	M.A.A.,	Université de M'sila

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir aidé à accomplir ce travail, puis je veux exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour tant d'amours et de soutiens moraux.

Dédicaces

Je dédie cette mémoire :

Ma mère

Mon père

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons considéré une classe de problèmes inverses de terme source dépendant de l'espace pour une équation de la chaleur avec involution et une condition aux limites de type périodique. L'utilisation de la méthode de Fourier conduit à un problème spectral pour un opérateur différentiel ordinaire du seconde ordre avec involution. Toutes les fonctions propres de ce problème spectral sont construites. Dans le cas où toutes les valeurs propres du problème sont simples, le système de fonctions propres ne forme pas une base inconditionnelle. Un critère lorsque ce problème spectral peut avoir un nombre infini de valeurs propres multiples est prouvé. Les sous-espaces racine correspondants consistent en une fonction propre et une fonction associée. Nous prouvons que le système des fonctions racines forme une base inconditionnelle et peut être utilisée pour construire une solution du problème inverse. L'existence d'une solution unique de ce problème inverse est prouvée.

Mots-Clés : Équation de la chaleur avec involution, Condition aux limites de type périodique, Fonctions propres, Fonctions associées, Problème inverse.

In this memoir, we have considered a class of inverse space-dependent source term problems for a heat equation with involution and a periodic boundary condition. The use of Fourier's method leads to a spectral problem for an ordinary second-order differential operator with involution. All the eigenfunctions of this spectral problem are constructed. In the case where all the eigenvalues of the problem are simple, the system of eigenfunctions does not form an unconditional basis. A criterion when this spectral problem can have an infinite number of multiple eigenvalues is proved. The corresponding root subspaces consist of an eigenfunction and an associated function. We prove that the system of root functions forms an unconditional basis and can be used to construct a solution of the inverse problem. The existence of a unique solution of this inverse problem is proved.

Keywords : Heat equation with involution, Periodic boundary condition, Eigen functions, Associated functions, Inverse problem.

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

Les équations différentielles à arguments modifiés sont des équations dans lesquelles la fonction inconnue et ses dérivées sont évaluées avec des modifications de variables de temps ou d'espace ; de telles équations sont appelées en général des équations différentielles fonctionnelles. Parmi ces équations, on peut distinguer les équations avec involutions [3]. Une fonction $f : E \to E$ avec $E \subset \mathbb{R}$ vérifiant la condition $f(f(x)) = x$ sur E est appelée une involution, [4, 15]. Les problèmes spectraux et les problèmes inverses pour les équations avec involutions ont également reçu beaucoup d'attention, voir par exemple, [7, 8, 12, 13]. De plus, pour les équations contenant la transformation de la variable spatiale dans le terme de diffusion, on peut citer l'exposé de Cabada et Tojo [2], où ils ont donné un exemple qui décrit une situation concrète en physique : on considère un fil métallique fermé de longueur 2π qui est enroulé autour d'une feuille fine de matériau isolant, comme illustré dans Figure 1.

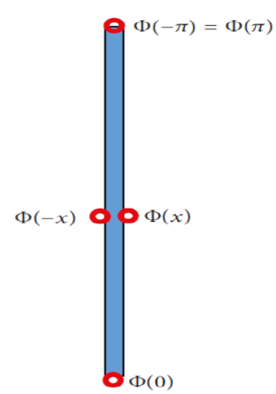

FIGURE 1 – Disposition schématique des points sur un fil fermé

Soit $x = 0$ la position la plus basse du fil. Le fil contourne l'isolant vers la gauche jusqu'au point $-\pi$ et vers la droite jusqu'au point π. Le fil est fermé donc les points $-\pi$ et π coïncident.

La couche d'isolant est supposée légèrement perméable. De ce fait, la température d'un coté de l'isolant influence le processus de diffusion de l'autre coté. Par conséquent, l'équation de la chaleur classique change avec l'ajout d'un terme supplémentaire $\varepsilon\Phi_{xx}(-x,t)$ à $\Phi_{xx}(x,t)$ où $|\varepsilon| < 1$. Soit $\Phi(x,t)$ est la température au point x de la fil à l'instant t.

Ainsi, ce processus est décrit par l'équation de chaleur non locale suivante :

$$\Phi_t(x,t) = \Phi_{xx}(x,t) - \varepsilon\Phi_{xx}(-x,t) + f(x), \ (x,t) \in D_T, \tag{1}$$

où $D_T = \{(x,t) : -\pi < x < \pi, \ 0 < t \leq T\}$ avec $T > 0$ et $f(x)$ est l'influence d'une source externe qui ne change pas avec le temps.

Comme information supplémentaire, nous prenons les valeurs d'une condition initiale et d'une condition finale de la température :

$$\Phi(x,0) = \varphi(x), \ \Phi(x,T) = \psi(x) \ x \in [-\pi,\pi]. \tag{2}$$

Puisque le fil est fermé, il est naturel de supposer que la température aux extrémités du fil est la même à tout moment c'est à dire :

$$\Phi(-\pi,t) = \Phi(\pi,t), \ 0 \leq t \leq T. \tag{3}$$

Nous considérons le processus dans lequel le flux de température à une extrémité à chaque instant t est proportionnel au taux de variation de la température moyenne sur le fil. Alors, nous avons :

$$\Phi_x(-\pi,t) = \gamma\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(s,t)\,ds, \ t \in [0,T]. \tag{4}$$

où $\gamma \neq 0$ est le coefficient de proportionnalité. Le problème inverse (1)-(4) a été étudie par M. Sadybekov et al. dans [11].

Problème équivalent

En utilisant (1) et (4), on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi_x(-\pi,t) &= \gamma \frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(x,t)dx \\
&= \gamma \int_{-\pi}^{\pi}\phi_t(x,t)\,dx \\
&= \gamma \int_{-\pi}^{\pi}\left[\phi_{xx}(x,t)-\varepsilon\phi_{xx}(-x,t)\right]dx + \gamma\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \gamma\left[\phi_x(\pi,t)+\varepsilon\phi_x(-\pi,t)-\phi_x(-\pi,t)-\varepsilon\phi_x(\pi,t)\right]+\gamma\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \gamma(1-\varepsilon)\left[\phi_x(\pi,t)-\phi_x(-\pi,t)\right]+\gamma\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Alors, nous avons :

$$\Phi_x(-\pi,t)-a\Phi_x(\pi,t)=\gamma_1\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{5}$$

où $a=\frac{\gamma(1-\varepsilon)}{1+\gamma(1-\varepsilon)}$ et $\gamma_1=\frac{\gamma}{1+\gamma(1-\varepsilon)}$. On pose

$$\gamma_2=\frac{\gamma_1}{2\pi(1+a)} \text{ et } u(x,t)=\Phi(x,t)+\gamma_2\left(x^2-\pi^2\right)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{6}$$

Avec (6), l'équation (1) devienne :

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-\varepsilon u_{xx}(-x,t)+F(x), \tag{7}$$

où $F(x)=2\gamma_2(\varepsilon-1)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx+f(x)$. Avec (6), les conditions initiale et finale (2) deviennent :

$$u(x,0)=\varphi_1(x) \text{ et } u(x,T)=\psi_1(x),\quad x\in[-\pi,\pi], \tag{8}$$

où, $\varphi_1(x)=\varphi(x)+\gamma_2(x^2-\pi^2)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ et $\psi_1(x)=\psi(x)+\gamma_2(x^2-\pi^2)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Grâce (6), les conditions aux limites (3)-(4) réduisent aux conditions aux limites non locales suivantes :

$$\begin{cases} u(-\pi,t) = u(\pi,t), \\ u_x(-\pi,t) = au_x(\pi,t). \end{cases} \qquad t \in [0,T]. \tag{9}$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 0.1. $\{\Phi(x,t), f(x)\}$ *est une solution du problème inverse* (1)-(4) *si et seulement si* $\{u(x,t), F(x)\}$ *est une solution du problème inverse* (7)-(9).

Notre objective dans ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème équivalent (7)-(9). Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les espaces fonctionnels.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons une classe de problèmes spectraux pour un opérateur différentiel ordinaire du second ordre avec involution d'inversion et des conditions aux limites non locales de type périodique. Un critère de simplicité des valeurs propres du problème est démontré : les valeurs propres seront simples si et seulement si le nombre $r = \sqrt{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}$, avec $|\varepsilon| < 1$ est irrationnel. Nous montrons que si le nombre r est irrationnel, alors toutes les valeurs propres du problème sont simples, et le système de fonctions propres du problème est complet et minimal mais ne forme pas une base inconditionnelle dans $L^2(-\pi,\pi)$. Pour le cas des nombres rationnels r, on prouve qu'un système de fonctions propres et associées forme une base inconditionnelle dans $L^2(-\pi,\pi)$.

Dans le dernier chapitre, nous avons démonter l'existence et l'unicité de la solution du problème (7)-(9) par la méthode de Fourier pour que r est rational.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

OUTILS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les espaces fonctionnels, un problème spectral non autoadjoint et la méthode de point fixe de Banach.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces normés

Définition 1.1 ([1]). Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Une norme sur E est une application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$. vérifiant les conditions suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,pour tout $x, y \in E$

Remarques 1.1. , L'espace vectoriel E muni d'un norme S'appelle espace normé, noté par : $(E, \|.\|)$. Les application suivantes sont des normes usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| .$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad pour \;\; tout \;\; p \geq 1.$$

Exemple 1.1. ,SoitΩ un ouvert de $\mathbb{R}^n$,l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur Ω est :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \int_\Omega |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}.$$

L'application $\|.\| : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

est une norme.

1.1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.2 ([1])**.** Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. un produit scalaire sur E est une application $\langle .,. \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ tell que pour tout $x, y, x_1, x_2 \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0. \Longleftrightarrow x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

Remarques 1.2. , Un produit scalaire sur E défini une norme sur E donnée par :

$$\forall x \in E : \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 1.2. , L'espace $\mathbb{R}$ muni de produit scalaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : (x, y) = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i.$$

est un produit scalaire.

1.1.3 Exemples d'espaces fonctionnels de base

Ainsi, dans cette section,nous rappelons plusieurs exemples d'espaces fonctionnels les plus couramment rencontrés.

Exemple 1.3 ([10])**.** Considérons l'espace de Banach $C([a, b])$,l'espace de toutes les fonctions continues à valeurs complexes f sur l'intervalle $[a, b]$ fermé, avec la norme

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Il est bien connu, dans tout cours général d'analyse réelle, que la convergence dans l'espace $C[a, b]$par rapport à cette norme est la convergence uniforme de la fonction.

Exemple 1.4. Considérons l'espace de Banach $L^p(1 \leq p < \infty)$ de tout les suites $\{x_k\}_k \in \mathbb{Z}$ telle que $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^p < \infty$,avec la norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ou $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers.

1.1.4 Espaces de Lebesgue

Soit [a,b] telle que $(-\infty < a \leq b < \infty)$,un intervalle finie de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3 ([10])**.** soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$.On note par $L_p[a,b]$ l'espace des classes d'équivalence des fonctions de puissance p-intégrables sur $[a,b]$ a valeurs dans C : $L^p([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow C\}$,$f$ mesurable,et $\|f\|_{L^p} < \infty$. avec :

$$\|f\|_{L^p}([a,b]) = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

L'espace $L^p[a,b]$ muni de la norme $\|.\|$ est un espace de Banach .Si $p = 2$,alors $L^2[a,b]$ est l'espace de classe d'équivalence des fonctions mesurables de carré intégrable sur $[a,b]$. Le produit scalaire sur $L^2[a,b]$ est défini pour toute $fg \in L^2([a,b])$ par :

$$(f,g)_{L^2[a,b]} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

L'espace $L^2([a,b])$ muni de la norme

$$\|f\|_{L^2[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

est un espace de Hilbert.

1.2 Opérateurs linéaires

1.2.1 opérateur auto-adjoint

Définition 1.4. ,Un opérateur $A \in L(E)$ est dit auto-adjoint (ou parfois hermitien) s'il est égal à son adjoint,c'est-à-dire si,$\forall x, y \in E$,

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle .$$

Exemple 1.5. Un opérateur intégral de Fredholm est auto-adjoint si seulement si son noyau k vérifie

$$\overline{k(y,x)} = k(x,y).$$

1.2.2 opérateur adjoint

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F alors, pour tout $\varphi \in E$ et $\psi \in F$, on définit les fonctionnelles linéaires bornées $U \in F^* = L(F, \mathbb{K})$ et $V \in E^* = L(E, \mathbb{K})$ avec :$\mathbb{K} = (\mathbb{R} ou \mathbb{C})$ comme suit

$$F \longrightarrow \mathbb{K} \qquad U : \psi \longmapsto U(\psi)$$

$$et \;\; E \longrightarrow \mathbb{K} \qquad V : \varphi \longmapsto V(\varphi)$$

L'opérateur noté A^* défini sur F^* dans E^* est dit opérateur adjoint de A si l'on a, pour tout $U \in F^* et V \in E^*$

$$F^* \longrightarrow E^*$$

$$A^* : U \longmapsto A^*(U) = U(A(\varphi)) = V(\varphi),$$

ou encore

$$A^* = UoA : \varphi \longmapsto A(\varphi) \longmapsto U(A(\varphi)).$$

Lemme 1.1. *soit φ un élément d'un espace normé E alors, la norme $\|\varphi\|$ est défini par*

$$\|\varphi\| = max\left\{|V'(\varphi)| ; \quad V \in E^*, \quad \|V\| = 1\right\}.$$

Démonstration. $\forall U \in E^*$ telle que $\|U\| = 1$,avec la relation $U(\varphi) = \|\varphi\|$. D'où pour tout $V \in E^*$, avec $\|V\| = 1$,on a

$$|V(\varphi)| \leq \varphi = U(\varphi).$$

□

1.3 Propriétés spectrales des opérateurs linéaires auto-adjoint

On suppose dans la suit que $E = H$ est un espace de Hilbert et que $T \in L(H)$

Définition 1.5 ([6])**.** On dit qu'un opérateur $T \in L(H)$ est auto-adjoint si $T^* = T$,alors

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in H.$$

Proposition 1.1. *Soit $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint.On pose*

$$m = \inf_{u \in H, |u|=1} (Tu, u) et M = \sup_{u \in H, |u|=1} (Tu, u).$$

Alors $\sigma(T) \subset [m, M]$ $\qquad m, M \in \sigma(T)$.

Démonstration. Soit $\lambda > M$, montrons que $\lambda \in \rho(T)$.On a

$$(Tu, u) \leq M |u|^2 \qquad \forall u \in H.$$

et par conséquent

$$(\lambda u - Tu, u) \geq (\lambda - M) |u|^2 = \alpha |u|^2 \, \forall u \in H, avec\alpha > 0.$$

Appliquant le théorème de Lax-Milgram on voit que $\lambda I - T$ est bijectif . Montrons que $M \in \sigma(T)$.La forme $a(u, v) = (Mu - Tu, v)$ est bilinéaire,symétrique et

$$a(u, v) \geq 0 \quad \forall v \in\in H.$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la forme $a(u, v)$ il vient

$$|(Mu - Tu, v)| \leq (Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}} (Mv - Tv, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H.$$

D'où il résulte en particulier que

$$|Mu - Tu| \leq C (Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H. \tag{1.1}$$

Soit (u_n) une suite telle que $|u_n| = 1$ et $(Tu_n, u_n) \longrightarrow M$.Grâce à 1.1 on voit que$|Mu_n - Tu_n| \longrightarrow 0$,et donc $M \in \sigma(T)$.

Les propriétés de m s'obtiennent en remplaçant $Tpar - T$.

□

1.4 systèmes biorthogonaux dans les espaces de Hilbert

Théorème 1.1 ([10]). *Soit A un opérateur densément défini sur un espace de Hilbert H avec un résolvant compact. Supposons que son système de vecteurs racines est un système fermé et minimal dans H.Alors le système biorthogonal à ce système est constitué des vecteurs racines de l'opérateur A^*.*

Démonstration. Nous désignons par $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ le système des vecteurs racines de l'opérateur A,et $z_{k k\in\mathbb{N}}$ le système biorthogonalement adjoint.Nous écrivons l'équation pour les vecteurs propres et les vecteurs associés sous une forme unique

$$Ax_k - \lambda_k x_k = \theta_k x_{k-1}$$

Ou $\theta_k = 0$ si x_k est une vecteur propre, et $\theta_k = 1$ si est un vecteur associé(dans ce cas , nous exigeons en outre que $\lambda_k = \lambda_{k-1}$). Pour toutes les valeurs des indices $k, j \in \mathbb{N}$, nous considérons le produit intérieur

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Ax_k - \lambda_k x_k - \theta_k x_{k-1}, z_j \rangle = \langle x_k, A^* z_j \rangle - \left\langle x_k, \overline{\lambda_k} z_j \right\rangle - \theta_k \langle x_{k-1}, z_j \rangle & (1.2) \\ &= \left\langle x_k, A^* z_j - \overline{\lambda_j} z_j - \theta_{j+1} z_{j+1} \right\rangle + (\lambda_j - \lambda_k) \langle x_k, z_j \rangle + \theta_{j+1} \langle x_k, z_{j+1} \rangle - \theta_k \langle x_{k-1}, z_j \rangle . & (1.3) \end{aligned}$$

Compte tenu de la condition de biorthogonalité, le deuxième terme est égal à zéro pour tout $k, j \in \mathbb{N}$,et les troisième et quatrième termes sont égaux à zéro pour $k \neq j + 1$.Mais si $k = j + 1$,alors les troisième et quatrième termes sont égaux à zéro dans la somme.Ainsi, pour tout $k, j \in \mathbb{N}$ nous obtenons

$$\left\langle x_k, A^* z_j - \overline{\lambda_j} z_j - \theta_{j+1} z_{j+1} \right\rangle = 0.$$

Puisque le système $x_{k k \in \mathbb{N}}$ est fermé dans H, on a

$$A^* z_j - \overline{\lambda_j} z_j = \theta_{j+1} z_{j+1}.$$

Soit $x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ la chaîne du vecteur propre x_n et de tous les vecteurs associés $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ d'un opérateur A correspondant à une valeur propre $\lambda_n = \lambda_{n+1} = ... = \lambda_{n+m}$, et ,$\theta_n = 0 et \theta_{n+1} = ... = \theta_{n+m} = 1$.Aussi,$\theta_{n+m+1} = 0$.D'où

$$A^* z_{n+m} - \overline{\lambda_n} z_{n+m} = 0,$$

$$A^* z_{n+m-1} - \overline{\lambda}_n z_{n+m-1} = z_{n+m}, ..., A^* z_n - \overline{\lambda_n} z_n = z_{n+1}$$

□

1.5 développement biorthogonal et bases de Riesz

Théorème 1.2 ([10]). *Un système fermé et minimal x_k est uniformément minimal dans un espace de Hilbert H si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes les valeurs de indice k ,on a*

$$\|x_k\| \, . \, \|z_k\| \leq C < \infty \tag{1.4}$$

ou z est le système biorthogonal de x_k. En effet, supposons que x_k soit une base dans H.Alors les développements biorthogonaux $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, z_k \rangle x_k$ convergent dans H. C'est pourquoi,$\|\langle f, z_k \rangle x_k\| \longrightarrow 0$ comme $k \longrightarrow \infty$ c-à-d,$\langle f, z_k \|x_k\| \rangle \longrightarrow 0$ comme $k \longrightarrow \infty$ pour tous les $f \in H$.par conséquent , les normes des éléments $z_k \|x_k\|$ sont totalement bornées,alors la condition 1.4 est remplie.

Corollaire 1.1. *Toute base dans H est un système uniformément minimal,et donc 1.4 est valable. La condition 1.4 est dite condition de minimalité uniforme du système x_k. En effet, il existe des exemples de* *systèmes fermés, minimaux et uniformément minimaux qui ne sont pas une base.Par conséquent, 1.4 est une condition nécessaire pour être une base.*

1.6 involutions

Définition 1.6. Une fonction $f : S \longrightarrow S$ est une involution (ou est involutive) si, qui soit X dans S,$f\,(f(x)) = x$

Exemple 1.6. L'application qui à un entier relatif n associe son opposé$-n$ est une involution de l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

1.7 séries des fonctions

(converge uniforme)

Définition 1.7 ([5])**.** Soit (f_n) une suite de fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on dit que $\sum f_n$ converge uniformément sur I si (S_n) converge uniformément sur I

Remarques 1.3.

1. si $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors $\sum f_n$ converge simplement sur I.
2. si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ converge uniformément sur I, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum(f_n+\lambda g_n)$ converge uniformément sur I.

Chapitre 2

Une classe de problèmes spectraux pour un opérateur différentiel ordinaire avec involution

Dans ce chapitre, nous considérons une classe de problèmes spectraux pour un opérateur différentiel ordinaire du second ordre avec involution d'inversion et des conditions aux limites non locales de type périodique. Un critère de simplicité des valeurs propres du problème est démontré : les valeurs propres seront simples si et seulement si le nombre $r = \sqrt{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}$, avec $|\varepsilon| < 1$ est irrationnel. Nous montrons que si le nombre r est irrationnel, alors toutes les valeurs propres du problème sont simples, et le système de fonctions propres du problème est complet et minimal mais ne forme pas une base inconditionnelle dans $L^2(-\pi,\pi)$. Pour le cas des nombres rationnels r, on prouve qu'un système de fonctions propres et associées forme une base inconditionnelle dans $L^2(-\pi,\pi)$.

2.1 Problème spectral

L'utilisation de la méthode de Fourier pour résoudre le problème inverse (7)-(9) conduit à un problème spectral pour l'opérateur $\mathcal{L}$ donné par l'expression différentielle :

$$\mathcal{L}X(x) = -X''(x) + \varepsilon X''(-x) = \lambda X(x),\ x \in [-\pi,\pi], \tag{2.1}$$

et les conditions aux limites de type périodique

$$\begin{cases} X(-\pi) = X(\pi), \\ X'(-\pi) = aX'(\pi), \end{cases} \tag{2.2}$$

où $\lambda \geq 0$ est un paramètre. On remarque que, le problème spectral (2.1)-(2.2) a été étudie par M. Sadybekov et al. dans [11].

2.1.1 Solution générale de l'équation (2.1)

Pour construire une solution générale de l'équation (2.1), nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1 ([8])**.** *La solution générale de l'équation* (2.1) *est donnée sous la forme suivante :*

$$X(x) = A\cos(\mu_1 x) + B\sin(\mu_2 x)\,,\ \mu_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}}\ \text{et}\ \mu_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}, \tag{2.3}$$

où A et B sont des constantes arbitraires.

Démonstration. Il est facile de voir que les fonctions (2.3) sont des solutions de (2.1). Démontrons l'absence d'autres solutions. Toute fonction $X(x)$ peut être représentée comme une somme de fonctions paires et impaires c'est à dire

$$X(x) = S(x) + W(x)\,, \tag{2.4}$$

où S est une fonction paire et W est une fonction impaire.

En remplaçant (2.4) dans (2.1), on obtient :

$$\begin{cases} S''(x) = -\mu_1^2 S(x)\,, \\ W''(x) = -\mu_2^2 W(x)\,. \end{cases} \tag{2.5}$$

On résoudre (2.5) et avec (2.4), on obtient (2.3). □

2.1.2 Valeurs propres du problème (2.1)-(2.2)

Pour les valeurs propres du problème (2.1)-(2.2), nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Le problème spectral* (2.1)-(2.2) *a deux suites de valeurs propres définies par :*

$$\begin{aligned} \lambda_k &= (1-\varepsilon)\,k^2,\ k\in\mathbb{N}, \\ \lambda_n &= (1+\varepsilon)\,n^2,\ n\in\mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Démonstration. En utilisant (2.3) et (2.2), on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} B\sin(\pi\mu_2) = 0, \\ A\mu_1(1+a)\sin(\pi\mu_1) + B\mu_2(1-a)\cos(\pi\mu_2) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Le système (2.7) admet un infinité de solutions si et seulement si le déterminant de ce système est nul c'est à dire

$$\sin(\pi\mu_1)\sin(\pi\mu_2) = 0. \tag{2.8}$$

D'après (2.8) et (2.3), on trouve (2.6). □

Lemme 2.2. *Le problème spectral* (2.1)-(2.2) *a valeurs propres multiples si et seulement si le nombre r défini par :*

$$r = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tag{2.9}$$

est rationnel.

Démonstration. En effet, supposons que les deux suites de valeurs propres sont coïncident, donc on a :

$$\lambda_k = \lambda_n \Leftrightarrow (1-\varepsilon)\, k^2 = (1+\varepsilon)\, n^2.$$

Autrement dit,

$$r = \frac{n}{r} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \in \mathbb{Q}$$

□

2.2 Problème spectral pour les nombres irrationnels r

Lemme 2.3. *Soit r défini par* (2.9) *est irrationnel. Les fonctions propres du problème spectral* (2.1)-(2.2) *sont données par :*

$$\begin{aligned} X_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx)\,,\ k \in \mathbb{N}, \\ X_n(x) &= (1-a)\, r \cos(n\pi) \cos\left(\frac{n}{r}x\right) - (1+a) \sin\left(\frac{n\pi}{r}\right) \sin(nx)\,,\ n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Démonstration. 1. En utilisant (2.10) et (2.6), on obtient :

$$\begin{cases} -X_k''(x) + \varepsilon X_k''(-x) = \lambda_k X_k(x)\,, \\ -X_k''(-x) + \varepsilon X_k''(x) = \lambda_k X_k(-x) \end{cases} \tag{2.11}$$

On pose

$$S(x) = X_k(x) + X_k(-x) \ \text{ et } \ W(x) = X_k(x) - X_k(-x) \tag{2.12}$$

De (2.11) et (2.12), nous avons :

$$S''(x) = -k^2 S(x) \Rightarrow S(x) = A\cos(kx), \ A \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

et

$$W''(x) = -(rk)^2 W(x) \Rightarrow W(x) = B\sin(rkx), \ B \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Avec (2.12)-(2.14), on obtient :

$$X_k(x) = \frac{A}{2}\cos(kx) + \frac{B}{2}\sin(rkx) \tag{2.15}$$

En utilisant (2.15) et (2.2), on trouve $B = 0$. D'autre part, avec la normalisation, nous avons :

$$\int_{-\pi}^{\pi} X_k^2(x) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

d'où $X_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)$.

2. Avec (2.10) et (2.1), on a :

$$\begin{cases} -X_n''(x) + \varepsilon X_n''(-x) = \lambda_n X_n(x), \\ -X_n''(-x) + \varepsilon X_n''(x) = \lambda_n X_n(-x). \end{cases} \tag{2.16}$$

On pose

$$S(x) = X_n(x) + X_n(-x) \text{ et } W(x) = X_n(x) - X_n(-x). \tag{2.17}$$

De (2.16) et (2.17), on obtient :

$$S''(x) = -\left(\frac{n}{r}\right)^2 S(x) \Rightarrow S(x) = A\cos\left(\frac{n}{r}x\right), \ A \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

et

$$W''(x) = -n^2 W(x) \Rightarrow W(x) = B\sin(nx), \ B \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Grâce (2.18)-(2.19), nous avons :

$$X_n(x) = \frac{A}{2}\cos\left(\frac{n}{r}x\right) + \frac{B}{2}\sin(nx). \tag{2.20}$$

En utilisant (2.20) et (2.2), on obtient :

$$A(1+a)\sin\left(\frac{n}{r}\pi\right)+Br(1-a)\cos(n\pi)=0.$$

Si on choisi

$$A=2r(1-a)\cos(n\pi)\ \text{ et } B=-2(1+a)\sin\left(\frac{n}{r}\pi\right),$$

Alors, $X_n(x)$ est donné par :

$$X_n(x)=(1-a)r\cos(n\pi)\cos\left(\frac{n}{r}x\right)-(1+a)\sin\left(\frac{n\pi}{r}\right)\sin(nx),\ n\in\mathbb{N}^*.$$

□

Lemme 2.4. *Le système de fonctions* (2.10) *est complet et minimal en* $L^2(-\pi,\pi)$.

Démonstration. Considérons une fonction arbitraire $f(x)$ orthogonale au système (2.10). Nous avons :

$$0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}[f(x)+f(-x)]\cos(kx)\,dx.$$

Cependant, le système $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx),\ k\in\mathbb{N}\right\}$ forme une base dans $L^2(0,\pi)$. Donc, on a :

$$f(x)+f(-x)=0 \text{ pour tout } x\in[-\pi,\pi], \tag{2.21}$$

d'où f est un e fonction impaire.

D'autre part, l'orthogonalité de $f(x)$ à toutes les fonctions propres $X_n(x)$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, on trouve :

$$\begin{aligned}0=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)X_n(x)&=(1-a)r\cos(n\pi)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\left(\frac{n}{r}x\right)dx\\&\quad-(1+a)\sin\left(\frac{n}{r}\pi\right)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx\\&=-(1+a)\sin\left(\frac{n}{r}\pi\right)\int_0^{\pi}[f(x)-f(-x)]\sin(nx)\,dx.\end{aligned}$$

Mais, le système $\{\sin(nx),\ n\in\mathbb{N}^*\}$ forme une base dans $L^2(0,\pi)$. Donc, on a :

$$f(-x)-f(x)=0,\ \text{pour tout } x\in[-\pi,\pi], \tag{2.22}$$

d'où, f est une fonction paire. Par conséquent, de (2.21) et (2.22), on obtient $f(x)=0$ pour tout $x\in[-\pi,\pi]$. □

Pour démontrer que le système de fonctions propres (2.10) ne constitue pas une base inconditionnelle, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.5. *Soit r irrationnel. Alors, le système de fonctions propres* (2.10) *du problème spectral* (2.1)-(2.2) *est complet et minimal mais ne forme pas une base inconditionnelle dans $L^2(-\pi,\pi)$.*

Démonstration. En calculant les normes des fonctions propres (2.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|X_k\| = 1,\\
&\|X_n\|^2 = \pi(1-a)^2 r^2\left[1+\frac{r}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{r}\right)\right]+\pi(1+a)^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{r}\right).
\end{aligned}$$

Donc, pour $n \to +\infty$ nous avons :

$$\|X_n\|^2 = \pi(1-a)^2 r^2 + \pi(1+a)^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{r}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.23}$$

En calculant le produit scalaire en $L^2(-\pi,\pi)$ de X_k et X_n avec $k,n\to+\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\langle X_k, X_n\rangle| &= \frac{(1-a)r}{\sqrt{\pi}}\cos(n\pi)\left|\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\sin\left(\frac{n}{r}x\right)dx\right|\\
&= \frac{|1-a|r}{\sqrt{\pi}}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos\left(\frac{n}{r}x\right)dx\right|\\
&= \frac{|1-a|r}{\sqrt{\pi}}\left|\int_{0}^{\pi}\left[\cos\left(k+\frac{n}{r}\right)x+\cos\left(k-\frac{n}{r}\right)x\right]\right|dx\\
&= |1-a|r\sqrt{\pi}\left|\frac{\sin\left(k-\frac{n}{r}\right)x}{\left(k-\frac{n}{r}\right)k}+O\left(\frac{1}{k+n}\right)\right|
\end{aligned}$$

D'après le théorème d'approximation de Dirichlet [14, Theo. 1A, page 34], pour tout nombre irrationnel α, il existe un ensemble infini de fractions irréductibles $\frac{p}{q}$ (où p et q sont des entiers) tels que

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

On pose $\alpha = \frac{1}{r}$, on obtient qu'il existe des sous-suites infinies des entiers naturels k_j et n_j telles que

$$\left|\frac{1}{r}-\frac{k_j}{n_j}\right| < \frac{1}{n_j^2},$$

d'où

$$\left|k_j - \frac{n_j}{r}\right| < \frac{1}{n_j}.$$

Donc, on obtient :

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\sin\left(k_j - \frac{n_j}{r}\right)\pi}{\left(k_j - \frac{n_j}{r}\right)\pi} = 1.$$

Par conséquent, nous avons :

$$\lim_{j\to+\infty} \left|\left\langle X_{k_j}, X_{n_j}\right\rangle\right| = |1-a|\, r\sqrt{\pi}. \tag{2.24}$$

De (2.23), on an :

$$\lim_{j\to+\infty} \left\|X_{n_j}\right\| = |1-a|\, r\sqrt{\pi}. \tag{2.25}$$

En utilisant (2.23)-(2.25), on trouve :

$$\lim_{j\to+\infty} \left|\left\langle \frac{X_{k_j}}{\left\|X_{k_j}\right\|}, \frac{X_{n_j}}{\left\|X_{n_j}\right\|}\right\rangle\right| = 1.$$

D'après Théorème 3.135 dans [10, page 2019], la condition nécessaire de la propriété de base inconditionnelle n'est pas satisfait. Dans ce cas, le système de fonctions propres (2.10) du problème spectral (2.1)-(2.2) est complet et minimal mais ne forme pas une base inconditionnelle dans $L^2(-\pi,\pi)$. □

2.3 Problème spectral pour les nombres rationnels r

Dans cette section, on considère le cas où r est un nombre rationnel. Alors, il existe des nombres naturels n_0 et k_0 tels que $r = \frac{n_0}{k_0}$. Dans ce cas, le problème spectral (2.1)-(2.2) a un nombre infini de valeurs propres multiples, c'est à dire

$$\lambda_{k_0 j} = \lambda_{n_0 j},\ j \in \mathbb{N}^*. \tag{2.26}$$

Pour $a = 1$, le problème spectral (2.1)-(2.2) a été étudie dans [8, 9]. Dans ce cas, il a été montré que les sous-espaces propres, constitués de deux fonctions propres, correspondent aux valeurs propres doubles. Pour $a \neq 1$, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.6. *1. Si $\frac{n}{k} \neq \frac{n_0}{k_0}$, alors les fonctions propres du problème spectral* (2.1)-(2.2) *sont données* *par :*

$$
\begin{aligned}
X_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \\
X_n(x) &= (1-a) r \cos(n\pi) \cos\left(\frac{n}{r} x\right) - (1+a) \sin\left(\frac{n\pi}{r}\right) \sin(nx),
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, sauf pour les cas où $k = k_0 j$ et $n = n_0 j$ pour certains j.

2. *Si $\frac{n}{k} = \frac{n_0}{k_0}$ c'est à dire $n = k_0 j$ et $n = n_0 j$, alors les fonctions propres et les fonctions propres associées du problème spectral* (2.1)-(2.2) *sont données par :*

$$
\begin{aligned}
X_{k_0 j}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k_0 j x), \\
X_{n_0 j}(x) &= \frac{1}{2k_0 j \pi (1-\varepsilon)} \left[x \sin(k_0 j x) + \frac{(1+a)(-1)^{(n_0+k_0)j}}{r(1-a)} \sin(n_0 j x) \right].
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Démonstration. □

Lemme 2.7. *Le système des fonctions propres et associées* (2.27)-(2.28) *du problème spectral* (2.1)-(2.2) *(4.1) est complet et minimal en $L^2(-\pi, \pi)$.*

Démonstration. La preuve est similaire à la preuve du Lemme 2.5. Soit f une fonction orthogonale au système de fonctions (2.27)-(2.28). Nous avons :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) X_k(x)\, dx = \int_0^{\pi} [f(x) + f(x)] \cos(kx)\, dx = 0,$$

d'où, $f(x) + f(-x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$.

De plus, de l'orthogonalité de $f(x)$ à toutes les fonctions $X_n(x)$ de (2.27) on obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ sauf les cas où } n = n_0 j \text{ pour certains } j. \tag{2.29}$$

D'autre part, d'après l'orthogonalité de $f(x)$ à toutes les fonctions $X_{n_0 j}(x)$ de (2.28), on obtient que (2.29) est vrai pour les cas $n = n_0 j$ c'est à dire $f(x) - f(-x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$.

Par conséquent, $f(x) = 0$ est vrai sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Ceci prouve la complétude du système de fonctions (2.27)-(2.28) dans $L^2(-\pi, \pi)$.

Puisque le système considéré (2.27)-(2.28) est un système des fonctions propres et associées d'un opérateur linéaire, alors il a un système bi-orthogonal constitué des fonctions propres et associées d'un opérateur adjoint. □

2.4 Problème spectral adjoint

Définition 2.1. le problème adjoint de problème spectral (2.1)-(2.2) est donné par :

$$\mathcal{L}^* y(x) = -y''(x) + \varepsilon y''(-x) = \lambda y(x), \ -\pi < x < \pi, \tag{2.30}$$

$$\begin{cases} y(-\pi) = by(\pi), \\ y'(-\pi) = y'(\pi), \end{cases} \tag{2.31}$$

où $b = (1 + a\varepsilon) / (a + \varepsilon)$.

Le système de fonctions propres et associées de ce problème est donnés par :

$$Y_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{1-a}{2(1+a)} r^2 x \tag{2.32}$$

correspond à une valeur propre nulle.

Pour les cas où $\frac{n}{k} \neq \frac{n_0}{k_0}$, les fonctions propres du problème spectral adjoint (2.30)-(2.31) sont données par :

$$Y_k(x) = \cos(kx) - \frac{1-a}{1+a} r^2 \frac{(-1)^k}{\sin(rk\pi)} \sin(rkx), \tag{2.33}$$

$$Y_n(x) = \frac{1}{1+a} \frac{1}{\sin(n\pi/r)} \sin(nx) \tag{2.34}$$

correspondant aux valeurs propres λ_k et λ_n avec $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sauf les cas $n = n_0 j$ et $k = k_0 j$ pour certain j.

Pour les cas où $\frac{n}{k} = \frac{n_0}{k_0}$ (où $k = k_0 j$ et $n = n_0 j$ pour certain j), les fonctions propres et associées sont données par :

$$\begin{aligned} Y_{n_0 j}(x) &= -k_0 j\pi(1-\varepsilon) \frac{1-a}{1+a} r (-1)^{(n_0+k_0)j} \sin(n_0 jx), \\ Y_{k_0 j}(x) &= -\frac{1-a}{1+a} r^2 (-1)^{(n_0+k_0)j} x \cos(n_0 jx) + \cos(k_0 jx). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Lors de la construction de ce système de fonctions propres et associées du problème adjoint, nous avons normalisé les fonctions propres de sorte que les conditions de bi-orthogonalité suivantes :

$$\langle X_k, Y_k \rangle = 1, \ \langle X_n, Y_n \rangle = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \text{ sauf pour les cas } k = k_0 j, n = n_0 j \text{ pour certains } j.$$

Pour les cas où $\frac{n}{k} = \frac{n_0}{k_0}$ (c'est à dire $n = n_0 j$ et $k = k_0 j$ pour certains j), nous avons exigé le des conditions de bi-orthogonalité suivantes :

$$\langle X_{k_0 j}, Y_{k_0 j} \rangle = 1,\ \langle X_{n_0 j}, Y_{n_0 j} \rangle = 1,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans $L^2(-\pi, \pi)$. Par calcul direct on trouve les normes des fonctions propres et associées pour les systèmes bi-orthogonales telles que

$$\|X_k\|^2 = 1 + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 \frac{r^2}{\sin^2(rk\pi)},\ \|Y_k\| = 1,$$
$$\|X_n\|^2 = \frac{1}{(1+a)^2} \frac{1}{\sin\left(\frac{n\pi}{r}\right)},\ \|Y_n\|^2 = (1-a)^2 r^2 \left[1 + \frac{r}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{r}\right)\right] + (1+a)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{r}\right)$$

CHAPITRE 3

ÉTUDE DU PROBLÈME INVERSE (7)-(9)

Dans ce chapitre, nous avons considéré uniquement le cas $r = \sqrt{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}$ est rationnel. Dans ce cas, Le système de fonctions propres du problème spectral (2.1)-(2.2) forme une base inconditionnelle. En utilisant la méthode de Fourier, on démontre un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème inverse (7)-(9).

Pour l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse (7)-(9), nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses suivantes :*

(H1) : $\varphi_1 \in \mathcal{C}^2(-\pi,\pi)$ *et* $\psi_1 \in \mathcal{C}^4(-\pi,\pi)$.

(H2) : $\varphi_1(-\pi) = \varphi_1(\pi)$, $\varphi_1'(-\pi) = a\varphi_1'(\pi)$.

(H3) : $\psi_1(-\pi) = \psi_1(\pi)$, $\psi_1'(-\pi) = a\psi_1'(\pi)$.

Alors, le problème inverse (7)-(9) *admet une solution unique* $\{u(x,t), F(x)\}$.

Démonstration. ☞ **Existence :** On note par $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \neq n_0 j,\ \forall j \in \mathbb{N}\}$. Alors, le système de fonctions

$$\{X_k(x), k \in \mathbb{N};\ X_n(x), n \in \mathcal{N};\ jX_{n_0 j}(x), j \in \mathbb{N}\}, \tag{3.1}$$

forme une base de Riesz dans $L^2(-\pi,\pi)$.

Par conséquent, toute solution du problème inverse (7)-(9) peut être représentée sous la forme d'une série bi-orthogonale (2.27),

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) X_k(x) + \sum_{n\in\mathcal{N}} u_n(t) X_n(x) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \left[jX_{n_0 j}(x) - tjX_{k_0 j}(x)\right] u_{n_0 j}(t), \tag{3.2}$$

et

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k X_k(x) + \sum_{n\in\mathcal{N}} f_n X_n(x) + \sum_{j\in\mathbb{N}} jX_{n_0 j}(x) f_{n_0 j}, \tag{3.3}$$

où $u_k(t)$, $u_n(t)$ et $u_{n_0 j}(t)$ sont des fonctions inconnues et f_k, f_n, $f_{n_0 j}$ sont des coefficients inconnus. D'après la condition initiale et finale (8), nous avons :

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k X_k(x) + \sum_{n\in\mathcal{N}} \varphi_n X_n(x) + \sum_{j\in\mathbb{N}} j X_{n_0 j}(x)\, \varphi_{n_0 j}, \tag{3.4}$$

$$\psi_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k X_k(x) + \sum_{n\in\mathcal{N}} \psi_n X_n(x) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \left[j X_{n_0 j}(x) - T j X_{k_0 j}(x) \right] \psi_{n_0 j}, \tag{3.5}$$

où φ_k, φ_n et $\varphi_{n_0 j}$, ψ_k, ψ_n et $\psi_{n_0 j}$ sont des coefficients numériques connus.

En substituant (3.2) et (3.3) dans (7)-(9), en tenant compte de (3.4) et (3.5), on obtient les problèmes suivants :

$$\begin{cases} u_k'(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k,\ 0 \prec t \leq T, \\ u_k(0) = \varphi_k,\ u_k(T) = \psi_k\ k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} u_n'(t) + \lambda_n u_n(t) = f_n,\ 0 \prec t \leq T, \\ u_n(0) = \varphi_n,\ u_n(T) = \psi_n,\ k \in \mathcal{N}, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} u_{n_0 j}'(t) + \lambda_{n_0 j} u_{n_0 j}(t) = f_{n_0 j},\ 0 \prec t \leq T, \\ u_{n_0 j}(0) = \varphi_{n_0 j},\ u_{n_0 j}(T) = \psi_{n_0 j},\ j \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Donc, les solutions de chacun des problèmes (3.6) à (3.8) existent, sont uniques et peuvent être écrits explicitement :

$$u_0(t) = \varphi_0 + \frac{\psi_0 - \varphi_0}{T} t, \quad f_0 = \frac{\psi_0 - \varphi_0}{T}; \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} u_k(t) = e^{-\lambda_k t} \varphi_k + \frac{1-e^{-\lambda_k t}}{1-e^{-\lambda_k T}} \left(\psi_k - e^{-\lambda_k T} \varphi_k \right), \\ f_k = \frac{\lambda_k}{1-e^{-\lambda_k T}} \left(\psi_k - e^{-\lambda_k T} \varphi_k \right); \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} u_n(t) = e^{-\lambda_n t} \varphi_n + \frac{1-e^{-\lambda_n t}}{1-e^{-\lambda_n T}} \left(\psi_n - e^{-\lambda_n T} \varphi_n \right), \\ f_n = \frac{\lambda_n}{1-e^{-\lambda_n T}} \left(\psi_n - e^{-\lambda_n T} \varphi_n \right); \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} u_{n_0 j}(t) = e^{-\lambda_{n_0 j} t} \varphi_{n_0 j} + \frac{1-e^{-\lambda_{n_0 j} t}}{1-e^{-\lambda_{n_0 j} T}} \left(\psi_{n_0 j} - e^{-\lambda_{n_0 j} T} \varphi_{n_0 j} \right), \\ f_{n_0 j} = \frac{\lambda_{n_0 j}}{1-e^{-\lambda_{n_0 j} T}} \left(\psi_{n_0 j} - e^{-\lambda_{n_0 j} T} \varphi_{n_0 j} \right); \end{cases} \tag{3.12}$$

Maintenant, en substituant (3.9)-(3.12) dans (3.2) et (3.3), on arrive à une solution formelle du problème inverse (7)-(9). De (3.10)-(3.12), on obtient les estimations suivantes :

$$
\begin{aligned}
&|u_k(t)| \leq C(|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad \left|\frac{d}{dt}u_k(t)\right| \leq C(|\varphi_k| + |\psi_k|)|\lambda_k|, \\
&|u_n(t)| \leq C(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad \left|\frac{d}{dt}u_n(t)\right| \leq C(|\varphi_n| + |\psi_n|)|\lambda_n|, \\
&|u_{n_0j}(t)| \leq C(|\varphi_{n_0j}| + |\psi_{n_0j}|), \quad \left|\frac{d}{dt}u_{n_0j}(t)\right| \leq C(|\varphi_{n_0j}| + |\psi_{n_0j}|)|\lambda_{n_0j}|, \\
&|f_k| \leq C(|\varphi_k| + |\lambda_k||\psi_k|), \\
&|f_n| \leq C(|\varphi_n| + |\lambda_n||\psi_n|), \\
&|f_{n_0j}| \leq C(|\varphi_{n_0j}| + |\lambda_{n_0j}||\psi_{n_0j}|).
\end{aligned}
$$

D'après (3.9)-(3.12) et les estimations précédentes, nous avons l'inégalité suivantes :

$$
\|u\|_{L^2(D_T)} + \|F\|_{L^2(-\pi,\pi)} \leq C\left(\|\varphi\|_{L^2(-\pi,\pi)} + \|\psi\|_{L^2(-\pi,\pi)}\right). \tag{3.13}
$$

☞ **Unicité :** Soient $\{u_1(x,t), F_1(x)\}$ et $\{u_2(x,t), F_2(x)\}$ deux solutions du problème inverse (7)-(9). On, pose :

$$
v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) \text{ et } S(x) = F_1(x) - F_2(x).
$$

D'après (3.13), nous avons :

$$
\|v\|_{L^2(D_T)} + \|S\|_{L^2(-\pi,\pi)} \leq 0,
$$

d'où $v = 0$ et $S = 0$, donc $u_1 = u_2$ et $F_1 = F_2$, donc l'unicité de la solution.

□

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons considéré une classe de problèmes inverses de terme source dépendant de l'espace pour une équation de la chaleur avec involution et une condition aux limites de type périodique. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ Nous considérons une classe de problèmes spectraux pour un opérateur différentiel ordinaire du second ordre avec involution d'inversion et des conditions aux limites non locales de type périodique. Un critère de simplicité des valeurs propres du problème est démontré : les valeurs propres seront simples si et seulement si le nombre $r = \sqrt{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}$, avec $|\varepsilon| < 1$ est irrationnel. Nous montrons que si le nombre r est irrationnel, alors toutes les valeurs propres du problème sont simples, et le système de fonctions propres du problème est complet et minimal mais ne forme pas une base inconditionnelle dans $L^2(-\pi, \pi)$. Pour le cas des nombres rationnels r, on prouve qu'un système de fonctions propres et associées forme une base inconditionnelle dans $L^2(-\pi, \pi)$.
- ✓ Nous avons considéré uniquement le cas $r = \sqrt{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}$ est rationnel. Dans ce cas, Le système de fonctions propres du problème spectral (2.1)-(2.2) forme une base inconditionnelle. En utilisant la méthode de Fourier, on démontre un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème inverse (7)-(9).

Bibliographie

[1] I. AOUINA. Probléme inverse pour une équation de diffusion avec une condition au limite non locale. Master's thesis, Université de M'sila, Algérie, Juin 2021.

[2] A. Cabada and A.F. Tojo. Equations with involutions. In *Available from : http ://users.math.cas.cz/ sremr/wde2014/prezentace/cabada.pdf*, 2014.

[3] A. Cabada and A.F. Tojo. *Equations with involutions*. Atlantis Press, 2015.

[4] T. Carleman. Sur la theorie des Ã©quations intÃ©grales et ses applications. *Verhandl. des internat. Mathem. Kongr. I., Zurich*, pages 138–151, 1932.

[5] F.ATHMANI. Probléme inverse pour une équation télégraphique linéaire. Master's thesis, Université de M'sila, Algérie, Juin 2022.

[6] H.BREZIS. *Analyse fonctionnelle , theorie and application*. masson,paris, 1992.

[7] M. Kirane and N. Al-Salti. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9 :1243–1251, 2016.

[8] A. Kopzhassarova and A. Sarsenbi. Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution. *Abstr. Appl. Anal.*, 2012 :1–6, 2012.

[9] A.A. Kopzhassarova, A.L. Lukashov, and A.M. Sarsenbi. Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution. *Abstr. Appl. Anal.*, 2012 :Article ID 590781, 2012.

[10] M.RUZHANSKY, M.SADYBEKOV, and D.SURAGAN. *Spectral Geometry of Partial Differential Operators*. New York, 2020.

[11] M. Sadybekov, G. Dildabek, and M. Ivanova. Direct and inverse problems for nonlocal heat equation with boundary conditions of periodic type. *Bound. Value Probl.*, 2022 :53, 2022.

[12] A.M. Sarsenbi. Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator. *Differ. Equ.*, 46(4) :506–511, 2010.

[13] A.M. Sarsenbi and A.A. Tengaeva. On the basis properties of root functions of two generalized eigenvalue problems. *Differ. Equ.*, 48(2) :1–3, 2012.

[14] W.M Schmidt. *Diophantine Approximations and Diophantine Equations*. Lecture Notes in Mathematics Book Series, vol. 1467. Springer, Berlin, 1991.

[15] J. Wiener. *Generalized Solutions of Functional-Differential Equations*. World Scientific Publishing, New Jersey, 1993.

ملخص: في هذه المذكرة، درسنا فئة من المسائل العكسية ذات معامل المصدر متعلق بمتغير الفضاء بالنسبة لمعادلة الحرارة مع الانقلاب في متغير الفضاء مع شروط حدية من النوع الدوري. استخدمنا طريقة فورييه فتحصلنا على مسألة طيفية لمؤثر تفاضلي خطي من الدرجة الثانية مع الانقلاب في المتغير. قمنا بحساب جميع القيم الذاتية والدوال الذاتية لهذه المسألة الطيفية. في الحالة التي تكون فيها جميع القيم الذاتية بسيطة فإن الدوال الذاتية لا تشكل أساسا غير مشروط للفضاء $L^2(-\pi,\pi)$. أما في حالة القيم الذاتية مضاعفة فقد اثبتنا أن جملة الدوال الذاتية والدوال المرفقة تشكل أساسا غير مشروط للفضاء $L^2(-\pi,\pi)$ مما سمح لنا ببناء الحل للمسألة العكسية وإثبات أن الحل موجود ووحيد.

كلمات مفتاحية: معادلة الحرارة مع الانقلاب، شرط حدودي من النوع الدوري، الدوال الذاتية، الدوال المرفقة، مسألة عكسية.

Dans ce mémoire, nous avons considéré une classe de problèmes inverses de terme source dépendant de l'espace pour une équation de la chaleur avec involution et une condition aux limites de type périodique. L'utilisation de la méthode de Fourier conduit à un problème spectral pour un opérateur différentiel ordinaire du seconde ordre avec involution. Toutes les fonctions propres de ce problème spectral sont construites. Dans le cas où toutes les valeurs propres du problème sont simples, le système de fonctions propres ne forme pas une base inconditionnelle. Un critère lorsque ce problème spectral peut avoir un nombre infini de valeurs propres multiples est prouvé. Les sous-espaces racine correspondants consistent en une fonction propre et une fonction associée. Nous prouvons que le système des fonctions racines forme une base inconditionnelle et peut être utilisée pour construire une solution du problème inverse. L'existence d'une solution unique de ce problème inverse est prouvée.

Mots-Clés : Équation de la chaleur avec involution, Condition aux limites de type périodique, Fonctions propres, Fonctions associées, Problème inverse.

In this memoir, we have considered a class of inverse space-dependent source term problems for a heat equation with involution and a periodic boundary condition. The use of Fourier's method leads to a spectral problem for an ordinary second-order differential operator with involution. All the eigenfunctions of this spectral problem are constructed. In the case where all the eigenvalues of the problem are simple, the system of eigenfunctions does not form an unconditional basis. A criterion when this spectral problem can have an infinite number of multiple eigenvalues is proved. The corresponding root subspaces consist of an eigenfunction and an associated function. We prove that the system of root functions forms an unconditional basis and can be used to construct a solution of the inverse problem. The existence of a unique solution of this inverse problem is proved.

Keywords : Heat equation with involution, Periodic boundary condition, Eigen functions, Associated functions, Inverse problem.