Table des matières

0.1 Introduction 1
0.2 Notation 4

1 Introduction aux équations aux dérivées partielles 5

1.1 Notions générales sur l'EDPs classique 5
1.1.1 EDP linéaires du 1^{er} ordre 6
1.1.2 EDP linéaire du $2^{ème}$ ordre 7
1.2 Classifications des EDP 7
1.3 Problèmes types aux dérivées partielles 8
1.4 Equations différentielles partielles d'ordre fractionnaire 9
1.4.1 Dérivées fractionnaires 10
1.4.2 Solution de problème de Cauchy pour une équation fractionnaire . . . 12
1.5 Théorème de point fixe 13

2 Mesure de non compacité 14

2.1 Notion sur les opérateurs 14
2.2 Mesure de non compacité 16
2.2.1 Mesure de Kuratowski 16
2.2.2 Mesure de Hausdorff 19
2.2.3 Mesure de non compacité sur les opérateurs 20

3 Resolution d'équations differentielles partielles d'ordre fractionnaires 22

3.1 La transformée de Laplace 22

3.2 Équations différentielles partielles de l'ordre fractionnaire 23
3.2.1 Solution de problèmes de Cauchy pour les équations d'ondes et diffusion fractionnée 23
3.2.2 Probleme de Cauchy pour les équations bidimensionnelles 24

Bibliographie **32**

0.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifique et sont d'une grande utilité dans la modélisation de nombreux problèmes de la physique mathématique. Ces équations peuvent être classifiées en plusieurs catégories.

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence des solutions pour certaines classes d'équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire en appliquant notion de la mesure de non compacité sur ces équations à l'aide par des transformations notatment la trnsformée de Laplace ou de Fourier

Biacino et Miseredino étudié le problème de Dirichlet sur un rectangle $[a,b]x[a',b']$ pour un opérateur différentiel bidimensionnel

$$Lu = Eu + Fu \tag{0.1.1}$$

Où E est un opérateur uniformément fortement elliptique du quatrième ordre, tandis que P est un opérateur qui contient une dérivée partielle spéciale $D^{\alpha}u$ d'ordre fractionnaire $a = (a_1, a_2)(a_j > 0,\ j = 1, 2),\ |\alpha| = a_1 + a_2$, et a prouvé un théorème "alternatif" et un résultat d'existence et unicité pour le problème de Dirichlet pour l'opérateur (0.1.1). Ainsi ils ont obtenu des énoncés similaires pour le même problème de Dirichlet dans le cas unidimensionnel (0.1.1) sur un intervalle $[a,b]$

à l'étude du problème de Dirichlet sur un intervalle $[a,b]$ pour un opérateur différentiel unidimensionnel (0.1.1)

Un problème de type Cauchy pour l'équation différentielle fractionnaire partielle suivante:

$$(D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t) = (D^{\beta}_{0+,x}u)(x,t) \quad (1 \leq \alpha \leq 2; 1 \leq \beta \leq 2). \tag{0.1.2}$$

Avec

$$(D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{[\alpha]+1} \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)} d\tau \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0,\ \alpha > 0 \tag{0.1.3}$$

Il a prouvé l'existence et l'unicité d'une solution $u(x,t)$ et une représentation pour une telle solution. Dans le cas où et $\beta = 2$ *et* $1 \leq \alpha \leq 2$, il a prouvé la positivité de la solution fondamentale et a étudié le comportement asymptotique de la solution $u(x,t)$.

Les résultats obtenus peuvent être interprétés comme un phénomène entre l'équation de la chaleur ($\alpha = 1; \beta = 2$) et l'équation d'onde ($\alpha = \beta = 2$).

En relation avec les problèmes des fractales, les équations différentielles partielles fractionnées des formes

$$(D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t) = -Ax^{-\beta}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (0 < \alpha \leq 1/2;\ A > 0;\ \beta \geq 0) \tag{0.1.4}$$

Et

$$(D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t) = -A\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{k}{x}u(x,t)\right] \quad (0 < \alpha \leq 1/2;\ A > 0;\ \ k \in \mathbb{R}) \tag{0.1.5}$$

En appliquant la transformée de Laplace par rapport à t, ils ont réduit ces équations à certaines équations différentielles ordinaires pour

$$U(x,t) = (\mathcal{L}_t u(x,t))(p) = \int_0^{\infty} u(x,t)e^{-pt}dt$$

A obtenu des solutions explicites $U(x,t)$ de ces équations sous une certaine condition de normalisation et a indiqué que les solutions $u(x,t)$ de (0.1.4) et (0.1.5) peuvent être obtenues En utilisant la transformée inverse Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ par rapport à t.

Notre travail est réparti en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux définitions et notations sur les équations aux dérivées partielles classique linéaire et non linéaire et nous introduisons la dérivées fractionnaires au sens de Caputo et Riemann-Liouville et aussi on a étudié le problème de Cauchy pour une équation fractionnaire et le théorème du point fixe de Darbo souvent utilisé dans les applications .

Le deuxième chapitre on donne quelques notations et définitions de compacité et les opérateurs compacts et aussi concernant la mesure de non compacité dans les espaces métrique et quelques exemples de la mesure de Kuratowski , de Hausdorff, et les relation enter cette mesure. Nous présenterons également quelque propriétés fondamentales et aussi que quelques théorème associe de la mesure de non compacité .

Le troisième chapitre Le présent chapitre est consacré aux résultats de l'équation différentielle fractionnaire partielle, Nous avons donné une enquête sur les résultats dans ce domaine et posons les transformées intégrales Laplace et Fourier pour construire des solutions à des problèmes de type Cauchy pour l'équation de la diffusion fractionnée et de l'évolution des ondes fractionnaires .

0.2 Notation

- $\Gamma(z)$ La fonction de gamma.
- $conv(X)$ l'ensemble convexe de l'ensemble X.
- $d(X,Y) = \inf\{\|x-y\| : x \in X, y \in Y\}$ la distance enter X et Y.
- $\|X\| = \sup\{\|x\|, x \in X\}$.
- $diamX = \sup\{\|x-y\| : x, y \in X\}$.

Chapitre 1

Introduction aux équations aux dérivées partielles

On donne tout d'abord quelques définitions et généralités sur les équations aux dérivées partielles classique et EDPs fractionnaires, et nous introduisons l'existence de solutions de EDPs fractinnaire ainsi le théorème du point fixe.

1.1 Notions générales sur l'EDPs classique

Une dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables est la dérivée par rapport à une seule de ses variables, les autres étant gardées constantes.

Définition 1.1.1 *(définition générale)*

Soit x une variable U (l'inconnue) dépendant de m variables indépendante $x_1, x_2, ..., x_m$, toute relation enter U, x_j ($j = 1, ..., m$) et des dérivées partielles de U par rapport aux x_j,

$$F\left(U, x_1, x_2, ..., \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^n U}{\partial x_1^n}, ...\right) = 0$$

constitue une équation aux dérivées partielles (en abrégé: une EDP).

Définition 1.1.2 *(EDP linéaire)*
*Une EDP est dite linéaire quand elle l'est par rapport à U et à toutes ses dérivées partielles. Si U et ses dérivées partielles apparaissent séparément et "a la puissance 1" dans l'EDP,celle -ci est dite **linéaire :***

$$A(x_1,x_2)\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+2B(x_1,x_2)\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_2}+C(x_1,x_2)\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}$$
$$+D(x_1,x_2)\frac{\partial U}{\partial x_1}+E(x_1,x_2)\frac{\partial U}{\partial x_2}+F(x_1,x_2)U+G(x_1,x_2)=0$$

*l'équation est dite **homogène** si la fonction G indentiquement nulle.*

Définition 1.1.3 *(EDP non linéaire)*
On dit que une EDP non linéaire si la relation enter les dérivées partielles est non linéaire.

Par exemple elle fait intervenir le carré d'un dérivée ou bien on multiplie par une fonction qui dépend elle -même de la solution;par exemple l'équation de Berrgers:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}+U\frac{\partial U}{\partial x_2}=0$$

Définition 1.1.4 *(Ordre d'EDP)*

On appelle l'ordre d'une EDP l'ordre le plus élevée des dérivées partielle intervenant dans l'EDP.

Une EDP est dite d'ordre n quand la dérivée partielle d'ordre le plus élevé qu'elle contient est d'ordre n.

1.1.1 EDP linéaires du 1^{er} ordre

la forme générale pour une EDP

$$A(x_1,x_2)\frac{\partial U}{\partial x_1}+B(x_1,x_2)\frac{\partial U}{\partial x_2}+C(x_1,x_2)U=D(x_1,x_2)$$

Où A, B, C et D sont au plus fonction de x_1 et x_2.

L'EDP est dite homogène lorsque D=0.

1.1.2 EDP linéaire du $2^{ème}$ ordre

L'EDP linéaire du $2^{\text{ème}}$ ordre et à deux variables indépendantes x_1 et x_2 à la forme générale :

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + B\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + C\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + D\frac{\partial U}{\partial x} + E\frac{\partial U}{\partial x} + GU = F$$

Ou A, B, C, D, E, G et F sont des fonction de $x_1$et x_2.

L'EDP est dite non homogène lorsque F=0.

1.2 Classifications des EDP

En particulier la forme générale d'une équation aux dérivées partielles (EDP) du deuxième ordre définie sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^2$ est donnée par :

$$A(x_1, x_2)\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + 2B(x_1, x_2)\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + C(x_1, x_2)\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}) = 0.$$

Une classification assez simple de cette équation peut être fait sur la base des coefficients associes aux dérivées d'ordre le plus élevé A ,B et C.

Le déterminant définie par:

$$\Delta = B^2 - 4.A.C$$

L'équation est dite de type:

Parabolique, si $\Delta = 0$

Hyperbolique, si $\Delta > 0$

Elliptique, si $\Delta < 0$

Exemple 1.2.1

1. $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - c\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0$, avec $c > 0$
   $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$, l'équation des ondes est hyperbolique.

2. $\frac{\partial U}{\partial x_1} - d\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0$, avec $d > 0$
   $B^2 - 4AC = 0$, l'équation de la chaleur est parabolique.

3. $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0$
   $B^2 - 4AC = -4 > 0$, l'équation de Laplace est elliptique.

1.3 Problèmes types aux dérivées partielles

Un problème mathématique aux dérivées partielles c'est un problème qui s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} F(t, x, y, ..., U, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, ...) = f \\ \text{avec conditions} \end{cases}$$

Parmi ces problèmes, on a les suivant :

1. **Le problème de Cauchy** (donné avec condition initiale)

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u = f \quad x \in \Omega \\ u(x, 0) = \varphi_0(x) \text{ avec } x \in \Omega \end{cases}$$

2. **Le problème de mixte** (donné avec condition initiale et des conditions aux limites)

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u = f \\ u(x, 0) = \varphi_0(x) \text{ avec } x \in [a, b] \\ u(a, t) = u(b, t) = \alpha \end{cases}$$

3. **Le problème de Dirichlet non homogène** (donné avec des conditions aux limites)

$$\begin{cases} -\Delta u(t, x) + c(x).u(t, x) = f(t, x) \quad x \in \Omega \\ u(0, x) = \beta \ , \ x \in \Gamma \ (\Gamma \text{ est la frontière de } \Omega) \end{cases}$$

4. **Le problème de Neumann non homogène** (donné avec condition sur la dérivée)

$$\begin{cases} -\Delta u(x, t) + c(x).u(x, t) = f(x, t) \quad x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = g(x), \quad x \in \Gamma \end{cases}$$

1.4 Equations différentielles partielles d'ordre fractionnaire

On résolu des équations différentielles partielles d'ordre fractionnaire pour appliqués aux problèmes spéciaux .

Il a étudié deux problèmes de visco-élasticité décrivant le mouvement d'un fluide visqueux entre les surfaces en mouvement et réduit ces problèmes aux deux équations différentielles partielles suivantes de l'ordre fractionnaire:

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\left({}^cD^{\alpha}_{-,t}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]\right)(x,t)\ ,\quad (0<\alpha<1) \tag{1.4.1}$$

et

$$\varrho x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\frac{\partial}{\partial x}({}^cD^{\alpha}_{-,t}u)\right)\ ,\quad (0<\alpha<1) \tag{1.4.2}$$

Avec un l'inconnu $u = u(x,t)$, les constantes données sont ϱ et k.

Et on a la dérivée fractionnaire partielle au sens de Caputo par rapport à t de la forme:

$$({}^cD^{\alpha}_{-,t}u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{u_y(x,y)dy}{(t-y)^{\alpha}}\ ,\ (0<\alpha<1) \tag{1.4.3}$$

On définie la fonction de gamma $\Gamma(z)$ par:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{z-1}dt \qquad (z\in\mathbb{C},\quad \mathcal{R}(z)>0)$$

On étudié le problème de Darboux pour les équations hyperboliques de second ordre:

$$y^m u_{xx} - u_{yy} = \sum_{k=1}^{n} a_k(x,y)D^{\alpha k}_{0+,x}f\left[u(x,0),u_x(x,0),u_{xx}(x,0)\right], \tag{1.4.4}$$

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(y^m u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu + \sum_{k=1}^{n} a_k D^{\alpha k}_{0+,x}f\left[r(x),r'(x)\right]\right) = 0 \tag{1.4.5}$$

Impliquant les dérivées fractionnaires partielles de Riemann-Liouville par rapport à x défini par :

$$(D^{\alpha k}_{0+,x}u)(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{[\alpha]+1}\frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\int_0^x\frac{u(t,y)dt}{(x-t)^{\{\alpha\}}} \quad (x\geq 0; y\geq 0; \alpha>0)$$

$[\alpha]$ et $\{\alpha\}$ étant les parties intégrales fractionnaires de α .

1.4.1 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette partie on va citer celles les définitions de Riemann-Liouville„ Caputo ainsi que Grunwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4.1 *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre r $(n-1 < r < n)$ au sens de Rieman-Liouville est défini par*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^r f(t) &= (\frac{-d}{dt})^n \circ I^{n-r} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-r-1} f(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-r} f(t)) \end{aligned}$$

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire:

   - L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire

   $$ {}^{RL}D^r (I^r f(t)) = f(t)$$

   en général, on a

   $$ {}^{RL}D^{r_1} (I^{r_2} f(t) = {}^{RL} D^{r_2 - r_1} f(t)$$

   et si $r_2 - r_1 < 0$, $D^{r_2-r_1} f(t) = I^{r_2-r_1} f(t)$.

   - En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commettent pas

   $$ {}^{RL}D^{-r_1} (D_t^{r_2} f(t) = {}^{RL} D^{r_2-r_1} f(t) - \sum_{k=1}^{m} Df(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{r_1-k}}{\Gamma(r_1-k+1)}$$

   avec $m-1 \leq r_2 < m$

2. Composition avec les dérivées d'ordre entier:

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commettent que si:

$$f^{(k)}(a) = 0 \textit{ pour tout } k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$$

mais

$D^r(\frac{d^n}{dt^n}f(t)) = D^{n+r}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-r-n}}{\Gamma(k-r-n+1)}$

3. Composition avec les dérivées fractionnaires:

Soit $n-1 < r_1 < n \; et \; m-1 < r_2 < m$, alors:

$$^{RL}D^{r_1}(D_t^{r_2}f(t) = D^{r_2+r_1}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[D_t^{r_2-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-r_1-k}}{\Gamma(r_1-k+1)}$$

et

$$^{RL}D^{r_2}(D_t^{r_1}f(t) = D^{r_2+r_1}f(t) - \sum_{k=1}^{n}D_t^{r_1-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-r_{21}-k}}{\Gamma(-r_2-k+1)}$$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire $^{RL}D^{r_1} et \; ^{RL}D^{r_2} (r_1 \neq r_2)$ ne commettant que si $[^{RL}D^{r_2-k}f(t)]_{t=a}$pour tout $k = 1, 2, ..., n$ et $[^{RL}D^{r_1-k}f(t)]_{t=a}$pour tout $k = 1, 2, ..., m$

Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.4.2 *Pour une fonction donnée f sur l'intervalle [a,b] la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo de f d'ordre r > 0 est définie par*

$$^{c}D^{r}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)}\int_a^t (t-s)^{n-r-1}f^{(n)}(s)ds$$

ici $n = [r] + 1$ *et* $[r]$ *desigmant la partie entier de r.*

1. La Relation avec la dérivée de Rimann-Liouville

Soit r>0 avec n-1<r<n (n$\in \mathbb{N}^*$) supposons que f est une fonction telle que ${}^{C}D_t^r f(t)$ et ${}^{RL}D^r f(t)$ existent alors

$$ {}^{C}D_t^r f(t) = {}^{RL} D^r f(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-r}}{\Gamma(k-r+1)} $$

on déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ on aura ${}^{c}D_t^r f(t) = {}^{RL}D^r f(t)$

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire:

   Si f est une fonction continue on a

$$ {}^{C}D^r I_a^r f = f \text{ et } I_a^{r C}D^r f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}, $$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas l' inverse à droite

1.4.2 Solution de problème de Cauchy pour une équation fractionnaire

On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante:

$$ ({}^{c}D_{0+,t}^{\alpha} u)(x,t) = \lambda (D_{-,x}^{\beta} u)(x,t) \tag{1.4.6} $$

Avec $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, et impliquant la dérivée fractionnaire partielle de Caputo $({}^{c}D_{0+,t}^{\alpha} u)(x,t)$ par rapport a $t > 0$ d'ordre $\alpha > 0$, $(l-1 < \alpha < l; l \in \mathbb{N})$. Nous appliquons les transformées de Fourier et de Laplace pour établir la solution explicite de l'équation (1.4.6) avec les conditions Cauchy suivantes de la forme

$$ u(x,0) = f_0(x), \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), \quad (k = 1, ..., l-1; x \in \mathbb{R}) \tag{1.4.7} $$

Nous commençons par le cas le plus simple de l'équation (1.4.6) avec $\beta = 1$

$$ ({}^{c}D_{0+,t}^{\alpha} u)(x,t) = \lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0; \alpha > 0) \tag{1.4.8} $$

Corollaire 1.4.1 .

1. *Si* $0<\alpha\leq 1$,*donc le problème de Cauchy est :*

$$\begin{cases} ({}^cD^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t)=\lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad x\in\mathbb{R};t>0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

Est résolable et sa solution a la forme

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}s^{\alpha-1}e^{st}ds\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(F_xf)(\sigma)}{s^{\alpha}+i\lambda\sigma}e^{-i\sigma x}d\sigma \ , \ \gamma\in\mathbb{R}$$

Ou équivalente $u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{\alpha}(-i\lambda\sigma t^{\alpha})(F_xf)(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$

2. *Si* $0<\alpha\leq 2$ *donc le problème de Cauchy est :*

$$\begin{cases} ({}^cD^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t)=\lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (x\in\mathbb{R};t>0) \\ u(x,0)=f_0(x) \ , \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=f_1(x) \end{cases}$$

Est résolable et sa solution de la forme

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}s^{\alpha-1}e^{st}ds\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(F_xf_0)(\sigma)}{s^{\alpha}+i\lambda\sigma}e^{-i\sigma x}d\sigma$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}s^{\alpha-2}e^{st}ds\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(F_xf_1)(\sigma)}{s^{\alpha}+i\lambda\sigma}e^{-i\sigma x}d\sigma \ (\gamma\in\mathbb{R})$$

Ou équivalente

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{\alpha}(-i\lambda\sigma t^{\alpha})(F_xf_0)(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{\alpha,2}(-i\lambda\sigma t^{\alpha})(F_xf_1)(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

1.5 Théorème de point fixe

Théorème 1.5.1 *(Darbo)*
Soit X *un espace de Banach,* D *un fermé borné et convexe de* X*, et* F *une fonction continue de* D *dans* D *et* α *cantraction, telle qu'il existe un nombre* γ *avec* $0<\gamma<1$ *et:*

$$\alpha\left[F(\Omega)\right]\leq\gamma\alpha\left[\Omega\right]$$

pour tout $\Omega\subset D$

Théorème 1.5.2 *(Schauder) Soit* D *un fermé borné convexe d'un espace de Banach* X *. Soit* F *une fonction complètement continue de* D *dans* D*, (c'est à dire qu'elle est continue et applique les sous ensembles bornés dans les sous ensembles relativement compacts). Alors, il existe un point* $z\in D$*, tel que* $Fz=z$*.*

Chapitre 2

Mesure de non compacité

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement la notion de compacité dans un espace métrique puis introduisons les opérateurs compacts entre les espaces de Banach. Nous donnons en suite un résultat fondamental de compacité pour les fonctions continues: le théorème (d'Ascoli) et quelques définitions sur la mesure de non compacité.

2.1 Notion sur les opérateurs

Définition 2.1.1 *(Compacité)*
Soit U un ensemble d'un espace normé X, U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e.,

$$\forall V_j,\ j \in J \ (ouverts) \ tels \ que \ \ U \subset \bigcup_{j \in J} V_{j(k)} \ \exists V_{j(k)}, \quad j(k) = 1, 2, ..., n$$

$$tel \ que \ U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j(k)}$$

Définition 2.1.2 *(Compacité Dans C(G))*
Dans cette partie, l'espace des fonctions continues défini dans C(G) est muni de la norme maximum

$$\|\varphi\|_{\infty} = \max_{x \in G} |\varphi(x)|$$

Théorème 2.1.1 *(de Bolzano-Weierstrass)*
Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si toute suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente.

Théorème 2.1.2 *(Arzela-Ascoli) Un ensemble $U \subset C(G)$ est relativement compact si et seulement si il est borné et équicontinu i.e., S'il existe une constante M tel que :*

$$|\varphi(x)| \leq M \quad \textit{pour tout} \quad x \in G \ \textit{et} \ \varphi \in U$$

Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon \ \textit{pour tout} \ x, y \in G \quad \textit{et pour tout} \quad \varphi \in U$$

Définition 2.1.3 *(Opérateur linéaire)*
Soient E et F deux espaces normes, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes:
Condition additive:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \ \textit{on a} \ A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$$

Condition homogène:

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \Bbbk = (\mathbb{R} \ \textit{ou} \ \mathbb{C}), \ \textit{on a} \ \ A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi)$$

Définition 2.1.4 *(Opérateur borné)*
Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, tel que

$$\|A(x)\|_F \preceq C \|x\|_E, \forall x \in E$$

Définition 2.1.5 *(Opérateur Compact)*
Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace norme Y, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un ensemble relativement compact dans Y.

2.2 Mesure de non compacité

Dans cette section on donne la définition de la mesure de non compacité avec leur propriété, notamment la mesure de Kuratwski et Hausdroff

Définition 2.2.1 *on dit que la fonction* $\mu : M \longrightarrow [0,+\infty)$ *(avec* $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$*) est une mesure de non compacité avec* $A, B \subseteq M$ *si les conditions suivantes sont vérifiées:*

1. $\mu(A) = 0 \Longleftrightarrow \bar{A}$ *est compact.*
2. $\mu(A) = \mu(\bar{A})$
3. $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
4. $\mu(conv(A)) = \mu(A)$
5. $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$
6. $\mu(r.A) = |r| .\mu(A)$
7. $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$
8. *soit* $A_1 \supset A_2 \supset .... \supset$ *une suite décroissante d'ensemble fermés non vide de* A_n*, telle que*
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n) = 0 \ ; alors \ A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Proposition 2.2.1 *soient* $A, B \in M_n$ *on a:*

1. $\mu(\pi(A)) = \mu(A)$
2. $\mu(B(A, r)) \leq \mu(A) + r.\mu(B(0, 1))$

2.2.1 Mesure de Kuratowski

Définition 2.2.2 *Soit* (X, d) *un espace métrique et* Q *un sous-ensemble borné de* X*, la mesure de non compacité de Kuratowski de* Q *notée par* $\alpha(Q)$ *est*

$$\alpha(Q) = \inf\{\epsilon > 0 : Q \text{ admet un recouvrement fini par des ensemble de diamètre } < \epsilon\}$$

Ou:

$$\alpha(Q) = \inf\left\{\epsilon > 0 : \exists Q_1...Q_n \subset Q \text{ tells que } Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i \ , \ diam(Q_i) < \epsilon\right\}$$

la fonction α est appelée la mesure de non compacité de Kuratowski clairement pour chaque sous-ensemble borné

$$\alpha(Q) \leq diam(Q)$$

Lemme 2.2.1 *Soit Q, Q_1 et Q_2 des sous-ensembles borné d'un espace métrique complet X, alors*

1. $Q_1 \subset Q_2 \Longrightarrow \alpha(Q_1) \leq \alpha(Q_2)$.
2. $\alpha(Q) = \alpha(\bar{Q})$.
3. $\alpha(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$.
4. $\alpha(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$.
5. $\alpha(Q_1 + Q_2) \leq \alpha(Q_1) + \alpha(Q_2)$.
6. $\alpha(\lambda Q) = |\lambda| \alpha(Q)$.
7. $\alpha(Q) = \alpha(co(Q))$

Preuve.

1. tout recouvrement de Q_2 est un recouvrement de Q_1.

   on a

   $$Q \subset \bar{Q} \Longrightarrow \alpha(Q) \leq \alpha(\bar{Q}) \quad et \quad \forall\epsilon > 0, \exists \{Q_i\}_{1\leq i\leq n} \text{ tels que } Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} Q_i, \ diam(Q_i) \leq \epsilon,$$

   $$alors\ \bar{Q} \subset \bigcup_{i=1}^{n} Q_i = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{Q}_i \ \ et\ diam(Q_i) = diam(\bar{Q}_i)$$

   En conclusion

   $$\overline{Q} \subseteq Q \Rightarrow \alpha(\bar{Q}) \leq \alpha(Q)$$

   Donc

   $$\alpha(Q) = \alpha(\bar{Q})$$

2. D'après (1) on a : $\alpha(Q_1) \leq \alpha(Q_1 \cup Q_2)$ et $\alpha(Q_2) \leq \alpha(Q_1 \cup Q_2)$

$$\max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\} \leq \alpha(Q_1 \cup Q_2).$$

On a par définition

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \{Q_i\}_{1 \leq i \leq n},\ \exists \{Q_j\}_{1 \leq j \leq m} \ \ tels\ que\ \ Q_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} Q_i, Q_2 \subset \bigcup_{j=1}^{m} Q_j \ \ et$$

$$diam(Qi) \leq \alpha(Q_1) + \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall i \in [1,n] \ \ et \ \ diam(Q_j) \leq \alpha(Q_2) + \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall j \in [1,m]$$

Comme les ensembles $C_{ij} = (Q_i \cup Q_j)$ pour chacun des indices $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ recouvrent l'ensemble $Q_1 \cup Q_2$, on a $\forall \epsilon > 0, diam(C_{ij}) \leq \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\} + \epsilon$. Alors

$$\alpha(Q_1 \cup Q_2) \leq \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$$

de (a) et (b) on trouve

$$\alpha(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}.$$

3. Soit S_i et G_j deux sous-ensembles bornées dans X, $diam(S_i) < d$ pour $i = 1, 2, ..., n$ telle que $Q_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ et $diam(G_J) < p$, pour $j = 1, 2, ..., m$ tel que $Q_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_j$, Alors

$$Q_1 + Q_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (S_i + G_j) \text{ et } diam(S_i + G_j) < d + p$$

Donc

$$\alpha(Q_1 + Q_2) < d + p$$

4. Pour $\lambda = 0$ Soit S_i un sous-ensemble borné dans X , $diam(S_i) < d$ pour $i = 1, 2, ..., n$ tel que $Q_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{k}, \lambda Q \subset \bigcup_{i\hat{}1}^{n} \lambda S_i \ \text{ et } \ diam(\lambda S_i) = |\lambda|\, diam(S_i).$$

Donc

$$\alpha(\lambda Q) = |\lambda|\, \alpha(Q).$$

pour $\lambda \neq 0$:

$$\alpha(Q) = \alpha(\lambda^{-1}(\lambda Q)) \leq \left|\lambda^{-1}\right| \alpha(\lambda Q)$$

Alors

$$|\lambda|\,\alpha(Q) \leq \alpha(\lambda Q).$$

■

Lemme 2.2.2 *Soit (X,d) un espace métrique complet, et soit (F_n) une suit décroissante d'ensemble fermés non vide telle que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha(F_n) = 0 \text{ , alors } F_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \text{ est d'intersection compacte non vide}$$

Remarque 2.2.1 .

1. *Non singulière si $\alpha(\{a\} \cup Q) = \alpha(Q)$.*
2. *Lipchitzienne si $|\alpha(Q_1) - \alpha(Q_2)| \leq 2d_H(Q_1, Q_2)$, ou d_H la semi métrique de Hausdorff.*
3. *Continuité si pour tout $Q \subset X$ et n'importe $\epsilon > 0$,il y a un $\delta > 0$ alors*

$$|\alpha(Q) - \alpha(Q_1)| < \epsilon$$

pour tous Q_1, satisfaisant $p(Q, Q_1) < \epsilon$.

2.2.2 Mesure de Hausdorff

Définition 2.2.3 *Soient (X,d) un espace métrique et Q un sous-ensemble borné de X, la mesure de non compacité de Hausdorff de Q notée par $\chi(Q)$ définie par*

$$\chi(Q) = \inf\{\epsilon > 0 : \text{admet un recouvrement fini par des boules de rayon } < \epsilon\}$$

ou

$$\chi(Q) = \inf\left\{\epsilon > 0 : Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon (i = 1, ..., n) n \in \mathbb{N}\right\}$$

Proposition 2.2.2 *Supposons que χ est la mesure de non compacité de Hausdorff définie sur X sous ensemble dans E, et soit μ une mesure de non compacité sur E. alors pour tout ensemble $X \in E$*

$$\mu(X) \leq \mu(B(0,1)) \cdot \chi(X)$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ par définition de χ il existe $r > 0$ tell que $r < \chi(X) + \epsilon$, et un ensemble fini $\{x_1, ...x_n\} \subset E$ *tel que*

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$$

D'après la propriété de la mesure de non compacité, on obtient:

$$\begin{aligned}
\mu(X) &\leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)\right) = \max\left\{\mu\left(B(x_i, r)\right), \quad i = 1, 2, ..., n\right\} \\
&= r. \max\left\{\mu\left(B(x_i, 1)\right), \quad i = 1, 2, ..., n\right\} = r \cdot \mu\left(B(0, 1)\right) \\
&\leq (\mu(X) + \epsilon) \cdot \mu\left(B(0, 1)\right).
\end{aligned}$$

Est la conclusion en découle. ■

2.2.3 Mesure de non compacité sur les opérateurs

Définition 2.2.4 *Soit $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur continu et $\alpha(.)$ est la mesure de non compacité de Kuratowski dans X, pour tout $k > 0$, on dit que T est une contraction si pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X et $\alpha(T(A)) \leq k \cdot \alpha(A)$, alors $\alpha(A) > 0$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X et $\alpha(T(A)) < \alpha(A)$.*

Définition 2.2.5 *Soit $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur continu et $\chi(.)$ est la mesure de non compacité de Hausdorff dans X et $k > 0$, T est dit $K -$ boule contraction si pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X et*

$$\chi(T(A)) \leq k \cdot \chi(A).$$

Remarque 2.2.2 *Il est bien connu que:*

1. Si $k < 1$, alors tous les opérateurs k-ensemble-contraction se condensation.
2. Chaque opérateur de condensation est 1-ensembel-contraction.
   Soit $T \in L(X)$, nous définissons $\alpha(T)$ par

$$\alpha(T) = \inf\left\{k \text{ } tel \text{ } que \text{ } T \text{ } est \text{ } k - ensembel - contraction\right\}$$

et $\chi(T)$ par

$$\chi(T) = \inf \{k \ tel \ que \ T \ est \ k - boul - contraction\}.$$

Dans le lemme suivant, nous donnons certaines propriétés importantes de $\alpha(T)$ *et* $\chi(T)$.

Lemme 2.2.3 *Soit X un espace de Banach et $T \in L(X)$ nous avons*

1. $\frac{1}{2}\,\alpha(T) \leq \chi(T) \leq 2\alpha(T)$.

2. $\alpha(T) = 0$ si seulement si $\chi(T) = 0$ si seulement si T est compact.

3. Si $T,\ S \in L(X)$, donc $\alpha(TS) \leq \alpha(T)\alpha(S)$ et $\chi(TS) \leq \chi(T)\chi(S)$.

4. Si $k \in K(X)$,donc $\alpha(T+k) = \alpha(T)$ et $\chi(T+k) = \chi(T)$.

5. $\alpha(T^*) \leq \chi(T)$ *et* $\alpha(T) \leq \chi(T^*)$, où T^* désigne l'opérateur de duel de T

6. Si B est un sous- ensemble borné de X, donc $\alpha(T(B)) \leq \alpha(T)\alpha(B)$.

Chapitre 3

Resolution d'équations differentielles partielles d'ordre fractionnaires

On veut résoudre une E.D.P d'ordre fractionnaire en utilisant une transformation comme dite de Laplace ou de Fourie pour arrivé à une équation différetielle d'ordre fractionnaire.

3.1 La transformée de Laplace

Définition 3.1.1 *Soit f une fonction d'ordre exponentiel α (c'est-à-dire qu'il existe deux constante M et T telles que*

$$\left| f(t) \leq Me^{\alpha t} \quad pour \quad t > T \right|$$

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ définie pour tout nombre réel $t \geq 0$ est la fonction F, définie par:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt$$

L'inversion de transformation de Laplace s'effectue par le moyen d'une intégrale dans le plan complexe, pour tout positive,

$$f^{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(st)F(s)ds$$

Ou γ est choisi pour que l'intégral soit convergente, ce qui implique que γ soit supérieur à la partie réelle de singularité de $F(s)$.

Linéarité: $\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha\mathcal{L}\{f\} + \beta\mathcal{L}\{g\}$.
Dérivation: $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(s)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}f^{(k)}(0)$.
Intégration: $\mathcal{L}\left\{\int_\alpha^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\} + \frac{1}{s}\int_\alpha^0 f(u)du$.
Convolution: $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \times \mathcal{L}\{g\}$.

3.2 Équations différentielles partielles de l'ordre fractionnaire

Dans cette section nous présentons des recherches sur certaines équations différentielles fractionnaires. Tout d'abord considéré le problème de type Cauchy pour l'opérateur de différentielle partielle fractionnaire.

3.2.1 Solution de problèmes de Cauchy pour les équations d'ondes et diffusion fractionnée

Nous considérons une équation différentielle fractionnaire de la forme

$$(D_{0+,t}^{\alpha}u)(x,t) = \lambda^2(\Delta_x u)(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}^n; t > 0; 0 < \alpha < 2; \lambda > 0) \tag{3.2.1}$$

Impliquant le dérivé fractionnaire partiel de Riemann-Liouville $(D_t^\alpha u)(x,t)$ d'ordre $\alpha > 0$ par rapport à $t > 0$ défini par:

$$(D_{0+,t}^{\alpha}u)(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{[\alpha]+1} \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\{\alpha\}}}d\tau \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0, \alpha > 0)$$

Et le Laplacien $(\Delta_x u)(x,t)$ par rapport $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(\Delta_x u)(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

En particulier, lorsque n = 1, l'équation (3.2.1)prend la forme de l'équation connue sous le nom d'équation de diffision fractionnée et d'onde,par conséquent, nous appelons l'équation (3.2.1) pour $n \geq 2$ l'équation multi-dimensionnelle de diffision et d'onde fractionnée .

Nous appliquons les transformées de Fourier et de Laplace pour obtenir une solution explicite de l'équation (3.2.1) avec les conditions initiales de type Cauchy :

$$u(x,0) = \delta(x) \quad (x > 0); u(0,t) = g(t) \quad (t > 0)$$

$$(D_{0+,t}^{\alpha-k} u)(x, 0^+) = f_k(x) \tag{3.2.2}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n, k = 1$ pour $0 < \alpha \leq 1, et\ k = 2$ pour $1 < \alpha < 2$.

3.2.2 Probleme de Cauchy pour les équations bidimensionnelles

Nous considérons l'équation différentielle partielle de l'order $0 < \alpha < 2$

$$(D_{0+,t}^{\alpha} u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0; \lambda > 0) \tag{3.2.3}$$

Avec les conditions initiales du Cauchy de la forme (3.2.2) pour $n = 1$

$$(D_{0+,t}^{\alpha-k} u)(x, 0^+) = f_k(x) \tag{3.2.4}$$

Où $x \in \mathbb{R},\ k = 1$ pour $0 < \alpha \leq 1,\ et\ k = 2$ pour $1 < \alpha < 2$.

Pour résoudre ce problème, nous appliquons la transformée de Laplace par rapport à t :

$$(\mathcal{L}_t u)(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st} dt \quad (x \in \mathbb{R}; s > 0) \tag{3.2.5}$$

Et la transformée de Fourier para rapport $x \in \mathbb{R}$:

$$(F_x u)(\sigma,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{ix\sigma} dx \quad (\sigma \in \mathbb{R}; t > 0) \tag{3.2.6}$$

- Application de la transformée de Laplace (3.2.5) à (3.2.3) et la formule du

$$(\mathcal{L} D_{0+}^{\alpha} y)(s) = s^\alpha (\mathcal{L} y)(s) - \sum_{j=1}^{l} d_j s^{j-1} \quad (l - 1 < \alpha \leq l;\ l \in \mathbb{N})$$

donc

$$(\mathcal{L}_t D^{\alpha}_{0+,t} u)(x,s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}u)(x,s) - \sum_{j=1}^{l} s^{j-1}(D^{\alpha-j}_{0+,t}u)(x,0+) \tag{3.2.7}$$

Pour $(x \in \mathbb{R},\ l-1 < \alpha \leq l\ et\ \ l \in \mathbb{N}\ )$

Si $l=1$ et $l=2$ dans le cas respectif $0 < \alpha \leq 1\ \ et\ \ 1 < \alpha < 2$,et les conditions initial de (3.2.4) nous avons:

$$s^{\alpha}(\mathcal{L}_t u)(x,s) = \sum_{k=1}^{l} s^{k-1} f_k(x) + \lambda^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}_t u\right)(x,s) \quad (l=1,2)$$

- Application de la transformée de Fourier (3.2.6) et en utilisant la formule

$$\mathcal{F}[\mathcal{D}^k \varphi(t)](x) = (-ix)^k (\mathcal{F}\varphi)(x) \quad k \in \mathbb{N}$$

Avec $k=2$

$$\left(\mathcal{F}_x\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]\right)(\sigma,t) = -\left|\sigma\right|^2 (\mathcal{F}_x u)(\sigma,t)$$

Nous arrivons à la relation suivante:

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\sigma,t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{s^{k-1}}{s^{\alpha} + \lambda^2 \left|\sigma\right|^2} (\mathcal{F}_x f_k)(\sigma) \quad (\sigma \in \mathbb{R}; t > 0; l = 1,2) \tag{3.2.8}$$

Maintenant, nous obtenons la solution explicite $u(x,t)$ en utilisant la transformée de Fourier inverse par rapport σ :

$$(\mathcal{F}^{-1}_{\sigma} u)(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\sigma,t) e^{-i\sigma x} dx \quad (\sigma \in \mathbb{R}; t > 0) \tag{3.2.9}$$

Et la transformée de Laplace par rapport s :

$$(\mathcal{L}^{-1}_{s} u)(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} u(x,s) ds \quad (x \in \mathbb{R};\ \gamma = \mathcal{R}(s) > \sigma_{\varphi}) \tag{3.2.10}$$

Alors facilement et accessibles des transformées de Fourier et de Laplace, nous avons

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_x e^{-c|x|})(\sigma) &= \frac{2c}{c^2+|\sigma|^2} \quad (c>0; \sigma \in \mathbb{R}) \\ (\mathcal{F}_x e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}})(\sigma) &= \frac{2\lambda s^{\frac{\alpha}{2}}}{s^\alpha + \lambda^2 |\sigma|^2}\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Danc la relation (3.2.8) de la forme

$$(\mathcal{F}_x\mathcal{L}_t u)(\sigma,s) = \left(\mathcal{F}_x\left[\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{l} s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}\right]\right)(\sigma)(\mathcal{F}_x f_k)(\sigma) \quad (l=1,2)$$

Ou,conformément à la propriété de convolution

$$(\mathcal{F}(h*\varphi))(x) = (\mathcal{F}h)(x)(\mathcal{F}\varphi)(x)$$

On a:

$$(\mathcal{F}_x\mathcal{L}_t u)(\sigma,s) = \left(\mathcal{F}_x\left[\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{2\lambda} s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k(x)\right]\right)(\sigma) \quad (l=1,2)$$

De là, en appliquant la transformée inverse de Fourier (3.2.9), on obtient la relation suivante:

$$(\mathcal{L}_t u)(x,s) = \sum_{k=1}^{l}\frac{1}{2\lambda} s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k(x) \quad (x\in\mathbb{R}; s>0; l=1,2) \tag{3.2.12}$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace dans (3.2.12), on peut obtenir la solution explicite au problème de type Cauchy (3.2.3)- (3.2.4) Pour cela, nous devons connaître les transformées inverse de Laplace des fonctions $s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}$ $(k = 1, 2)$, ces fonctions sont exprimées par la transformée de Laplace de la fonction Wright

$$\phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{3.2.13}$$

de la forme $\phi(-\alpha/2, b; -z)$, si $0 < a < 2$, alors $\phi(-\alpha/2, b; -z)$ est une fonction entière de z,il est facilement prouvé en utilisant (3.2.5) et formule (3.2.13) que

$$\left(\mathcal{L}_t\left[t^{\frac{\alpha}{2}-k}\phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - k + 1; -\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}}\right)\right]\right)(s) = s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}} \tag{3.2.14}$$

pour $k = 1, 2$

L'application de la transformée inverse de Laplace dans (3.2.14) et prendre (3.2.15) et

$$h * \varphi = (h * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - t)\varphi(t)dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

On obtient le résultat suivant

Théorème 3.2.1 *Si $0 < \alpha < 2$ et $\lambda > 0$,alors le problème de Cauchy (3.2.4) et (3.2.5) est résoluble, et sa solution $u(x, t)$ est donnée par:*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{l} \int_{-\infty}^{\infty} G_k^{\alpha}(x - r, t) f_k(r)dr \quad (l = 1 \;\; pour \;\; 0 < \alpha \leq 1; l = 2 \;\; pour \;\; 1 < \alpha < 2 \tag{3.2.15}$$

$$G_k^{\alpha}(x, t) = \frac{1}{2\lambda}t^{\frac{\alpha}{2}-k}\phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - k + 1; -\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \quad (k = 1, 2) \tag{3.2.16}$$

À condition que les intégrales dans le côté droit de (3.2.15) soient convergentes.

Corollaire 3.2.1 *Si* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $\lambda > 0$,*donc le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} (D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ (D^{\alpha-1}_{0+,t}u)(x,0+) = f(x) \end{cases} \tag{3.2.17}$$

Est résolube,et sa solution de la forme:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{\alpha}(x-\tau,t)f(\tau)d\tau \tag{3.2.18}$$

$$G_1^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{2\lambda}t^{\frac{\alpha}{2}-1}\phi\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2};-\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{3.2.19}$$

À condition que les intégrales dans le côté droit de (3.2.18) est convergente.

Corollaire 3.2.2 *Si* $1 < \alpha < 2$ *et* $\lambda > 0$,*donc le problème de Cauchy*

$$(D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0) \tag{3.2.20}$$

$$(D^{\alpha-1}_{0+,t}u)(x,0+) = f_1(x),\ (D^{\alpha-2}_{0+,t}u)(x,0+) = f_2(x) \tag{3.2.21}$$

Est résolube,et sa solution de la forme:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{\alpha}(x-\tau,t)f_1(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} G_2^{\alpha}(x-\tau,t)f_2(\tau)d\tau \tag{3.2.22}$$

Avec $G_1^{\alpha}(x,t)$ *donne par (3.2.19) est* $G_2^{\alpha}(x,t)$ *par:*

$$G_2^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{2\lambda}t^{\frac{\alpha}{2}-2}\phi\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}-1;-\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{3.2.23}$$

À condition que les intégrales dans le côté droit de (3.2.22) soient convergentes.

Exemple 3.2.1

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R};\ t > 0)$$

Est la solution donne par

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{\alpha}(x-\tau,t) f(\tau) d\tau,\ G(x,t) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{\frac{-|x|^2}{4\lambda^2 t}}$$

Ce résultat bien connu d'un corollaire (3.1.1), Si nous prenons en compte la relation suivante pour la fonction Wright

$$\phi(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

Qui est facilement vérifié en utilisant(3.2.13)

Conclusion

La solution d'une équation aux dérivées partielles est toujours défficile (pas évident), elle basée sur le cadre fonctionnel c'est-à-dire on montre l'existence et l'unicité de solution .

Cette théorie est dépendante pour un chaque type de problème, Dirichlet, Neumann et Mixte, et aussi sur le domaine borné et non borné.

La difficulté reste pour les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaires, i.e, on applique l'opérateur fractionnaire sur chaque problème type , alors la méthode de la résolution est à l'aide d'une transformation connue de Laplace ou Fourier, on réduit la variable est on arrive à une équation différentielle d'ordre fractionnaire .

Ce travail se fait par un autre sujet de mémoire de Master utilisons la mesure de non compacité.

Bibliographie

[1] A. Jeribi, Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices, Springer International Publishing Switzerland, 2015.

[2] A. Khirani, resolution des equations integrales non lineaire type volterra, université de M'sila, 2011.

[3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Teory and applications of fractional differential equations, Springer Amesterdam, 2006.

[4] J. Banas's and M.Mursaleen, Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations , Springer India, 2014.

[5] J.M. Ayerbe, T. Dominguez, G. Lopez Acedo, Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Springer Basel AG, 1997.

[6] K. Sbihi, Etude de quelques E.D.P. non linéaires dans L^1 avec des conditions générales sur le bord,Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur Strasbourg 1, 2006. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00110417/document.

[7] L. Biacino and D.Miserendino, Derivatives of fractional order for functions, (Italian), Boll. Université Mat. ltalian, vol 6(1), (1982) 235-278.

[8] M. Alexander, Measure of non-compactness for integral operators in weighted lebesgue spaces, Published by Nova Science Publishers, new york, 2009.

[9] M. M.Gheziel, Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires dans des espaces de Banach, Mémoire de Master, université de Tlemcen, 2015.

[10] R. P. Agarwal, M.Benchohra, et D.Seba, On the Application of Measure of Noncompactness to the Existence of Solutions for Fractional Differential Equations, Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, vol 55 (2009), 221–230.

[11] S. Salsa, Partial Differential equations in Action From Modelling to Theory,Springer Verlag Italia Milano, 2008.