

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE des Sciences

DEPARTEMENT de Physique

N° :...../2018.....



DOMAINE : Sciences de la matière

FILIERE : Physique

OPTION :PHYSIQUE THEORIQUE

**Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique**

Par: Khalfallah latifa

Intitulé

**Effet Casimir dans le cadre de la géométrie non
commutative**

Soutenu le 26 /06 /2018 devant le jury composé de:

BOUFERACHE Karim	Université de M'sila	Président
SABRI Youcef	Université de M'sila	Rapporteur
RADOUENE Asma	Université de M'sila	Examineur
BESKRI Saliha	Université de M'sila	Examineur

Année universitaire : 2017/2018

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la patience qu'il m'a donné pour terminer ce mémoire.

Je tiens à remercier mon encadreur le professeur :Sabri Youcef, pour m'avoir confié ce sujet et pour son aide, sa gentillesse, sa disponibilité,et le temps qu'ila bien voulu me consacrer.

Mes remerciements vont ensuite au Jury de ma thèse, qui ont bien voulu accepté de juger ce travail et d'y apporter leurs cautions.

Je remercie également tous les enseignants du département de physique , ainsi que mes collègues étudiants de la promotion Physique Master (2) de l'année 2017/2018.

Khalfallah Latifa

Dédicace

Je dédie ce travail A mon père , A ma mère, A mes frères, A mes sœurs, A toute ma grande famille Khalfallah , A tous mes amis et mes professeurs sans exception, A tous les enseignants de département de Physiques a l'université de M'sila.

Khalfallah Latifa

Table des matières

1	Introduction	6
2	Effet de Casimir standard	11
2.1	Quantification de champ de Maxwell	11
2.2	Fluctuations de vide	13
3	Quantification Lagrangienne et Canonique	16
3.1	Quantification Lagrangienne	16
3.1.1	Opérateur de champ inspiré de la géométrie non comutative	16
3.1.2	Densité Lagrangienne et Action	18
3.1.3	Théorème de Noëther	19
3.2	Quantification canonique	21
3.2.1	Champ conjugué	22
3.2.2	Conditions quantiques	22
3.2.3	Hamiltonien	23
3.2.4	Fonction de propagation	24
4	Effet Casimir non commutatif	26
	Conclusion	28

Chapitre 1

Introduction

L'effet Casimir est généralement défini comme le phénomène physique qui montre que l'énergie du point zéro est non nulle. Il est donnée par les fluctuations de vide de n'importe quel champ quantique s'il existe des conditions aux limites sur les modes de champ. Dans l'article original de Casimir [1], l'énergie est le résultat de la différence entre l'énergie de vide du champ électromagnétique dans deux configurations différentes : Un volume rectangulaire Bornée par deux plaques conductrices parallèles séparées par une distance a , le long de l'axe z , et celle du même volume non délimitée par des plaques conductrices. La force de Casimir est alors définie par la différentiation habituelle de l'énergie de vide par rapport à la distance a entre les plaques. Dans Réf. [2] l'effet Casimir est obtenue en considérant la force relativiste de van der Waals entre les plaques métalliques.

Expérimentalement, cet effet peut être mesuré avec une grande précision (voir par exemple [3] et [4]), mais il faut de noter que la mesure de la force de Casimir entre deux plaques parfaitement conducteurs et parallèles est techniquement très difficile. Habituellement, la force de Casimir est mesurée entre des plaques et des sphères pour surmonter le problème du parallélisme entre les plaques [5].

L'effet Casimir a également été largement étudié du point de vue théorique en raison de sa connexion avec la physique au-delà du modèle standard de la physique des particules. Dans la littérature, il existe plusieurs travaux qui traitent les corrections apportées à l'énergie de Casimir due à l'existence des longueurs minimales (voir [6], [7]), ou des dimensions supplémentaires [8] et aussi due à la non commutativité de l'espace-temps [9].

D'une certaine manière, on peut considérer que la géométrie non commutative est née avec la mécanique quantique. En effet, dans sa première formulation, qui fut celle de Heisenberg, la mécanique quantique apparaît sous une forme comparable à la mécanique Hamiltonienne où les coordonnées de l'espace des phases sont remplacées par des opérateurs qui ne commutent pas entre eux. Dirac lui même sembla être fasciné par cette idée et suggéra la possibilité d'interpréter la mécanique quantique dans un formalisme géométrique non commutatif. Enfin, les travaux de Von Neumann sur la mécanique quantique furent à l'origine du domaine des mathématiques que nous appelons aujourd'hui les algèbres d'opérateurs.

En physique, l'idée que les coordonnées de l'espace temps puissent ne pas commuter fut émise par Heisenberg à la fin des années 1930 dont l'objectif essentiel est que cela puisse résoudre le problème des divergences ultra-violettes (UV) en théorie quantique des champs. Cette idée fut ensuite reprise et concrétisée par Snyder en 1947[10] et par la suite par Yang [11].

Du point de vue de la physique, la géométrie non commutative constitue un cadre mathématique dans lequel un certain nombre de concepts physiques peuvent être exprimés et parfois unifiés. La remarque effectuée par Dirac sur l'analogie entre commutateur en mécanique quantique et crochet de Poisson en mécanique Hamiltonienne peut par exemple être concrétisée par l'introduction d'une structure symplectique non commutative. Ainsi, il fut montré par Michel Dubois-Violette [12] que le commutateur en mécanique quantique peut se comprendre dans ce cadre comme un crochet de Poisson. Il est également possible de formuler un principe de moindre action [13]. Il a été également fait usage des techniques de la géométrie non commutative par Jean Bellissard afin de décrire certains systèmes de physique statistique tels que les quasi-cristaux ou encore l'effet Hall quantique.

Je voudrais maintenant donner quelques motivations supplémentaires pour l'utilisation de la géométrie non commutative en physique. Il est bien connu que la limite de la mécanique quantique à la mécanique classique est difficile. Réciproquement, il ne semble pas exister de technique pour passer de manière rigoureuse et canonique d'une théorie classique à une théorie quantique. L'exemple le plus remarquable, en est la théorie de la relativité générale ou bien même la mécanique analytique. La géométrie non commutative fournit un langage dans lequel ces deux types de théories peuvent être formulées.

D'autre part, aussi bien pour la mécanique quantique d'Heisenberg que pour la théorie quantique des champs, la notion d'algèbre d'opérateurs est essentielle comme cela fut mis en évidence par von Neumann.

Nous pourrions qualifier le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique (1ère quantification) ou le passage de la théorie classique des champs à la théorie quantique des champs (2ème quantification) de transferts de niveau de réalité. En effet, dans le premier passage, les objets fondamentaux que sont les points sont remplacés par des fonctions exprimant des relations entre points. De même, les relations entre fonctions peuvent être décrites à l'aide d'opérateurs comme ceux introduits dans la mécanique matricielle d'Heisenberg ou encore ceux de la théorie quantique des champs. Ce type de passage consiste donc à considérer les relations entre objets en tant qu'objets d'un type nouveau et correspond à ce que nous pourrions appeler un transfert de niveau de réalité ou de niveau de relations. Le fait remarquable est que les différentes structures intervenant aussi bien dans les théories classiques que dans les théories quantiques semblent pouvoir s'interpréter de manière naturelle dans un langage commun qu'est celui de la géométrie non commutative et nous pouvons espérer que le fait d'avoir un cadre commun pour décrire ces objets puisse permettre un jour de mieux comprendre les liens qui peuvent exister entre eux.

Nous allons maintenant présenter certaines constructions d'une théorie quantique non locale des champs et les distinguer de l'approche que nous adopterons dans cette thèse.

Dans la première approche [16], la multiplication "*point – sage*" des champs dans le Lagrangien de la théorie locale est maintenant remplacé par un produit non-local (*). Ce produit (*), communément appelée produit de Weyl-Moyal, est définie par

$$A * B(x) = e^{\frac{i}{2} \partial_\mu^\eta \sigma^{\mu\nu} \partial_\nu^\rho} A(x + \eta) B(x + \rho) \big|_{\eta=\rho=0} . \quad (1.1)$$

Dans cette définition x est un élément de l'espace-temps commutatif et $\sigma^{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique qui a les dimensions d'une surface $[longueur]^2$.

Il est facile de montrer que ce produit généralisé conduit à une algèbre non commutative des opérateurs de la position

$$[q^\mu, q^\nu] = i\sigma^{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Le produit (1.1) laisse les termes quadratiques, dans la densité Lagrangienne, inchangés

$$\int dx A * B(x) = \int dx A(x) . B(x) . \quad (1.3)$$

Les règles de Feynman sont obtenues directement de l'action classique. Par conséquent, les propagateurs sont inchangés. Cependant les facteurs de vertex acquièrent une correction supplémentaire donnée, dans l'espace des moments, par

$$\tilde{V}(k_1, \dots, k_n) = \delta(k_1 + \dots + k_n) e^{-\frac{i}{2} \sum_{i < j}^n k_{i\mu} \sigma^{\mu\nu} k_{j\nu}} \quad (1.4)$$

où les $k_1, \dots, k_n$ sont les moments des particules entrantes.

Les problèmes dont souffre cette construction, en dehors de la présence des divergences habituelles de la théorie locale, sont un mixage entre les divergences UV et les divergences IR, [17, 20, 21, 22, 23, 18] et la non unitarité [24, 26, 36, 29]. Cependant l'unitarité peut être restauré en considérant le formalisme Hamiltonien au lieu du formalisme Lagrangien et en calculant les diagrammes de Feynman en utilisant la formule de Gell-Mann-Low [30, 38]. Cette approche représente en effet une deuxième possibilité de décrire perturbativement la théorie des champs quantique non-commutative. Le propagateur libre reste inchangé dû au fait remarquable que l'Hamiltonien libre déformé H_0^* est égal à l'Hamiltonien non déformé, à cause de la propriétés du produit de Moyal. Ainsi on a

$$H_0^* = \int d^3x (\partial_\mu \Phi * \partial^\mu \Phi(x) + m^2 \Phi * \Phi(x)) = \int d^3x (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi \Phi) . \quad (1.5)$$

La troisième approche à la théorie quantique des champs non commutative utilise la base des états cohérents de l'oscillateur harmonique sur un espace-temps non-commutatif [32, 34]. Considérons, pour simplifier, un espace-temps de dimension égale à $D = 2 + 1$. Dans ce cas, le propagateur libre est modifié par un facteur d'amortissement exponentiel. C'est important de noter que le non commutativité conduit à des propagateurs exponentiellement amortis. Ce résultat est au coeur du modèle que nous allons étudier par la suite. La présence du facteur $\exp(-\frac{\theta}{2} \mathbf{p}^2)$ conduit à une distribution parfaitement régularisée à l'inverse de distribution de Dirac habituelle. En effet l'application de l'opérateur $(\square + m^2)$ à la fonction de Green précédente donne

$$\begin{aligned} & (\square + m^2) G(t_1 - t_2, z_1 - z_2) \\ &= \frac{2\pi\delta(t_1 - t_2)}{\theta} \exp\left(-\frac{1}{4\theta} \left[(z_1 - z_2 + \bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2 - (z_1 - z_2 - \bar{z}_1 + \bar{z}_2)^2\right]\right) . \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dans ce memoire, on va utiliser cet approche pour étudier l'effet de Casimir.

Dans la quatrième approche à une théorie non locale des champs quantiques [36], la non localité affecte seulement l'Hamiltonien d'interaction. Dans cette approche on écrit l'Hamiltonien d'interaction comme

$$H_I^* = \lambda c_n \int d^3x \int_{R^4} d^4a_1 \dots d^4a_n : \Phi(x + a_1) \dots \Phi(x + a_n) : \\ \times \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_{j,\mu} a_j^{\mu^2} \right) \delta^{(4)} \left(\frac{1}{n} \sum_j a_j \right) \quad (1.7)$$

où $\lambda, c_n \in R$, et $\Phi(x+a_j)$ est le champ déformé qui sera définie par la suite [38]. L'utilisation de ce genre de déformation conduit à une expansion de Dyson de la matrice S finie ordre par ordre.

Après avoir donner une introduction ou on parler sur l'effet Casimir et géométrie non commutative, nous allons étudier l'effet Casimir dans le cas habituelle ou nous discuterons la quantification du champ électromagnétique et le Fluctuations de vide (l'effet casimir simple) dans le deuxième chapitre.

Dans le troisième chapitre nous allons traiter les quantification Lagrangienne et canonique de champ de Maxwell dans la Jauge fe Feynman. La première se fera en cherchant les solutions des équations de mouvement à travers l'utilisation de la définition de l'opérateur de champ de Maxwell inspiré de la géométrie non commutative. Nous aborderons ensuite la formulation du théorème de Neother. La quantification canonique de la théorie se fera par l'établissement des trois principaux résultats qui sont les conditions quantiques, l'énergie et le propagateur.

Dans la chapitre 4, nous étudierons l'effet Casimir dans le cadre de la géométrie non commutative. Et on termine ce mémoire par une conclusion où nous discuterons des résultats obtenues et des perspectives d'études futures.

Chapitre 2

Effet de Casimir standard

2.1 Quantification de champ de Maxwell

Nous rappelons que le Lagrangien de Maxwell est donné par

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.1)$$

En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, on obtient les équations de Maxwell suivantes

$$\square A_\mu - (1 - \lambda)\partial_\mu(\partial \cdot A) = 0. \quad (2.2)$$

Le moment conjugué de quatre-vecteur A_ρ est donné par

$$\pi^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\rho)} = F^{\rho 0} - \lambda g^{\rho 0}(\partial \cdot A). \quad (2.3)$$

Sachant que A_ρ et le son moment conjugué π^ρ vérifient la relation de commutation canonique suivante

$$[A_\rho(t, r), \pi^\rho(t, r')] = ig_\rho^\nu \delta^3(r - r').$$

Dans la jauge de Feynman. ($\lambda = 1$), l'équation (2.2) réduit à

$$\square A^\mu = 0 \quad \lambda = 1 \quad (2.4)$$

Les autres relations de commutations canoniques sont données par :

$$[A_\rho(t, r), A_\nu(t, r')] = [\pi_\rho(t, r), \pi_\nu(t, r')] = 0 \quad (2.5)$$

$$[A_\rho(t, r), A_\nu(t, r')] = [A_\rho(t, r), A_\nu(t, r')] = 0 \quad (2.6)$$

$$[A_\rho(t, r), A_\nu(t, r')] = ig_{\rho\nu}\delta^3(r - r') \quad (2.7)$$

La solution des équation de Maxwell est donné par

$$\hat{A}(r, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{(2\pi)^4}{\omega}} \sum_\lambda [a^{(\lambda)}(p) \varepsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-ipx} + a^{(\lambda)+}(p) \varepsilon_\mu^{(\lambda)*} e^{ipx}] \quad (2.8)$$

Soit n l'axe de temps $n^2 = 1, n^0 > 0$. Si on choisit $\varepsilon^{(1)}$ et $\varepsilon^{(2)}$ dans le plan orthogonal à p et n tel que

$$\varepsilon^{(\lambda)}(p) \varepsilon^{(\lambda')}(p) = -\delta_{\lambda, \lambda'} \quad \lambda, \lambda' = 1, 2$$

on a alors $\varepsilon^{(3)}$ dans le plan (p, n) orthogonal à n et normalisé

$$\varepsilon^{(\lambda)}(p) \cdot n = 0 \quad [\varepsilon^{(3)}(p)]^2 = -1$$

Enfin on prend $\varepsilon^{(0)}$ égal à n . Avec ces conventions on appelle respectivement $\varepsilon^{(1)}$ et $\varepsilon^{(2)}$ transversales, $\varepsilon^{(3)}$ longitudinales et $\varepsilon^{(0)}$ polarisation scalaire.

Dans le cadre où $n^0 = 1$ et k est le long du troisième axe, nous avons

$$\sum_\lambda \frac{\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(p) \varepsilon_\nu^{(\lambda)*}(p)}{\varepsilon^{(\lambda)}(p) \varepsilon^{(\lambda)*}(p)} = g_{\mu\nu} \quad \varepsilon^{(\lambda)}(p) \varepsilon^{(\lambda')}(p) = g^{\lambda\lambda'} \quad (2.9)$$

Le dénominateur dans la première expression est nécessaire en raison du produit scalaire indéfini.

En utilisant les relations de commutation, on obtient

$$[a^{(\lambda)}(p), a^{+(\lambda')}(p)] = -(2\pi)^3 g^{\lambda\lambda'} \delta^3(p - p') \quad (2.10)$$

$$[a^{(\lambda)}(p), a^{(\lambda')}(p)] = [a^{+(\lambda)}(p), a^{+(\lambda')}(p)] = 0 \quad (2.11)$$

De plus, nous trouvons facilement que

$$[A_\mu(r), A_\nu(r')] = -ig_{\mu\nu} \Delta(r - r') \quad (2.12)$$

Avec Δ est défini par

$$\Delta(r - r') = \frac{1}{i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p) \varepsilon e^{-ip \cdot r}$$

Comme nous savons,

$$a^{(\lambda)}(p) |0\rangle = 0 \quad \lambda = 0, 1, 2, 3$$

et

$$|1\rangle = \int dp f(p) a^{(0)+}(p) |0\rangle, \quad p = (|\vec{p}|, \vec{p})$$

En utilisant les propriétés précédentes, on obtient l'expression de l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \int dr : (\pi A_\mu - \mathcal{L}) = \frac{1}{2} \int dr (\sum [A_i^2 + (\nabla A_i)^2] - A_0^2 - (\nabla A_0)^2) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{2w(p)} \sum_\lambda [a^{(\lambda)+} a^{(\lambda)}(p) - a^{+(0)}(p) a^{(0)}(p)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.2 Fluctuations de vide

Soient deux grande plaques métalliques planes de surface A^2 , parallèles entre elles, et séparées par une distance L . On suppose de plus que les plaques sont des conducteurs parfaits et qu'elles ne sont pas chargées (FIGURE 1).

Comme nous savons, seulement les modes transversaux contribuent dans l'énergie. Si p_3 perpendiculaire sur les plaques est différent de zéro elle doit prendre des valeurs discretes $p_3 = \frac{\pi n}{L}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Après sommation sur les états de polarisation, on obtient l'expression de l'énergie de point zéro en présence des plaques métalliques donnée par

$$E = \sum \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha = \frac{A^2}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \left[|q| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(q^2 + \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.14)$$

Avec q l'impulsion transversale dans un plan parallèle aux plaques. Cette énergie peut être infinie. Pour cela, on doit soustraire l'énergie de point zéro en absence des plaques et qui est donnée par

$$E_0 = \frac{A^2}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L dp_3}{2\pi} 2 \sqrt{q^2 + p_3^2} \quad (2.15)$$

$$= \frac{A^2}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dn \sqrt{q^2 + n^2 \pi^2 / L^2} \quad (2.16)$$

D'où l'énergie par unité de surface est devient :

$$\varepsilon = \frac{\Delta E_0}{A^2} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} q dq \left(\frac{q}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{q^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} - \int_0^{\infty} dn \sqrt{q^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} \right). \quad (2.17)$$

En introduisant le changement de variable $u = \frac{L^2}{\pi^2} q^2$, on obtient

$$\varepsilon = \frac{\hbar c \pi^2}{4L^3} \int_0^{\infty} du \left(\frac{\sqrt{u}}{2} + \frac{\pi}{L} \sum \sqrt{u + n^2} - \frac{\pi}{L} \int_0^{\infty} dn \sqrt{u + n^2} \right) \quad (2.18)$$

On remarque que cette expression est ultravioletements divergente. Cette divergence peut etre régulariser à l'aide d'une fonction de coupure $f(k)$, de sorte que $f(0) = 1$ et $f\left(k \gg \frac{1}{L_0}\right) \rightarrow 0$, basé sur la raison physique qui, pour les ondes de longueurs très courtes, les plaques ne constituent pas un obstacle. D'où

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{\hbar c \pi^2}{4L^3} \int_0^{\infty} du \left[\frac{\sqrt{u}}{2} f\left(\frac{\pi}{L} \sqrt{u}\right) + \sum_1^{\infty} \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi}{L} \sqrt{u + n^2}\right) \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} dn \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi}{L} \sqrt{u + n^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En utilisant la définition

$$G(n) = \int_0^{\infty} du \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi}{L} \sqrt{u + n^2}\right)$$

l'expression (2.19) devient

$$\varepsilon = \frac{\hbar c \pi^2}{4L^3} \left[\frac{1}{2} G(0) + G(1) + G(2) + \dots - \int_0^{\infty} dn G(n) \right] \quad (2.20)$$

Puisque $f(\infty) = 0$ nous pouvons utiliser la formule d'Euler-Maclaurin pour calculer la différence entre la somme et l'intégrale dans la parenthèse ci-dessus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N G(n) - \int_0^N dn G(n) = -B_1 [G(N) + G(0)] \\ + \sum_{k=1}^1 \frac{B_{2k}}{(2k)!} [G^{(2k-1)}(N) - G^{(2k-1)}(0)] \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\varepsilon = -\frac{\hbar c \pi^2}{4L^3} \sum_{k=1}^1 \frac{B_{2k}}{(2k)!} [G^{(2k-1)}(N) - G^{(2k-1)}(0)] \quad (2.22)$$

ou les nombres de Bernoulli sont définis par la série

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_{v=0}^{\infty} B_v \frac{y^v}{v!} \quad (2.23)$$

et $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, ... nous avons

$$G(n) = \int_{n^2}^{\infty} du \sqrt{u} f\left(\frac{\pi}{L} \sqrt{u}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} G'(n) &= -2n^2 f\left(\frac{\pi}{L} n\right) & G'(0) &= 0 \\ G''(n) &= -4nf\left(\frac{\pi}{L} n\right) - \frac{\pi}{L} 2nf'\left(\frac{\pi}{L} n\right) & G''(0) &= 0 \\ G'''(n) &= -4f\left(\frac{\pi}{L} n\right) - \frac{\pi^2}{L^2} 8nf'\left(\frac{\pi}{L} n\right) - \frac{\pi^2}{L^2} 2n^2 f''\left(\frac{\pi}{L} n\right) & G'''(0) &= -4 \end{aligned}$$

Nous remplaçons les dérivés dans l'équation 2.20, on obtient

$$\varepsilon = \frac{c\pi^2}{4L^3} \left[-\frac{1}{4!} B_4 G'''(0) \right]$$

d'où l'expression de l'énergie de Casimir

$$\varepsilon = \frac{c\pi^2}{L^3} \frac{B_4}{4!} = -\frac{\pi^2}{720} \frac{c}{L^3}.$$

La force par unité de surface $\mathcal{F} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial L}$ générée par cette énergie est donnée par

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{c}{L^4} \quad (2.24)$$

Le signe moins indique que cette force est attractive.

On remarque que la force de Casimir par unité de surface dépendant de la distance L entre les plaques, et elle croît rapidement lorsque la distance entre les plaques diminue.

Chapitre 3

Quantification Lagrangienne et Canonique

3.1 Quantification Lagrangienne

3.1.1 Opérateur de champ inspiré de la géométrie non comutative

Dans la troisième approche à la théorie quantique des champs non commutative utilise la base des états cohérents de l'oscillateur harmonique sur un espace-temps non-commutatif

$$[\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{x}}_j] = i\epsilon_{ij}\theta \text{ avec } i, j = 1, 2 \quad (3.1)$$

où θ est une constante positive. Les autres relations de commutation habituelles restent inchangées

$$[\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j] = i\delta_{ij}, \quad [\hat{\mathbf{p}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j] = 0. \quad (3.2)$$

L'utilisation de la base des états cohérents passe par la définition de nouvelles coordonnées $\hat{\mathbf{z}}$ et $\hat{\mathbf{z}}^+$ données par [35]

$$\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{x}}^1 + i\hat{\mathbf{x}}^2), \quad \hat{\mathbf{z}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{x}}^1 - i\hat{\mathbf{x}}^2), \quad (3.3)$$

et telles que

$$[\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}^+] = \theta. \quad (3.4)$$

Ainsi les opérateurs $\hat{\mathbf{z}}$ et $\hat{\mathbf{z}}^+$ peuvent être considérés comme des opérateurs d'annihilation et de création d'un oscillateur harmonique et par suite nous pouvons construire la base des états cohérents de l'oscillateur harmonique en suivant la démarche habituelle. En effet on a les actions suivantes

$$\hat{\mathbf{z}} |z\rangle = z |z\rangle, \langle z| \hat{\mathbf{z}}^+ = \langle z| \bar{z} \quad (3.5)$$

où, les vecteurs $\{|z\rangle\}$ définissant l'espace de Fock, sont donnés par

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2\theta} - \frac{z}{\theta}\hat{\mathbf{z}}^+\right) |0\rangle. \quad (3.6)$$

Il est facile de montrer que les vecteurs $\{|z\rangle\}$ satisfont la relation de complétude

$$\frac{1}{\pi\theta} \int dz d\bar{z} |z\rangle \langle z| = 1. \quad (3.7)$$

Cependant ils ne sont pas orthogonaux

$$\langle z|w\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2+|w|^2}{2\theta} - \frac{\bar{w}z}{\theta}\right). \quad (3.8)$$

La projection d'un opérateur $F(\hat{\mathbf{x}}^1, \hat{\mathbf{x}}^2)$ dans l'espace des $|z\rangle$ est définie par

$$F(\mathbf{z}) := \langle z| F(\hat{\mathbf{x}}^1, \hat{\mathbf{x}}^2) |z\rangle. \quad (3.9)$$

De cette relation émerge la structure algébrique non-commutative (3.1) de l'espace des vecteurs $\{|z\rangle\}$ donné par

$$\langle z| [\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2] |z\rangle = i\theta. \quad (3.10)$$

Appliquons maintenant la relation (3.9) au champ de Jauge (2.8)

$$\begin{aligned} A_\mu(\mathbf{z}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \sum_\lambda \left[a^{(\lambda)} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \exp(-iEt) \langle z| \exp(ip_j \hat{\mathbf{x}}^j |z\rangle \right. \\ \left. + a^{(\lambda)+} \varepsilon_\mu^{(\lambda)*} \exp(iEt) \langle z| \exp(-ip_j \hat{\mathbf{x}}^j |z\rangle \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

utilisons (3.10), on obtient

$$A_\mu(x, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{\frac{-\theta}{4}(\omega^2+p^2)} \sum_\lambda \left[a^{(\lambda)} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \exp(-ipx) + a^{(\lambda)+} \varepsilon_\mu^{(\lambda)*} \exp(ipx) \right] \quad (3.12)$$

3.1.2 Densité Lagrangienne et Action

Nous allons construire le formalisme lagrangien de de champ de Jauge inspiré de la géométrie non commutative en utilisant une densité Lagrangienne suivante

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial.A)^2 \quad (3.13)$$

Cette densité reste invariante sous la transformation de Jauge

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda. \quad (3.14)$$

En utilisant les équations d Euler-Lagrange, on obtient les équations de Maxwell suivantes

$$\square A_\mu - (1 - \lambda)\partial_\mu(\partial.A) = 0 \quad (3.15)$$

Dans la jauge de Feynman. ($\lambda = 1$), l'équation (2.2) réduit à

$$\square A^\mu = 0 \quad \lambda = 1 \quad (3.16)$$

L'action S définie sur une région arbitraire R de l'espace-temps est donnée par la définition habituelle

$$S[A_\mu] = \int_R d^4x \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\mu) = \int_R d^4x \left[-\frac{1}{4}F^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial.A)^2 \right]. \quad (3.17)$$

Nous avons deux méthodes pour obtenir les équations du mouvement. Nous utiliserons la méthode la plus simple où on utilise la définition de champ inspiré de la géométrie non commutative.

En effet, on agit avec l'opérateur $\square$ sur le champ de Jauge inspiré de la géométrie non commutative (3.12)

$$\begin{aligned} \square A_\mu(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\frac{\theta}{4}(\omega^2+p^2)}}{\sqrt{2\omega_k}} \square \left[a_\alpha(k) \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \exp(-ikx) + a_\alpha^+(k) \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \exp(ikx) \right] . \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\frac{\theta}{4}(\omega^2+p^2)}}{\sqrt{2\omega_k}} (\omega_k^2 - \mathbf{k}^2) \\ &\quad \left[-a_\alpha(k) \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \exp(-ikx) - a_\alpha^+(k) \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \exp(ikx) \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

on sait que $\omega_k^2 = \mathbf{k}^2$ d'ou l'équation de mouvement est

$$\square A_\mu(x) = 0. \quad (3.19)$$

3.1.3 Théorème de Noëther

Supposons que notre action possède une symétrie continue et que l'ensemble de toutes les symétries de l'action forme un groupe de symétrie.

Commençons par supposer une transformation de symétrie qui affecte les positions et les champs

$$x' = x + \delta x, \quad \Phi' = \Phi + \delta \Phi \quad (3.20)$$

La variation de la densité Lagrangienne est alors donnée par

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\Phi + \delta \Phi, \partial_\mu \Phi + \delta(\partial_\mu \Phi)) - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \\ &= \int_R d^4 x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta(\partial_\mu \Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \right]. \end{aligned}$$

On a les propriétés suivantes

$$\delta(\partial_\mu \Phi) = \partial_\mu(\delta \Phi) \quad (3.21)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu(\delta \Phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \delta \Phi, \quad (3.22)$$

D'où

$$\delta \mathcal{L} = \int_R d^4 x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \right) \delta \Phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right) + \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \right].$$

En utilisant les équations d'Euler-Lagrange on obtient

$$\delta \mathcal{L} = \int_R d^4 x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right). \quad (3.23)$$

Comme sur la frontière de l'hypersurface on a $\delta \Phi(x) = \delta x^\nu = 0$

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \partial \sigma_\mu = 0, \quad (3.24)$$

Utilisons maintenant la variation totale de champ Φ

$$\begin{aligned} \Delta \Phi'(x') &= \Phi'(x') - \Phi(x) \\ &= \Phi'(x') - \Phi(x') + \Phi(x') - \Phi(x) \\ &= \delta \Phi + (\partial_\mu \Phi) \delta x^\mu \end{aligned} \quad (3.25)$$

D'où

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} [\delta \Phi(x) + (\partial_\nu \Phi) \delta x^\nu] + \right. \\ & \left. - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} (\partial_\nu \Phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \delta x^\nu \right) \partial \sigma_\mu. \end{aligned} \quad (3.26)$$

on obtient finalement

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \Delta \Phi(x) - \theta_\nu^\mu \delta x^\nu \right) \partial \sigma_\mu, \quad (3.27)$$

où le tenseur moment-énergie est défini par

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} (\partial_\nu \Phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}. \quad (3.28)$$

On suppose maintenant que l'action S est invariante sous le groupe des transformations de x^μ et Φ , où les transformations infinitésimales sont caractérisées par un paramètre infinitésimal $\delta \omega^\nu$

$$\Delta x^\mu = X_\nu^\mu \delta \omega^\nu, \Delta \Phi = \Phi_\mu \delta \omega^\mu. \quad (3.29)$$

En remplaçant dans $\delta \mathcal{L} = 0$ on obtient l'expression suivante

$$\int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \Phi_\nu(x) - \theta_\kappa^\mu X_\nu^\kappa \right) \delta \omega^\nu \partial \sigma_\mu = 0. \quad (3.30)$$

Comme $\delta \omega^\nu$ est arbitraire on peut écrire

$$\int_{\partial R} J_\nu^\mu \partial \sigma_\mu = 0, \quad (3.31)$$

avec le courant J_ν^μ définie par

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \Phi_\nu(x) - \theta_\kappa^\mu X_\nu^\kappa. \quad (3.32)$$

Le théorème de Gauss $\int_R \partial_\mu J_\nu^\mu \partial^4 x = 0$ (R est arbitraire) conduit finalement à l'équation de continuité

$$\partial_\mu J_\nu^\mu = 0, \quad (3.33)$$

qui a la même forme que dans le cas local. A partir du courant conservé J_ν^μ on peut définir une charge conservée Q_ν par

$$Q_\nu = \int_\sigma J_\nu^\mu d\sigma_\mu, \quad (3.34)$$

où l'intégration se fait sur l'hypersurface σ . Si on choisit le temps constant, Q_ν devient

$$Q_\nu = \int_V J_\nu^0 d^3x. \quad (3.35)$$

Intégrons maintenant l'expression (3.33) sur V

$$\int_V \partial_0 J_\nu^0 d^3x + \int_V \partial_i J_\nu^i d^3x = 0. \quad (3.36)$$

Le deuxième terme est nul d'après le théorème de Gauss. Il reste alors

$$\int_V \partial_0 J_\nu^0 d^3x = \frac{dQ_\nu}{dt} = 0. \quad (3.37)$$

D'où le théorème de Noëther.

Appliquons maintenant le théorème de Noëther dans le cas des translations spatio-temporelles. Dans ce cas on a

$$\Delta x^\mu = \varepsilon^\mu, \Delta \Phi = 0. \quad (3.38)$$

Ce qui revient à poser

$$X_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu, \Phi_\mu = 0. \quad (3.39)$$

Dans ce cas on obtient

$$J_\nu^\mu = -\theta_\nu^\mu. \quad (3.40)$$

La remarque la plus importante est que le courant et le tenseur moment-énergie ont la même formes que dans le cas de la théorie locale avec le remplacement des champs habituels par des champs déformés.

3.2 Quantification canonique

Par analogie avec la théorie locale, la description quantique se construit en remplaçant les quantités classiques par des opérateurs. Nous allons utiliser l'algèbre des opérateurs de la théorie commutative et nous déduirons les trois principaux résultats de la quantification qui sont : les conditions quantique (commutateurs), l'énergie et la fonction de propagation.

3.2.1 Champ conjugué

On sait que dans la théorie commutative que la quantification de champ deJauge souffre de l'ambiguïté suivante

$$[A_0(t, \mathbf{x}), \pi^0(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (3.41)$$

pour éviter ce probleme, nous rajoutons au lagrangien qui n'apparait pas dans la jauge de Lorentz $(\partial_\mu A^\mu)$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (3.42)$$

Dans ce cas le champ conjugué devient

$$\begin{aligned} \pi_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^\mu)} = F_{\mu 0} - \frac{\lambda}{2}g_{\mu 0}(\partial_\nu A^\nu) \\ &= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega \sqrt{\frac{1}{2\omega}} e^{\frac{\theta}{4}(\omega^2 + p^2)} \sum_\lambda \left[a^{(\lambda)} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \exp(-ipx) - a^{(\lambda)+} \varepsilon_\mu^{(\lambda)*} \exp(ipx) \right], \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.2.2 Conditions quantiques

Nous allons chercher maintenant les relations de commutation à temps égaux entre les champs non locaux en utilisant les solutions des équations de mouvement. En effet on a

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), \pi^\nu(y)]_{x_0=y_0} &= i \int \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_q}{4\omega_k}} \exp\left(-\frac{\theta(\omega_k^2 + \omega_q^2 + \mathbf{k}^2 + \mathbf{q}^2)}{4}\right) \\ &\times \sum_{\alpha, \beta} \left\{ [a_\alpha(k) \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \exp(-ikx) + a_\alpha^+(k) \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}) \exp(ikx)] \right. \\ &\times [a_\beta(q) \varepsilon_\nu(\mathbf{q}) \exp(-iqy) - a_\beta^+(q) \varepsilon_\nu^*(\mathbf{q}) \exp(iqy)] \\ &- [a_\beta(q) \varepsilon_\nu(\mathbf{q}) \exp(-iqy) - a_\beta^+(q) \varepsilon_\nu^*(\mathbf{q}) \exp(iqy)] \\ &\times [a_\alpha(k) \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \exp(-ikx) + a_\alpha^+(k) \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}) \exp(ikx)] \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

ce qu'on peut écrire comme

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), \pi^\nu(y)]_{x_0=y_0} &= i \int \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_q}{4\omega_k}} \exp\left(-\frac{\theta(\omega_k^2 + \omega_q^2 + \mathbf{k}^2 + \mathbf{q}^2)}{4}\right) \sum_{\alpha, \beta} \\ &([a_\alpha(k), a_\beta(q)] \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_\nu(\mathbf{q}) e^{i(-kx - qy)} - [a_\alpha(k), a_\beta^+(q)] \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_\nu^*(\mathbf{q}) e^{i(-kx + qy)} \\ &+ [a_\alpha^+(k), a_\beta(q)] \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}) \varepsilon_\nu(\mathbf{q}) e^{i(kx - qy)} - [a_\alpha^+(k), a_\beta^+(q)] \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}) \varepsilon_\nu^*(\mathbf{q}) e^{i(kx + qy)}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

En utilisant l'algèbre (2.10) nous obtenons

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), \pi^\nu(y)]_{x_0=y_0} &= -i \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^3q \sqrt{\frac{\omega_q}{4\omega_k}} \exp\left(-\frac{\theta(\omega_k^2 + \omega_q^2 + \mathbf{k}^2 + \mathbf{q}^2)}{4}\right) \\ \sum_{\alpha, \beta} g^{\alpha\beta} \delta^3(k - q) [\varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_\nu^*(\mathbf{q}) e^{i(-kx + qy)} - \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}) \varepsilon_\nu(\mathbf{q}) e^{i(kx - qy)}] \end{aligned} \quad (3.46)$$

en intégrant sur q on obtient

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), \pi^\nu(y)]_{x_0=y_0} &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp\left(-\frac{\theta(\omega_k^2 + \mathbf{k}^2)}{2}\right) \\ \sum_\alpha [\varepsilon_\mu(\mathbf{k}) \varepsilon^{*\nu}(\mathbf{k}) \exp i(-\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}) \varepsilon^\nu(\mathbf{k}) \exp(i(\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})))] \end{aligned} \quad (3.47)$$

ou bien

$$[A_\mu(x), \pi^\nu(y)]_{x_0=y_0} = i g_\mu^\nu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp\left(-\frac{\theta(\omega_k^2 + \mathbf{k}^2)}{2}\right) \exp i(\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \quad (3.48)$$

en utilisant l'intégrale de Gauss, on obtient

$$[A_\mu(x), \pi^\nu(y)]_{x_0=y_0} = i g_\mu^\nu \frac{1}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{4\theta}\right) \quad (3.49)$$

On remarque que la distribution de Dirac est remplacée par une distribution Gaussienne.

3.2.3 Hamiltonien

A partir de la définition de l'Hamiltonien donnée par

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\pi^\mu (\partial_0 A_\mu) - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x \left(\pi^\mu (\partial_0 A_\mu) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

en remplaçant (2.8) et (3.43) dans (3.50) on obtient

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-\theta\omega_k^2} \omega_k \left(a_\alpha^+ a_\alpha + \frac{1}{2} \right) \quad (3.51)$$

On remarque l'apparition d'un facteur d'amortissement qui rend l'énergie du point zéro finie.

3.2.4 Fonction de propagation

On termine la quantification canonique du champ de Dirac non local par le calcul de la fonction de propagation, ou ce qui est equivalent, l'anticommutateur entre champs non locaux de Dirac à des temps differents.

L'expression du propagateur est donnée par la moyenne sur le vide du produit ordonné des champs de Dirac

$$\begin{aligned} S_M(x-y) &= \langle 0 | T A_\mu(x), \pi^\nu(y) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | A_\mu(x) \pi^\nu(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \pi^\nu(y) A_\mu(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.52)$$

La représentation intégrale de la fonction de Heaviside donnée par

$$\theta(x^0 - y^0) = \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} \exp(-i\tau(x^0 - y^0)), \quad (3.53)$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned} S_M(x-y) &= -i \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_k\omega_q}} e^{\frac{-\theta}{4}(\omega_k^2 + k^2 + \omega_q^2 + q^2)} \\ &\times \sum_{\alpha\beta} \left(\int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} \exp(-i\tau(x^0 - y^0)) \langle 0 | \left[a^{(\alpha)} \varepsilon_\mu^{(\alpha)} \exp(-ikx) + a^{(\alpha)+} \varepsilon_\mu^{(\alpha)*} \exp(ikx) \right] \right. \\ &\times \left. \left[a^{(\beta)} \varepsilon_\nu^{(\beta)} \exp(-iqy) - a^{(\beta)+} \varepsilon_\nu^{(\beta)*} \exp(iqy) \right] | 0 \rangle \right. \\ &+ \int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} \exp(-i\tau(y^0 - x^0)) \times \langle 0 | \left[a^{(\beta)} \varepsilon_\nu^{(\beta)} \exp(-iqy) - a^{(\beta)+} \varepsilon_\nu^{(\beta)*} \exp(iqy) \right] \\ &\times \left. \left[a^{(\alpha)} \varepsilon_\mu^{(\alpha)} \exp(-ikx) + a^{(\alpha)+} \varepsilon_\mu^{(\alpha)*} \exp(ikx) \right] | 0 \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Sachant que

$$a^{(\alpha)} | 0 \rangle = 0, \quad (3.55)$$

on obtient

$$\begin{aligned} S_M(x-y) &= -i \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_k\omega_q}} e^{\frac{-\theta}{4}(\omega_k^2 + k^2 + \omega_q^2 + q^2)} \\ &\times \sum_{\alpha\beta} \int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} \exp(-i\tau(x^0 - y^0)) \langle 0 | a^{(\alpha)} a^{(\beta)+} | 0 \rangle \varepsilon_\mu^{(\alpha)} \varepsilon_\nu^{(\beta)*} \exp i(-kx + qy) \\ &+ \int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} \exp(-i\tau(y^0 - x^0)) \times \langle 0 | a^{(\beta)} a^{(\alpha)+} | 0 \rangle \varepsilon_\nu^{(\beta)} \varepsilon_\mu^{(\alpha)*} \exp i(kx - qy). \end{aligned} \quad (3.56)$$

On ajoute au premier terme la quantité $0 = -\langle 0 | a^{(\beta)+} a^{(\alpha)} | 0 \rangle$ et au deuxième terme la quantité $0 = -\langle 0 | a^{(\alpha)+} a^{(\beta)} | 0 \rangle$, puis nous utiliserons les relations de commutation (2.10), ce qui nous conduit à

$$S_M(x-y) = \frac{i}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{\frac{\theta}{2}(\omega_k^2 + k^2)} \left[\int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} \exp(-i\tau(x^0 - y^0)) \exp ik(-x + y) \right. \\ \left. + \int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} \exp(-i\tau(y^0 - x^0)) \exp ik(x - y) \right] \quad (3.57)$$

Maintenant nous considérons $\tau = k_0 - \omega_k$ pour le premier terme et $\tau = -k_0 - \omega_k$ pour le deuxième terme puis nous faisons le changement $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ dans le deuxième terme

$$\frac{\exp(-i\tau(x^0 - y^0))}{\tau + i\varepsilon} \exp(-ik^+(x - y)) = \frac{\exp(-ik(x - y))}{\omega_k - k_0 + i\varepsilon} \text{ pour } \tau = k_0 - \omega_k, \quad (3.58)$$

$$\frac{\exp(-i\tau(y^0 - x^0))}{\tau + i\varepsilon} \exp(ik^+(x - y)) = \frac{\exp(-ik(x - y))}{-\omega_k - k_0 + i\varepsilon} \text{ pour } \tau = -k_0 - \omega_k, \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}. \quad (3.59)$$

En remplaçant dans la formule précédente on obtient

$$S_M(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{\frac{-\theta}{2}(\omega_k^2 + k^2)}}{k^2 + i\varepsilon} \exp ik(-x + y) \quad (3.60)$$

Chapitre 4

Effet Casimir non commutatif

Dans ce chapitre on va étudier la force de Casimir pour un champ scalaire sans masse entre deux plaques parallèles dans la cadre de la géométrie non commutative. Supposons que les deux plaques parfaitement conductrices se trouvent à $z = 0$ et L et s'étendent à l'infini dans le plan (x, y) . Les conditions aux limites impliquent alors que, entre les plaques, l'impulsion selon l'axe oz est quantifiée,

$$k_z = \frac{\pi n}{L}$$

alors que $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ prend des valeurs continues. La fréquence d'un mode de champ scalaire sans masse peut donc s'écrire

$$\omega_n = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{\pi^2 n^2}{L^2}} \quad (4.1)$$

avec $\mathbf{k}^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$.

Nous pouvons réécrire la densité d'énergie à partir de l'équation (3.51) dans le volume contenu entre les plaques en utilisant Eq. (4.1) comme

$$\begin{aligned} E_{in} &= \langle 0 | H | 0 \rangle \\ &= \frac{A}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} k dk e^{-\theta \omega_n^2} \omega(k) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$= \frac{A}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} k dk e^{-\theta \omega_n^2} \omega(k) \quad (4.3)$$

et A est la surface des plaques et lesigne prime sur la sommation en Eq. (37) signifie que le terme avec $n = 0$ est multiplié par un facteur de $1/2$. En utilisant (4.1), on peut changer l'integration sur k par l'integration sur ω comme suit

$$E_{in} = \frac{A}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty'} \int_{\frac{\pi n}{L}}^{+\infty} d\omega e^{-\theta\omega^2} \omega^2 \quad (4.4)$$

Introduisons le changement de variables $y = \theta\omega^2$, ob obtient

$$\begin{aligned} E_{in} &= \frac{A}{4\pi\theta^{\frac{3}{2}}} \int_{\frac{\theta\pi^2 n^2}{L^2}}^{+\infty} dy y^{\frac{1}{2}} e^{-y} \\ &= \frac{A}{4\pi\theta^{\frac{3}{2}}} \Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{\theta\pi^2 n^2}{L^2}\right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

où $\Gamma(\alpha, z)$ est la fonction gamma incomplète definie par

$$\Gamma(\alpha, z) = \Gamma(\alpha) - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{s! (s + \alpha)} \quad (4.6)$$

La densité d'énergie en absence des plaques peut également être obtenue en notant que l'impulsion le long de la direction z prend des valeurs continues. c-à-d la sommation sur n de l'expression (4.5) devient une intégrale,

$$\begin{aligned} E_{out} &= \langle 0 | H | 0 \rangle \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_0^{+\infty} dn \int_{\frac{\pi n}{L}}^{+\infty} d\omega e^{-\theta\omega^2} \omega^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$= \frac{A}{4\pi\theta^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} dn \Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{\theta\pi^2 n^2}{L^2}\right) \quad (4.8)$$

Nous remarquons encore que les expressions de la densité d'énergie dans les équations précédentes sont finies et n'ont pas desoin d'être régularisées.

maintenant on peut caculer l'énèrgie casimir definie par

$$E = E_{in} - E_{out} \quad (4.9)$$

en utilisant (4.5) et (4.8), on obtient

$$E = \frac{A}{4\pi\theta^{\frac{3}{2}}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty'} \Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{\theta\pi^2 n^2}{L^2}\right) - \int_0^{+\infty} dn \Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{\theta\pi^2 n^2}{L^2}\right) \right]$$

Maintenant on passe au calcul de la force agissante sur les plaques de l'intérieur comme définie par

$$F = -\frac{\partial E}{\partial L} = -\frac{A\pi^2}{2L^4} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 e^{\frac{-i^2}{L^2} \pi^2 n^2} - \int_0^{+\infty} dn n^3 e^{\frac{-i^2}{L^2} \pi^2 n^2} \right] \quad (4.10)$$

En utilisant le formule d'Euler-Maclaurin,

$$\sum_{n=0}^N f(n) - \int_0^N dn f(n) = -B_1[f(N) + f(0)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2K}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(N) - f^{(2k-1)}(0)] \quad (4.11)$$

ou B_{2K} sont les nombres de Barnoulli, et le fait que

$$f(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} f(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} f^{(2k-1)}(N) = 0 \quad (4.12)$$

on obtient la pression sous forme de série de puissance $\frac{l}{L}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{F_{net}}{A} = \frac{-\pi^2}{240L^4} \left[1 + \theta \frac{17\pi^2}{21L^2} + \theta^2 \frac{\pi^4}{4L^4} + \dots \right] \\ &= \mathcal{F}_0 \left[1 + \theta \frac{17\pi^2}{21L^2} + \theta^2 \frac{\pi^4}{4L^4} + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Le facteur $\mathcal{F}_0$ est le résultat standard de Casimir obtenu au chapitre 2, et pour une comparaison avec le résultat complet ordres 100 en fonction de $\frac{l}{L}$ voir Fig. 2. Pour une séparation de plaque $L \simeq 10\ell$ la correction de volume est de l'ordre de 5% et diminue rapidement à zéro pour un grand L .

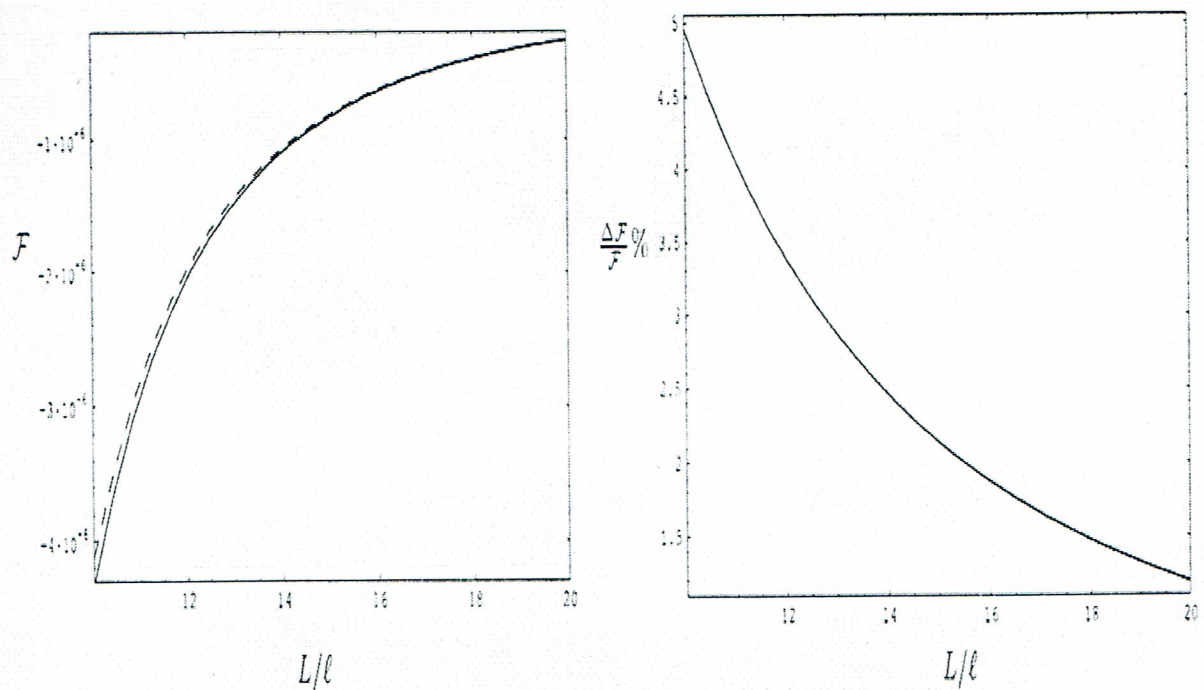


Fig. 2 : parcelle gauche: pression Casimir dans le cas commutative (ligne pointillée) et non-commutative (ligne solide) en unités de θ^{-4} en fonction du séparation L entre les plaques (en unités de $l = \sqrt{\theta}$) Parcelle droite: pourcentage différence entre les deux pressions Casimir en fonction de L/l . Seuls les effets de volume sont inclus.

Conclusion

L'objet central de ce memoire était l'étude de l'effet de Casimir dans le cadre de la géométrie non commutative la non commutativité s'exprime a travers l'utilisation d'un opérateur de champ inspiré de la géométrie non commutative.

Dans le troisième chapitre nous avons étudié l'effet Casimir dans le cas standard. On a donné d'abord un rappel sur la quantification de champ de maxwell ou on a trouve la solution de champ de Maxwell. Puis on a calculé l'énergie du vide entre deux plaques séparées par une distance a et aussi la force de Casimir qui est de nature attractive. Cela peut déstabiliser le système de deux plaques et peut s'effondrer ce système de deux plaques en un système à une plaque.

Le troisième chapitre contient deux parties. Dans la première partie, nous avons procéder à l'étude classique de la théorie à travers l'utilisation du formalisme Lagrangien, où nous avons pu montrer que les équations de mouvements de cette théorie ont la même forme que celles de la théorie locale, et que les solutions de ces equations contiennent un facteur d'amortissement exponentiel, $\exp\left(-\frac{\theta(\omega_k^2+k^2)}{4}\right)$, qui joue le role de régulateur de la théorie. Aussi le prolongement du théorème de Néother au cas non local, nous a conduit à un courant conservé. La deuxième partie qui concernait la quantification canonique, a fait ressortir, l'aspect non commutative de la théorie, à travers des conditions de quantification données par des fonctions régularisées par le même facteur exponenetiel. Notons qu'à la limite $T^{\mu\nu} \rightarrow 0$ les conditions quantiques locales sont retrouvées. Aussi les solutions des équations de mouvement nous ont conduit à un tenseur de moment -énergie déformé qui donne une valeur finie pour l'énergie du point zéro, qui est infinie dans la théorie locale. Aussi nous avons pû obtenir une fonction de propagation régularisée pa le facteur $\exp\left(-\frac{\theta(\omega_k^2+k^2)}{2}\right)$.

Dans le quatrième chapitre nous avons étudié l'effet Casimir dans le cadre de la géométrie non commutative. Nous avons montré que la longueur minimale joue le rôle d'un cut-off naturelle. on a trouvé aussi que la non commutativité de l'espace apporte des corrections logarithmique a l'énergie et la force de Casimir ou on a trouvé ces corrections sont de nature attractive additionnel dans l'expression de la force de Casimir.

Bibliographie

- [1] H. B. G. Casimir. On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates. Indag. Math., 10 :261-263, 1948. [Kon.Ned.Akad.Wetensch.Proc.51 :793-795,1948].
- [2] R. L. Jaffe. Casimir effect and the quantum vacuum. Phys. Rev. D, 72 :021301, Jul 2005.
- [3] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko. New developments in the Casimir effect. Phys. Rep., 353 :1-205, October 2001
- [4] Kimball A. Milton. The Casimir Effect. World Scientific Pub Co Inc, 1st edition, 10 2001
- [5] D. E. Krause, R. S. Decca, D. Lopez, and E. Fischbach. Experimental investigation of the casimir force beyond the proximity-force approximation. Phys. Rev. Lett., 98 :050403, Jan 2007.
- [6] Ulrich Harbach and Sabine Hossenfelder. The Casimir effect in the presence of a minimal length. Phys. Lett., B632 :379-383, 2006.
- [7] K. Nouicer. Casimir effect in the presence of minimal lengths. Journal of Physics A Mathematical General, 38 :10027-10035, November 2005.
- [8] Katja Poppenhaeger, Sabine Hossenfelder, Stefan Hofmann, and Marcus Bleicher. The Casimir effect in the presence of compactified universal extra dimensions. Phys. Lett., B582 :1-5, 2004.
- [9] R. Casadio, A. Gruppuso, B. Harms, and O. Micu. Boundaries and the casimir effect in non commutative space-time. Phys. Rev. D, 76 :025016, Jul 2007.
- [10] H. S. Snyder, *Quantized Space-time*. Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
- [11] C. N. Yang, *On Quantized Space-time*. Phys. Rev. **72**, 874 (1949).

- [12] M. Dubois-Violette. *Non-commutative differential geometry, quantum mechanics and gauge Theory*. Dans C. Bartocci, U. Bruzzo et R. Cianci, éditeurs, *Differential Geometric Methods in Theoretical Physics*, volume 375 de Lecture Notes in Physics, Rapallo, 1990. Springer-Verlag.
- [13] A. H. Chamseddine et A. Connes. *The spectral action principle*, Commun.Math. Phys. 186 (1997) 731–750 [[hep-th/9606001](#)].
- [14] A. Pais, *On Field theories with nonlocalized action*, Phys. Rev. **79** (1950).145.
- [15] H.C. Ohanian, *Finite quantum electrodynamics with a gravitationally smeared propagator*, Phys. Rev. **D55** (1997) 5140.
H.C. Ohanian, *Smearing of propagators by gravitational fluctuations on the Planck scale*, Phys. Rev. **D60** (1999) 104051.
- [16] Th. Filk, *Divergencies in a field theory on quantum space*, Phys. Lett.**B 376** (1996) 53.
- [17] S. Minwalla, M. van Raamsdonk and N. Seiberg, *Noncommutative perturbative dynamics*, JHEP 0002 (2000) 020 [[hep-th/9912072](#)].
A. Matusis, L. Susskind and N. Toumbas, *The IR/UV Connection in the Non-Commutative Gauge Theories*, JHEP **0012** (2000) 002 [[hep-th/0002075](#)].
- [18] G. Mandanici, *Wave Propagation and IR/UV Mixing in non commutative Space-times*, Ph.D.Thesis, [[hep – th/0312328](#)].
- [19] P. Fischer and V. Putz, *No UV/IR mixing in unitarity space-time noncommutative field theory*, Eur. Phys. J. **C32** (2004) 269 [[hep-th/0306099](#)].
- [20] M. Van Raamsdonk, *The meaning of infrared singularities in noncommutative gauge theories*, JHEP **11** (2001) 006 [[hep-th/0110093](#)].
- [21] M. Hayakawa, *Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on R^{*4}* , Phys. Lett. **B478** (2000) 394–400 [[hep-th/9912094](#)].
- [22] A. A. Bichl, M. Ertl, A. Gerhold, J. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, V. Putz, M. Schweda and R. Wulkenhaar, *Non-commutative $U(1)$ super-Yang-Mills theory :Perturbative self-energy corrections*, [[hep-th/0203141](#)].

- [23] A.A. Bichl, J. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, M. Schweda, R. Wulkenhaar, *Renormalization of Noncommutative Photon Selfenergy to all Orders via Seiberg-Witten Map*, J. High Energy Phys. 0106 (2001) 013, [[hep-th/0104097](#)]
- [24] J. Gomis and Th. Mehen, *Space-time noncommutative field theories and unitarity*, Nucl. Phys. **B591**, 265 (2000) [[hep-th/0005129](#)].
- [25] Y. Liao and K. Sibold, *Time-ordered Perturbation Theory on Noncommutative Spacetime : Basic Rules*, Eur. Phys. J. **C25**, 469 (2002)[[hep-th/0205269](#)].
- [26] Y. Liao and K. Sibold, *Time-ordered perturbation theory on noncommutative space-time. II. unitarity*, Eur. Phys. J. **C25**, 479–486 (2002)[[hep-th/0206011](#)].
- [27] H. Bozkaya, P. Fischer, H. Grosse, M. Pitschmann, V. Putz, M. Schweda and R. Wulkenhaar, *Space/time noncommutative field theories and causality*, Eur. Phys. J. **C29**, 133 (2003)[[hep-th/0209253](#)].
- [28] A. Micu and M. M. Sheikh Jabbari, *Noncommutative ϕ^4 theory at two loops*, JHEP **01**, 025 (2001) [[hep-th/000805](#)].
- [29] C.-h. Rim and J. H. Yee, *Unitarity in space-time noncommutative field theories*, [[hep-th/0205193](#)].
- [30] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen and G. Piacitelli, *On the unitarity problem in space/time noncommutative theories*, Phys. Lett. **B533** 178, (2002) [[hep-th/0201222](#)].
- [31] S. Denk and M. Schweda, *Time ordered perturbation theory for non-local interactions; applications to NCQFT*, JHEP **0309**, 032 (2003)[[hep-th/0306101](#)].
- [32] M. Chaichian, A. Demichev and P. Presnajder, *Quantum Field Theory on Noncommutative Space-Times and the Persistence of Ultraviolet Divergences*, Nucl. Phys. **B567**, 360 (2000) [[hep-th/9812180](#)].
- [33] S. Cho, R. Hinterding, J. Madore and H. Steinacker, *Finite Field Theory on Noncommutative Geometries*, Int. J. Mod. Phys. **D 9**, 161 (2000) [[hep-th/9903239](#)].
- [34] A. Smailagic and E. Spallucci, *UV divergence-free QFT on non commutative plane*, J. Phys. **A 36** (2003) L 517 [[hep-th/0308193](#)].

-
- [35] R.J. Glauber, *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*, Phys. Rev.**131** (1963) 2766.
- [36] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen and G. Piacitelli, *Ultraviolet Finite Quantum Field Theory on Quantum Spacetime*, Comm. Math.Phys. **237** (2003) 221 [**hep-th/0301100**].
- [37] P. Nicolini, *Vacuum energy momentum tensor in (2+1) NC scalar field theory*, [**hep – th/0401204**].
- [38] Stefan Denk, Volkmar Putz, Manfred Schwedak and Michael Wohlgenannt, *Towards UV Finite Quantum Field Theories from Non-Local Field Operators*, Eur. Phys. J. **C25** (2002) 479–486 [**hep-th/0401237**].
- [39] Frank Hofheinz, *Field Theory on a non commutative Plane : a Non-perturbative Study*, Ph.D. Thesis, Fortsch.Phys. 52 (2004) 391-445, **hep-th/0403117**

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté une étude théorique sur l'effet de Casimir dans la géométrie non commutative. Nous avons développé la quantification lagrangienne et canoniques et nous avons aboutit à des propagateurs et un hamiltonien régularisé par un facteur exponentiel. La régularisation de l'hamiltonien conduit à la correction dans l'énergie et la force de Casimir.

Abstract

In this work, we present a theoretical study on the effect of Casimir in the non commutativity geometry. We have developed the lagrangian and the canonical quantification and we obtained regularized propagators and Hamiltonian by a damping factor. The regularization of the Hamiltonian leads to the correction in Casimir energy and force.

ملخص:

في هذا العمل قدمنا دراسة نظرية حول تأثير كازيمير في الهندسة الغير تبديلية لقد قمنا بنشر التكميم لاغرونج القانونية، فتنتهي بنشر هاملتون بمعامل أسي، تنظيم هاملتون يؤدي إلى تصحيح طاقة وقوة كازيمير.