

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Par

LAMANI Cherifa

Sujet

Produit tensoriel des espaces métriques

Date de soutenance : 29/05/ 2017

Devant le jury :

Mr. DAHIA El hadj	M.C.A. Univ de M'sila	Président
Mr. MEZRAG Lahcene	Prof. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. TALLAB Abdelhamid	M.C.B. Univ de M'sila	Examineur
Mme. ALOUANI Ahlem	M.A.A. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2016 / 2017

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie du fond du cœur Monsieur **Lahcene MEZRAG** pour avoir accepté de m'encadrer. Je le remercie également pour sa patience et sa bonne humeur. Je tiens à témoigner ma gratitude à Mr. **Dahia El Hadj**, Mme. **ALOUANI Ahlem**, d'avoir acceptés de faire partie du jury de ce mémoire. Un grand merci à mes camarades et mes amis qui m'ont soutenu moralement et à toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Au delà de tous, Je remercie ma famille pour m'avoir toujours soutenu durant mes études.

Merci

Table des matières

Introduction	1
1 Espaces métriques et opérateurs lipschitziens	3
1.1 Les espaces métriques	3
1.1.1 Espaces métriques linéaires	4
1.1.2 Produit des espaces métriques	4
1.2 Les opérateurs lipschitziens	5
1.2.1 Les espaces retracts	6
1.2.2 L'espace $\text{Lip}_0(X, Y)$	6
1.2.3 Le prédéal de $\text{Lip}_0(X)$	7
1.2.4 Adjoint d'opérateurs lipschitziens	7
2 Produit tensoriel des espaces de Banach	11
2.1 Introduction	11
2.1.1 Les opérateurs bilinéaires	11
2.1.2 Propriétés	12
2.2 Produit tensoriel $E \otimes F$	13
2.2.1 Produit tensoriel algébrique	13
2.2.2 Normes tensorielles	14
2.3 Norme tensorielle injective et projective	14
2.3.1 Norme tensorielle injective	14
2.3.2 Norme tensorielle projective	17
2.4 Quelques propriétés	19

2.4.1	L'espace de $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$	19
2.4.2	L'espace de $E \widehat{\otimes}_\pi F$	20
3	Produit tensoriel des espaces métriques	21
3.1	Produit tensoriel de Lipschitz	21
3.1.1	Le produit lipschitzien des fonctionnels et opérateurs	24
3.1.2	Lipschitz cross-normes	25
3.2	Normes injective et projective	26
3.2.1	La norme injective lipschitzienne	26
3.2.2	La norme projective lipschitzienne	28
	Conclusion	31

Introduction

La notion de produit tensoriel d'espaces métriques nouvellement créée a été introduite en 2015 par M.-G. Cabrera-Padilla, J.-A. Chávez-Domínguez, A. Jiménez-Vargas et Moises Villegas Vallecillos dans [CCJV15] comme une généralisation du cas linéaire. Dans ce mémoire, nous allons éclaircir cette généralisation. Notre travail se compose de trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux rappels sur les espaces métriques et les opérateurs lipschitziens, tels que quelques définitions et propriétés des espaces métriques (l'espaces métriques linéaires et le produit des espaces métriques), puis nous donnons des préliminaires concernant quelques propriétés telles que les opérateurs lipschitziens (les espaces retracts, le prédéal de $\text{Lip}_0(X)$ et l'adjoint d'opérateurs lipschitziens) [Wea99].

Le deuxième chapitre est dédié aux produits tensoriels d'espace de Banach. Dans la première et deuxième parties de ce chapitre on donne la définition et quelques propriétés fondamentales sur les opérateurs bilinéaires et le produit tensoriel $E \otimes F$ (produit tensoriel algébrique et norme tensorielle). Dans la troisième parties nous étudions la norme tensorielle injective et projective et nous terminerons ce chapitre par quelques propriétés sur le produit tensoriel injectif et projectif. Il sera étudié comme base pour le troisième chapitre.

Dans le troisième chapitre, on étudiera le produit tensoriel lipschitzien, nous commencer par donner quelques notions utiles pour la suite. Puis, on donnera la norme injective lipschitzienne ε définie par la formule pour chaque $u \in X \boxtimes E$ on a

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(y_i)) \langle \varphi, e_i \rangle \right| : f \in B_{X^\#}, \varphi \in B_{E^*} \right\}$$

où $u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i$ avec $\delta_{(x_i, y_i)}(f) = f(x_i) - f(y_i)$ et cette norme ne dépend pas de la représentation qui n'est pas unique; toujours dans le cas lipschitzien suivi de quelques propriétés. On enchainera notre chapitre par l'étude de produit tensoriel projectif muni de la norme π définie pour chaque $u \in X \boxtimes E$ par

$$\pi(u) = \left\{ \inf \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i) \|e_i\| \right\}$$

et les propriétés qui s'y ramènent.

On termine dernier notre mémoire par la conclusion qui consiste à comparer les deux notions linéaires et non linéaires.

Chapitre 1

Espaces métriques et opérateurs lipschitziens

Dans ce chapitre, on donnera quelques préliminaires et quelques propriétés générales qui concerne les espaces métriques et les opérateurs lipschitziens.

1.1 Les espaces métriques

La notion d'espaces métriques a été introduite par Maurice Fréchet dans sa thèse de doctorat d'"Etat" en 1906. Il a été parmi les premiers qui ont utilisé le mot espace métrique. Pour tout ce qui concerne ce chapitre, on pourra consulter l'excellent livre de Weaver [Wea99]

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble non vide. On dira que d est une distance sur X si d est une application du X^2 dans \mathbb{R}_+ telle que pour tous $x, y, z \in X$ on a*

- (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Séparation).
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symétrie).
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Inégalité triangulaire).

Définition 1.1.2 *Soit $(X; d_X; e)$ un espace métrique pointé (i.e., e un élément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé). On note par*

$$\mathcal{M}_0 = \{\text{espaces métriques complets pointés}\}.$$

Exemple 1.1.1 1. Etant donné un espace métrique (X, d) , la distance produit sur $X \times X$, définie par $\delta((x, y), (x', y')) = \max(d(x, x'), d(y, y'))$.

2. La distance triviale (ou discrète), $\forall x \neq y$ alors $d(x, y) = 1$.

Définition 1.1.3 Un espace métrique (X, d) est dit discret s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) \geq \delta.$$

Un espace métrique discret est dit localement fini si pour tout $a \in X$ et $r > 0$, l'ensemble $\{x \in X, \quad d(x, a) \leq r\}$ est fini.

Définition 1.1.4 Soit X un espace vectoriel. Une métrique d sur X est dite invariante si, et seulement si, pour tous $x, y, z \in X$

$$d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

Définition 1.1.5 Un espace métrique (X, d) est dit métriquement convexe si pour tous $x, y \in X$ et $0 < t < 1$, il existe $x_t \in X$ tel que

$$d(x, x_t) = td(x, y)$$

et

$$d(x_t, y) = (1 - t)d(x, y).$$

1.1.1 Espaces métriques linéaires

Définition 1.1.6 Soit X un espace vectoriel muni d'une métrique invariante. L'espace (X, d) est dit espace métrique linéaire si les opérations algébriques sur X sont continues.

1.1.2 Produit des espaces métriques

Définition 1.1.7 Soit $\{(X_i, d_{x_i}, e_i), i \in I\}$ une famille des espaces métriques dans \mathcal{M}_0 . On définit $(\Pi^\infty X_i, d, e)$ l'ensemble des éléments $x = (x_i)$ tels que $\sup_{i \in I} d_{x_i}(x_i, e_i) < \infty$, avec la métrique

$$d(x, y) = \sup_{i \in I} d_{x_i}(x_i, y_i).$$

et l'élément distingué $e = (e_i)_{i \in I}$.

On a $(\Pi^\infty X_i, d, e) \in \mathcal{M}_0$.

Exemple 1.1.2 Le produit $\prod^{\infty} \mathbb{R}$ est $l^{\infty}(\mathbb{R})$.

1.2 Les opérateurs lipschitziens

Définition 1.2.1 Une application $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ est dite lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tels que

$$\forall x, y \in X; \quad \rho(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

On dit aussi qu'elle est k -lipschitzienne.

- Si $k = 1$, f est dite non expansive.
- Si $k < 1$, f est dite une contraction.

Pour une fonction lipschitzienne f , on définit la constante de Lipschitz par:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\text{Lip}} &= \text{Lip}(f) \\ &= \sup_{x \neq y} \frac{\rho(f(x), f(y))}{d(x, y)} \\ &= \inf\{k, \quad k \text{ vérifiant la définition}\}. \end{aligned}$$

Définition 1.2.2 Soit (X, e_1, d) et (Y, e_2, δ) deux espaces métriques, on dit que $f : X \rightarrow Y$ préserve l'élément distingué si : $f(e_1) = e_2$.

Définition 1.2.3 Soient $(X, d_1), (Y, d_2)$ deux espaces métriques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est un isomorphisme lipschitzien si f est bijective et f et f^{-1} lipschitziennes.

Elle est un isomorphisme isométrique si

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y).$$

Notation 1.2.1 X est Lipschitz isomorphe à $Y \Leftrightarrow X \cong Y$.

X est Lipschitz isométrique à $Y \Leftrightarrow X \equiv Y$.

Définition 1.2.4 Soient $(X, d_1), (Y, d_2)$ deux espaces métriques. On appelle plongement lipschitzien de X dans Y s'il existent $c_1, c_2 > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$, on a

$$\frac{1}{c_2} d_1(x, y) \leq d_2(f(x), f(y)) \leq c_1 d_1(x, y).$$

Remarque 1.2.1 L'application f est un plongement isométrique si $c_1 = c_2 = 1$.

1.2.1 Les espaces retracts

Définition 1.2.5 Soit X un espace métrique et E une partie de X . Une application lipschitzienne $P : X \longrightarrow E$ est dit "Lipschitz retraction" si $P|_E = Id_E$. Dans ce cas, on dira que E est l'espace retract de X . Un espace métrique E est dit espace retract absolu s'il est un espace retract de tout espace métrique qui le contient.

$$\forall E \subset X, \quad \exists P : X \longrightarrow E \text{ retraction.}$$

Proposition 1.2.1 Soit Y un espace métrique. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) L'espace Y est un espace retract absolu.
- (ii) Pour tout métrique X , pour tout $E \subset X$ et toute fonction lipschitzienne $f : E \longrightarrow Y$ s'étend à $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$ lipschitzienne.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ i \uparrow & \searrow \tilde{f} & \\ E & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

- (iii) Pour tout Z espace métrique tel que $Y \subset Z$, pour tout espace métrique F , alors toute fonction lipschitzienne $f : Y \longrightarrow F$ se prolonge à une fonction lipschitzienne $\tilde{f} : Z \longrightarrow F$.

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ i \uparrow & \searrow \tilde{f} & \\ Y & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

1.2.2 L'espace $Lip_0(X, Y)$

Définition 1.2.6 Soit (X, d_X, e) un espace métrique pointé. Pour tout espace de Banach E , nous désignons par $Lip_0(X, E)$ l'espace de toutes les applications lipschitziennes $f : X \longrightarrow E$ nulles au point e .

$$Lip_0(X, Y) = \{f : X \rightarrow E \text{ lipschitziennes telles que } f(e) = 0\}.$$

On le munit de la norme

$$Lip(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x) - f(y))}{d_X(x, y)}.$$

Si $E = \mathbb{R}$ alors $\text{Lip}_0(X, E) = \text{Lip}_0(X, \mathbb{R}) = \text{Lip}_0(X) = X^\#$.

L'espace $\text{Lip}(X)$ est un espace de Banach, pour tout espace métrique X pointé.

1.2.3 Le prédéal de $\text{Lip}_0(X)$

Définition 1.2.7 Soit X un espace de Banach. On dira que V est un prédéal de X si $V^* \equiv X$.

Soit $X \in \mathcal{M}_0$ i.e., X est un métrique complet à élément désigné, $X = (X, d, e)$.

$$X^\# = \text{Lip}_0(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lipschitziennes telles que } f(e) = 0\}.$$

Définition 1.2.8 Soit (X, d) un espace métrique, soit \tilde{X} l'ensemble $\{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$. Pour toute $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), on définit

$$\varphi(f)(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)}.$$

De Leew's map est l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Lip}_0(X) &\longrightarrow L_\infty(\tilde{X}) \\ f &\longmapsto \varphi(f) \end{aligned}$$

et on a $\text{Lip}(f) = \|\varphi(f)\|_{L_\infty(\tilde{X})}$.

1.2.4 Adjoint d'opérateurs lipschitziens

Dans cette sous section on étudiera l'adjoint d'opérateurs lipschitziens nous commençons par rappeler la définition et les propriétés de l'espace d'Arens-Eells.

Définition 1.2.9 Soit (X, d, e) un espace métrique pointé, une molécule sur X est une fonction $m : X \longrightarrow \mathbb{R}$ à support fini satisfaisant $\sum_{x \in \text{supp}(m)} m(x) = 0$.

On note par $\mathcal{M}(X)$ l'espace vectoriel des molécules sur X . On peut écrire

$$m = \sum_{j=1}^l \lambda_j (1_{\{x_j\}} - 1_{\{x'_j\}})$$

et

$$m = \sum_{j=1}^l \lambda_j m_{x_j x'_j}.$$

La condition $\sum_{i=1}^n m(x_i) = 0$, mais assure que cette représentation existe.

On pose.

$$\|m\|_{\mathcal{M}(X)} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^l |\lambda_j| d(x_j, x'_j) \quad \text{sur toute les représentation} \right\}.$$

Il s'ensuit que $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(X)}$ est une norme sur l'espace $\mathcal{M}(X)$. On note par $\mathcal{A}(X, d_X)$ le complété de l'espace normé $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{M}(X)})$.

Proposition 1.2.2 *L'application.*

$$\begin{aligned} i_X : X &\longrightarrow \mathcal{A}(X) \\ x &\longrightarrow i_X(x) = 1_{\{x\}} - 1_{\{e\}} \\ &= m_{xe}. \end{aligned}$$

est isométrie.

Théorème 1.2.1 *Soit X un espace métrique pointé, alors $\text{Lip}_0(X) = \mathcal{A}(X)^*$.*

Proposition 1.2.3 *Soit $X \in \mathcal{M}_0$.*

1. pour toute molécule m , on a $\|m\|_{\mathcal{A}(X)} = \sup_{f \in B_X} |\langle m, f \rangle|$.
2. $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(X)}$ est la plus grand semi norme sur $\mathcal{M}(X)$ qui satisfait.

$$\|1_{\{x\}} - 1_{\{y\}}\|_{\mathcal{A}(X)} = d(x, y), \forall x, y \in X.$$

Théorème 1.2.2 (Linéarisation) *Soit X un espace métrique pointé, soit E un espace de Banach et soit $T : X \longrightarrow E$ un opérateur lipschitzienne et $f(0) = 0$, alors il existe unique opérateur linéaire borné $u : \mathcal{A}(X) \longrightarrow E$, tel que $T = u \circ i_X$ et $\|u\| = \text{Lip}(u)$.*

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A}(X) & \\ i_X \uparrow & & \searrow u \\ X & \xrightarrow{T} & E \end{array}$$

Soit X, Y deux espaces métriques pointés. Sawashima in [Saw75] a défini l'adjoint lipschitzien (ou dual) $T^\# : \text{Lip}_0(Y) \longrightarrow \text{Lip}_0(X)$ d'une application lipschitzienne $T \in \text{Lip}_0(X, Y)$ par la formule

$$\begin{array}{ccc} T^\# : \text{Lip}_0(Y) & \longrightarrow & \text{Lip}_0(X) \\ g & \longmapsto & T^\#(g) = g \circ T \end{array} .$$

Il a montré que $T^\#$ est un opérateur linéaire continue et que

$$\|T^\#\| = \text{Lip}(T) = \|T^\#|_{Y^*}\| \quad (\text{Si } Y \text{ est un espace de Banach}).$$

Nous allons montrer que $T^\#$ correspond à une manière canonique de l'habituelle adjoint de l'opérateur linéaire attaché à T par la théorème de linéarisation i.e., $T^\#|_{Y^*} = T_L^*$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Lip}_0(E) & \xrightarrow{T^\#} & \text{Lip}_0(X) \\ p \downarrow & & T_L^* \nearrow \\ E^* & & \end{array}$$

Soit S, R est l'isométriques linéaire entre les espaces $\text{Lip}_0(X)$ et $\mathcal{F}^*(X, d_X)$, et $\text{Lip}_0(Y)$ et $\mathcal{F}^*(Y, d_Y)$.

Théorème 1.2.3 *Nous avons $f^\# = S \circ \varphi(f)^* \circ R^{-1}$ ou équivalente $\varphi(f)^* = S^{-1} \circ f^\# \circ R$, i.e., les schémas suivants sont commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(Y, d_Y)^* & \xrightarrow{\varphi(f)^*} & \mathcal{E}(X, d_X)^* \\ R^{-1} \uparrow & & S \downarrow \\ \text{Lip}_0(Y) & \xrightarrow{f^\#} & \text{Lip}_0(X) \end{array}$$

ou équivalente

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(Y, d_Y)^* & \xrightarrow{\varphi(f)^*} & \mathcal{E}(X, d_X)^* \\ R \downarrow & & S^{-1} \uparrow \\ \text{Lip}_0(Y) & \xrightarrow{f^\#} & \text{Lip}_0(X) \end{array}$$

Théorème 1.2.4 (Lindenstrauss, forme faible) *Soit F est un espace de Banach. Alors il existe une projection linéaire $P_F : F^\# \longrightarrow F^*$ avec $\|P_F\| = 1$.*

En fait, nous aurons besoin de la suite à un renforcement de ce résultat.

Théorème 1.2.5 (Lindenstrauss, forme forte) *Soit F est un espace de Banach et $E \subset F$ un sous espace de dimension finie. Alors il existe des projections linéaire 1-norme $P_F : F^\# \longrightarrow F^*$ et $P_E : E^\# \longrightarrow E^*$ tel que, pour chaque $f \in F^\#$*

$$P_E(f/E) = (P_F f)/E.$$

De manière équivalente, si nous désignons par $R^\# : F^\# \longrightarrow E^\#$ et $R^ : F \longrightarrow E$ la restriction des opérateurs.*

$$P_E R^\# = R^* P_F.$$

Chapitre 2

Produit tensoriel des espaces de Banach

2.1 Introduction

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach sur le même corps \mathbb{K} . On note par $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F et par $\mathcal{B}(E, F)$ l'espace de Banach des applications linéaires bornées de E dans F . Le produit tensoriel est la solution de problème universel: si qui consiste à linéariser les opérateurs bilinéaire i.e., la simplification de la application bilinéaire en application linéaire.

2.1.1 Les opérateurs bilinéaires

Dans cette sous section E , F et G désignent des espaces de Banach sur le même corps \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Définition 2.1.1 ([DF93]) *Une application*

$$T : E \times F \longrightarrow G$$

est dit bilinéaire s'il est linéaire par rapport à chaque composante. On note $L(E \times F; G)$ l'ensemble de toutes les applications bilinéaires définies de $E \times F$ dans G . On définit les

opérations linéaires suivantes

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(x, y) &= T_1(x, y) + T_2(x, y) \\ (\alpha T)(x, y) &= \alpha T(x, y)\end{aligned}$$

ce qui donne à $\mathcal{L}(E \times F; G)$ une structure d'espace vectoriel.

Un opérateur bilinéaire $T : E \times F \longrightarrow G$ est dit continue si, et seulement si, il existe une constante $C \succ 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F : \|T(x, y)\| \leq C \|x\| \|y\|.$$

Un résultat classique montre que T est continue si, et seulement si, T est continue séparément (i.e., T_x, T_y sont continues) [DF93].

Exemple 2.1.1 ([DF93]) (1) Application de la convolution

$$\begin{aligned}T : L_1(\mathbb{R}) \times L_1(\mathbb{R}) &\longrightarrow L_1(\mathbb{R}) \\ (f, g) &\longmapsto T(f, g) = f * g\end{aligned}$$

est bilinéaire.

(2) Soit K est un espace de Hausdorff compact et E est un espace de Banach. Alors

$$\begin{aligned}T : \mathcal{C}(K) \times E &\longrightarrow \mathcal{C}(K, E) \\ (f, x) &\longmapsto T(f, x) = f(\cdot) x\end{aligned}$$

est bilinéaire.

2.1.2 Propriétés

On note par $\mathcal{L}(E \times F; G)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires continues. Si $G = \mathbb{K}$ on notera $\mathcal{L}(E \times F; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E \times F)$ l'espace des formes bilinéaires sur $E \times F$. On munit l'espace $\mathcal{L}(E \times F; G)$ de la norme suivante

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{B}_E, y \in \mathcal{B}_F} \|T(x, y)\|.$$

Proposition 2.1.1 Si F est espace de Banach, alors l'espace $\mathcal{L}(E \times F; G)$ est un espace de Banach.

- Nous désignons par $\mathfrak{Bil}(E \times F; G)$ l'espace de Banach de tous les opérateurs bilinéaires $T : E \times F \longrightarrow G$ munit de la norme

$$\|T\| = \sup \{T(x, y) : \|x\| = 1, \|y\| = 1\}.$$

- L'espace $\mathfrak{Bil}(E, F; \mathbb{R})$ est isométriquement isomorphe à $\mathfrak{L}(E, F^*)$ [DF93] en effet,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Bil}(E, F; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{L}(E, F^*) \\ T &\longmapsto R(T) \ (\langle R(T)x, y \rangle = T(x, y)) \\ \|T\| = \sup \{T(x, y) : \|x\| = \|y\| = 1\} &= \sup \{\|R(T)x\| : \|x\| = 1\} = \|R(T)\| \\ \mathfrak{L}(E, F^*) &\longrightarrow \mathfrak{Bil}(E, F; \mathbb{R}) \\ \varphi &\longmapsto S(\varphi) \ (S(\varphi)(x, y) = \langle \varphi(x), y \rangle) \end{aligned}$$

2.2 Produit tensoriel $E \otimes F$

2.2.1 Produit tensoriel algébrique

Les espaces de Banach sont sur le corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Soient E, F des espaces de Banach ($\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}$). Une paire (H, T) d'espaces de Banach et $T \in \mathfrak{Bil}(E, F; G)$ est dite produit tensoriel de E, F si pour tout espace de Banach G et tout $S \in \mathfrak{Bil}(E, F; H)$ il existe une unique $\varphi \in \mathfrak{L}(H, G)$ avec $S = \varphi \circ T$ [DF93].

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{T} & G \\ S \downarrow & \nearrow \varphi & \\ H & & \end{array}$$

En d'autres termes l'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(H, G) &\longrightarrow \mathfrak{Bil}(E, F; H) \\ \chi &\longmapsto S \end{aligned}$$

est bijective pour tout G .

Soient E, F deux espaces de Banach. Soient $x \in E, y \in F$. On définit $x \otimes y$ comme étant une forme linéaire sur l'espace de formes linéaires $\mathfrak{L}(E, F)$ comme suit

$$\forall T \in \mathcal{L}(E \times F) : x \otimes y(T) = \langle T, x \otimes y \rangle = T(x, y).$$

On note $E \otimes F$ l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $x \otimes y$ avec $x \in E$ et $y \in F$. L'espace $E \otimes F$ s'appelle espace de produit tensoriel algébrique de E et F . On peut représenter cet espace sous la forme suivante:

$$E \otimes F = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i : n \in \mathbb{N}^*, x_i \in E, y_i \in F \right\}.$$

2.2.2 Normes tensorielles

Soit α une norme sur l'espace vectoriel $E \otimes F$. La norme α est dite raisonnable si pour tout élément élémentaire $x \otimes y$ on a

$$\alpha(x \otimes y) = \|x\| \|y\|.$$

Soit α une norme raisonnable définie sur $E \otimes F$. De la formule on peut conclure que pour tout élément $u \in E \otimes F$ tel que $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ on a

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \alpha\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| \right\} \end{aligned}$$

où l'infimum est pris sur toutes les représentations de u .

2.3 Norme tensorielle injective et projective

Pour plus d'informations sur cette section, nous pouvons consulter l'excellent livre [Rya01]

2.3.1 Norme tensorielle injective

Nous rappelons quelques notations.

$\overline{\mathcal{F}}(E, F) = \{\text{opérateurs linéaires } T : E \longrightarrow F : \text{il existe } \{T_n\} \subset \mathcal{F}(E, F) \text{ avec } \|T - T_n\| \longrightarrow 0\}$,

$T : E \hookrightarrow F$, T injective,

$T : E \xrightarrow{1} F$, T isométrie injective.

Notons que les éléments du produit tensoriel $E \otimes F$ peuvent être vu comme des formes bilinéaires sur l'espace $E^* \times F^*$. Si $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ une représentation quelconque de u , alors la forme bilinéaire associée est donnée par

$$\mathcal{B}_u(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i).$$

On constate donc que $E \otimes F$ se plonge canoniquement dans l'espace des formes bilinéaires $\mathcal{L}(E^* \times F^*)$. On définit donc la *norme injective* sur $E \otimes F$ comme étant la norme induite par ce plongement. Autrement dit, on voit tout élément de $E \otimes F$ comme une forme bilinéaire de $\mathcal{L}(E^* \times F^*)$ puis on calcul sa norme correspondante. En effet, soit $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F$, sa norme dans $\mathcal{L}(E^* \times F^*)$ est

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}(E^* \times F^*)} &= \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{E^*}, y^* \in \mathcal{B}_{F^*}} |\mathcal{B}_u(x^*, y^*)| \\ &= \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{E^*}, y^* \in \mathcal{B}_{F^*}} \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right|. \end{aligned}$$

Définition 2.3.1 La norme injective ε sur les produit tensoriel $E \otimes F$ de deux espaces de Banach E et F est

$$\varepsilon(u) = \sup_{\|x^*\|=\|y^*\|=1} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \langle x_i, x^* \rangle \langle y_i, y^* \rangle \right| : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}.$$

Exemple 2.3.1 1- Nous avons $E \otimes F \hookrightarrow \mathcal{F}(E^*, F) \xrightarrow{1} \mathcal{L}(E^*, F) \xrightarrow{1} (E^* \otimes_{\pi} F^*)^*$. Il s'ensuit que

$$E \otimes_{\varepsilon} F \xrightarrow{1} \mathcal{L}(E^*, F).$$

De même

$$E^* \otimes_{\varepsilon} F = \mathcal{F}(E, F) \xrightarrow{1} \mathcal{L}(E, F)$$

et donc

$$E \widehat{\otimes}_\varepsilon F \stackrel{1}{=} \overline{\mathcal{F}}(E, F).$$

2- Rappelons que $\text{ext}(\mathcal{B}_{\mathcal{C}(K)}) = \{ \text{Les fonctionnels de Dirac } \delta_t \text{ (pour } t \in K) \}$. Soit u dans $\mathcal{C}(K) \otimes E$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|u\|_\varepsilon &= \sup_{\|x^*\|=1} \sup_{t \in K} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \langle f_i, \delta_t \rangle \langle x_i, x^* \rangle \right| : u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \right\} \\ &= \sup_{\|x^*\|=1} \sup_{t \in K} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \langle f_i(t) \rangle \langle x_i, x^* \rangle \right| : u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \right\} \\ &= \sup_{t \in K} \left\{ \|u(t)\|_E : u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \right\} \\ &= \|u\|_{\mathcal{C}(K, E)} \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}(K, E)$ est l'espace des fonctions continues à valeurs E . Donc

$$\mathcal{C}(K) \otimes_\varepsilon E \stackrel{1}{\hookrightarrow} \mathcal{C}(K, E).$$

On pourra montrer que

$$\mathcal{C}(K) \widehat{\otimes}_\varepsilon E \stackrel{1}{=} \mathcal{C}(K, E).$$

Remarque 2.3.1 la norme injective est une norme induite de celle de l'espace des formes bilinéaires, i.e.; elle vérifie toutes les hypothèses des normes classiques.

Notation 2.3.1 On note $E \otimes_\varepsilon F$ le produit tensoriel $E \otimes F$ muni de la norme injective. Le complété de $E \otimes_\varepsilon F$ pour cette norme sera noté $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$, qu'on appelle produit tensoriel injective de E et F .

Proposition 2.3.1 Soient E, F deux espaces de Banach, alors

- (a) Pour tout u de $E \otimes F$ on a $\varepsilon(u) \leq \pi(u)$.
- (b) $\varepsilon(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$ pour chaque $x \in E, y \in F$.
- (c) Si $x^* \in E^*, y^* \in F^*$, alors $x^* \otimes y^*$ est une forme linéaire bornée sur $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ et

$$\|x^* \otimes y^*\| = \|x^*\| \|y^*\|.$$

Preuve. (a) Soit $u \in E \otimes F$, nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon(u) &= \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{E^*}, y^* \in \mathcal{B}_{F^*}} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right| \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|,\end{aligned}$$

en prenant l'infimum sur toutes les représentations de u , on trouve

$$\varepsilon(u) \leq \pi(u).$$

(b) Nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon(x \otimes y) &= \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{E^*}, y^* \in \mathcal{B}_{F^*}} |x^*(x) y^*(y)| \\ &= \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{E^*}} |x^*(x)| \sup_{y^* \in \mathcal{B}_{F^*}} |y^*(y)| \\ &= \|x\| \|y\|.\end{aligned}$$

(c) Soient $x^* \in E^*, y^* \in F^*$, l'action de $x^* \otimes y^*$ sur un élément $u \in E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est donnée par

$$x^* \otimes y^*(u) = \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i).$$

Alors, on a d'une part

$$\begin{aligned}\|x^* \otimes y^*\| &= \sup_{\varepsilon(u) \leq 1} |x^* \otimes y^*(u)| \\ &= \sup_{\varepsilon(u) \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right| \\ &\leq \|x^*\| \|y^*\| \sup_{\varepsilon(u) \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \frac{x^*(x_i)}{\|x^*\|} \frac{y^*(y_i)}{\|y^*\|} \right| \\ &\leq \|x^*\| \|y^*\| \sup_{\varepsilon(u) \leq 1} \varepsilon(u) = \|x^*\| \|y^*\|.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\|x^*\| \|y^*\| &= \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |x^*(x) y^*(y)| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |x^* \otimes y^*(x \otimes y)| \\ &\leq \sup_{\varepsilon(u)=1} |x^* \otimes y^*(u)| = \|x^* \otimes y^*\|.\end{aligned}$$

Et ceci termine la démonstration.

2.3.2 Norme tensorielle projective

Dans cette sous section, on donnera la norme projective π sur $E \otimes F$, et quelques propriétés de cette norme pour les espaces de Banach E, F, G

Définition 2.3.2 Soient E, F deux espaces de Banach. La norme projective π sur $E \otimes F$ est définie comme suit

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}$$

ou l'infimum est pris sur toutes les représentations $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, $n \in \mathbb{N}$.

On note par $E \otimes_{\pi} F = (E \otimes F, \pi)$ et par $E \widehat{\otimes}_{\pi} F$ le complété de $E \otimes_{\pi} F$. Nous avons

(1). $\mathcal{Bil}(E, F; G) = \mathcal{L}(E \otimes_{\pi} F, G)$ isométriquement.

(2). $(E \otimes_{\pi} F)^* = \mathcal{Bil}(E, F; \mathbb{R}) = \mathcal{L}(E, F^*)$.

(3). $\pi(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$.

(4). Si $T_i \in \mathcal{L}(E_i, F_i)$, alors

$$\|T_1 \otimes T_2 : E_1 \otimes_{\pi} E_2 \longrightarrow F_1 \otimes_{\pi} F_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|.$$

Proposition 2.3.2 Soit (Ω, μ) est un espace mesurable et E un espace de Banach. Alors l'application

$$\begin{aligned} L_1(\Omega, \mu) \otimes_{\pi} E &\longrightarrow L_1(\Omega, \mu, E) \\ u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i &\longmapsto \sum_{i=1}^n f_i(\cdot) x_i \end{aligned}$$

est une isométrie dense. En d'autres termes

$$\pi(u) = \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n f_i(\omega) x_i \right\| d\mu(\omega)$$

et $L_1(\Omega, \mu) \widehat{\otimes}_{\pi} E = L_1(\Omega, \mu, E)$ isométriquement.

Proposition 2.3.3 Soient E, F deux espaces de Banach. Pour $u \in E \widehat{\otimes}_\pi F$

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| : u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \right\}.$$

Un opérateur $T : E \longrightarrow F$ entre espaces de Banach est dit nucléaire s'il existe $\{x_n^*\}_{n \geq 1} \subset E^*$ et $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset F$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|y_n\| < \infty$. On a pour tout x dans E , on a

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n^*, x \rangle \otimes y_n.$$

L'opérateur T est continue et

$$\mathcal{N}(T) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|y_n\| : u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \right\}$$

est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{N}(E, F)$ de tous les opérateurs nucléaires pour qui il devient un espace de Banach.

Nous notons aussi par $\mathcal{F}(E, F) = \{T \in \mathcal{L}(E, F) : \text{rank}(T) < \infty\} = E^* \otimes F$. On a

$$\begin{aligned} E^* \otimes F &\longrightarrow \mathcal{F}(E, F) \subset \mathcal{N}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F) \\ x^* \otimes y &\longmapsto x^*(\cdot) y \end{aligned}$$

2.4 Quelques propriétés

2.4.1 L'espace de $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$

Nous allons dans ce partie essayer de caractériser les formes linéaires sur $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$. Revenons à la définition de la norme injective d'un élément $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ de $E \otimes F$,

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right|, x^* \in B_{E^*}, y^* \in B_{F^*} \right\}.$$

Dans cette formule, nous considérons u comme étant une fonction continue sur $B_{E^*} \times B_{F^*}$, où B_{E^*} et B_{F^*} sont munis de leurs topologies $*$ -faibles. En effet, soit $u \in E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ alors

$$\begin{aligned} u &: B_{E^*} \times B_{F^*} \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x^*, y^*) &\longmapsto u(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \end{aligned}$$

dans ce cas, on a

$$\|u\| = \varepsilon(u).$$

Cela nous conduit à conclure que $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ se plonge isométriquement dans l'espace de fonctions continues $C(B_{E^*} \times B_{F^*})$.

Nous rappelons ici le théorème de représentation de Riesz pour une forme linéaire définie sur $C(K)$ avec K un espace topologique compact.

Théorème 2.4.1 (Représentation de Riesz) *Soit K un espace topologique compact muni de sa tribu borélienne B_K . Pour toute forme linéaire positive u sur $C(K)$, il existe une unique mesure positive μ sur (K, B_K) telle que*

$$\forall f \in C(K) : u(f) = \int_K f(t) d\mu(t).$$

Remarque 2.4.1 *Le théorème de Han-Banach nous permet de considérer une forme linéaire bornée sur $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ comme une forme linéaire bornée sur l'espace de fonctions continues $C(B_{E^*} \times B_{F^*})$. Alors, le théorème de représentation de Riesz montre aussi que l'action de cette forme est donnée par l'intégration en respectant une mesure appropriée. Pour voir comment cela fonctionne, supposons que T est une forme bilinéaire bornée sur $E \times F$ dont la linéarisation \tilde{T} est bornée pour la norme injective. Alors, \tilde{T} se prolonge à une forme linéaire bornée sur $C(B_{E^*} \times B_{F^*})$ avec même norme. Par la représentation de Riesz, il existe une mesure régulière de Borel μ sur $B_{E^*} \times B_{F^*}$ telle que*

$$\tilde{T}(u) = \int_{B_{E^*} \times B_{F^*}} u(x^*, y^*) d\mu(x^*, y^*).$$

2.4.2 L'espace de $E \widehat{\otimes}_\pi F$

Soient E, F et G trois espaces de Banach. On note $E \otimes F$ le produit tensoriel algébrique de E, F et $E \widehat{\otimes}_\pi F$ est le produit tensoriel projective. Si $E = F$ on écrit simplement $\widehat{\otimes}_\pi^2 E$. Soit $T : E \times F \longrightarrow G$, à T on associe la linéarisation, $\tilde{T} : E \widehat{\otimes}_\pi F \longrightarrow G$ définie par

$$\tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n T(x_i, y_i).$$

Chapitre 3

Produit tensoriel des espaces métriques

La notion de produit tensoriel de Lipschitz a été introduite par M.G. Cabrera-Padilla, J.A. Chávez-Domínguez et A. Jiménez-Vargas en 2015 dans [CCJV15]. Dans ce chapitre, on étudiera le produit tensoriel lipschitzien $X \boxtimes E$ d'un espace métrique pointé X et d'un espace de Banach E , nous commencer par donner certains préliminaires et résultats sur le produit tensoriel lipschitzien, puis on donnera des normes qui peuvent être définies sur ce qui sera utile pour la suite (Lipschitz cross-norms). Nous terminerons ce chapitre par des exemples importants de Lipschitz cross-norms qui sont normes Lipschitz injectives et Lipschitz projectives. Pour les démonstrations et d'autres détails, on pourra consulter [CCJV15].

3.1 Produit tensoriel de Lipschitz

Le produit tensoriel de Lipschitz d'un espace métrique pointé X et d'un espace de Banach E , que nous notons par $X \boxtimes E$, peut être construit comme un espace des fonctionnelles linéaires sur $\text{Lip}_0(X, E^*)$.

Définition 3.1.1 ([CCJV15, Définition 1.1]) *Soit X est un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Pour chaque $x \in X$, soit $\delta_{(x,0)} : \text{Lip}_0(X, E^*) \rightarrow E^*$ est l'application linéaire définie par*

$$\delta_{(x,0)}(f) = f(x) \quad (f \in \text{Lip}_0(X, E^*))$$

Pour chaque $(x, y) \in X^2$, soit $\delta_{(x,y)} : \text{Lip}_0(X, E^*) \rightarrow E^*$ l'application linéaire

$$\delta_{(x,y)} = \delta_{(x,0)} - \delta_{(y,0)}.$$

Le sous espace $\Delta(X, E^*)$ désignera le sous espace linéaire de $L(\text{Lip}_0(X, E^*), E^*)$ engendré par l'ensemble

$$\{\delta_{(x,y)} : (x, y) \in X^2\}.$$

Pour tout $\gamma \in \Delta(X, E^*)$ et $e \in E$, soit $\gamma \boxtimes e : \text{Lip}_0(X; E^*) \rightarrow \mathbb{K}$ la forme linéaire donnée par

$$(\gamma \boxtimes e)(f) = \langle \gamma(f), e \rangle \quad (f \in \text{Lip}_0(X, E^*)).$$

En particulier, pour tout $(x, y) \in X^2$ et $e \in E$, soit $\delta_{(x,y)} \boxtimes e$ est l'élément de $\text{Lip}_0(X, E^*)'$ défini, pour tout $f \in \text{Lip}_0(X; E^*)$, par

$$(\delta_{(x,y)} \boxtimes e)(f) = \langle \delta_{(x,y)}(f), e \rangle = \langle \delta_{(x,0)}(f) - \delta_{(y,0)}(f), e \rangle = \langle f(x) - f(y), e \rangle$$

Soit X est un espace métrique pointé et soit E est un espace de Banach. Le produit tensoriel de Lipschitz $X \boxtimes E$ est défini comme le sous-espace vectoriel de $\text{Lip}_0(X, E^*)'$. (Le dual algébrique de $\text{Lip}_0(X, E^*)$) engendré par l'ensemble

$$\{\delta_{(x,y)} \boxtimes e : (x, y) \in X^2, e \in E\}$$

où

$$(\delta_{(x,y)} \boxtimes e)(f) = \langle f(x) - f(y), e \rangle, \forall f \in \text{Lip}_0(X, E^*).$$

Nous disons que, $\delta_{(x,y)} \boxtimes e$ est un tenseur de Lipschitz élémentaire. Nous avons $u \in X \boxtimes E$ si, et seulement si, $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i$ et cette représentation n'est pas unique. Notez chaque élément $u \in X \boxtimes E$ peut être représentée comme suit: $u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i$ puisque $\lambda \delta_{(x,y)} \boxtimes e = \delta_{(x,y)} \boxtimes \lambda e$. Nous avons également

$$u(f) = \sum_{i=1}^n \langle f(x_i) - f(y_i), e_i \rangle \text{ pour tous } f \text{ dans } \text{Lip}_0(X, E^*).$$

Désignons par $\mathcal{F}((X^\#, \tau_p); E)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires de rang finis continus de $(X^\#, \tau_p)$ dans E , où τ_p désigne la topologie de la convergence ponctuelle de $X^\#$.

Théorème 3.1.1 ([CCJV15, Théorème1.8]) *Le couple $\langle X \boxtimes E, \text{Lip}_0(X, E^*) \rangle$ est en dualité. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associée à la dualité est donnée, pour $u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \in X \boxtimes E$ et $f \in \text{Lip}_0(X, E^*)$, par*

$$\langle u, f \rangle = \sum_{i=1}^n \langle f(x_i) - f(y_i), e_i \rangle.$$

Preuve. Notez que $\langle u, f \rangle = u(f)$ par [?, Lemma 1.5]. Il est clair que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire de $X \boxtimes E \times \text{Lip}_0(X, E^*)$ dans \mathbb{K} , et que $\text{Lip}_0(X, E^*)$ sépare les points de $X \boxtimes E$. De plus, si $f \in \text{Lip}_0(X, E^*)$ et $\langle u, f \rangle = 0$ pour tous $u \in X \boxtimes E$, alors

$$\langle f(x), e \rangle = \langle \delta_{(x,0)} \boxtimes e, f \rangle = 0$$

pour tout $x \in X$ et $e \in E$. Cela implique que $f = 0$ et donc $X \boxtimes E$ sépare les points de $\text{Lip}_0(X, E^*)$. Ceci termine la preuve du théorème. ■

Définition 3.1.2 *Soit X espace métrique pointé. pour $f \in X^\#, x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, on pose*

$$B(f, x; \varepsilon) = \{g \in X^\# : |g(x) - f(x)| \prec \varepsilon\}.$$

Soit S la famille $\{B(f, x; \varepsilon) : f \in X^\#, x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$. Alors la topologie de la convergence ponctuelle τ_p sur $X^\#$ est la topologie générée par S . Nous pouvons vérifier que $(X^\#, p)$ est un espace localement convexe.

Nous allons donner de dual de l'espace $(X^\#, p)$.

Lemme 3.1.1 ([CCJV15, lemme1.11]) *Soit X un espace métrique pointé. Alors*

$$(X^\#, \tau_p)^* = \text{lin}(\{\delta_x : x \in X\}) \subset (X^\#)'$$

Preuve. Pour la démonstration on pourra consulter [CCJV15].

Théorème 3.1.2 ([CCJV15, Théorème1.12]) *L'application*

$$J : X \boxtimes E \longrightarrow \mathcal{F}((X^\#, \tau_p); E),$$

donnée par

$$J(u)(f) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(y_i)) e_i$$

pour $u \in X \boxtimes E = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i$ et $f \in X^\#$, est un isomorphisme linéaire.

Corollaire 3.1.1 *Soit X un espace métrique pointé. Si E est un espace de Banach de dimension finie, alors $X \boxtimes E$ est linéairement isomorphe à $\mathcal{L}((X^\#, \tau_p); E)$. En particulier, $X \boxtimes \mathbb{K}$ est linéairement isomorphe à $(X^\#, \tau_p)^* = \text{lin}(\{\delta_x : x \in X\})$.*

3.1.1 Le produit lipschitzien des fonctionnels et opérateurs

Nous allons dans un premier temps introduire le concept du produit tensoriel lipschitzien des fonctionnels et des opérateurs linéaires bornés.

Définition 3.1.3 ([CCJV15, Définition2.1]) *Soit X est un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Soit $g \in X^\#$ et $\phi \in E^*$. L'application $g \boxtimes \phi : X \boxtimes E \rightarrow \mathbb{K}$, donnée par*

$$(g \boxtimes \phi)(u) = \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(y_i)) \langle \phi, e_i \rangle$$

pour $u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \in X \boxtimes E$, est appelée " produit tensoriel fonctionnel lipschitzien de g et ϕ ".

Daprès [CCJV15, Lemme1.5], notez que

$$(g \boxtimes \phi)(u) = \sum_{i=1}^n \langle (g \cdot \phi)(x_i) - (g \cdot \phi)(y_i), e_i \rangle = u(g \cdot \phi).$$

3.1.2 Lipschitz cross-normes

On note par $X \boxtimes_{\alpha} E$ l'espace vectoriel $X \boxtimes E$ muni d'une norme α et par $X \widehat{\boxtimes}_{\alpha} E$ son complété. Nous sommes à la recherche d'une norme sur l'espace linéaire $X \boxtimes E$, et pour nos fins, il est commode de travailler avec des normes qui répondent aux conditions suivantes.

Définition 3.1.4 *Soit X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Nous disons qu'une norme α sur $X \boxtimes E$ est un cross-norme de Lipschitz si*

$$\alpha(\delta_{(x,y)} \boxtimes e) = d(x,y) \|e\|$$

pour tous $(x,y) \in X^2$ et $e \in E$.

Une cross-norme de Lipschitz α sur $X \boxtimes E$ est dit être dualisable si pour $g \in X^{\#}$ et $\phi \in E^*$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(y_i)) \langle \phi, e_i \rangle \right| \leq \text{Lip}(g) \|\phi\| \alpha \left(\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \right)$$

pour tout $\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \in X \boxtimes E$.

Une cross-norme de Lipschitz α sur $X \boxtimes E$ est dite uniforme si pour $h \in \text{Lip}_0(X, X)$ et $T \in \mathcal{L}(E, E)$, on a

$$\alpha \left(\sum_{i=1}^n \delta_{(h(x_i), h(y_i))} \boxtimes T(e_i) \right) \leq \text{Lip}(h) \|T\| \alpha \left(\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \right)$$

pour tout $\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \in X \boxtimes E$.

La dualisable Lipschitz cross-normes sur $X \boxtimes E$ peut être caractérisée par la borne du produit tensoriel Lipschitz des fonctionnels.

Proposition 3.1.1 ([CCJV15]) *Une cross-norme de Lipschitz α sur $X \boxtimes E$ est dualisable si, et seulement si, pour chaque $g \in X^{\#}$ et $\phi \in E^*$, la forme linéaire $g \boxtimes \phi : X \boxtimes_{\alpha} E \rightarrow \mathbb{K}$ est borné et*

$$\|g \boxtimes \phi\| = \text{Lip}(g) \|\phi\|.$$

Proposition 3.1.2 ([CCJV15]) *Une cross-norme de Lipschitz α sur $X \boxtimes E$ est uniforme si, et seulement si, pour chaque $h \in \text{Lip}_0(X, X)$ et $T \in \mathcal{L}(E, E)$, l'opérateur linéaire $h \boxtimes T : X \boxtimes_\alpha E \rightarrow X \boxtimes_\alpha E$ est borné et $\| h \boxtimes T \| = \text{Lip}(h) \| T \|$.*

3.2 Normes injective et projective

3.2.1 La norme injective lipschitzienne

Pour un espace de Banach E et un espace métrique X , nous étudions la norme injective lipschitzienne sur $X \boxtimes E$.

Définition 3.2.1 *Pour chaque $u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \in X \boxtimes E$, on définit*

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(y_i)) \langle \varphi, e_i \rangle \right| : f \in B_{X^\#}, \varphi \in B_{E^*} \right\}.$$

Remarquons que le supremum sur le côté droit dans la définition précédente existe puisque

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(y_i)) \langle \varphi, e_i \rangle \right| &\leq \sum_{i=1}^n |(f(x_i) - f(y_i)) \langle \varphi, e_i \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \text{Lip}(f) d(x_i, y_i) \|\varphi\| \|e_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i) \|e_i\| \end{aligned}$$

pour tous $f \in B_{X^\#}$, $\varphi \in B_{E^}$. Notons que*

$$\sum_{i=1}^n |(f(x_i) - f(y_i)) \langle \varphi, e_i \rangle| = (f \boxtimes \varphi) \left(\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \right)$$

et, par conséquent, $\varepsilon(u)$ ne dépend pas de la représentation de u par le Lemme 2, donc ε définit une application de $X \boxtimes E$ de \mathbb{R} .

ε est un dualizable Lipschitz Cross-norme sur $X \boxtimes E$. Cross-norme, i.e., $\varepsilon(\delta_{(x,y)} \boxtimes e) = d(x, y) \|e\|, \forall x, y \in X, \forall e \in E$. Dualizable, i.e.,

$$\left| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(y_i)) \langle \varphi, e_i \rangle \right| \leq \text{Lip}(f) \|\varphi\| \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \right), \forall f \in X^\#, \forall \varphi \in E^*,$$

ε est la moins dualizable Lipschitz Cross-norme sur $X \boxtimes E$.

Le complété $X \widehat{\boxtimes}_\varepsilon E$ de $X \boxtimes_\varepsilon E$ s'appelle le produit tensoriel de Lipschitz injectif de X et E . Ensuite nous justifions cette terminologie dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nous pouvons identifier $X \widehat{\boxtimes}_\varepsilon E$ avec l'espace des opérateurs linéaire bornés approximable de

$$(X^\#, \tau_p) (= (X^\#, \sigma(X^\#, X))).$$

Proposition 3.2.1 *L'application $J : X \boxtimes_\varepsilon E \rightarrow \mathcal{F}((X^\#, \tau_p); E)$, définie par*

$$J(u)(f) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(y_i)) e_i$$

pour $u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i$ et $f \in X^\#$ est un isomorphisme isométrique. En conséquence, $X \widehat{\boxtimes}_\varepsilon E$ est isométriquement isomorphe à la fermeture pour la norme de l'opérateur pour la topologie de $\mathcal{F}((X^\#, \tau_p); E)$.

Preuve. Par [CCJV15, Théorème1.12], J est une bijection linéaire. Si $u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i$, on a

$$\begin{aligned} \|J(u)\| &= \sup\{\|J(u)(f)\| : f \in B_{X^\#}\} \\ &= \sup\left\{\left|\varphi\left(\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(y_i)) e_i\right)\right| : f \in B_{X^\#}, \varphi \in B_{E^*}\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(y_i)) \langle \varphi, e_i \rangle\right| : f \in B_{X^\#}, \varphi \in B_{E^*}\right\} \\ &= \varepsilon(u). \end{aligned}$$

La conclusion est immédiate.

Soit $\mathcal{F}(X)$ l'espace de Banach libre sur un espace métrique pointé X . Rappelons que $\mathcal{F}(X)$ est le sous-espace vectoriel de linéaire fermé de $(X^\#)^*$ engendrée par l'ensemble $\{\delta_x : x \in X\}$, où pour chaque $x \in X$, δ_x est l'évaluation fonctionnelle au point x défini sur $X^\#$. Nous pouvons prouver que si X est un espace métrique pointé, alors $X \widehat{\boxtimes}_\varepsilon \mathbb{K}$ est isométriquement isomorphe $\mathcal{F}(X)$. Nous montrons ci-dessous que l'espace $X \widehat{\boxtimes}_\varepsilon E$ peut être identifié avec le produit tensoriel de Banach injectif $\mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_\varepsilon E$.

Proposition 3.2.2 *L'application $I : X \boxtimes_\varepsilon E \rightarrow \mathcal{F}(X) \otimes_\varepsilon E$, définie par*

$$I(u) = \sum_{i=1}^n (\delta_{x_i} - \delta_{y_i}) \otimes e_i$$

pour $u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i$, est une isométrie linéaire. En conséquence, $X \widehat{\boxtimes}_\varepsilon E$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_\varepsilon E$.

Preuve. Soit $u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i$. Puisque $\mathcal{F}(X) = X^\#$, alors la norme de $\sum_{i=1}^n (\delta_{x_i} - \delta_{y_i}) \otimes e_i$ dans $\mathcal{F}(X) \otimes_\varepsilon E$ est donnée par

$$\sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \langle f, \delta_{x_i} - \delta_{y_i} \rangle \langle \varphi, e_i \rangle \right| : f \in B_{X^\#}, \varphi \in B_{E^*} \right\}.$$

Comme $\langle f, \delta_{x_i} - \delta_{y_i} \rangle$ est précisément $f(x_i) - f(y_i)$, [CCJV15, Proposition1.7] montre que I est bien définie (et donc linéaire) et de plus par un coup d'œil rapide à la [CCJV15, Définition1.5] montre que I est une isométrie. Rappelons que l'espace engendré par $\{\delta_x\}_{x \in X}$ est dense dans $\mathcal{F}(X)$, par conséquent, les tenseurs de la forme $\sum_{i=1}^n (\delta_{x_i} - \delta_{y_i}) \otimes e_i$, avec $x_i, y_i \in X$ et $e_i \in E$ sont denses dans $\mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_\varepsilon E$. Cela montre que l'application I a gamme dense, et donc $X \widehat{\boxtimes}_\varepsilon E$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_\varepsilon E$. ■

Théorème 3.2.1 *ε est un système uniforme et dualizable Lipschitz cross-norme sur $X \boxtimes E$.*

Tout comme dans le cas de l'espace de Banach, la norme injective est la moins fine des normes raisonnables avec de belles propriétés.

Théorème 3.2.2 *ε est le moins dualizable Lipschitz cross-norme sur $X \boxtimes E$.*

3.2.2 La norme projective lipschitzienne

Nous introduisons la norme projective lipschitzienne sur $X \boxtimes E$.

Définition 3.2.2 *Pour chaque $u \in X \boxtimes E$, on définit*

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i) \|e_i\| : u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \right\}$$

l'infimum étant pris sur toutes les représentations de u .

Théorème 3.2.3 ([CCJV15, Théorème6.2]) π est une dualizable cross-norme de Lipschitz sur $X \boxtimes E$ tel que $L \leq \pi$.

Le complété $X \widehat{\boxtimes}_{\pi} E$ de $X \boxtimes_{\pi} E$ est appelé le produit tensoriel Lipschitz projective de X et E .

Théorème 3.2.4 π est la plus grande cross-norme Lipschitzienne sur $X \boxtimes E$.

Preuve. Nous avons vu dans le théorème précédent que π est une cross-norme lipschitzienne sur $X \boxtimes E$. Maintenant, soit α est une cross-norme lipschitzienne sur $X \boxtimes E$ et soit

$u \in X \boxtimes E$.
Si $\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i$ est une représentation de u , on a

$$\alpha(u) = \alpha \left(\sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha(\delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i) = \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i) \|e_i\|.$$

Maintenant, la définition même de π donne $\alpha(u) \leq \pi(u)$.

Dualizable cross-normes lipschitzienne sur $X \boxtimes E$ sont caractérisées par le fait d'être entre les normes Lipschitz injectives et les normes Lipschitz projectives.

Proposition 3.2.3 Une norme α sur $X \boxtimes E$ est une dualizable de Lipschitz cross-norme si, et seulement si, $\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$.

Chaque espace normé a un complété et ce complété est unique à un isomorphisme isométrique près d'après [FHHMZ11, Lemma 3.100], Chaque élément \tilde{e} de completion \tilde{E} de E peut être écrit comme $\tilde{e} = \sum_{i=1}^{\infty} e_i$ où $e_i \in E$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \|e_i\| < \infty$. De plus, $\|\tilde{e}\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|e_i\| \right\}$, où l'infimum est pris sur toutes les écritures de \tilde{e} . En résumé, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.2.5 Chaque élément $u \in X \widehat{\boxtimes}_{\pi} E$ admet une représentation

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i$$

telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(x_i, y_i) \|e_i\| < \infty.$$

De plus

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} d(x_i, y_i) \|e_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i, \sum_{i=1}^{\infty} d(x_i, y_i) \|e_i\| < \infty \right\}.$$

Le crochet de dualité satisfait la formule

$$\left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i, f \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle f(x_i) - f(y_i), e_i \rangle$$

pour tous $f \in \text{Lip}_0(X, E^*)$.

Proposition 3.2.4 *L'application $I : X \boxtimes_{\pi} E \rightarrow \mathcal{F}(X) \otimes_{\pi} E$, défini par*

$$I(u) = \sum_{i=1}^n (\delta_{x_i} - \delta_{y_i}) \otimes e_i$$

pour $u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i, y_i)} \boxtimes e_i$ est un linéaire et isométrique. En conséquence, $X \widehat{\boxtimes}_{\pi} E$ est isomorphe isométriquement à $\mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_{\pi} E$.

Conclusion

On remarque que le produit tensoriel lipschitzien est une généralisation logique du cas linéaire. On retrouve presque les mêmes notions et propriétés. Quelques applications mineures de ce produit ont été données. Nous attendons pour la suite si cette généralisation a un impact. A notre connaissance il a été cité dans le travail de [MT17].

Bibliographie

- [CCJV15] M. G. CABRERA-PADILLA, J. A. CHÁVEZ-DOMÍNGUEZ, A. JIMÉNEZ-VARGAS AND M. VILLAGAS-VALLECILLOS, *Lipschitz tensor product*, Khayyam J. Math. **1** (2) (2015), 185-218.
- [DF93] A. DEFANT AND K. FLORET, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland Math. Stud.,**176**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.
- [FHHMZ11] M. FABIAN, P. HABALA, P. HAJEK, V. MONTESINOS AND V. ZIZLER, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer, New York, 2001.
- [MT17] L. MEZRAG, A TALLAB, *On Lipschitz p -summing operators*. Colloq. Math. **147** (1) (2017), 95-114.
- [Rya01] R.A. RYAN. *Introduction to tensor products of Banach spaces*, Springer 2001.
- [Saw75] I. SAWASHIMA, *Methods of Lipschitz duals*, in Lecture Notes Ec. Math. Sust., **419**, Springer Verlag (1975), 247-259.
- [Wea99] N. WEAVER, *Lipschitz Algebras*, World Scientific, Singapore, 1999.