REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'Sila
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

N°d'ordre........

T H E S E

Présentée pour l'obtention du diplôme
de Doctorat en sciences

Spécialité: Mathématiques

Option: Analyse fonctionnelle et Numérique

Par:

Noui DJAIDJA

Thème

Etude des équations intégrales de Volterra de première espèce en utilisant les techniques des splines

Soutenue le 27/2/2021 devant le jury composé de:

Abdelkader GASMI	Prof,	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Président
Mostefa NADIR	Prof,	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Rapporteur
Bachir GAGUI	M.C.A,	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Examinateur
Abdelbaki MEROUANI	Prof,	Université de sétif1	Examinateur
Azedine RAHMOUNE	M.C.A,	Université de B.B.A	Examinateur
Madani CHEMCHEM	M.C.A,	Université Mohamed Khider - Biskra	Examinateur

Année universitaire 2020/2021

ملخص:

الهدف من هذه الأطروحة هو حل المعادلات التكاملية لفولترا من النوع الأول والتي تصنف كمشاكل سيئة الطرح.

عموما تقطيع هذه المعادلات يؤدي إلى جمل خطية سيئة الشرط حيث ان تغيير طفيف في المعطيات يؤدي الى تغيير كبير في الحلول.

في هذه الأطروحة قدمنا عدة طرق لتعديل هذا النوع من المشاكل للحصول على حل مستقر من بينها طريقة القيم الشاذة، طريقة تيكونوف وطريقة لافرونتياف . كذلك قدمنا طريقة عددية جديدة تعتمد على طريفة لافرونتباف المعدلة لحل المعادلات التكاملية لفولترا من النوع الأول حيث نحصلنا على نتائج افضل من طريقة نشر نايلور وكذا طريقة دوال الثلمة التكعيبية ،وفي الاخير قدمنا امثلة توضيحية .

الكلمات المفتاحية: المعادلات التكاملية لفولترا من النوع **الأول ،مشاكل سيء الطرح، الطرق** التربيعية، طريقة تيكونوف، طريقة لافرونتياف، **دوال الثلمة** .

Abstract:

The aim of this thesis is to solve the Volterra integral equations of the first kind, which are considered as ill-posed problems.
Generally a discretization of this equations lead to ill-conditioned linear systems. Moreover a slight perturbation in right hand side lead to enormous change of the solution.
In this thesis, we present various regularization methods to obtain a stable solution such as SVD, Tikhonov's regularization, and Lavrentiev method.
Also, we present a new numerical method for solving Volterra linear integral equations of first kind, based on the technical modified Lavrentiev classical method where we find it better than approximation method based on the Taylor expansion, and the spline cubic method.
The efficiency of our new numerical method is tested by solving some examples for which the exact solution is known. This allows us to estimate the exactness of our numerical results.

***Key words**: First-kind integral equations of Volterra, ill-posed problem, numerical quadrature, Tikhonov's regularization, Lavrentiev method, splines functions.*

Résumé

Le but de cette thèse est la résolution des équations intégrales de Volterra de première espèce qui sont considérées comme des problèmes mal-posés. Généralement la discrétisation de ces équations conduira à un système linéaire mal conditionné. Une légère perturbation sur les données peut avoir une influence arbitrairement grande sur le résultat. Dans cette thèse on présente des méthodes de régularisations pour obtenir à une solution stable, telles que :la SVD , la régularisation de Tikhonov, et la méthode de Lavrentiev .

Aussi on présente une nouvelle méthode numérique , pour résoudre des équations intégrales, de Volterra de première espèce basée sur la technique de la méthode de Lavrentiev modifiée, cette méthode est meilleure que la méthode de Taylor et les fonctions splines . L'efficacité de notre nouvelle méthode est testée en résolvant quelques exemples dont la solution exacte est connue. Cela nous permet d'estimer l'exactitude de nos résultats numériques.

***Mots clés** : Equation intégrale de Volterra de première espèce, problème mal posé, méthodes de quadrature, régularisation de Tikhonov, la méthode de Lavrentiev, les splines.*

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier ***Allah*** *pour tout ce que m'a été donné de santé et de connaissances, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.*

En particulier, mes profonds remerciements vont à mon directeur de thèse le Professeur Mostefa NADIR, pour son soutient indéfectible, ses encouragements, durant la préparation de cette thèse.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le professeur Abdelkader.GASMI, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier, Messieurs les professeurs Abdelbaki MEROUANI, Azedine RAHMOUNE, Madani CHEMCHAM et Bachir GAGUI, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce travail.

J'exprime toute ma gratitude envers les personnes dont les noms n'apparaîtraient pas dans cette page et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre.

Table des matières

Introduction

Le but de cette thèse est la résolution des équations intégrales de Volterra de la forme :

$$\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \qquad x \in [0, X] \tag{0.0.1}$$

où les fonctions k et f sont données. Il s'agit de déterminer la fonction φ.

Ce type d'équations est dit de première espèce qui peut être écrite sous la forme :

$$T\varphi = f$$

où T est un opérateur compact défini d'un espace de Hilbert dans un autre.

Ces équations font partie des problèmes mal-posés au sens d'Hadamard qui sont caractérisés par les propriétés suivantes :

La solution φ peut « ne pas exister »

La solution φ peut « ne pas être unique»

La solution φ peut « ne pas être stable ».

Si aucune difficulté n'existe, le problème est dit bien posé.

Dans un cas particulier, il a imposé des conditions très fortes telles que la continuité du noyau $k(x,t)$ et $k(x,x) \neq 0$.

Ainsi que la différentiabilité du second membre f de l'équation (0.0.1) afin que l'équation intégrale en question devienne une équation intégrale de second espèce pour laquelle on peut lui appliquer des méthodes numériques élémentaires et trouver la solution approchée.

Problématique de la thèse

Les équations intégrales de Volterra de première espèce

$$\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \qquad x \in [0, X]$$

qui s'écrivent sous la forme $T\varphi = f$ où T est l'opérateur de Volterra, sont considérées comme des problèmes mal- posés au sens d'Hadamard.

Un problème mal-posé s'exprime sous la forme d'une équation: $T\varphi = f$ où T est un opérateur compact dans un espace de Hilbert, non inversible. On cherche à retrouver la fonction φ ou plus précisément donner une approximation à cette fonction .Cette approche est beaucoup plus délicate. En effet connaissant f et T, résoudre l'équation $T\varphi = f$ nécessite l'inversion de l'opérateur T. Or cette opération n'est pas évidente.

Une méthode générale de résolution de ce type de problème est la régularisation. Elle consiste à reformuler le problème d'inversion de l'opérateur T comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'adéquation de quadrature

$$\varphi = \min_{\varphi_\alpha} \|T\varphi_\alpha - f\|^2 \tag{0.0.2}$$

La méthode consiste ensuite à supposer que la solution se trouve dans un espace de Hilbert, et à pénaliser la fonctionnelle d'adéquation (0.0.2), par un terme supplémentaire dit « régularisation ».

Le problème devient donc sous la forme :

$$\varphi = \min_{\varphi_\alpha} \|T\varphi_\alpha - f\|^2 + \alpha\|\varphi_\alpha\|_H^2 \tag{0.0.3}$$

Le nouveau problème ainsi construit possède une solution unique, pourvu que l'opérateur T soit continu au sens de la norme dans l'espace de Hilbert.

Objectif

Dans cette thèse de doctorat, on s'intéressera à la régularisation du problème mal-posé:

$$T\varphi = f$$

qui consiste à transformer le problème mal-posé en une famille de problèmes bien posés

$$T\varphi_\alpha + \alpha\varphi_\alpha = f$$

Dont la solution sert d'approximation à la solution du modèle initial c'est -à-dire φ_α est une approximation de φ.

Le problème fondamental préoccupant est la mise au point de méthodes numériques simples pour déterminer la solution φ_α du nouveau problème régularisé.

On trouvera dans la bibliographie [14] ,[19],[24]et [25]des hypothèses sur les fonctions k et f permettant de démontrer de tels théorèmes d'existence et d'unicité.

Les techniques liées aux problèmes mal-posés est la régularisation de Tikhonov. Sachant que l'estimation du paramètre de régularisation est obtenue en utilisant des méthodes très récentes qui sont à la base de l'analyse numérique matricielle.

Le problème est en générale formulé dans un espace fonctionnele abstrait. Ce cadre fonctionnel est l'espace de Hilbert dans lequel, nous allons chercher la fonction d'approximation du problème régularisé(0.0.3).

Cette fonction est obtenue comme solution du problème de minimisation de la fonctionnelle quadrature (0.0.3).

Il est tout à fait naturel, d'étudier ensuite les problèmes de convergence, la stabilité et l'estimation de l'erreur des schémas d'approximation proposés pour l'équation régularisée.

Les techniques d'approximations qui peuvent être utilisées sont les splines qui font appel à de nombreux thèmes mathématiques aussi bien dans l'analyse fonctionnelle abstraite que l'analyse numérique et d'une façon générale l'analyse fonctionnelle appliquée.

Sur le plan pratique, les techniques d'approximation de données ont de larges applications dans plusieurs domaines scientifiques, citons la physique, chimie, économie etc...

La thèse est composée d'une introduction, de quatre chapitres et d'une conclusion.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques résultats d'analyse fonctionnelle, ainsi que l'analyse numérique(interpolation, les splines ,les méthodes de quadrature).

Le deuxième chapitre, est consacré aux outils d'analyse des problèmes mal posés. Nous introduisons la notion fondamentale de problème mal posé, qui est une caractéristique des problèmes inverses .On présente certaines méthodes de régularisation, tout particulièrement, la méthode de Lavrentievt [19], la méthode de régularisation de Tikhonov [6] et la décomposition en valeurs singulières[18] et [35].

Dans le troisième chapitre, après avoir exposé les principales propriétés des opérateurs intégraux, on présente un type d'équations intégrales constituant l'exemple le plus important de problèmes mal posés : les équations intégrales de Volterra de première espèce.

Le quatrième chapitre est consacré essentiellement à présenter diverses méthodes de résolution numérique des équations intégrales de Volterra de première espèce, cependant nous y développerons certaines idées primordiales et les illustrerons avec quelques exemples.

Nous introduirons une nouvelle méthode numérique qui ressembler à la méthode classique de Lavrentiev dans le cas de problèmes linéaires. Cette méthode semble être bonne pour la résolution et l'approximation des équations intégrales de Volterra de première espéce, mieux que les méthodes de Taylor et les splines cubiques.

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Résultats préliminaires

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

Dans ce premier chapitre, on effectue des rappels mathématiques généraux nécessaires à la bonne compréhension des méthodes qui sont mises en œuvre dans la suite.

On se place dans le cadre hilbertien ($H_1 \to H_2$) où H_i est un espace de Hilbert sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|.\|_{Hi}$ et le produit scalaire $\langle .,. \rangle_{H_i}$, $(i = 1, 2)$

Pour plus de détails et pour les démonstrations des théorèmes on propose de voir [3] ,[8] et [22]

1.1.1 Propriétés des espaces de Hilbert

Espaces de Hilbert

Définition 1.1.1 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle f, g\rangle$ et qui est complet pour la norme $\|f\|_H = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}}$.*

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Exemple 1.1.1 *L'espace vectoriel $L^2([a, b])$ des fonctions de carré intégrable sur $[a, b]$,muni du produit scalaire*

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.2 *(Bases hilbertiennes). Une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H est une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$telle que:*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j \\ 0 & \text{si} \quad i\neq j \end{cases}$$

Proposition 1.1.1 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous $(f,g)\in H^2$,on a:*

$$|\langle f,g\rangle|^2 \leq \|f\|_H^2 \|g\|_H^2$$

Proposition 1.1.2 *(Identité du parallélogramme) Pour tous $(f,g)\in H^2$,on a*

$$\|f+g\|_H^2 + \|f-g\|_H^2 = 2\left(\|f\|_H^2 + \|g\|_H^2\right)$$

Théorème 1.1.1 *(projection sur un convexe fermé). Soit F un sous-ensemble convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $f\in H$, Il existe un unique élément u de F tel que:*

$$|f-u| = \min_{v\in F} |f-v|. \tag{1.1.1}$$

De plus u est caractérisé par la propriété:

$$u\in F, \quad \langle f-u, v-u\rangle \leq 0, \quad \text{pour tout } v\in F. \tag{1.1.2}$$

On note $u = P_F(f)$ projection de f sur F

Preuve. Voir [1] ■

Corollaire 1.1.1 *Soit $F\subset H$ un sous espace vectoriel fermé. Soit $f\in H$.Alors $u=P_F(f)$ est caractérisé par:*

$$u\in F, \ \langle f-u, v\rangle = 0, \quad \textit{pour tout} \ \ v\in F$$

De plus $P_F(f)$ est un opérateur linéaire.

1.1.2 Opérateurs linéaires

Définition 1.1.3 *Soit X et Y deux espaces vectoriels, une application $T : X \to Y$ est appelée opérateur linéaire si :*

Pour tout x, y de X et α, β de $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Rappelons les deux espaces fondamentaux associés à un opérateur linéaire :

-Le noyau de T est le sous-espace de X : $N(T) = \{x \in X, Tx = 0\}$.

- L'image de T est le sous-espace de Y : $R(T) = \{y \in Y, \text{ il existe } x \in X, Tx = y\}$.

Un opérateur $T : X \to Y$ est dit de rang fini si et seulement si son image $R(T)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de Y.

1.1.3 Opérateurs bornés

Définition 1.1.4 *Soit X et Y deux espaces normés. Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est continu s'il existe une constante $C > 0$ telle que:*

$$\|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \textit{pour tout } x \textit{ de } X.$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur T, il est facile de voir que T est borné si et seulement si

$$\|T\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty.$$

le nombre $\|T\|$ est appelé la norme de T.

On note par $\mathcal{L}(X, Y)$: l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y .

Théorème 1.1.2 *Soit X et Y deux espaces normés. L'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace normé, de plus cet espace est de Banach si Y l'est.*

Preuve. Voir [8] ■

Théorème 1.1.3 *Un opérateur linéaire est continu si et seulement si il est borné.*

Théorème 1.1.4 *Tout opérateur linéaire $T : X \to Y$ d'un espace normé de dimension finie X dans un espace Y est borné.*

Sous-espace fermé

Définition 1.1.5 *Un sous-espace F d'un espace de Hilbert H est fermé si toute suite de vecteurs de F convergente dans H, converge vers un vecteur de F :*

$$\text{Pour tout } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F, \quad y = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow y \in F$$

La fermeture du sous-espace F, notée $\overline{F}$,est le plus petit sous-espace fermé de H contenant F.

Théorème 1.1.5 *[Théorème des isomorphismes de Banach] Toute bijection linéaire continue $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ est inversible avec inverse continue.*

Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Supposons que T soit injectif et notons T^{-1}: $R(T) \to H_1$ l'inverse de T. Nous avons alors le résultat suivant

$$R(T) \textit{ fermée, si et seulement si, } T^{-1} \textit{est continu.}$$

1.1.4 Opérateurs fermés

Définition 1.1.6 *.Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in H_1$ telle que:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = x \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} Tx_n = y \ , \textit{ on a alors } \ x \in H_1 \ \textit{ et } \ y = Tx$$

Théorème 1.1.6 *(Théorème du graphe fermé) Si l'opérateur fermé T est définit sur tout l'espace H_1, alors T est borné.*

Coércivité

Définition 1.1.7 *Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$.T est dit strictement coércive s'il existe une constante $C > 0$, telle que:*

$$\operatorname{Re} \langle T\varphi, \varphi \rangle \geq C \left\| \varphi \right\|, \quad \textit{pour tout } \varphi \in H.$$

Théorème 1.1.7 *(Lax-Milgram) Soient H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur linéaire, borné et strictement coércive. Alors T^{-1} est borné.*

Preuve. *Voir [3]* ■

1.1.5 Opérateurs compacts

Parmi tous les opérateurs continus dans un espace de Hilbert, on peut distinguer une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compacts.

Définitions et propriétés

Définition 1.1.8 *Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, on dit que T est un opérateur compact, si et seulement si, l'image de toute partie bornée de H_1 est relativement compacte dans H_2.i.e. Si $F \subset H_1$ est bornée, alors $\overline{T(F)}$ est compacte dans H_2. En d'autres termes, T est un opérateur compact si, pour toute suite bornée (x_n) dans H_1, la suite image (Tx_n) contient une sous suite convergente .*

On note par $K(H_1, H_2)$: l'espace des opérateurs compacts.

Théorème 1.1.8 *Tout opérateur de rang fini est compact.*

Preuve. En effet, un opérateur de rang fini étant borné, il transforme un ensemble borné en un ensemble borné. Or, dans un espace de dimension finie, un ensemble borné est relativement compact. ■

Théorème 1.1.9 *Tout opérateur compact est borné, c'est-à-dire que l'on a l'inclusion $K(H_1, H_2) \subset \mathcal{L}(H_1, H_2)$.*

Proposition 1.1.3 *Soient H_1, H_2, H_3 trois espaces de Hilbert.*

$i)$ Si $T_1 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$, alors T_2T_1 est compact si T_1 où T_2 est compact.

$ii)$ La combinaison linéaire d'opérateurs compacts est compacte.

Théorème 1.1.10 *L'espace $K(H_1, H_2)$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(H_1, H_2)$.*

Proposition 1.1.4 *T est un opérateur compact s'il est fermé et borné.*

Théorème 1.1.11 *Soit (T_n) une suite d'opérateurs compacts de H_1 dans H_2. Si (T_n) converge vers T dans $\mathcal{L}(H_1, H_2)$, alors T est compact.*

Théorème 1.1.12 *Si H un espace de dimension infinie, alors l'identité $I : H \to H$ n'est pas un compacte.*

Corollaire 1.1.2 *Dans un espace de dimension infinie, l'inverse d'un opérateur compact n'est pas borné.*

En effet, dans le cas contraire, l'opérateur identique $I = TT^{-1}$serait compact dans H_1, ce qui est impossible.

1.1.6 Opérateurs Adjoints

Définition 1.1.9 *Soit H_1et H_2 deux espaces de Hilbert, soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$,tel que*

$$\textit{Pour tout } u \in H_1, v \in H_2; \quad \langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle .$$

Cet opérateur est appelé l'adjoint de T. De plus, on a les propriétés suivantes :

$i)$ $\|T\| = \|T^*\|$, $T^{**} = (T^*)^* = T$

$ii)$ Si T est bijectif, alors T^* l'est aussi et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Preuve. Voir [8] ■

Proposition 1.1.5 *Soient T_1 et T_2 deux opérateurs linéaires, α et β deux scalaires*

1) $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \alpha T_1^* + \beta T_2^*$ (Linéarité)

2) $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$ (Composition)

Définition 1.1.10 *Soit H un espace de Hilbert. On dit que $T \in L(H)$ est auto-adjoint si $T = T^*$*

$$T = T^* \textit{si, et seulement ,si } \langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle\,, \quad \textit{pour tout } u, v \in H$$

Propriétés

$i)$ $N(T^*) = R(T)^{\perp}$ et $N(T)^{\perp} = \overline{R(T^*)}$

$ii)$ Si $T : H_1 \to H_2$ est un opérateur linéaire compact, alors T^* est également compact.

$iii)$ L'opérateur $T^*T : H \to H$ est un opérateur compact auto adjoint positif :

$$\langle T^*T\varphi, \varphi\rangle_{H_1} = \langle T\varphi, T\varphi\rangle_{H_2} = \langle \varphi, T^*T\varphi\rangle_{H_1} \geq 0$$

Pour la preuve de i).Voir ([9],Théorème 4.6)

Remarque 1.1.1 *En dimension finie, les opérateurs auto-adjoints sont ceux qui ont une matrice symétrique.*

1.2 Notions d'analyse Numérique

1.2.1 Notions générales sur l'interpolation

Interpolation polynomiale :

Le problème de l'interpolation consiste à chercher des fonctions (polynômes, polynômes par morceaux, polynômes trigonométriques) passant par des points donnés $(x_i, y_i), i = 0, 1, ..., n$, c.-à-d, on cherche un polynôme $p_n(x)$ avec $p_n(x_i) = y_i$ pour $i = 0, 1, ..., n$. Si les valeurs de y_i satisfont $y_i = f(x_i)$ où $f(x)$ est une fonction donnée, on dit que le polynôme p_n interpole la fonction f aux points x_i.

Théorème 1.2.1 *(Polynôme de Lagrange). Pour tout choix de nœuds $x_0, x_1, ..., x_n$ dans $[a, b]$, il existe un unique polynôme p_n de degré inférieur ou égal à n qui coïncide avec f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$, i. e.($p(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i = 0, ..., n$). Ce polynôme s'écrit*

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i\,(x)\,,$$

où $L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \dfrac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$, pour $i = 0, 1, ..., n$ et $x \in \mathbb{R}$.

La fonction Li est un polynôme de degré n tel que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

Théorème 1.2.2 *(Erreur d'interpolation). Soit f une fonction de classe $C^{n+1}([a, b])$, et p_n son polynôme d'interpolation aux nœuds $x_0, x_1, .., x_n$, dans $([a, b])$. Alors*

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|q_{n+1}\|_\infty \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$$

où $q_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$.

Remarque 1.2.1 *Ce résultat n'entraîne pas la convergence uniforme de p_n vers f quand $n \to +\infty$. En effet, le polynôme q_{n+1} peut beaucoup osciller quand on augmente son degré et la norme peut être très grande. L'erreur peut donc dépendre à la fois de la taille du segment $[a, b]$ et de la répartition des nœuds sur cet intervalle.*

1.2.2 Rappel sur les formules de quadrature

Dans les méthodes d'intégration, l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné $[a, b]$ est remplacée par une somme finie. Le choix de la subdivision de l'intervalle d'intégration et celui des coefficients qui interviennent dans la somme approchant l'intégrale sont des critères essentiels pour minimiser l'erreur. Ces méthodes se répartissent en deux grandes catégories :

-Les méthodes composées dans lesquelles la fonction φ est remplacée par un polynôme d'interpolation sur chaque intervalle élémentaire $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision .

-Les méthodes de Gauss fondées sur les polynômes orthogonaux pour lesquelles les points de la subdivision sont imposés.

Pour plus de détails Voir [26]

Principes généraux

Soit φ une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.On se propose d'évaluer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$, en subdivisant l'intervalle d'intégration $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ et en approchant φ sur chaque intervalle par une somme finie de la forme

$$\int_a^b \varphi(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \omega_i \varphi(x_i).$$

Cette approximation est dite formule de quadrature, et on la note par:

$$Q_n(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \varphi(x_i)$$

Les coefficients ω_i sont appelés les poids de la formule de quadrature, les points x_i de la subdivision appelés noeuds.

L'érreur de quadrature $E(\varphi)$ donnée par

$$E(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)dx - Q_n(\varphi) \ , \quad \varphi \in C([a,b])$$

Une méthode de quadrature est dite d'ordre N si l'erreur $E(\varphi)$ *est nulle lorsque* φ *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* N *et non nulle pour au moins un polynôme de degré supérieur ou égal à* $N+1$.

Définition 1.2.1 *Une méthode de quadrature* $Q_n(\varphi)$ *est dite convergente, si*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)dx \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in C([a,b])$$

et dite *consistante, s'il existe un sous ensemble dense* $V \subset C([a;b])$ *de fonctions continues telles que :*

$$Q_n(\varphi) \to \int_a^b \varphi(x)dx \quad \text{pour tout } \varphi \in V.$$

Une méthode de quadrature $Q_n(\varphi)$ est dite *stable, si*

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |w_i|\,,\ n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$$

Lemme 1.2.1 *La norme de la formule de quadrature* $Q_n(\varphi)$ *est*

$$\|Q_n\| = \sum_{i=1}^{n} |w_i|\,.$$

La condition de stabilité prend alors,la forme

$$\sup\left\{\|Q_n\|\,,\ n \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

Théorème 1.2.3 *Une méthode de quadrature* $Q_n(\varphi)$ *est dite convergente si et seulement si elle est stable et consistante.*

Preuve. *Voir [26] (Téorème 1-4-17 pp20)* ■

Méthode des trapèzes

Soit φ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ .On note h le pas de cette subdivision. Dans la méthode des trapèzes, la fonction φ est remplacée sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par la droite joignant les points $(x_i, \varphi(x_i))$ et $(x_{i+1}, \varphi(x_{i+1}))$.

La méthode s'écrit

$$\int_a^b \varphi(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) \frac{\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1})}{2}$$

La méthode des trapèzes est une méthode d'ordre 1. L'erreur dans la méthode des trapèzes est donnée par l'expression:

$$\left| \int_a^b \varphi(x)dx - T \right| \leq \frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} \sup_{x\in[a,b]} |\varphi''(x)|$$

où la somme T s'exprime par:

$$T = \frac{h}{2} \left(\varphi(a) + \varphi(b) + \sum_{i=2}^{n-1} \varphi(x_i) \right)$$

Pour améliorer la précision, on considère parfois la formule des trapèzes corrigée suivante:

$$\int_a^b \varphi(x)dx \simeq \frac{h}{2} \left(\varphi(a) + \varphi(b) + \sum_{i=2}^{n-1} \varphi(x_i) \right) - \frac{h^2}{12} (\varphi'(b) + \varphi'(a))$$

Méthode de Simpson

Dans la méthode de Simpson , la fonction φ est remplacée par un polynôme du second degré définissant un *arc* de parabole passant par les points d'ordonnées $\varphi(x_i)$, $\varphi(x_{i+1})$, $\varphi(x_{i+2})$.

La méthode s'écrit

$$\int_a^b \varphi(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{6} (x_{i+1} - x_i) (\varphi(x_{i+1}) + \varphi(x_i) + 4\varphi \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)).$$

La méthode de Simpson est une méthode d'ordre 4. L'erreur dans la méthode de Simpson est donnée par:

$$\left| \int_a^b \varphi(x)dx - S \right| \leq \frac{1}{2880} \frac{(b-a)^5}{n^4} \sup_{x\in[a,b]} \left| \varphi^{(5)}(x) \right| .$$

La somme S qui approche l'intégrale s'exprime par:

$$S = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (\varphi(a + ih) + \varphi(a + (i+1)h) + 4\varphi \left(a + ih + \frac{h}{2} \right)).$$

1.2.3 Les splines

La faiblesse de l'interpolation de Lagrange, c'est que l'erreur d'interpolation croît avec le nombre de points d'interpolation n. Cela se traduit expérimentalement par de grandes oscillations du polynôme d'interpolation, même si f est très simple. Par exemple(Runge1901), lorsqu'on interpole la fonction $x \to 1/(1+25x^2)$ en des points uniformément répartis sur l'intervalle $[-1,1]$, les polynômes de Lagrange ne convergent pas vers f. D'où l'idée d'interpoler par des fonctions polynômiales par morceaux, dont le degré n'augmente pas avec le nombre de points d'interpolation.

Pour plus de détails voir [5]

Dans le domaine mathématique de l'analyse numérique,une spline est une fonction définie par morceaux, par des polynômes.

Etant donnés $(n+1)$ noeuds $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ et les valeurs correspondantes $f_i \;\; , i = 0, 1, ..., n$, la spline $S(x)$ est définie par

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \quad si \;, x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) \quad si \;\;, x \in [x_1, x_2] \\ \qquad \quad .... \\ S_{n-1}(x) \quad si \;, x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Lorsque les polynômes $S_i(x)$ sont de degré un, on parle de spline linéaire, quand ils sont de degré deux, on parle de spline quadratique, s$'ilssontdedegr3onparledesplinecubique.$

Splines cubiques

Définition 1.2.2 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$ et un ensemble de noeuds $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ .On appelle spline cubique interpolant f une fonction noté S, qui vérifie les propriétés suivantes:*

(a) $S(x)$ *est un polynome de degré 3 sur chaque intervalle* $[x_i, x_{i+1}]$ *noté* $S_i(x)$, *pour tout* $i = 0, 1, ..., n-1$;

(b) $S_i(x_i) = f(x_i)$,*et* $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$, *pour tout* $i = 0, 1, ..., n-1$;

(c) $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$, *pour tout* $i = 0, 1, ..., n-2$;

(d) $S \in C^2([a,b])$, *et* $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}), S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1})$, *pour tout* $i = 0, 1, ..., n-2$.

Si de plus

1- $S''(x_0) = S''(x_n), S$ *est s'appelle spline naturelle*

2- $S(x_0) = S(x_n)$, $S'(x_0) = S'(x_n)$, *et* $S''(x_0) = S''(x_n)$, S *est s'appelle spline periodique*

1.2.4 Consrtuction de spline cubique

L'interpolation par splines cubiques consiste à remplacer, sur chaque sous-intervalle, la fonction f par un polynôme du troisième degré, de sorte que la fonction interpolante soit continue ainsi que ses dérivées première et seconde sur tout l'intervalle$[x_0, x_n]$.

Etant donnés $(n+1)$ noeuds $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ et les valeurs correspondantes $f_i \ \ , i = 0, 1, ..., n$.

Notre but est de définir un procédé efficace pour construire la spline cubique interpolant ces valeurs.

$S \in C^2([a, b]) \Rightarrow S''(x) = \alpha x + \beta$

Introduisant les notations suivantes

$$f_i = f(x_i), \quad M_i = S''(x_i), \text{ et } \quad M_{i+1} = S''(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, ..., n-1.$$

On a

$$M_{i+1} - M_i = \alpha(x_{i+1} - x_i)$$

d'où

$$\alpha = \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i}, \text{ et } \beta = M_i - \alpha x_i = M_i - (\frac{M_{i+1} - M_i}{h_i})x_i \text{ , avec } h_i = x_{i+1} - x_i$$

Et par suite

$$S_i''(x) = M_{i+1}\frac{(x - x_i)}{h_i} + M_i\frac{(x_{i+1} - x)}{h_i}, \qquad i = 0, ..., n-1 \tag{1.2.1}$$

En intégrant deux fois (1.2.1) on obtient :

$$S_i(x) = M_{i+1}\frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + a_i(x - x_i) + b_i \tag{1.2.2}$$

Les conmstantes a_i et b_i sont déterminées en imposant les valeurs aux extrémités

$$S_i(x_i) = f_i \qquad \text{et} \qquad S_i(x_{i+1}) = f_{i+1}.$$

.Ceci donne, pour $i = 0, ..., n-1$

$$a_i = \frac{1}{h_i}(f_{i+1} - f_i) - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i),\ b_i = f_i - \frac{h_i^2}{6}M_i$$

d'où

$$S_i(x) = M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + \frac{1}{h_i}(f_{i+1} - \frac{h_i^2}{6}M_{i+1})\,(x - x_i) + \frac{1}{h_i}(f_i - \frac{h_i^2}{6}M_i)\,(x_{i+1} - x)$$

En imposant la continuité de la dérivée première $S'(x)$ en x_i

$$S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_i)$$

d'où

$$-M_i\frac{h_i}{2} + a_i = M_i\frac{h_{i-1}}{2} + a_{i-1} \tag{1.2.3}$$

On remplace les a_i dans(1.2.3)

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6[\frac{1}{h_i}(f_{i+1} - f_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(f_i - f_{i-1})]\ . \tag{1.2.4}$$

Ceci conduit au système linéaire suivant

$$\mu_iM_{i-1} + 2M_i + \lambda_iM_{i+1} = d_i, i = 1, ..., n-1 \tag{1.2.5}$$

où on a posé

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \qquad \lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i},$$

$$d_i = \frac{6}{h_{i-1} + h_i}\ (\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}), \quad i = 1, ..., n-1$$

Le système (1.2.5) à $(n+1)$ inconnues et $(n-1)$ équations deux conditions restent donc à fixer.En général, ces conditions sont de la forme

$$\begin{aligned} 2M_0 + \lambda_0M_1 &= d_0 \\ \mu_nM_{n-1} + 2M_n &= d_n \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

où $0 \leq \lambda_0, \mu_n \leq 1$ et d_0, d_n sont des valeurs données.

Si S est une spline naturelle alors on prend $M_0 = M_n = 0$. En général, le système linéaire obtenu est tridiagonal de la forme:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & . & . & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & . & & . \\ 0 & . & . & & & . \\ . & . & . & . & & . \\ . & & . & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & . & . & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ . \\ . \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ . \\ . \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

1.2.5 Approximation d'une intégrale par les splines cubiques

Soit $S_i(x)$ le polynôme de degré 3 de la spline dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. L'expression de ce polynôme est:

$$\begin{aligned} S_i(x) \quad = \quad & -f_i'' \frac{(x - x_{i+1})^3}{6h_i} + f_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} - \left(\frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{6} f_i'' \right) (x - x_{i+1}) + \\ & \left(\frac{f(x_{i+1})}{h_i} - \frac{h_i f_{i+1}''}{6} \right) (x - x_i) \end{aligned}$$

En intégrant ce polynôme on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \quad & \simeq \quad \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_i(x)dx \\ & = \quad \sum_{i=0}^{n-1} [f_i'' \frac{(x_i - x_{i+1})^4}{24h_i} + f_{i+1}'' \frac{(x_{i+1} - x_i)^4}{24h_i} + \left(\frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i f_i''}{6} \right) \frac{(x_i - x_{i+1})^2}{2} + \\ & \quad \left(\frac{f(x_{i+1})}{h_i} - \frac{h_i f_{i+1}''}{6} \right) \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2}] \end{aligned}$$

Puisque $h_i = x_{i+1} - x_i$ la dernière expression est équivalente à

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \quad & \simeq \quad \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{h_i^3}{24} \left(f_{i+1}'' + f_i'' \right) + \frac{h_i}{2} \left(f(x_{i+1}) + f(x_i) \right) - \frac{h_i^3}{12} \left(f_{i+1}'' + f_i'' \right) \right], \\ & = \quad \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{h_i}{2} \left(f(x_{i+1}) + f(x_i) \right) - \frac{h_i^3}{24} \left(f_{i+1}'' + f_i'' \right) \right]. \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'approximation suivante de l'intégrale de $f(x)$ dans l'intervalle $[a,b] = [x_0, x_n]$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{h_i}{2} \left(f(x_{i+1}) + f(x_i) \right) - \frac{h_i^3}{24} \left(f''_{i+1} + f''_i \right) \right] \tag{1.2.7}$$

Dans le cas où les abscisses x_i sont équidistantes($h_i = h$) on peut simplifier d'avantage l'expression précédente pour obtenir:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}[f(x_0)+2(f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1}))] - \frac{h^3}{24}[f''_0+2(f''_1+f''_2+...+f''_{n-1})+f''_n]$$

Puisque $f''_0 = f''_n = 0$ dans le cas de la spline naturelle, on a

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}[f(x_0)+2(f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1}))+f(x_n)] - \frac{h^3}{12}(f''_1+f''_2+...+f''_{n-1}) \tag{1.2.8}$$

Commentaire:

En effet, cette approximation de l'intégrale comporte deux termes .Le premier terme n'est autre que l'expression de la méthode des trapèzes composée. Le deuxième terme est une approximation du terme d'erreur lié à cette même méthode. En effet l'erreur d'approximation de la méthode du trapèze simple est donnée pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par $-\dfrac{f''(\xi_i)}{12}h^3$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. La position exacte du point ξ_i étant inconnue, on lui attribue la valeur de x_i.

Remarque 1.2.2 *Dans le cas général on utilise l'expression (1.2.7) pour faire l'approximation de l''intégral à l'aide de la spline. Si les abscisses sont équidistantes,on utilise de préférence l'expression (1.2.8)*

Chapitre 2

Problèmes inverses linéaires

2.1 Problèmes directs et problèmes inverses

La distinction entre un problème direct et un problème inverse n'est pas facile à définir. On pourrait dire qu'un problème direct consiste à déterminer l'effet à partir de sa cause.

Dans un problème inverse, au contraire, on cherche à identifier la cause d'un effet observé.

Typiquement, quand on a $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire continu, où H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. On appelle

Problème direct : connaissant $\varphi \in H_1$ évaluer la valeur $T\varphi$.

Problème inverse: connaissant $f \in H_2$ résoudre l'équation $T\varphi = f$.

2.1.1 Problèmes bien posés ou mal-posés

Les problèmes mathématiques peuvent être répartis en deux classes distinctes: les problèmes dits bien posés et les problèmes dits mal-posés.

Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire continu .

Le problème : trouver φ de H_1 tel que $T\varphi = f$ pour chaque f de H_2 peut être mal posé (cette définition est due à Hadamard) pour trois raisons suivantes:

1. Non-existence de solution: $f \notin R(T)$, (T n'est pas surjectif)
2. Manque d'unicité: T n'est pas inversible, i.e.$N(T) \neq \{0\}$, (T *n'est pas injectif*)
3. Manque de continuité par rapport aux données: T^{-1}existe mais n'est pas continu.

En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Remarque 2.1.1 *Les problèmes inverses sont beaucoup plus difficiles à résoudre que les problèmes directs correspondants car ils sont pour la plupart mal posés.*

Remarque 2.1.2 *En dimension fini ($\mathbb{R}^n$) tout opérateur linéaire est continu, et tout problème linéaire admettant une unique solution est bien posé, la condition* 3 *ne se pose donc pas. L'exemple suivant montre que ceci n'est plus vrai en dimension infini.*

Exemple 2.1.1 *Soit $H_1 = H_2 = L^2([-1,1])$ et T l'opérateur d'intégration*

$$T\varphi(x) = \int_{-1}^{x} \varphi(t)\,dt, \quad T^{-1} = \frac{d}{dt}\ .$$

Il est clair que l'opérateur T est borné et donc continu. Cependant, si on pose

$$\varphi_n = \sqrt{n}(1 - n\,|x|)\mathbf{1}_{|x|\leq\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^*$$

On a

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}(1+nx) & \text{si } \frac{-1}{n} \leq x \leq 0 \\ \sqrt{n}(1-nx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Alors

$$\|\varphi_n\|^2 = \frac{2}{3} \text{ et } \left\|T^{-1}\varphi_n\right\|^2 = 2n^2.$$

Donc T^{-1}n'est pas borné, ce qui implique que la différentiation est un problème mal posé.

2.1.2 Exemples de problèmes mal-posés

Exemple 2.1.2 *Les équations intégrales de première espèce:*

Pour toute fonction $k(x,t) \in L^2([c,d] \times [a,b])$ et $f \in L^2([c,d])$, on considère l'équation intégrale de première espèce associée au noyau $k(x,t)$ et à la donnée $f(x)$

Trouver $\varphi \in L^2([a,b])$ telle que pour tout $x \in [c,d]$

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{2.1.1}$$

Si $k(x,t)$ continûment dérivable par rapport à x sur $[c,d]$, alors le premier membre de (2.1.1) est continûment dérivable pour tout $\varphi \in L^2[a,b]$. Si f n'est pas dérivable sur $[c,d]$ l'équation (2.1.1) n'a aucune solution.

Exemple 2.1.3 *Approximation de la dérivée d'une fonction connue approximativement.*

Soit T l'opérateur de Volterra défini sur $L^2([0,1])$ par

$$T\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$$

Montrons tout d'abord que

$$T^n\varphi(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt$$

L'expression de $T^n\varphi(x)$ se démontre par récurrence. Elle est vraie pour $n=1$ et si on suppose qu'elle l'est pour n, il vient

$$\begin{aligned} T^{n+1}\varphi(x) &= \int_0^x T^n\varphi(t)\,dt = \int_0^x \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(s)ds\right) dt \\ &= \int_0^x \left(\int_s^x \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}dt\right)\varphi(s)ds = \int_0^x \frac{(x-s)^n}{n!}\varphi(s)ds \end{aligned}$$

Le problème de la recherche de la dérivée $\varphi(x)$ d'ordre n d'une fonction $f(x)$ définie sur $[0,1]$ (ie $f^{(n)}(x) = \varphi(x)$) se ramène à la résolution de l'équation intégrale

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt = f(x), \qquad 0 \le t \le 1 \tag{2.1.2}$$

en supposant pour simplifier que $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$. L'équation (2.1.2) diffère de l'équation (2.1.1) par la présence de la variable x comme borne d'intégration. Ce type d'équation intégrale présente un caractère mal posé analogue à (2.1.1). Cela signifie ici encore que si $f(x)$ n'est pas connue exactement $f^{(n)}(x) = \varphi(x)$ peut être entachée d'une erreur arbitrairement grande. Il est du reste bien connu que la dérivation numérique est une opération instable. Considérons une perturbation de f de la forme

$$f^{\delta}(x) = f(x) + \varepsilon \sin \omega x$$

d'où

$$\frac{d}{dx} f^{\delta}(x) = \frac{d}{dx} f(x) + \varepsilon\omega \cos(\omega x)$$

ce qui conduit à

$$\left\| f^{\delta} - f \right\|_{L^2([0,1])} = \frac{1}{2}\varepsilon^2, \quad \left\| \frac{d}{dx} f^{\delta} - \frac{d}{dx} f \right\|_{L^2([0,1])} = \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega^2$$

Si la « fréquence » ω du « bruit » $\varepsilon \sin \omega x$ est élevée, l'erreur en norme quadratique peut être rendue arbitrairement grande pour une amplitude de perturbation ε aussi petite que l'on veut sur la fonction donnée f.

Exemple 2.1.4 *Soit le système linéaire $Ax = b$ où*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5,999 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

La solution est

$$(x_1, x_2) = (4, 0)$$

Pour le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5,999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7,999 \end{pmatrix} \tag{2.1.4}$$

La solution est

$$(x_1, x_2) = (1, 1)$$

$$\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 1,25 \times 10^{-4}, \; \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 3$$

La solution de (2.1.3) est fort différente de (2.1.4), une petite perturbation de second membre entraîne une grande perturbation de la solution. Ce problème est donc mal-posé car la troisième condition D'Hadamart n'est pas satisfaite.

Exemple 2.1.5 *Soit le système linéaire $Ax = b$ où*

$$A = \begin{pmatrix} 12+\varepsilon & 11 \\ 13 & 12-\varepsilon \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 23 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

-Si $\varepsilon = 0,$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-Si $\varepsilon = 0,05,$

$$x = \begin{pmatrix} -0,15 \\ 2,25 \end{pmatrix}$$

Le problème est mal posé, dans ce cas on dit que la matrice A est mal conditionnée ($cond(A) = 578$).

L'exemple typique d'un problème mal posé est le problème:

$$T\varphi = f$$

où T un opérateur continu et compact dans un espace de dimension infinie.

Proposition 2.1.1 *Si H_1 n'est pas de dimension finie, alors l'identité $I : H_1 \to H_1$ n'est jamais compacte.*

Théorème 2.1.1 *Soit H_1et H_2deux espaces de Hilbert, $T : H_1 \to H_2$ un opérateur continu et compact. Alors l'équation $T\varphi = f$ est mal posée si H_1 n'est pas de dimension finie.*

Preuve. Supposons que $T^{-1} : H_2 \to H_1$ existe et continu, alors T^{-1} vérifie

$$TT^{-1} = I$$

Comme T est compact, et que l'identité ne peut l'être d'après la proposition 2.1.1, nous avons une contradiction ■

Théorème 2.1.2 *(Théorème de Banach sur l'inversion bornée) Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert, $T : H_1 \to H_2$ un opérateur continu et compact, on suppose que T est injectif. Alors $T^{-1} : R(T) \to H_1$ est borné si et seulement si $R(T)$ est fermé.*

Preuve. *Voir [8]* ■

Remarque 2.1.3 *Dans l'étude des équations de la forme :*

$$T\varphi = f$$

la fermeture de $R(T)$ est une propriété fondamentale, pour que l'inverse de T soit borné. Le théorème de Banach nous fournit une caractérisation topologique de cette propriété .

2.2 Méthodes de résolution d'un problème mal posé

2.2.1 La méthode de moindres carrés

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert, $T : H_1 \to H_2$ un opérateur continu et compact.

Soit l'équation

$$T\varphi = f \tag{2.2.1}$$

Lorsque $f \notin R(T\ )$, en dimension fini, l'existence peut toujours être obtenue en passant à la formulation au sens de moindres carrées.

Définition 2.2.1 *φ est une solution moindres carrés de l'équation $T\varphi = f$ si*

$$\|T\varphi - f\|^2 = \min \|T\psi - f\|^2, \psi \in H_1 \tag{2.2.2}$$

Remarque 2.2.1 *La solution de problème des moindres carrés est telle que $T\varphi$ est la projection de f sur $R(T\ )$.*

Existence de solution

Théorème 2.2.1 *L'équation $T\varphi = f$ admet une solution au sens de moindres carrées si et seulement si $f \in R(T) \oplus R(T)^{\perp}$. Dans ce cas elle est caractérisée par l'équation normale de Gauss*

$$T^*T\varphi = T^*f \tag{2.2.3}$$

Preuve. a) Soit $f \in R(T) \oplus R(T)^{\perp}$, il existe $f_1 \in R(T)$ et $f_2 \in R(T)^{\perp}$ tel que $f = f_1 + f_2$. Alors

$$\|T\varphi - f\|^2 = \|T\varphi - f_1\|^2 + \|f_2\|^2$$

et le minimum est atteint si $T\varphi = f_1$ ce qui a toujours une solution. De plus, $T\varphi = f_1$ implique $T\varphi - f \in R(T)^{\perp}$ et donc $\langle T^*(T\varphi - f), \psi \rangle = 0$ pour tout ψ de H_1,

d'où $T^*T\varphi = T^*f$.

b)Supposons que $f \notin R(T) \oplus R(T)^{\perp}$ et notons par f_2 la projection orthogonale de f sur $R(T)^{\perp}$. Alors $f - f_2$ appartient à $\overline{R(T)}$ mais non à $R(T)$. Ceci implique que

$$\min_{\varphi \in H_1} \|T\varphi - f + f_2\|^2 = 0$$

mais il n'existe pas de φ pour lequel $\|T\varphi - f + f_2\|^2 = 0$, donc, le problème n'a pas de solution au sens de moindres carrés ■

Remarque 2.2.2 *En dimension infini si $R(T)$ n'est pas fermé, le problème $T\varphi = f$ peut ne pas avoir de solutions au sens de moindres carrés(Théorème de projection dit seulement $\overline{R(T)} \oplus R(T)^{\perp} = H_2$, ce qui est différent si $R(T)$ n'est pas fermé)*

Exemple 2.2.1 *Soit $H_1 = H_2 = L^2([-1, 1])$ et $T : H_1 \to H_2$ l'opérateur d'intégration*

$$T\varphi(x) = \int_{-1}^{x} \varphi(t)\, dt$$

Une fonction $\psi \in L^2([-1, 1])$ appartient à $R(T)^{\perp}$ si et seulement si pour toute fonction $\varphi \in L^2([-1, 1])$,

$$\int_{-1}^{1} [\psi(x) \int_{-1}^{x} \varphi(t) dt] dx = 0$$

Moyennant une intégration par parties ceci est équivalent à

$$\int_{-1}^{1} [\varphi(x) \int_{x}^{1} \psi(t) dt] dx = 0$$

Comme ceci doit être vrai pour toute φ, on en déduit $\int_{x}^{1} \psi(t) dt = 0$, pour tout x, et donc $\psi = 0$. Ceci montre que $R(T)^{\perp} = \{0\}$. Donc $R(T) \oplus R(T)^{\perp}$ coïncide avec $R(T)$ (ensemble de fonctions différentiables) et ne coïncide pas avec H_2.

Remarque 2.2.3 *En dimension fini le problème $T\varphi = f$ admet au moins une solution au sens de moindres carrés. (En dimension fini tout sous espace est fermé).*

Unicité de solution

Pour s'assurer de l'unicité de solution, on impose un critère supplémentaire: dans le cas linéaire on s'intéresse souvent à la solution moindres carrées de norme minimale:

$$\varphi^+ = \min \left\{ \|\varphi\|_{H_1}, \varphi \text{ est une solution de moindres carrées de } T\varphi = f \right\}.$$

Théorème 2.2.2 *La solution moindres carrées de norme minimale φ^+ de l'équation $T\varphi = f$ existe et unique si et seulement si $f \in R(T) \oplus R(T)^\perp$. Elle est caractérisée par:*

$$T^*T\varphi^+ = T^*f \ , \quad \varphi^+ \in N(T)^\perp. \tag{2.2.4}$$

L'opérateur linéaire $T^+ : R(T) \oplus R(T)^\perp \to H_1$ défini par $T^+f = \varphi^+$ s'appelle l'inverse généralisée de T.

Preuve. Par définition, la solution de moindres carrés de norme minimale φ^+ ne peut exister que si une solution de moindres carrés existe. Supposons que $f \in R(T) \oplus R(T)^\perp$ et montrons l'équation (2.2.4).

L'existence . On suppose que $\varphi^+ \notin N(T)^\perp$. Comme l'opérateur T est supposé continu, $N(T)$ est un sous espace fermé de H_1, donc il existe $\varphi_1^+ \in N(T)$ et $\varphi_2^+ \in N(T)^\perp$ tels que $\varphi^+ = \varphi_1^+ + \varphi_2^+$. Le vecteur φ_2^+ est aussi une solution moindres carrées et $\left\|\varphi_2^+\right\| \leq \|\varphi^+\|$. Donc pour toute solution de moindres carrées sa projection sur $N(T)^\perp$ satisfait l'équation(2.2.4).

L'unicité. Supposons qu'il existe deux solutions φ^+ et φ'^+ de l'équation (2.2.4). Alors $(\varphi^+ - \varphi'^+) \in N(T)^\perp$ et $T^*T(\varphi^+ - \varphi'^+) = 0$, d'où $(\varphi^+ - \varphi'^+) \in N(T^*T) = N(T)$ ce qui implique $\varphi^+ = \varphi'^+$ ■

Remarque 2.2.4 *φ^+, aussi appelée meilleure solution approchée de l'équation $T\varphi = f$.*

Remarque 2.2.5 *En dimension infinie, l'inverse généralisée T^+ est unique mais peut ne pas être continue par rapport à f.*

2.2.2 Décomposition en valeurs singulières SVD (Singular Value Decomposition)

Une des approches les plus naturelles pour étudier un problème inverse mal posé consiste à utiliser la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur T. Cette représentation propose des bases pour les espaces de Hilbert H_1 et H_2 permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.

Décomposition en valeurs singulières de matrices

Avant de formaliser la décomposition en valeurs singulières,on donne un rappel sur la notion d'orthogonalité .

Définition 2.2.2 *Une suite de vecteurs* $\{v_1, v_2, ..., v_p\} \in \mathbb{R}^n$ *est orthogonale si* $v_i^t v_j = 0$ *pour tout* $i \neq j$, *et orthonormale si* $v_i^t v_j = \delta_{ij}$.

Définition 2.2.3 *Une suite de sous espaces* $X_1, X_2, ..., X_p$ *de* $\mathbb{R}^n$ *sont deux à deux orthogonaux si* $x^t y = 0$, *avec* $x \in X_i$, $y \in X_j$ *pour* $i \neq j$. *Le complément orthogonal d'un sous-espace* $X \subset \mathbb{R}^n$ *s'écrit*

$$X^{\perp} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y^t x = 0 \right\}, \text{ pour tout } x \in X.$$

Définition 2.2.4 *Une matrice* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$*est orthogonale si* $A^t A = AA^t = I_n$.*(*A^t*est la transposée de* A*).*

On a vu pour certains matrices carrées on pouvait faire une décomposition en valeurs propres $A = PDP^{-1}$, pour effectuer cette transformation, la matrice A doit être carrée et diagonalisable. L'idée de la décomposition en valeurs singulières est similaire à la décomposition en valeurs propres, mais fonctionne pour toute matrice rectangulaire de taille $m \times n$. Pour plus de détails voir [8], [18] et [35]

Théorème 2.2.3 *[8] Soit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *et* $r = \min(m, n)$. *Il existe deux matrices orthogonales* $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ *et* $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *telles que*

$$A = U\Sigma V^t,\ \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.5}$$

où $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\Sigma_1 = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r\times r}$, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$.

Les σ_i sont les valeurs singulières de A qui sont uniques. Si l'on note $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$ et $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ les colonnes des matrices U et V, alors les vecteurs u_i et v_i sont, respectivement, les vecteurs singuliers gauches et droits associés à la valeur singulière σ_i. Si les σ_i sont toutes distinctes, les vecteurs singuliers à gauche u_i et droits v_i sont uniques.

Si $A = U\Sigma V^t$, alors les matrices $A^tA = V\Sigma^2V^t$ et $AA^t = U\Sigma^2U^t$ sont réelles symétriques et définies positives, donc les valeurs propres λ_i de chacune sont positives ou nulles.

Donc (V, Σ^2) représentent la décomposition aux valeurs propres de A^tA et (U, Σ^2) représentent la décomposition aux valeurs propres de AA^t.

On retrouve ici une propriété des valeurs singulières de A

$$\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$$

Les valeurs singulières σ_k de A sont les racines carrées des valeurs propres de A^tA ou AA^t.

De l'égalité (2.2.5) il vient $AV = U\Sigma$ et $A^tU = \Sigma^tV$ en comparant les colonnes dans ces équations on trouve:

$$\begin{cases} Av_k = \sigma_k u_k, & k = 1 : r, \quad r = \min(m, n) \\ A^t u_k = \sigma_k v_k, & k = 1 : r, \\ A^t u_k = 0, & k = r+1 : \max(m, n) \end{cases}$$

Soit r le nombre de valeurs singulières non nulles de la matrice A. Soit U_1 et V_1 les r premiers vecteurs singuliers $U_1 = (u_1, u_2, ..., u_r)$ et $V_1 = (v_1, v_2, ..., v_r)$. Soit D_1 la matrice diagonale $D_1 = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r)$. Alors $A = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k u_k v_k$,et

$1 - rang\,(A) = r$.

$2 - \ker A = vect(v_{r+1}, ..., v_n),\ \operatorname{Im} A = vect(u_1, ..., u_r)$.

De plus il existe une relation entre la SVD et la norme-2 $||A||_2 = \sigma_1$.

2.2.3 Résolution du problème de moindres carrés par décomposition en valeurs singulières

Soit le système linéaire $Ax = b$

La solution du problème de moindres carrés x donnée par $x = (A^tA)^{-1}A^tb$.

Pour $A = U\Sigma V^t$ on a

$$x = V\Sigma^{-1}U^tb = \sum_{k=1}^{r} \frac{u_k^t b}{\sigma_k} v_k.$$

où $r = rang(A)$,et u_k et v_k sont respectivement le k-ème colonne de U et V .

Introduisons la SVD de A dans le problème de moindres carrés :

$$\|Ax - b\|_2^2 = \left\|U\Sigma V^t x - b\right\|_2^2 = \left\|\Sigma V^t x - U^t b\right\|_2^2$$

puisque U est orthogonale. Notons $w = U^tb$ ($\|w\|_2 = \|b\|_2$) et posons $y = V^tx$ ($\|y\|_2 = \|x\|_2$) , puisque V est orthogonale, ce qui sera important pour calculer la solution de norme minimale. Comme Σ est diagonale, ce problème est découplé, et se résout composante par composante dans les bases $(u_1, ..., u_m)$ et$(v_1, ..., v_n)$.

Nous avons donc :

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|\Sigma y - w\|_2^2 = \sum_{k=1}^{r} |\sigma_k y_k - w_k|^2$$

On obtient donc toutes les solutions du problème de moindres carrés en posant

$$y_k = \begin{cases} \dfrac{w_k}{\sigma_k} & pour \quad k = 1, ..., r. \\ quelconque & pour \; k = r+1, ..., n. \end{cases}$$

2.2.4 Développement en valeurs singulières des opérateurs compacts

Les opérateurs compacts ont pour propriété essentielle de posséder un ensemble discret et dénombrable de valeurs singulières. Cela permet une analyse spectrale proche de celle faite en dimension finie par la décomposition en valeurs singulières.

Définition 2.2.5 *Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $T \in L(H_1, H_2)$. On appelle valeur singulière de l'opérateur T , le nombre réel positif $\sigma = \sqrt{\lambda}$, où λ est une valeur propre de l'opérateur T^*T.*

Théorème 2.2.4 *(Décomposition en valeurs singulières) Soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur compact. Il existe une suite $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}_+$,et deux familles orthonormales $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset H_1, (v_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset H_2$ telles que:*

1- $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante*, et $\lim_{k\to\infty} \sigma_k = 0$.

2-$Tu_k = \sigma_k v_k$, $T^* v_j = \sigma_k u_k$.

3- Pour tout $\varphi \in H_1$, on a la décomposition en valeurs singulières

$$\varphi = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle \varphi, u_k \rangle u_k + \varphi_0 \quad \text{où } \varphi_0 \in N(T). \tag{2.2.6}$$

4. Pour tout $\varphi \in H_1$, $f \in H_2$,

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k \langle \varphi, u_k \rangle v_k, \quad T^* f = \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k \langle f, v_k \rangle u_k.$$

Le système $\{\sigma_k, u_k, v_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est appelé système singulier de T .

La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $N(T)^\perp$,la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $\overline{R(T)}$.

Preuve. voir [8] ■

Définition 2.2.6 *Les nombres σ_k sont appelés les valeurs singulières de T et le développement obtenu (2.2.6) s'appelle le développement en valeurs singulières (DVS) de l'opérateur compact T.*

2.2.5 Applications de la SVD aux problèmes de moindres carrés

Comme en dimension finie, le développement en valeurs singulières de T permet une analyse complète des équations linéaires associées à l'opérateur T comme (2.2.1) ou (2.2.3).

Théorème 2.2.5 *Soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire compact de système singulier $\{\sigma_k, u_k, v_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$. L'équation (2.2.1) peut être résolue si et seulement si*

$$f \in N(T^*)^\perp = \overline{R(T)},$$

et vérifie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\langle f, v_k \rangle|^2}{\sigma_k^2} < \infty.$$

dans ce cas l'ensemble des solutions de (2.2.1) est donné par

$$\varphi = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\langle f, v_k \rangle|}{\sigma_k} u_k + \varphi_0, \quad \varphi_0 \in N(T).$$

Preuve. Voir [8] ■

2.3 Les méthodes de régularisations

On considère l'équation $T\varphi = f$ où $T : H_1 \to H_2$ un opérateur compact. Si l'opérateur inverse T^{-1}n'est pas continu et qu'on ne dispose pas de la valeur exacte f mais de f^δ vérifiant $\|f - f^\delta\| \leq \delta$, la solution approchée $\varphi^\delta = T^{-1} f^\delta$ ne peut évidemment pas être considérée comme une approximation de $\varphi = T^{-1} f$.

On présente dans cette section le principe de quelques méthodes de régularisation les plus courantes : la méthode de Lavrentiev , la méthode de Tikhonov, la méthode de Morozov.

Pour une lecture plus approfondie on propose de voir [9], [19] et [6]

On appelle méthodes de régularisation des méthodes pour construire des solutions approchées stables aux problèmes mal posés.

Soit le problème mal posé: Trouver $\varphi \in H_1$ tel que

$$T\varphi = f$$

On suppose que T est injectif et on veut approcher la solution φ a partir de la connaissance d'un second membre perturbé f^δ tel que $\|f - f^\delta\| \leq \delta$.

Si $f \in R(T)$,on ne peut être sur que $f^\delta \in R(T)$ (φ^δ est une solution de $T\varphi^\delta = f^\delta$)

On veut donc construire une approximation stable φ^δ de la solution exacte φ de l'équation non perturbé $T\varphi = f$. Donc on cherche une approximation de l'opérateur inverse non borné $T^{-1} : R(T) \to H_1$ par un opérateur borné $R : H_2 \to H_1$.

Définition 2.3.1 *Soit H_1 et H_2 des espaces normés et soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire borné injectif. La famille des opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : H_2 \to H_1$, $\alpha > 0$, telle que*

$$\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha T\varphi = \varphi, \text{ pour tout } \varphi \in H_1 \tag{2.3.1}$$

est appelé schéma de régularisation pour l'opérateur T. Le paramètre α est appelé paramètre de régularisation.

Remarque 2.3.1 *La convergence de (2.3.1) est équivalente à $R_\alpha f \to T^{-1}f$, quand $\alpha \to 0$, pour tout $f \in R(T)$.*

Le théorème suivant montre que, si T est un opérateur compact en dimension infinie, cette convergence ne peut pas être uniforme.

Théorème 2.3.1 *Soit H_1 et H_2 des espaces normés, soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire compact, et supposons que $\dim(H_1) = \infty$. Alors pour un schéma de régularisation, l'opérateur R_α ne peut être borné uniformément en fonction de α et les opérateurs $R_\alpha T$ ne peuvent converger en norme lorsque $\alpha \to 0$.*

Preuve. 1) Supposons que $\|R_\alpha\| \leq C$, pour tout $\alpha > 0$,de $R_\alpha f \to T^{-1}f$, $\alpha \to 0$, pour tout $f \in R(T)$, on en déduit

$$\left\|T^{-1}f\right\| \leq C \|f\|$$

i.e., $T^{-1} : R(T) \to H_1$ est borné. D'Après le théorème 2.1.1 nous avons une contradiction.

2) Supposons que nous avons une convergence en norme. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|R_\alpha T - I\| < \frac{1}{2}$$

Pour tout $f \in R(T)$ on peut estimer

$$\left\|T^{-1}f\right\| \leq \left\|T^{-1}f - R_\alpha T T^{-1}f\right\| + \|R_\alpha f\| \leq \frac{1}{2}\left\|T^{-1}f\right\| + \|R_\alpha\| \|f\|,$$

D'où

$$\left\|T^{-1}f\right\| \leq 2 \|R_\alpha\| \|f\|$$

Donc $T^{-1} : R(T) \to H_1$ est borné et nous avons une contradiction comme ci-dessus ■

Le schéma de régularisation approche la solution φ de $T\varphi = f$ par la solution régularisée

$$\varphi_\alpha^\delta = R_\alpha f^\delta$$

Ainsi l'erreur d'approximation s'écrit

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha^\delta - \varphi &= R_\alpha f^\delta - R_\alpha f + R_\alpha f - \varphi \\ &= R_\alpha f^\delta - R_\alpha f + R_\alpha T\varphi - \varphi\end{aligned}$$

d'où l'estimation de l'erreur

$$\left\|\varphi_\alpha^\delta - \varphi\right\|_{H_1} \leq \delta \left\|R_\alpha\right\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)} + \left\|R_\alpha T\varphi - \varphi\right\|_{H_1}. \tag{2.3.2}$$

Le premier terme de droite de l'équation (2.3.2) représente la majoration de l'erreur due au niveau de données. Par le théorème(2.3.1) nous avons vu que $\|R_\alpha\| \to \infty$ quand $\alpha \to 0$. Il ne faut donc pas choisir α trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de (2.3.2) tend vers 0 quand $\alpha \to 0$ par définition de $R_{\alpha.}$Nous allons faire tendre δ vers 0 et nous allons choisir un schéma de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution φ. Donc pour que le schéma soit optimal, on choisit le paramètre de régularisation $\alpha = \alpha\,(\delta)$ qui dépend de l'erreur δ et qui minimise $\left\|\varphi_\alpha^\delta - \varphi\right\|_{H_1}$.

Définition 2.3.2 *Le schéma régularisant R_α, $\alpha > 0$ est dit régulier si pour tout $f \in R(T)$ et $f^\delta \in H_2$ tels que $\left\|f^\delta - f\right\| < \delta$, on a*

$$R_{\alpha(\delta)} f \to T^{-1} f \quad \textit{lorsque } \delta \to 0$$

Plusieurs exemples de stratégies de régularisation admissibles se trouvent dans [6]

2.3.1 Méthode de Lavrentiev

On considère l'équation

$$T\varphi = f \tag{2.3.3}$$

où T est un opérateur compact,auto adjoint et positive(i.e.,tout les valeurs propres de T sont positifs) d'un espace de Hilbert H dans lui même.Supposons que $N(T\ ) = 0$.

Soit f^δ une approximation de f telle que $\left\|f - f^\delta\right\| < \delta$.

Si $f^\delta \notin R(T)$, on peut remplacer l'équation $T\varphi = f$ par une équation similaire

$$\alpha\varphi + T\varphi = f^\delta, \quad \alpha > 0 \tag{2.3.4}$$

pour lequel le problème est devenu bien posé.

Dans ce qui suit on preuve que cette équation admet une solution φ_α^δ qui tend vert φ la solution exacte de l'équation (2.3.3) quand δ et α tend vert zero et $\dfrac{\delta}{\alpha} \to 0$.

On prend $\varphi_\alpha = (\alpha I + T)^{-1} f$ la solution de l'équation $\alpha\varphi + T\varphi = f$ une approximation de la solution (2.3.3).

Si $\left\|f - f^\delta\right\| < \delta$, on pose

$$\varphi_\alpha^\delta = (\alpha I + T)^{-1} f^\delta \ .$$

L'équation (2.3.4) définie un schéma de régularisation pour l'opérateur $T.R_\alpha = (\alpha I + T)^{-1}$, $\alpha > 0$

Soit $\{\lambda_k\}, (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k \geq \lambda_{k+1} ...... > 0)$ les valeurs propres de l'opérateur T, $\{v_k\}$ les fonctions propres associés aux valeurs propres $\{\lambda_k\}$.

D'où

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k, \quad \varphi_k = \langle \varphi, v_k \rangle \\ f &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k, \quad f_k = \langle f, v_k \rangle \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Substituons les expressions (2.3.5) dans (2.3.3) nous concluons que $\varphi_k = \dfrac{f_k}{\lambda_k}$, donc

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} v_k,$$

Puisque $\varphi \in H$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k}{\lambda_k}\right)^2 \tag{2.3.6}$$

converge.

On considère l'équation auxiliaire

$$\alpha\varphi + T\varphi = f \tag{2.3.7}$$

la solution φ_α de l'équation (2.3.7) peut être représenté sous la forme

$$\varphi_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\alpha + \lambda_k} v_k, \tag{2.3.8}$$

Comme $f_k = \lambda_k \varphi_k$ estimons la différence

$$\begin{aligned}
\varphi - \varphi_\alpha &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\alpha + \lambda_k} v_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k - \frac{\lambda_k \varphi_k}{\alpha + \lambda_k} \right) v_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k}{\alpha + \lambda_k} v_k.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\varphi - \varphi_\alpha\|^2 = \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2}. \tag{2.3.9}$$

Montrons que $\lim_{\alpha \to 0} \|\varphi - \varphi_\alpha\|^2 = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, la serie(2.3.9) est estimée comme suit:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} &= \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} + \alpha^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} \\
&\leq \frac{\alpha^2}{\lambda_n^2} \|\varphi\| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k^2
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Puisque la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2$ converge ,il existe un nombre n tel que le second terme de droite de (2.3.10) est inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$. Ensuite, nous pouvons choisir $\alpha > 0$ tel que le premier terme est également inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$. Il s'ensuit que

$$\lim_{\alpha \to 0} \|\varphi - \varphi_\alpha\|^2 = 0.$$

Nous considérons maintenant le problème avec des données approximatives

$$T\varphi = f^\delta \tag{2.3.11}$$

et le problème régularisé

$$\alpha\varphi + T\varphi = f^\delta,\ \alpha > 0$$

Posons $f_k^\delta = \left\langle f^\delta, v_k \right\rangle$, alors la solution φ_α^δ de l'équation (2.3.4) peut être représenté comme une serie

$$\varphi_\alpha^\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^\delta}{\alpha + \lambda_k} v_k.$$

estimons la différence

$$\left\|\varphi - \varphi_\alpha^\delta\right\| \leq \|\varphi - \varphi_\alpha\| + \left\|\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^\delta\right\| \tag{2.3.12}$$

$$\begin{aligned} \left\|\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^\delta\right\|^2 &= \left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\alpha + \lambda_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^\delta}{\alpha + \lambda_k}\right) v_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(f_k - f_k^\delta\right)^2}{\left(\alpha + \lambda_k\right)^2} \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_k - f_k^\delta\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} \left\|f - f^\delta\right\|^2 \leq \frac{\delta^2}{\alpha^2} \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Nous prouvons maintenant que $\varphi_\alpha^\delta \to \varphi$ quand α et δ tend vert zero et $\dfrac{\delta}{\alpha} \to 0$.
Prenons $\varepsilon > 0$, et choisissons α tel que $\|\varphi - \varphi_\alpha\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Puis trouver $\delta > 0$ tel que $\dfrac{\delta}{\alpha} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Alors de (2.3.12) et (2.3.13) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left\|\varphi - \varphi_\alpha^\delta\right\| &\leq \|\varphi - \varphi_\alpha\| + \left\|\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^\delta\right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

2.3.2 Méthode de Tikhonov

Nous allons présenter dans la section suivante la méthode de Tikhonov pour approcher les problèmes inverses mal posés.Pour plus d'information sur les méthodes de régularisation consulter [6] et [9]

Une méthode pour résoudre le problème mal posé $T\varphi = f$ est de choisir comme solution $\varphi \in H_1$ qui minimise la fonctionnelle :

$$\|T\varphi - f\|_{H_2}^2$$

Si H_1 est de dimension infinie et l'opérateur T compact, ce problème de minimisation est aussi mal posé. Voir le lemme suivant:

Lemme 2.3.1 *Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert,et $T \in L(H_1, H_2)$ et $f \in H_2$.Il existe $\varphi^\sim \in H_1$ unique tel que*

$$\|T\varphi^\sim - f\| \leq \|T\varphi - f\|, \text{ pour tout } \varphi \in H_1 . \tag{2.3.14}$$

si et seulement si $\varphi^\sim$ est une solution de l'équation

$$T^*T\varphi^\sim = T^*f \tag{2.3.15}$$

où $T^* : H_2 \to H_1$ est l'adjoint de T.

Preuve. *On a*

$$\|(T\varphi - f) - (T\varphi^\sim - f)\|^2 = \|T\varphi - f\|^2 + \|T\varphi^\sim - f\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle T\varphi - f, T\varphi^\sim - f\rangle$$

et

$$\begin{aligned} \langle T\varphi - f, T\varphi^\sim - f\rangle &= \langle T(\varphi - \varphi^\sim) + T\varphi^\sim - f, T\varphi^\sim - f\rangle \\ &= \langle T(\varphi - \varphi^\sim), T\varphi^\sim - f\rangle + \|T\varphi^\sim - f\|^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\|T\varphi - f\|^2 - \|T\varphi^\sim - f\|^2 = 2\operatorname{Re}\langle \varphi - \varphi^\sim, T^*(T\varphi^\sim - f)\rangle + \|T(\varphi - \varphi^\sim)\|^2 .$$

1- Si $\varphi^\sim$est une solution de l'équation (2.3.15) , alors

$$\operatorname{Re}\langle \varphi - \varphi^\sim, T^*(T\varphi^\sim - f)\rangle = 0, \quad et \quad \|T\varphi - f\|^2 - \|T\varphi^\sim - f\|^2 \geq 0$$

Donc $\varphi^\sim$est une solution de (2.3.14).

2- Si d'autre part $\varphi^\sim$minimise $\|T\varphi - f\|$ .On pose $\varphi = \varphi^\sim + \varepsilon\psi, \psi \in H_1, \varepsilon > 0$, d'où

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2\operatorname{Re}\langle T(\varphi - \varphi^\sim), T\varphi^\sim - f\rangle + \|T(\varphi - \varphi^\sim)\|^2 \\ &= 2\operatorname{Re}\langle T(\psi), T\varphi^\sim - f\rangle + \varepsilon\|T(\psi)\|^2 \end{aligned}$$

Si $\varepsilon \to 0$, *alors pour tout* $\psi \in H_1$:

$$2\operatorname{Re}\langle T\psi, T\varphi^{\sim} - f\rangle = 2\operatorname{Re}\langle \psi, T^{*}(T\varphi^{\sim} - f)\rangle \geq 0.$$

On prend $\psi = -T^{*}(T\varphi^{\sim} - f)$. *D'où*

$$-\operatorname{Re}\langle T^{*}(T\varphi^{\sim} - f), T^{*}(T\varphi^{\sim} - f)\rangle = -\|T^{*}(T\varphi^{\sim} - f)\|^{2} \geq 0$$

Ce qui signifie que $\varphi^{\sim}$ *résout l'équation normale (2.3.15)* ■

Comme conséquence de ce lemme, nous devrions modifier la fonctionnelle $\|T\varphi - f\|_{H_2}$, ou réécrire l'équation $T^{*}T\varphi = T^{*}f$ de telle manière que l'opérateur ne soit plus compact, i.e. On replace l'équation de première espèce$T^{*}T\varphi = T^{*}f$ par une équation de deuxième espèce. Les deux idées conduisent au problème de minimisation (régularisé) suivant:

Trouver $\varphi_\alpha \in H_1$ qui minimise la fonctionnelle

$$J_\alpha(\varphi) = \|T\varphi - f\|_{H_2}^{2} + \alpha\|\varphi\|_{H_1}^{2} \ , \ \ \alpha > 0$$

$J_\alpha(\varphi)$ est appelée la fonctionnelle de Tikhonov.

Théorème 2.3.2 *[6] Soit* H_1 *et* H_2 *deux espaces de Hilbert et* $T : H_1 \to H_2$ *un opérateur linéaire borné et* $\alpha > 0$, *alors la fonctionnelle de Tikhonov* $J_\alpha(\varphi)$ *admet un unique minimum* $\varphi_\alpha \in H_1$. *L'élément* φ_α *est l'unique solution de l'équation*

$$T^{*}T\varphi + \alpha\varphi = T^{*}f \tag{2.3.16}$$

et dépend continûment de f .

Preuve. On utilise le lemme 2.3.1

On a

$$\begin{aligned} J_\alpha(\varphi) - J_\alpha(\varphi_\alpha) &= \|T\varphi - f\|_{H_2}^{2} - \|T\varphi_\alpha - f\|_{H_2}^{2} + \alpha\left(\|\varphi\|^{2} - \|\varphi_\alpha\|^{2}\right) \\ &= 2\operatorname{Re}\langle \varphi - \varphi_\alpha, T^{*}(T\varphi_\alpha - f)\rangle + \|T(\varphi - \varphi_\alpha)\|^{2} + \alpha\left(\|\varphi\|^{2} - \|\varphi_\alpha\|^{2}\right) \end{aligned}$$

et on a

$$\alpha(\|\varphi\|^{2} - \|\varphi_\alpha\|^{2}) = \alpha\|\varphi - \varphi_\alpha\|^{2} + 2\alpha\operatorname{Re}\langle \varphi - \varphi_\alpha, \varphi_\alpha\rangle$$

.

D'où

$$J_\alpha(\varphi)-J_\alpha(\varphi_\alpha) = 2\,\mathrm{Re}\,\langle \varphi-\varphi_\alpha, \alpha\varphi_\alpha + T^*(T\varphi_\alpha - f)\rangle + \|T(\varphi-\varphi_\alpha)\|^2 + \alpha\,\|\varphi-\varphi_\alpha\|^2\,,\ \textit{pour tout}\ \varphi\in H_1.$$

Si φ_α satisfaite (2.3.16), alors $J_\alpha(\varphi) - J_\alpha(\varphi_\alpha) \geq 0$.

On considère l'opérateur $A_\alpha : H_1 \to H_1$ défini par:

$$A_\alpha(\varphi) = (\alpha I + T^*T)\,\varphi$$

comme

$$\mathrm{Re}\,\langle A_\alpha\varphi, \varphi\rangle = \|T\varphi\|^2 + \alpha\,\|\varphi\|^2 \geq \alpha\,\|\varphi\|^2\,,\quad \varphi\in H_1,$$

alors A_α est strictement coércive et d'après le théorème de Lax-Milgram l'opérateur A_α^{-1} : $H_1 \to H_1$ est borné, i.e. l'équation (2.3.16) admet une solution unique ■

Grâce a l'équation (2.3.16) nous pouvons définir l'opérateur de régularisation de Tikhonov par:

$$R_\alpha = (T^*T + \alpha I)^{-1}T^* : H_2 \to H_1$$

Il reste à démontrer que cet opérateur est bien un opérateur de régularisation et sous quelle conditions le choix de α en fonction de l'erreur δ est admissible. C'est l'objet du théorème suivant:

Théorème 2.3.3 *Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire compact. Alors pour chaque $\alpha > 0$, l'opérateur $T^*T + \alpha I : H_1 \to H_1$ est bijectif et a un inverse borné. De plus si T est injectif alors $R_\alpha = (T^*T + \alpha I)^{-1}T^*$ décrit un schéma de régularisation avec $\|R_\alpha\| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.*

Preuve. L'opérateur T^*T étant auto adjoint positif, on a

$$\langle T^*T\varphi + \alpha\varphi, \varphi\rangle \geq \alpha\,\|\varphi\|^2\,,$$

pour tout $\varphi \in H_1$,on concluons que si $\alpha > 0$, alors l'opérateur $T^*T + \alpha I$ est bijectif .

Soit $\{\sigma_k, u_k, v_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ le système singulier de T, $Q : H_1 \to N(T)$ la projection orthogonale. Alors l'opérateur $A : H_1 \to H_1$ défini par

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha + \sigma_k^2} \langle \varphi, u_k \rangle u_k + \frac{1}{\alpha} Q(\varphi)$$

est borné et vérifie $(T^*T + \alpha I) A = A(T^*T + \alpha I) = I$,i.e., $A = (T^*T + \alpha I)^{-1}$.

Si T est injectif, alors $Q = 0$, et on déduit pour l'unique solution φ_α de l'équation $T^*T\varphi + \alpha\varphi = T^*f$.

De $\langle T^*f, u_k \rangle_{H_1} = \sigma_k \langle f, v_k \rangle_{H_2}$il vient

$$\varphi_\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sigma_k}{\alpha + \sigma_k^2} \langle f, v_k \rangle u_k.$$

Alors $R_\alpha$est bien un schéma de régularisation, avec $q(\alpha,\sigma) = \dfrac{\sigma_k^2}{\alpha + \sigma_k^2}$. La fonction q est bornée: $0 < q(\alpha,\sigma) < 1$, et vérifie la condition

$$q(\alpha,\sigma) < c(\alpha)\sigma$$

avec $c(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha}$ car $\sqrt{\alpha}\sigma \leq \dfrac{\alpha + \sigma_k^2}{2}$ ■

La méthode de régularisation de Tikhonov, i.e. la minimisation globale de la fonctionnelle $J_\alpha(\varphi)$, est en fait équivalente à un autre problème de minimisation avec contraintes. Ce résultat important permet de comprendre la méthode sous deux angles différents. Nous allons retrouver une propriété similaire dans la section suivante pour le cas de la régularisation entropique.

Théorème 2.3.4 *Soit φ_α la solution du problème*

$$\min_{\varphi\in H_1} \left\{ \|T^*T\varphi - f\|_{H_2}^2 + \alpha \|\varphi\|_{H_1}^2 \right\} \tag{2.3.17}$$

Posons $k = \|T\varphi_\alpha - f\|$ *et* $S_k = \{\varphi \in H_1, \|T\varphi - f\| \leq k\}$.
Alors φ_α est aussi solution du problème

$$\min_{\varphi\in S_k} \|\varphi\|_{H_1}^2 \tag{2.3.18}$$

Réciproquement, si φ_k est la solution de (2.3.18) et si $0 \notin S_k$, alors il existe $\alpha_k > 0$ tel que φ_k soit la solution de (2.3.17).

Preuve. $(\Rightarrow)$ soit $\varphi_k \in H_1$ l'unique solution de (2.3.18), nous allons montrer que φ_k est solution de (2.3.17).Comme φ_α est solution de (2.3.17),on a

$$\|T\varphi_\alpha - f\|_{H_2}^2 + \alpha \|\varphi_\alpha\|_{H_1}^2 \leq \|T\varphi_k - f\|_{H_2}^2 + \alpha \|\varphi_k\|_{H_1}^2 \qquad (2.3.19)$$

comme de plus, $\varphi_\alpha \in S_k$ et φ_k est la solution de (2.3.18), on a

$$\|T\varphi_k - f\|_{H_2}^2 + \alpha \|\varphi_k\|_{H_1}^2 \leq \|T\varphi_k - f\|_{H_2}^2 + \alpha \|\varphi_\alpha\|_{H_1}^2$$

Il s'ensuit

$$k^2 \leq \|T\varphi_k - f\|_{H_2}^2 \leq k^2$$

et donc

$$\|T\varphi_k - f\|_{H_2}^2 = \|T\varphi_\alpha - f\|_{H_2}^2 = k.$$

Finalement, puisque $\varphi_\alpha \in S_k$,on a

$$\|\varphi_k\|_{H_1} \leq \|\varphi_\alpha\|_{H_1} \Rightarrow \|T\varphi_k - f\|_{H_2}^2 + \alpha \|\varphi_k\|_{H_1}^2 \leq \|T\varphi_\alpha - f\|_{H_2}^2 + \alpha \|\varphi_\alpha\|_{H_1}^2$$

et on en déduit $\varphi_\alpha = \varphi_k$ par unicité du minimum.
$(\Leftarrow)$ soit $k > 0$, comme φ_α est solution de (2.3.17), on a

$$\begin{aligned} \|T\varphi_\alpha - f\|_{H_2}^2 + \alpha \|\varphi_\alpha\|_{H_1}^2 &\leq \|T\varphi_k - f\|_{H_2}^2 + \alpha \|\varphi_k\|_{H_1}^2 \\ &\leq k^2 + \alpha \|\varphi_k\|_{H_1}^2 \end{aligned}$$

en passant à la limite lorsque $\alpha \to 0$ on obtient

$$\lim_{\alpha \to 0} \|T\varphi_\alpha - f\|_{H_2}^2 \leq k^2, \ \forall k > 0$$

donc

$$\lim_{\alpha \to 0} \|T\varphi_\alpha - f\|_{H_2}^2 = 0.$$

Soit $k > 0$, il existe donc $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha \leq \alpha_0$ on a $\varphi_\alpha \in S_k$. Maintenant, s'il existe un $\alpha_k > 0$ tel que

$$\|\varphi_k\|_{H_1} = \left\|\varphi_{\alpha_k}\right\|_{H_1}$$

d'après l'équation (2.3.16)

$$\left\|T\varphi_{\alpha_k} - f\right\|_{H_2}^2 \leq \|T\varphi_k - f\|_{H_2}^2$$

et on a la conclusion par unicité du minimum. Supposons donc que :

$$\textit{Pour tout } \alpha > 0, \ \ \|\varphi_k\| = r_k < \|\varphi_\alpha\|_{H_1}.$$

D'autre part, l'hypothèse $0 \notin S_k$ empêche 0 d'être solution, donc $r_k > 0$. La fonction $\alpha \to \|\varphi_\alpha\|_{H_1}$ est continue de $]0\ ,\ +\infty[\ \to\ ]0\ ,\ m[$ avec $m > \left\|\varphi_{\alpha_0}\right\|$, puisque $\varphi_\alpha : \alpha \to (T^*T + \alpha I)^{-1}T^*f$ est continue. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaire, on en déduit l'existence de $\alpha_k > 0$ tel que $\left\|\varphi_{\alpha_k}\right\|_{H_1} = r_k$. Ce qui termine la démonstration ■

La méthode de régularisation de Tikhonov est une des méthodes les plus employées pour résoudre les problèmes mal posés. Par exemple elle est utilisée avec succès pour inverser des matrices mal conditionnées.

problème :Comment choisir $\alpha = \alpha(\delta)$**?**

2.3.3 Principe d'écart de Morozov(discrepancy principle of Morozov)

Principe: Si l'on considère des données perturbées, le résidu $\|T\varphi - f\|_{H_2}$ ne peut être inférieur à la précision de mesure de f le paramètre α est ainsi choisi de sorte que

$$\left\|T\varphi_\alpha^\delta - f^\delta\right\| = \delta.$$

D'après kirsch [6] , on présente un principe basé sur la méthode de régularisation de Tikhonov.

Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur compact linéaire injectif à image dense dans H_2. En étudie encore l'équation $T\varphi = f\ ,\ f \in H_2$.

On calcula maintenant le paramètre de régularisation $\alpha = \alpha(\delta) > 0$, telle que la solution de Tikhonov correspondante φ_α est la solution de l'équation

$$T^*T\varphi_\alpha^\delta + \alpha\varphi_\alpha^\delta = T^*f$$

et elle est le minimum de la fonctionnelle

$$J_{\alpha,\delta}(\varphi) = \left\|T\varphi - f^\delta\right\|_{H_2}^2 + \alpha\|\varphi\|_{H_1}^2\ ,\ \ \alpha > 0$$

qui satisfait à l'équation

$$\left\|T\varphi_\alpha^\delta - f^\delta\right\| = \delta$$

On note que le choix de α par le principe de morozov est garantie d'une part que l'erreur est δ et d'autre part α n'est pas trop petit.

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation

$$\left\|T\varphi_\alpha^\delta - f^\delta\right\| = \delta$$

justifier par le théorème suivant:

Théorème 2.3.5 *[6] Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur compact linéaire injectif avec une image dense $R(T) \subset H_2$.Soit $T\varphi = f$ et $f^\delta \in H_2$ tels que $\left\|f - f^\delta\right\| \leq \delta < \left\|f^\delta\right\|$ et $\varphi = T^*z \in T^*(H_2)$ avec $\|z\| \leq E$. Si $\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta$ la solution de Tikhonov satisfaisant $\left\|T\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta - f^\delta\right\| = \delta$, alors*

$$\left\|\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta - \varphi\right\| \leq 2\sqrt{\delta E}$$

Preuve. Comme $\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta$ minimise la fonctionnelle de Tikhonov

$$J_{\alpha,\delta}(\varphi) = \left\|T\varphi - f^\delta\right\|_{H_2}^2 + \alpha \|\varphi\|_{H_1}^2$$

Par conséquent, nous concluons que

$$\begin{aligned}
\alpha(\delta)\left\|\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta\right\|_{H_1}^2 + \delta^2 &= J_{\alpha,\delta}(\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta) \leq J_{\alpha,\delta}(\varphi) \\
&= \alpha(\delta)\|\varphi\|_{H_1}^2 + \left\|f - f^\delta\right\|^2 \\
&\leq \alpha(\delta)\|\varphi\|_{H_1}^2 + \delta^2
\end{aligned}$$

Donc $\left\|\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta\right\|_{H_1} \leq \|\varphi\|_{H_1}$, pour tout $\delta > 0$. Cela nous donne l'estimation suivante:

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta - \varphi\right\|^2 &= \left\|\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta\right\|_{H_1}^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\langle\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta, \varphi\right\rangle + \|\varphi\|_{H_1}^2 \\
&\leq 2\left(\|\varphi\|_{H_1}^2 - \mathrm{Re}\left\langle\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta, \varphi\right\rangle\right) = 2\,\mathrm{Re}\left\langle\varphi - \varphi_{\alpha(\delta)}^\delta, \varphi\right\rangle
\end{aligned}$$

Comme $\varphi = T^*z \in T^*(H_2)$, alors

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta - \varphi\right\|^2 &\leq 2\,\mathrm{Re}\left\langle\varphi - \varphi_{\alpha(\delta)}^\delta, T^*z\right\rangle = 2\,\mathrm{Re}\left\langle f - T\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta, z\right\rangle \\
&\leq 2\,\mathrm{Re}\left\langle f - f^\delta, z\right\rangle + 2\,\mathrm{Re}\left\langle f^\delta - T\varphi_{\alpha(\delta)}^\delta, z\right\rangle \\
&\leq 2\delta\|z\| + 2\delta\|z\| = 4\delta\|z\| \leq 4\delta E
\end{aligned}$$

par conséquent $\left\|\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}-\varphi\right\| \leq 2\sqrt{\delta E}$ ■

La détermination de $\alpha(\delta)$ est équivalente au problème:Trouver la racine de la fonction monotone ϕ telle que:

$$\phi(\alpha)=\left\|T\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}-f^{\delta}\right\|^{2}-\delta^{2}$$

L'équation $\phi(\alpha)=0$ peut être résolu numériquement par exemple, par la méthode de Newton:

$$\alpha_{j+1}=\alpha_{j}-\frac{\phi(\alpha_{j})}{\phi'(\alpha_{j})},\ j=0,1,2,...$$

Calcule de $\phi'(\alpha)$

$$\begin{aligned}\phi'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}(\left\|T\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}-f^{\delta}\right\|^{2}-\delta^{2})\\ &= \frac{d}{d\alpha}\left(\left\langle T\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}-f^{\delta},T\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}-f^{\delta}\right\rangle-\delta^{2}\right)\\ &= \left\langle T\frac{d}{d\alpha}\left(\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}\right),T\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}-f^{\delta}\right\rangle+\left\langle T\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}-f^{\delta},T\frac{d}{d\alpha}\left(\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}\right)\right\rangle\end{aligned}$$

D'où

$$.\phi'(\alpha)=2\operatorname{Re}\left\langle T\frac{d}{d\alpha}\left(\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}\right),T\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}-f^{\delta}\right\rangle \tag{2.3.20}$$

De l'équation $T^{*}T\varphi_{\alpha}^{\delta}+\alpha\varphi_{\alpha}^{\delta}=T^{*}f$ il vient

$$T^{*}T\frac{d}{d\alpha}\left(\varphi_{\alpha}^{\delta}\right)+\alpha\frac{d}{d\alpha}\left(\varphi_{\alpha}^{\delta}\right)+\varphi_{\alpha}^{\delta}=0$$

D'où

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\varphi_{\alpha}^{\delta}\right)=-(\alpha I+T^{*}T)^{-1}\varphi_{\alpha}^{\delta}=-(\alpha I+T^{*}T)^{-1}.(\alpha I+T^{*}T)^{-1}T^{*}f^{\delta} \tag{2.3.21}$$

Substituant l'équation (2.3.21) dans (2.3.20) on obtient

$$\begin{aligned}\phi'(\alpha) &= \left\langle -T(\alpha I+T^{*}T)^{-1}\varphi_{\alpha}^{\delta},T\varphi_{\alpha(\delta)}^{\delta}-f^{\delta}\right\rangle\\ &= 2\operatorname{Re}\left\langle -T(\alpha I+T^{*}T)^{-2}T^{*}f^{\delta},T(\alpha I+T^{*}T)^{-1}T^{*}f^{\delta}-f^{\delta}\right\rangle.\end{aligned}$$

Chapitre 3

Opérateurs intégraux et équations intégrales

Dans ce chapitre nous présenterons les principales propriétés des opérateurs intégraux, ainsi qu'aux équations intégrales.

3.1 Opérateurs intégraux

Les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement. Ils interviennent dans plusieurs domaines tels que les équations aux dérivées partielles, et les équations intégrales, etc ...

Opérateur intégral

Définitions et propriétés

Définition 3.1.1 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un sous -ensemble compact,* $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. L'opérateur* $T : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ *défini par:*

$$T\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x,t)\,\varphi(t)\,dt\ , \qquad x \in \Omega$$

est appelé opérateur intégral et $k(x,t)$ *le noyau de l'opérateur intégral.*

Définition 3.1.2 *Soit k une fonction de $L^2([a,b]\times[c,d])$. L'opérateur $T : L^2[a,b]) \to L^2([c,d])$ défini par:*

$$T\varphi(x) = \int_c^d k(x,t)\,\varphi(t)\,dt\ , \quad x \in [a,b]$$

est un opérateur intégral de noyau k.

Théorème 3.1.1 *Soit k une fonction de l'espace $L^2([a,b]\times[c,d])$. L'opérateur*

$$T\varphi(x) = \int_c^d k(x,t)\,\varphi(t)\,dt\ , \quad x \in [a,b]$$

est bien défini en tant qu'opérateur de $L^2([a,b])$ dans $L^2([c,d)]$. Consulter ([8], p. 33) pour voir la preuve.

Proposition 3.1.1 *Soit T l'opérateur intégral de noyau k .L'opérateur adjoint T^*est un opérateur intégral de noyau k^*, avec*

$$k^*(x,t) = k(t,x)$$

Preuve. Voir [8] ,p 34 ■

Corollaire 3.1.1 *L'opérateur intégral T de noyau k est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau k est symétrique :*

$$k(x,t) = k(t,x)\ \text{, pour tout } (x,t) \in [a,b]\times[c,d]$$

Théorème 3.1.2 *([8], p 36) Soit k une fonction de l'espace $L^2([a,b]\times[c,d])$. L'opérateur intégral T de noyau k est compact de $L^2([a,b])$ dans $L^2([c,d])$.*

Opérateur intégral de Volterra

Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et soit k une fonction continue sur $[a,b]\times[a,b]$ à valeurs complexes. L'opérateur $T : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ défini par:

$$T\varphi(x) = \int_0^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

qui est borné de l'espace de Hilbert $L^2([a,b])$ dans lui même et

$$\|T\| \leq M\frac{(b-a)}{\sqrt{2}}, \quad \text{où } M = \sup_{[a,b]\times[a,b]} |k(x,t)|\,.$$

Cet opérateur, appelé opérateur intégral de Volterra.

L'opérateur adjoint de l'opérateur de Volterra

On considère l'opérateur de Volterra défini sur $L^2([0,1])$ par:

$$T\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$$

Soient φ et ψ deux éléments de $L^2([0,1])$,on a

$$\begin{aligned} \langle T\varphi, \psi\rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^x \varphi(t)\,dt\right)\psi(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \varphi(t)\left(\int_t^1 \psi(x)\,dx\right)dt \end{aligned}$$

cela montre que l'adjoint de l'opérateur T est donné par:

$$T^*\varphi(x) = \int_x^1 \varphi(t)\,dt$$

Spectre de l'opérateur de Volterra

On considère l'opérateur de Volterra T défini par:

$$T\varphi(x) = \int_a^x k(x,t)\varphi(t)\,dt, \qquad x \in [a,b]$$

On vérifie immédiatement que T^2 est un opérateur de Volterra et

$$T^2\varphi(x) = \int_a^x k_2(x,t)\varphi(t)\,dt, \text{avec } k_2(x,t) = \int_t^x k(x,s)\,k(s,t)\,ds.$$

Plus généralement, on vérifie que pour tout $n \geq 2$, T^n est un opérateur de Volterra dont le noyau k_n est donné par:

$$k_n(x,t) = \int_t^x k(x,s)\,k_{n-1}(s,t)\,ds.$$

Soit M le maximum du noyau k sur $[a,b]\times[a,b]$. On vérifie par récurrence sur n que:

$$|k_n(x,t)| \leq M^n \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \leq M^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{3.1.1}$$

De l'inégalité (3.1.1), il résulte que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} k_n(x,t)$ converge uniformément sur $[a,b]\times[a,b]$ vers une fonction continue sur $[a,b]\times[a,b]$.

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} |T^n\varphi(x)|^2 &\leq \left(\int_a^x |k_n(x,t)|^2 \, dt\right) \|\varphi\|_2^2 \\ &\leq \left(\frac{M^n}{(n-1)!}\right)^2 \frac{(x-a)^{2n-1}}{2n-1} \|\varphi\|_2^2 \end{aligned}$$

Par intégration sur $[a,b]$, on en déduit que

$$\|T^n\| \leq M^n \frac{(b-a)^n}{(n-1)!\sqrt{2n}}$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} T^n$ est donc convergente dans $L^2([a,b])$, ce qui implique que l'opérateur($I - T$) est inversible dans $L^2([a,b])$. Le calcul précédent vaut pour l'opérateur $\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$, quel que soit $\lambda \neq 0$, il suffit simplement de remplacer M par $\lambda^{-1}M$. Ainsi, pour tout $\lambda \neq 0$, l'opérateur $(\lambda I - T)$ est inversible et donc $\sigma(T) = \{0\}$.

Notons que les calculs précédents montrent que l'inverse de $(I - T)$ est encore un opérateur de Volterra de noyau la fonction continue qui représente la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} k_n(.,.)$.

3.2 Equations intégrales et leurs classifications

Introduction

Les équations intégrales ont un caractère fort différent des équations différentielles que l'on rencontre dans la plus part des phénomènes physiques.

Une équation intégrale peut être classée comme étant soit une équation intégrale linéaire ou bien comme une équation intégrale non linéaire. Une équation intégrale est dite linéaire, si l'opération de la linéarité est effectuée sur la fonction inconnue. Les équations intégrales linéaires les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm.

Définition 3.2.1 *On appelle équation intégrale linéaire où la fonction inconnue φ, telle que*

$$\varphi(x) - \lambda \int_D k(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x),$$

où $f(x)$ et $k(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre numérique et D un ensemble borné et fermé d'un espace euclidien de dimension n (x et t des points de cet espace), nous étudierons le cas unidimensionnel (i.e. les variables x et t parcourent un intervalle $[a,b]$), et $\lambda = 1$.

3.2.1 Equations intégrales de Fredholm

Définition 3.2.2 *On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme:*

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{3.2.1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues.

Une équation de la forme

$$\int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

est appelée une équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

Remarque 3.2.1 *Si $f(x) \neq 0$ l'équation (3.2.1) est dite non homogène, si non l'équation (3.2.1) est dite homogène.*

3.2.2 Equations intégrales de Volterra

Une équation à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{3.2.2}$$

est appelée équation integrale linéaire de Volterra de seconde espèce, en fait c'est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau $k(x,t) = 0$ pour $x < t$.

Si $f(x) = 0$, l'équation (3.2.2) s'écrit

$$\varphi(x) = \int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce.

Une équation à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

est appelé équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce .

Il existe deux catégories d'équations intégrales de volterra associées à l'opérateur intégral T de noyau carré intégrable :

Équations de première espèce :

$$T\varphi = f, \quad f \in L^2([a,b]).$$

Équations de seconde espèce :

$$\varphi - T\varphi = f, \quad f \in L^2([a,b])$$

Les équations integrales de Volterra de second espèce possède une propriété remarquable, à savoir que l'image $R(I-T)$ est fermée, ce qui implique que $(I-T)^{-1}$ est continu. Elle conduisent donc à des problèmes bien posés et possèdent en général une solution unique. Ce qui n'est pas le cas pour les équations intégrales de Volterra de première espèce, qui conduiront toujours à des problèmes mal posés (car T est un opérateur compact et donc $R(T)$ n'est pas fermée ce qui implique que T^{-1} n'est pas continu).

3.3 Equations intégrales de Volterra de seconde espèce

Théorème 3.3.1 *[3] Pour toute fonction $f \in C([a,b])$, l'équation linéaire de Volterra de seconde espèce*

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad x \in [a,b], \tag{3.3.1}$$

avec un noyau $k(x,t)$ continu, a une solution unique $\varphi \in C([a;b])$.

Preuve. On prolonge le noyau $k(x,t)$ sur $[a,b] \times [a,b]$ en posant $k(x,t) = 0$ pour $t > x$. Alors le noyau $k(x,t)$ est continu pour $x \neq t$ et

$$|k(x,t)| \leq M = \max_{a \leq t \leq x \leq b} |k(x,t)|, \quad pour \;\; x \neq t$$

Soit $\varphi \in C([a;b])$ une solution de l'équation homogène

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0, \quad x \in [a,b],$$

On montre que :

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \frac{M^n (x-a)^n}{n!}, \; x \in [a,b], \quad pour \; n = 1, 2, ... \tag{3.3.2}$$

Il est clair que cette inégalité est vrai pour $n = 0$. Supposons que l'inégalité (3.3.2) est vérifiée pour $n \geq 0$. Alors

$$|\varphi(x)| = \left| \int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt \right| \leq \|\varphi\|_\infty \frac{M^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

par passage à la limite $n \to \infty$ dans (3.3.2) on obtient $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in [a;b]$. Comme l'opérateur de Volterra est compact et à l'aide du théorème de Riesz alors l'équation (3.3.1) admet une solution unique. ■

Equation intégrale de Volterra de première espèce

Une équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce est de la forme

$$\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad a \leq t \leq x \leq b$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue. Cette équation généralement très difficile à résoudre voir impossible numériquement. Généralement on utilise des régularisations pour obtenir une équation intégrale de seconde espèce la quelle on peut trouver une solution.

Ce type d'équations intégrales constituent l'exemple le plus important de problèmes mal posés, les solutions de ces équations sont généralement instables. On doit régulariser ce type de problème $T\varphi = f$, comme par exemple la dérivation.

3.4 Transformation de EIV1 à EIV2

Formule de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy = f(x,b)\frac{db}{dx} - f(x,a)\frac{da}{dx} + \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy,$$

où $f(x,y)$ est une fonction continue pour $a \leq x \leq b$ et $a \leq y \leq b$.

En particulier si $a(x) = cte$ et $b(x) = x$ la formule de Leibniz s'écrit

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,y)dy = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy,$$

avec $f(x,y)$ et $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ sont continues pour tout $x \in [a,b]$

Transformation par dérivation

Soit léquation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_a^x k\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt = f(x),\ \ a \leq t \leq x \leq b \tag{3.4.1}$$

Supposons que $k(x,t)$, $\dfrac{\partial k(x,t)}{\partial x}$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues pour tout $x \in [a,b]$. Alors, en dérivant les deux membres de l'équation (3.4.1) par rapport à la variable x, on obtient

$$k(x,x)\varphi\left(x\right) + \int_a^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi\left(t\right)dt = f'(x), \tag{3.4.2}$$

si $k(x,x) \neq 0$ pour tout $a \leq x \leq b$, alors on peut transformer l'équation (3.4.2) à l'équation intégrale de Volterra de second espèce

$$\varphi\left(x\right) + \int_a^x \widetilde{k}\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt = \widetilde{f}(x), \tag{3.4.3}$$

où

$$\widetilde{k}\left(x,t\right) = \frac{1}{k(x,x)}.\frac{\partial k(x,t)}{\partial x},\ \ \widetilde{f}(x) = \frac{f'(x)}{k(x,x)}.$$

Si le noyau $\widetilde{k}\left(x,t\right)$ est carré intégrable et $\widetilde{f}(x) \in L^2\left([a,b]\right)$ l'équation (3.4.3) admet une solution unique $\varphi \in L^2\left([a,b]\right)$.

Toute solution $\varphi\left(x\right)$ continue pour $a \leq x \leq b$ de l'équation (3.4.1) vérifie évidemment (3.4.2).D'autre part on a

$$\frac{d}{dx}\int_a^x k\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt = k(x,x)\varphi\left(x\right) + \int_a^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi\left(t\right)dt,$$

alors l'équation (3.4.2) s'écrit comme suit

$$\frac{d}{dx}\int_a^x k\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt = f'(x),$$

d'où

$$\int_a^x k\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt = f(x) - f(a).$$

Donc si $f(a) = 0$ l'équation (3.4.1) et (3.4.2) sont équivalentes.

Remarque 3.4.1 *Si $k(x,x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$, de l'équation (3.4.2) il vient*

$$\int_a^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi\left(t\right)dt = f'(x), \tag{3.4.4}$$

cette équation est aussi une équation de Volterra de première espèce.
Si $\dfrac{\partial k(x,t)}{\partial x}$ continue pour tout $x \in [a,b]$, dérivons l'équation (3.4.4) terme à terme par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial k(x,x)}{\partial x}\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\varphi(t)\,dt = f''(x). \tag{3.4.5}$$

Si $\dfrac{\partial k(x,x)}{\partial x} \neq 0$, pour tout $x \in [a,b]$, on peut transformer l'équation (3.4.4) à une équation de Volterra de deuxième espèce, et ainsi de suite.

Remarque 3.4.2 *La condition $k(x,x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ n'est pas nécessairement pour que l'équation (3.4.1) admet une solution unique.*

Exemple 3.4.1 *Considérons le noyau*

$$k(x,y) = \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}, \quad r \geq 1 \quad (r \in \mathbb{N})$$

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{3.4.6}$$

de l'équation (3.4.6) il vient

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{(x-t)^{r-2}}{(r-2)!}\varphi(t)\,dt &= f'(x), \\
\int_a^x \frac{(x-t)^{r-3}}{(r-3)!}\varphi(t)\,dt &= f''(x),
\end{aligned}$$

....

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt = f^{(r-1)}(x),$$

d'où

$$\varphi(x) = f^{(r)}(x).$$

Alors si $f \in C^r([a,b])$ l'équation (3.4.6) admet une solution unique

$$\varphi(x) = f^{(r)}(x), x \in [a,b].$$

Transformation par intégration par partie

Il y a une autre méthode pour transformer l'équation (3.4.1) à l'équation de Volterra de seconde espèce.

Supposons que $k(x,t)$, $\dfrac{\partial k(x,t)}{\partial x}$, $f(x)$ sont continues pour tout $x \in [a,b]$, et posons

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt, \text{ et } \psi(a) = 0,$$

d'où

$$\psi(t) = \int_a^t \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Utilisons l'intégration par partie dans(3.4.1) on obtient

$$k(x,t)\int_a^t \varphi(\xi)\,d\xi]_{t=a}^{x} - \int_a^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial t}\left(\int_a^t \varphi(\xi)\,d\xi\right)dt = f(x)$$

d'où

$$k(x,x)\,\psi(x) - \int_a^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial t}\psi(t)\,dt = f(x).$$

Si $k(x,x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors on peut transformer l'équation (3.4.1) à l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\psi(x) - \int_a^x k_1(x,t)\psi(t)\,dt = f_1(x), \tag{3.4.7}$$

où

$$k_1(x,t) = \frac{1}{k(x,x)}.\frac{\partial k(x,t)}{\partial t},\ f_1(x) = \frac{f(x)}{k(x,x)}.$$

L'équation (3.4.7) admet une solution unique dans $L^2([a,b])$ si $k_1(x,t)$ est carré intégrable et $f_1(x) \in L^2([a,b])$.

Dérivons la solution $\psi(x)$ nous obtenons la solution $\varphi(x)$ de (3.4.1).

Théorème 3.4.1 *.Supposons dans l'équation (3.4.1) que f est dérivable et $k(x,t)$ continue pour $a \leq x \leq b$, si $f(a) = 0$ et $k(x,x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. L'équation intégrale de Volterra de première espèce (3.4.1) admet une solution unique.*

Preuve.

D'abord montrons l'existence. Soit φ la solution unique de l'équation (3.4.3).Multiplions les deux côtés de l'équation (3.4.3) par $k(x,x)$ on obtient (3.4.2) et intégrons les deux côtés de (3.4.2) par rapport à x entre a et x on obtient

$$\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) - f(a). \tag{3.4.8}$$

Si $f(a) = 0$ l'équation (3.4.8) s'écrit comme suit

$$\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x),$$

et φ est une solution de l'équation (3.4.1).

Pour l'unicité: si ψ est une solution continue de (3.4.1) avec $f(a) = 0$, et comme l'équation (3.4.3) admet une solution unique. alors $\psi = 0$ ■

3.5 Equation intégrale de Volterra de première espèce à noyau faiblement singulier

Méthode de transformation de noyau

Considérons l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_0^x \frac{L(x,t)}{(x-t)^\alpha}\varphi(t)dt = f(x), 0 < \alpha < 1 \tag{3.5.1}$$

où les fonctions $L(x,t)$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}L(x,t)$ sont continues.

Multiplions les deux côtés de l'équation (3.5.1) par $\dfrac{dx}{(\xi - x)^{1-\alpha}}$,et intégrons entre 0 et ξ nous obtenons

$$\int_0^\xi \left[\int_0^x \frac{L(x,t)}{(x-t)^\alpha}\varphi(t)dt\right]\frac{dx}{(\xi - x)^{1-\alpha}} = \int_0^\xi \frac{f(x)}{(\xi - x)^{1-\alpha}}dx, \tag{3.5.2}$$

en changeant l'ordre d'intégration dans le premier membre de(3.5.2),nous trouvons

$$\int_0^\xi \varphi(t)dt \int_y^\xi \frac{L(x,t)}{(x-t)^\alpha(\xi - x)^{1-\alpha}}dx = \int_0^\xi \frac{f(x)}{(\xi - x)^{1-\alpha}}dx. \tag{3.5.3}$$

posons

$$K^*(\xi,t) = \int_y^\xi \frac{L(x,t)}{(x-t)^\alpha(\xi - x)^{1-\alpha}}dx, \quad g(\xi) = \int_0^\xi \frac{f(x)}{(\xi - x)^{1-\alpha}}dx, \quad g(0) = 0,$$

on obtient a une autre équation intégrale de Volterra de première espèce de fonction inconnue φ

$$\int_0^{\xi} K^*(\xi, t)\,\varphi(t)\,dt = g(\xi), \tag{3.5.4}$$

où le noyau $K^*(\xi, t)$ n'a aucune singularité.

Toute solution de l'équation(3.5.1) est une solution de l'équation (3.5.4).Pour plus de détails consulter [12]

Chapitre 4

Résolution numérique des équations intégrales

Dans ce chapitre nous étudierons l'approximation numérique des équations intégrales de Volterra de première espèce par une nouvelle méthode basé sur la modification de la méthode classique de Lavrentiev et de la méthode d'approximation basée sur le développement de Taylor et la méthode des splines cubiques.

4.1 Equations intégrales de Volterra de seconde espèce

4.1.1 Méthode de quadrature

Schéma général

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad a \le t \le x \le b \tag{4.1.1}$$

où $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues.

Notre objectif est d'approximer la solution φ de cette équation sur un système de nœuds $x_1 = a \le x_2 \le ... \le x_i \le ... \le x_n = b$, tels que $x_i = a + (i-1)h, \;\; i = 1, ..., n,$ où h est le pas de la discrétisation voulue.

De l'équation (4.1.1) on trouve $\varphi(a) = f(a)$. Pour $x = x_i$ l'équation (4.1.1) devient

$$\varphi(x_i) - \int_a^{x_i} k(x_i, t)\,\varphi(t)\,dt = f(x_i) \tag{4.1.2}$$

En appliquant la méthode de quadrature à l'intégrale en (4.1.2) et posons $t = x_j, j = 1, ..., i$,il vient

$$\varphi(x_i) - \sum_{j=1}^{i} A_{ij} k(x_i, x_j)\,\varphi(x_j) = f(x_i) + \varepsilon_i(\varphi),\ i = 2, ..., n \tag{4.1.3}$$

où $\varepsilon_i(\varphi)$ est l'erreur et A_{ij} sont les coefficients de la méthode de quadrature sur l'intervalle $[a, x_i]$.

Supposons que $\varepsilon_i(\varphi)$ sont petits et les négligent, alors on obtient à un système d'équations algébriques linéaires de la forme

$$\varphi_1 = f_1,\ \varphi_i - \sum_{j=1}^{i} A_{ij} k_{ij} \varphi_j = f_i,\ i = 2, ..., n \tag{4.1.4}$$

avec les notations $k_{ij} = k(x_i, x_j),\ f_i = f(x_i),\ \varphi_i = \varphi(x_i)$.

De l'égalité (4.1.4) il vient

$$\varphi_1 = f_1,\ \varphi_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} k_{ij} \varphi_j}{1 - A_{ii} k_{ii}},\ i = 2, ..., n \tag{4.1.5}$$

avec la condition $1 - A_{ii}k_{ii} \neq 0$.

Ce qui peut toujours être assuré par un chois approprié des nœuds et en garantissant cela les coefficients A_{ii} sont suffisamment petits.

Application de la méthode du Trapèze

Selon la méthode du trapèze nous avons $A_{i1} = A_{ii} = \frac{1}{2}h,\ A_{i2} = ... = A_{i,i-1} = h,\ i = 2, ..., n$ et le système (4.1.5) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= f_1,\ \varphi_i = \frac{f_i + h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j k_{ij} \varphi_j}{1 - \frac{1}{2}hk_{ii}},\ i = 2, ..., n \\ x_i &= a + h(i-1), n = \frac{b-a}{h} + 1,\ \beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } j = 1 \\ 1 \text{ si } j > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

4.1.2 Méthode des splines cubiques

Description de la méthode

Soit l'équation de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt + f(x)$$

Soit la fonction spline cubique S telle que

$$S_i(x) = M_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}+\frac{1}{h_i}(\varphi_i-\frac{h_i^2}{6}M_i)\,(x_{i+1}-x)+\frac{1}{h_i}(\varphi_{i+1}-\frac{h_i^2}{6}M_{i+1})\,(x-x_i)\ \ ,$$

une approximation de $\varphi(x)$ sur $[x_i, x_{i+1}]\,, i = 0, 1, ..., n-1$

On a

$$S(x_j) = \int_0^{x_j} k(x_j,t)S(t)dt + f(x_j), \quad j = 1, 2, ..., n \tag{4.1.6}$$

On remplace $s(x_j)$ dans (4.1.6) on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_j \;=\; & f_j + \sum_{i=0}^{j-2}[\frac{M_i}{6h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(x_{i+1}-t)^3\,dt + \frac{M_{i+1}}{6h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(t-x_i)^3\,dt + \\
& \frac{1}{h_i}(\varphi_i - \frac{h_i^2}{6}M_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(x_{i+1}-t)\,dt + \frac{1}{h_i}(\varphi_{i+1} - \frac{h_i^2}{6}M_{i+1})\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(t-x_i)\,dt.] + \\
& \frac{M_{j-1}}{6h_{j-1}}\int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(x_j-t)^3\,dt + \frac{M_j}{6h_{j-1}}\int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(t-x_{j-1})^3\,dt + \\
& \frac{1}{h_{j-1}}(\varphi_{j-1} - \frac{h_{j-1}^2}{6}M_{j-1})\int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(x_j-t)\,dt + \frac{1}{h_{j-1}}(\varphi_j - \frac{h_i^2}{6}M_j)\int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(t-x_{j-1})\,dt.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\varphi_j(1-\frac{1}{h_{j-1}}\lambda_j) = f_j + \sum_{i=0}^{j-2}[\frac{M_i}{6h_i}A_i + \frac{M_{i+1}}{6h_i}B_i + \frac{1}{h_i}(\varphi_i - \frac{h_i^2}{6}M_i)C_i + \frac{1}{h_i}(\varphi_{i+1} - \frac{h_i^2}{6}M_{i+1})D_i]+$$

$$\frac{M_{j-1}}{6h_{j-1}}\alpha_j + \frac{M_j}{6h_{j-1}}\beta_j + \frac{1}{h_{j-1}}(\varphi_{j-1} - \frac{h_{j-1}^2}{6}M_{j-1})\gamma_j - \frac{h_i^2}{6}M_j\lambda_j \tag{4.1.7}$$

où

$$\begin{aligned}
A_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(x_{i+1}-t)^3\,dt\ ,\ B_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(t-x_i)^3\,dt\ ,\\
C_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(x_{i+1}-t)\,dt,\quad D_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(t-x_i)\,dt.\\
\alpha_j &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(x_j-t)^3\,dt,\quad \beta_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(t-x_{j-1})^3\,dt,\\
\gamma_j &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(x_j-t)\,dt,\qquad \lambda_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(t-x_{j-1})\,dt
\end{aligned}$$

L'équation (4.1.7) est résolue par itération et les intégrales A_i , B_i , C_i , D_i ,$\alpha_j, \beta_j, , \gamma_j, \lambda_j$ sont approximées par la méthode des trapèzes ou simpson modifié.

4.2 Equations intégrales de Volterra de première espèce

4.2.1 Méthode de quadrature

Schéma générale

On considère l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x); \quad a \le x \le b, f(a) = 0, \tag{4.2.1}$$

où $k(x,y)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues.

Dérivons l'équation (4.2.1) terme à terme par rapport à x trouvons

$$k(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi(t)dt = f'(x).$$

Posons $x = a$, on trouve

$$\varphi_1 = \varphi(a) = \frac{f'(a)}{k(a,a)} = \frac{f'(a)}{k_{11}}.$$

Choisissons une constante d'intégration h et considérons l'ensemble discret de point

$$x_i = a + h(i-1), \quad i = 1, ..., n$$

pour $x = x_i$, l'équation (4.2.1) s'écrit

$$\int_a^{x_i} k(x_i,t)\varphi(t)dt = f(x_i), \quad i = 2, ..., n. \tag{4.2.2}$$

En appliquant la méthode de quadrature à l'intégrale en (4.2.2) et posons $t = x_j$ on obtient

$$\sum_{j=1}^{i} A_{ij} k(x_i, x_j) \varphi(x_j) = f(x_i) + \varepsilon_i(\varphi), \quad i = 2, ..., n \tag{4.2.3}$$

où $\varepsilon_i(\varphi)$ est l'erreur et A_{ij} sont les coefficients de la méthode de quadrature sur l'intervalle $[a, x_i]$.

Supposons que $\varepsilon_i(\varphi)$ sont petit et négligent alors on obtient à un système d'équations algébriques linéaires de la forme

$$\sum_{j=1}^{i} A_{ij} k_{ij} \varphi_j = f_i, \quad i = 2, ..., n \tag{4.2.4}$$

où $k_{ij} = k(x_i, x_j), (j = 1, ..., i), f_i = f(x_i)$ et φ_j sont les valeurs approximatives de la fonction inconnue aux nœuds x_i.

Maintenant si $A_{ii} k_{ii} \neq 0, i = 2, ..., n$, on peut trouver successivement les valeurs approximatives désirées par les formules

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi(a) = \frac{f'(a)}{k_{11}} \\
\varphi_2 &= \frac{f_2 - A_{21} k_{21} \varphi_1}{A_{22} k_{22}} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_n &= \frac{f_n - \sum_{j=1}^{j=n-1} A_{nj} k_{nj} \varphi_j}{A_{nn} k_{nn}}.
\end{aligned}$$

Application de la méthode des Trapèzes

Selon la méthode des Trapèzes nous avons $A_{i1} = A_{ii} = \frac{1}{2} h$, $A_{i2} = A_{i3} = ... = A_{i,i-1} = h$, $i = 2, ..., n$.

De (4.2.4) trouvons

$$\varphi_i = \frac{f_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} k_{ij} \varphi_j}{A_{ii} k_{ii}}, \quad i = 2, ..., n \tag{4.2.5}$$

Le système (4.2.5) s'écrit comme suit

$$\varphi_1 = \frac{f'(a)}{k_{11}}, \quad \varphi_i = \frac{2}{k_{ii}} \left(\frac{f_i}{h} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j k_{ij} \varphi_j \right), \quad \beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad j = 1, \\ 1 & \text{si} \quad j > 1, \end{cases} \qquad i = 2, .., n,$$

4.2.2 Méthode des splines cubiques

Description de la méthode

Soit l'équation de Volterra de première espèce

$$\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

Soit la fonction spline cubique S telle que

$$S_i(x) = M_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}+\frac{1}{h_i}(\varphi_i-\frac{h_i^2}{6}M_i)\,(x_{i+1}-x)+\frac{1}{h_i}(\varphi_{i+1}-\frac{h_i^2}{6}M_{i+1})\,(x-x_i)\ \ ,$$

une approximation de $\varphi(x)$ sur $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$.

On a

$$\int_0^{x_j} k(x_j,t)S(t)dt = f(x_j), \quad j = 1, ..., n \tag{4.2.6}$$

On remplace $S(x_j)$ dans (4.2.6) on obtient

$$\begin{aligned} f_j \ =\ & \sum_{i=0}^{j-2}[\frac{M_i}{6h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(x_{i+1}-t)^3\,dt + \frac{M_{i+1}}{6h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(t-x_i)^3\,dt + \\ & \frac{1}{h_i}(\varphi_i-\frac{h_i^2}{6}M_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(x_{i+1}-t)\,dt + \frac{1}{h_i}(\varphi_{i+1}-\frac{h_i^2}{6}M_{i+1})\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(t-x_i)\,dt.] + \\ & \frac{M_{j-1}}{6h_{j-1}}\int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(x_j-t)^3\,dt + \frac{M_j}{6h_{j-1}}\int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(t-x_{j-1})^3\,dt + \\ & \frac{1}{h_{j-1}}(\varphi_{j-1}-\frac{h_{j-1}^2}{6}M_{j-1})\int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(x_j-t)\,dt + \frac{1}{h_{j-1}}(\varphi_j-\frac{h_i^2}{6}M_j)\int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(t-x_{j-1})\,dt.. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_j}{h_{j-1}}\varphi_j = f_j - \{\sum_{i=0}^{j-2}[\frac{M_i}{6h_i}A_i + \frac{M_{i+1}}{6h_i}B_i + \frac{1}{h_i}(\varphi_i-\frac{h_i^2}{6}M_i)C_i + \frac{1}{h_i}(\varphi_{i+1}-\frac{h_i^2}{6}M_{i+1})D_i]+ \\ \frac{M_{j-1}}{6h_{j-1}}\alpha_j + \frac{M_j}{6h_{j-1}}\beta_j + \frac{1}{h_{j-1}}(\varphi_{j-1}-\frac{h_{j-1}^2}{6}M_{j-1})\gamma_j - \frac{h_i^2}{6}M_j\lambda_j\}. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

où

$$\begin{aligned}
A_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(x_{i+1}-t)^3\,dt\ ,\ B_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(t-x_i)^3\,dt\ ,\\
C_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(x_{i+1}-t)\,dt,\quad D_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j,t)\,(t-x_i)\,dt.\\
\alpha_j &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(x_j-t)^3\,dt,\quad \beta_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(t-x_{j-1})^3\,dt,\\
\gamma_j &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(x_j-t)\,dt,\qquad \lambda_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j,t)\,(t-x_{j-1})\,dt
\end{aligned}$$

L'équation (4.2.7) est résolue par itération et les intégrales A_i , B_i , C_i , D_i ,$\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \lambda_j$ sont approximées par la méthode de trapèzes ou simpson modifié.

4.2.3 Méthode d'approximation pour EIV1

Généralement, pour résoudre une équation intégrale de première espèce $T\varphi = f$ doit être utiliser la régularisation de Tikhonov pour un deuxième membre perturbé f^δ.

Dans cette partie nous présentons une nouvelle méthode qui ressemble à la méthode de Lavrentiev qu'on appliquera à la résolution de l'équation de Volterra de première espèce.

Principe de la méthode

Soit l'éqution (4.2.1) qui peut être écrite sous la forme :

$$T\varphi = f \tag{4.2.8}$$

où T est un opérateur compact défini d'un espace de Hilbert dans un autre.

Nous ajoutons un petit terme $\alpha\varphi$ à l'équation (4.2.1) pour $\alpha > 0$ petit, et on remplace f par f^δ, l'équation (4.2.8) devient

$$(\alpha I + T)\,\varphi_\alpha^\delta = f^\delta, \tag{4.2.9}$$

où I est l'opérateur identité, c'est-à-dire que nous considérons l'équation

$$\alpha\varphi_\alpha^\delta\,(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi_\alpha^\delta(t)dt = f^\delta(x)$$

qui a une solution unique comme une équation intégrale de Volterra de seconde espéce où cette solution dépend continument des données.

Théorème 4.2.1 *Soit* $\varphi \in C([a,b])$ *la solution de l'équation (4.2.8), soit* φ_α^δ *la solution de l'équation (4.2.9) où* $\left|f(x) - f^\delta(x)\right| < \delta$*, pour tout* $x \in [0,1]$. *Alors*

$$\lim_{\alpha \to 0 \ et \ \delta \to 0} \left\|\varphi - \varphi_\alpha^\delta\right\| = 0 \ dans \ [0,1].$$

Preuve. Dans cette démonstration, nous imitons la technique de [39] où l'auteurs fait venir l'équation auxiliaire donnée par

$$(\alpha I + T)\varphi_\alpha = f, \tag{4.2.10}$$

estimons la différence entre l'équation (4.2.8), et l'équation (4.2.10), on obtient

$$\alpha\varphi_\alpha + T(\varphi_\alpha - \varphi) = 0$$

ou encore

$$\alpha(\varphi_\alpha - \varphi) + T(\varphi_\alpha - \varphi) = -\alpha\varphi,$$

par conséquent

$$\|\varphi - \varphi_\alpha\| \leq \alpha \|\varphi\| \left\|(\alpha I + T)^{-1}\right\| \tag{4.2.11}$$

pour la différence entre l'équation (4.2.10)et (4.2.9) nous obtenons

$$(\alpha I + T)(\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^\delta) = f - f^\delta$$

donc

$$\left\|\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^\delta\right\| = \left\|f - f^\delta\right\| \left\|(\alpha I + T)^{-1}\right\| \leq \delta \left\|(\alpha I + T)^{-1}\right\| \tag{4.2.12}$$

Enfin, pour la différence donnée par

$$\left\|\varphi - \varphi_\alpha^\delta\right\| \leq \|\varphi - \varphi_\alpha\| + \left\|\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^\delta\right\| \tag{4.2.13}$$

Le premier terme du deuxième membre de (4.2.13) disparaît quand $\alpha \to 0$.Le second terme de deuxième membre de (4.2.13) disparaît quand $\delta \to 0$.

Donc,la solution approximative φ_α^δ de l'équation perturbée (4.2.9) converge vers la solution exact φ de l'équation initiale(4.2.8) ■

4.2.4 Comparaison entre la méthode de Taylor et la méthode de perturbation pour EIV1

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire compact. Nous formulons le problème inverse sous forme d'équations d'opérateurs de la forme.

$$T\varphi = f \tag{4.2.14}$$

On suppose que T est injectif, alors il existe une solution unique $\varphi \in H_1$ de l'équation non perturbée (4.2.14) pour tout $f \in R(T)$.Mais, le second membre $f \in H_2$ n'est jamais connu exactement, donc nous pouvons approcher la solution φ à partir de la connaissance d'un second membre perturbé f^δ tel que

$$\left\| f - f^\delta \right\| \leq \delta. \tag{4.2.15}$$

Notons que le problème (4.2.14) est transformé en un problème perturbé

$$T\varphi^\delta = f^\delta, \tag{4.2.16}$$

ce problème non résoluble car si $f \in R(T)$,on ne peut être sur que $f^\delta \in R(T)$ (φ^δ est une solution de $T\varphi^\delta = f^\delta$).Pour la solution de problème (4.2.16) on remplace ce dernier par le problème bien posé perturbé

$$\alpha\varphi + T\varphi = f^\delta, \quad \alpha > 0, \tag{4.2.17}$$

où la solution φ_α^δdépend continument des donnés f^δ, et l'opérateur inverse borné $(\alpha I + T)^{-1}$ de H_2 dans H_1 approxime l'opérateur non borné T^{-1} de $R(T)$ dans H_1 quand α tends vers zéro.En d'autres termes l'opérateur $(\alpha I + T)^{-1} T$ converge vers l'identité

$$\lim_{\alpha \to 0} (\alpha I + T)^{-1} T\varphi = \varphi,$$

pour tout $\varphi \in H_1$.

Le but de ce travail est l'étude de l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$T\varphi(x) = \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b \tag{4.2.18}$$

où $k(x,t)$ est une fonction continue sur $[a,b]\times[a,b]$, $f(x)\in H_2([a,b])$, désigne les donnés du problème inverse dans l'éspace de Hilbert H_2,et $\varphi(x)\in H_1([a,b])$ la fonction inconue.

L'équation (4.2.18) avec T compact admet une solution unique si $f(a)=0$ et $k(x,x)\neq 0$, mais une légère modification des données f conduit à des solutions très différentes.Il faut donc rechercher une méthode d'approximation stable basée sur l'expansion de Taylor

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{2}\varphi''(x)+O(h^3). \tag{4.2.19}$$

En différenciant (4.2.18) trois fois, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{k(x,x)}\left(f'(x)-\int_a^x k_x(x,t)\varphi(t)dt\right)\\
\varphi'(x) &= \frac{1}{k(x,x)}\left(f''(x)-\left(2\varphi(x)k_x(x,x)+\int_a^x k_{xx}(x,ty)\varphi(t)dt\right)\right)\\
\varphi''(x) &= \frac{1}{k(x,x)}(f'''(x)-(3\varphi'(x)k_x(x,x)+3\varphi(x)k_{xx}(x,x)\\
&\quad+\int_a^x k_{xxx}(x,t)\varphi(t)dt)),
\end{aligned}$$

où les intégrales sont calculées par des méthodes de trapézes ou Simpson modifiées [38].

Théorème 4.2.2 *Le problème (4.2.17) est bien posé avec la norme* $\left\|(\alpha I+T)^{-1}\right\|=O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$ *à condition que* T *soit un opérateur positif.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
&\langle\varphi,\varphi\rangle=\left\langle(\alpha I+T)(\alpha I+T)^{-1}\varphi,(\alpha I+T)(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\rangle\\
=&\ \left\langle\alpha(\alpha I+T)^{-1}\varphi+T(\alpha I+T)^{-1}\varphi,\alpha(\alpha I+T)^{-1}\varphi+T(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\rangle\\
=&\ \left\langle\alpha(\alpha I+T)^{-1}\varphi,\alpha(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\rangle+\left\langle\alpha(\alpha I+T)^{-1}\varphi,T(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\rangle\\
&+\left\langle T(\alpha I+T)^{-1}\varphi,\alpha(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\rangle+\left\langle T(\alpha I+T)^{-1}\varphi,T(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\rangle\\
&\|\varphi\|^2=\alpha^2\left\|(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\|^2+2\alpha\|T\|\left\|(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\|^2+\left\|T(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\|^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^2 &\geq 2\alpha \left\|(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\| \left\|T(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\| + 2\alpha \left\|T(\alpha I+T)^{-1}\varphi, (\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\| \\ &= 2\alpha \left\|(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\|^2 \left\|T\left(\frac{(\alpha I+T)^{-1}\varphi}{\left\|(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\|}\right)\right\| \\ &\quad +2\alpha \left\|(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\|^2 \left\|T\left(\frac{(\alpha I+T)^{-1}\varphi}{\left\|(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\|}\right), \left(\frac{(\alpha I+T)^{-1}\varphi}{\left\|(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\|}\right)\right\|,\end{aligned}$$

ou encore, pour tous $\varphi \in H_{1,}$ on ecrit

$$\|\varphi\|^2 \geq 2\alpha \left\|(\alpha I+T)^{-1}\varphi\right\|^2 \|T(\psi)+T(\psi,\psi)\|, \quad \forall \|\psi\|=1.$$

Donc

$$\left\|(\alpha I+T)^{-1}\right\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

■

Lemme 4.2.1 *Soit* $\varphi \in H_1([0,1])$ *est la solution de l'équation (4.2.14), et* φ_α^δ *est la solution de l'équation (4.2.17) où* $\left\|f(x)-f^\delta(x)\right\| \leq \delta$,*et pour tout* $x \in [0,1]$.*il s'ensuit que*

$$\lim_{\alpha\to 0 \text{ et } \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\to 0} \left\|\varphi-\varphi_\alpha^\delta\right\| = 0,$$

à condition que T *soit un opérateur positif.*

Preuve. .Dans cette preuve on imite la technique de ([39]) où les auteurs font intervenir l'équation auxiliaire donnée par

$$(\alpha I+T)\varphi_\alpha = f, \tag{4.2.20}$$

et

$$(\alpha I+T)\varphi_\alpha^\delta = f^\delta, \tag{4.2.21}$$

stimons la différence entre l'équation (4.2.14) et l'équation(4.2.20), on obtient

$$\alpha(\varphi-\varphi_\alpha)+T(\varphi-\varphi_\alpha) = \alpha\varphi$$

ou encore

$$\|\varphi-\varphi_\alpha\| \leq \alpha\|\varphi\| \left\|(\alpha I+T)^{-1}\right\|$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_\alpha\| &\leq \alpha \|\varphi\| \left\|(\alpha I + T)^{-1}\right\| \\ &= O\left(\sqrt{\alpha}\right). \end{aligned}$$

De la différence entre l'équation (4.2.20)et l'équation (4.2.21), on obtient

$$(\alpha I + T)\left(\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^\delta\right) = f - f^\delta$$

donc

$$\begin{aligned} \left\|\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^\delta\right\| &\leq \left\|f - f^\delta\right\| \left\|(\alpha I + T)^{-1}\right\| \\ &= O\left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right) \left\|(\alpha I + T)^{-1}\right\| \end{aligned}$$

finalement

$$\left\|\varphi - \varphi_\alpha^\delta\right\| \leq \|\varphi - \varphi_\alpha\| + \left\|\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^\delta\right\| \tag{4.2.22}$$

le premier terme du second membre de (4.2.22) s'annule quand $\alpha \to 0$,le second terme du second membre de (4.2.22) s'annule quand $\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} \to 0$.Donc la solution approximative φ_α^δ de l'équation(4.2.21) converge vers la solution exact φ de l'équation unitial (4.2.14) ■

4.3 Exemples illustratifs

Dans cette section, nous présentons plusieurs exemples illustratifs

Example 1. Considérons l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)dt = x \sin x,$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = 2 \sin x.$$

Table 1. Nous présentons les trois solutions approchées $\varphi_\alpha^\delta(x)$, φ_T et φ_{sp} de la solution exacte $\varphi(x)$ obtenues par la modification de la méthode classique de Lavrentiev et de la

méthode d'approximation basée sur le développement de Taylor et la méthode des splines cubiques respectivement, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 10$

Val of x	Ex sol φ	Ap sol φ_T	Error$_T$	Ap sol φ_{sp}	Error$_{sp}$	Ap sol φ_α^δ	Error$_\delta$
0.000	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00
0.200	3.97e-01	3.97e-01	3.31e-04	3.9733e-01	5.3283e-06	3.97e-01	5.55e-17
0.400	7.78e-01	7.79e-01	3.17e-04	7.7867e-01	1.7002e-04	7.78e-01	5.55e-16
0.600	1.12e+00	1.13e+00	9.36e-04	1.1280e+00	1.2849e-03	1.12e+00	2.44e-15
0.800	1.43e+00	1.43e+00	1.52e-03	1.4293e+00	5.3788e-03	1.43e+00	3.99e-15
1.000	1.68e+00	1.68e+00	2.08e-03	1.6667e+00	1.6275e-02	1.68e+00	4.21e-15

Example 2. Considérons l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_0^x \exp(x+t)\varphi(t)dt = x\exp(x),$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = \exp(-x).$$

Table 2. Nous présentons les trois solutions approchées $\varphi_\alpha^\delta(x)$, φ_T et φ_{sp} de la solution exacte $\varphi(x)$ obtenues par la modification de la méthode classique de Lavrentiev et de la méthode d'approximation basée sur le développement de Taylor et la méthode des splines cubiques respectivement, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 10$

Val of x	Sol ex φ	Sol ap φ_T	Erreur$_T$	Sol ap φ_{sp}	Erreur$_{sp}$	Sol ap φ_α^δ	Erreur$_\delta$
0.000	1.00e+00	1.00e+00	0.00e+00	1.00e+00	0.00e+00	1.00e+00	0.00e+00
0.200	8.18e-01	8.10e-01	7.84e-03	8.1867e-01	6.4086e-05	8.18e-01	3.89e-011
0.400	6.70e-01	6.63e-01	6.38e-03	6.6933e-01	9.8671e-04	6.70e-01	5.14e-011
0.600	5.48e-01	5.43e-01	5.39e-03	5.4400e-01	4.8116e-03	5.48e-01	5.17e-011
0.800	4.49e-01	4.44e-01	4.73e-03	4.3467e-01	1.4662e-02	4.49e-01	4.67e-011
1.000	3.67e-01	3.63e-01	4.29e-03	3.3333e-01	3.4546e-02	3.67e-01	4.01e-011

Example 3. Considérons l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_0^x (x^2 - t + 2)\varphi(t)dt = (x^2 - x + 2)\sin x - \cos x + 1,$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = \cos x.$$

Table 3. Nous présentons les trois solutions approchées φ_α^δ , φ_T et φ_{sp} de la solution exacte $\varphi(x)$ obtenues par la modification de la méthode classique de Lavrentiev et de la méthode d'approximation basée sur le développement de Taylor et la méthode des splines cubiques respectivement, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 20$

Val of x	Sol ex φ	Sol ap φ_T	Erreur$_T$	Sol ap φ_{sp}	Erreur$_{sp}$	Sol ap φ_α^δ	Erreur$_\delta$
0.000	1.00e+00	1.00e+00	0.00e+00	1.00e+00	0.00e+00	1.00e+00	0.00e+00
0.200	9.80e-01	1.00e+01	2.15e-02	9.8000e-01	6.6578e-05	9.79e-01	7.12e-05
0.400	9.21e-01	9.51e-01	3.06e-02	9.2000e-01	1.0610e-03	9.20e-01	1.51e-04
0.600	8.25e-01	8.60e-01	3.55e-02	8.2000e-01	5.3356e-03	8.25e-01	2.26e-04
0.800	6.96e-01	7.31e-01	3.52e-02	6.8000e-01	1.6707e-02	6.96e-01	2.89e-04
1.000	5.40e-01	5.71e-01	3.09e-02	5.0000e-01	4.0302e-02	5.39e-01	3.42e-04

Example 4. Considérons l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_0^x \exp(x+t)\varphi(t)dt = \frac{1}{2}\left(\exp(2x) - 1\right),$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(-2x) + 1\right).$$

Table 4. Nous présentons les trois solutions approchées φ_α^δ , φ_T et φ_{sp} de la solution exacte $\varphi(x)$ obtenues par la modification de la méthode classique de Lavrentiev et de la méthode d'approximation basée sur le développement de Taylor et la méthode des splines cubiques respectivement, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 20$

Val of x	Sol ex φ	Sol ap φ_T	Erreur$_T$	Sol apφ_{sp}	Erreur$_{sp}$	Sol ap φ_α^δ	Erreur$_\delta$
0.000	1.00e+00	1.00e+00	0.00e+00	1.00e+00	0.00e+00	.00e+00	0.00e+00
0.200	8.35e-01	8.28e-01	7.06e-03	8.3467e-01	4.9336e-04	8.35e-01	1.36e-05
0.400	7.24e-01	7.19e-01	5.18e-03	7.1733e-01	7.3311e-03	7.24e-01	4.52e-05
0.600	6.50e-01	6.46e-01	4.01e-03	6.1600e-01	3.4597e-02	6.50e-01	8.47e-05
0.800	6.00e-01	5.97e-01	3.29e-03	4.9867e-01	1.0228e-01	6.00e-01	1.26e-04
1.000	5.67e-01	5.64e-01	2.83e-03	3.3333e-01	2.3433e-01	5.67e-01	1.66e-04

Example 5. Considérons l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_0^x \sin(x+t)\varphi(t)dt = \cos 2x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2}\exp(-x)(\sin 2x + \cos 2x),$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction $f$est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = \exp(-x) - 1.$$

Table 5. Nous présentons les trois solutions approchées φ_α^δ , φ_T et φ_{sp} de la solution exacte $\varphi(x)$ obtenues par la modification de la méthode classique de Lavrentiev et de la méthode d'approximation basée sur le développement de Taylor et la méthode des splines cubiques respectivement, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 20$

Le noyau $k(x,t) = \sin(x+t)$ s'anulle au point $(x,t) = (0,0)$ et nous ne pouvons donc pas obtenir les solutions approchées φ_T etφ_{sp} de Taylor et des splines respectivement de l'équation ci-dessus.

Val of x	Sol ex φ	Sol apφ_T	Erreur$_T$	Sol ap φ_{sp}	Erreur$_{SP}$	Sol ap φ_α^δ	Erreur$_\delta$
0.000	0.00e+00	NaN	NaN	NaN	NaN	0.00e+00	0.00e+00
0.200	-1.81e-01	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.84e-01	3.51e-03
0.400	-3.29e-01	NaN	NaN	NaN	NaN	-3.32e-01	2.83e-03
0.600	-4.51e-01	NaN	NaN	NaN	NaN	-4.53e-01	2.62e-03
0.800	-5.50e-01	NaN	NaN	NaN	NaN	-5.53e-01	2.65e-03
1.000	-6.32e-01	NaN	NaN	NaN	NaN	-6.35e-01	2.91e-03

Conclusion

Dans cette thèse nous proposons une nouvelle méthode numérique pour résoudre les équations intégrales linéaires de Volterra de première espèce,cette méthode basée sur la technique de la méthode classique de Lavrentiev modifiée et la méthode d'approximation basée sur le développement de Taylor, les solutions approchées $\varphi_{\alpha}^{\delta}(x)$ et φ_T seront proches à la solution exacte $\varphi(x)$ sur tout l'intervalle $[0, 1]$. L'efficacité de la méthode classique de Lavrentiev modifiée est testée en résolvant quelques exemples dont la solution exacte est connue. Cela nous permet d'estimer l'exactitude de nos résultats numériques.Notre méthode donne une meilleure approximation que les méthodes de Taylor et les splines cubiques.

Bibliographie

[1] H. Brezis , *Analyse fonctionnelle et application.* Masson, Paris, 1987

[2] L. Debnath and P. Mikusinsky , *An Introduction to Hilbert Spaces with Application.* Academic Press 1990.

[3] R. Kress, *Linear Integral Equations.*3rd ed, Springer Science & Business Media, New York, 2014.

[4] P. Linz,*Analytical and Numerical Methods for Volterra Integral Equations.* SIAM, 1985.

[5] A Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri , *Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications.* Springer, 2007.

[6] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems.*(Applied Mathematical science ; v.120).Springer-Verlag New York, 2013.

[7] A.N. Tikhonov , V.Y. Arsenin,*Solutions of ill-posed problems*, J. Wiley and sons, 1977.

[8] Michel Kern, *Problèmes inverses. Syllabus du cours à l'Ecole supérieure d'ingénieurs* Léonard de Vinci.2002.

[9] D. Colton et R. Kress.*Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory* ,volume 93 of Applied Mathematical Sciences,Springer Verlag ,New-York, 1992.

[10] J. Baumeister.*Stable Solution of Inverse Problems.* Vieweg, Braunschweig, 1987.

[11] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problem* .Kluwer,Academic, 2000.

[12] A. D. Polyanin, A.V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations,* CRC Press, 2008

[13] R. P. Kanwal, *Linear Integral Equations, Theory and Technique,* Academic Press, New York .(1997)

[14] H. Hochstadt, *Integral Equations*, John Wiley and Sons. New York 1989.

[15] M. Rahman ,*Integral Equations and their Applications*, Dalhousie University, Canada,2007.

[16] Gabriel Peyré. *Résolution numérique d'équations intégrales, Exemple de radiosité.*article. 2001

[17] Franck Jedrzejewski , *Introduction aux méthodes numériques.*Springer-Verlag France, Paris 2005

[18] Per C. Hansen :Rank -*Deficient and Discrete Ill-Posed Problems.* SIAM, Philadelphia,1998.

[19] M. M. Lavrent'ev, V. G. Romanov, and S. P. Shishatski , *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis.* AMS Bookstore, 1986, vol. 64.

[20] M.Thamban Nair ,*Linear operator equation approximation and regularization,* World scientific 2009.

[21] S. I. Kabanikhin, *Definitions and examples of inverse and ill-posed problems*, in J. Inv. Ill-Posed Problems 16 (2008), 317–357.

[22] H. Chebli, *Analyse Hilbertienne*, Centre des Publication Universitaire, Tunis, 2001.

[23] Hui Liang, *The fine error estimation of collocation methods on uniform meshes for weakly singular volterra integral equations*, Scientific Computing, 84 (2020), Article number: 12.

[24] L. M. Delves, J. Walsh-*Numerical solution of integral equations*-Clarendon Press (1974).

[25] Brunner .H, *Collocations methods for Volterra integral and related functional equations,* Cambridge University Press, New York, 2004.

[26] W. Hackbusch , *Integral Equations : Theory and Numerical Treatment* , Bir khäuser Verlag, Basel, 1995.

[27] Corduneaunu, C. *Integral Equations and Applications.* Cambridge University Press, Cambridge 1991.

[28] V.A. Morozov, *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[29] James F. Epperson, *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 2nd Edition, 2013.

[30] A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, A. G. Yagola - *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*-Springer Netherlands (1995)

[31] M. Nadir and N. Djaidja, Approximation method for Volterra integral equation of the first kind, International Journal of Mathematics and Computation, 29 (2018), 67–72.

[32] Kendall E. Atkinson, *The Numerical Solutions of Integral Equations of the Second Kind.* , Cambridge University Press, 1997.

[33] K. Maleknejad, R. Mollapourasl, and M. Alizadeh, *Numerical solution of Volterra type integral equation of the first kind with wawelet basis*, Applied Mathematics and Computation, 194 (2007), 400-405.

[34] Burden, Rechard L. and Faires, J. Douglas, *Numerical Analysis*, Youngstown State University 2010.

[35] VIGEN Ayvazyan , *Etude de champs température séparables avec une double décomposition en SVD.* Thèse doctorat,Université Bordeaux1 (2012).

[36] C. Marteau , *Recherche d'inégalités oracles pour des problèmes inverses.* Thèse doctorat, Université de Provence (2007).

[37] H. Brunner, *Discretization of Volterra Integral Equations of the First Kind*, in Mathematics of computation 31(139), (1977), 708-716.

[38] M. Nadir and A. Rahmoune, *Modifed method for solving linear Volterra integral equations of the second kind using Simpson's rule*,

[39] J. Kumar, P. Manchanda and Pooja, *Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind using Legendre wavelets collocation method*, in International Journal of Pure and Applied Mathematics 117 (1), (2017), 33-43.

[40] P. K. Lamm, *A Survey of Regularization Methods for First-Kind Volterra Equations,* Editors Springer (Vienna, New York), pp 53-82, 2000.

[41] K. Maleknejad, M. T. Kajani and Y. Mahmoudi, *Numerical solution of linear Fredholm and Volterra integral equations of the second kind using Legendre wavelets,* in Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran 13(2), (2002), 161-166.

[42] K. Maleknejad, M. Roodaki and H. Almasieh, *Numerical Solution of Volterra Integral Equations of First Kind by Using a Recursive Scheme*, in Journal of Mathematical Extension 3 (2), (2009), 113-121.

[43] N. A. Sidorov, M. V. Falaleev and D. N. Sidorov, *Generalized Solutions of Volterra Integral Equations of the First Kind*, in Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 29 (1), (2006),101–109.

[44] Cheny. W, Kincaid D. *Numerical Mathematics and Computing* University of Texas at Austin (1999).