



N° d'ordre :

UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE
L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Par :

Debih Abd Eslam

SUJET

Problèmes aux limites et fonction de Green

Soutenu publiquement le :11/09/2012 devant le jury composé de :

Mr. Gasmi Abd Elkader	MC	Université de M'sila	Président
Mr. Mostapha Nadir	Pr	Université de M'sila	Encadreur
Mr. Rahmone Azzedine	MC	Université de B.B.A	Examineur
Mr. Merouani Abd Elbaki	MC	Université de B.B.A	Examineur

Promotion : 2011 /2012

Remerciements

Je tien à remercier mon directeur de mémoire le Pr : Mostapha. Nadir qui m'a propose cet sujet et qui m'a beaucoup aide durant la préparation de ce mémoire.

Je remercie le Dr :Gasmi Abd Elkader , pour avoir accepté d'être le président du jury de ce mémoire.

Je remercie les Docteurs :

Dr : Rahmone Azzedine

Dr: Merouani Abd Elbaki

Pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je ne voudrais pas terminer sans remercier toute ma famille: mes parents, mes frères, mes sœurs , et aussi à tous mes collègues qui m'ont apporté le soutien moral suffisant.

Table de matière :

Introduction	04
Chapitre (1): Les problèmes aux limites	06
1) Rappels principaux	07
1.1 Notions générales	07
2) Classification des EDP linéaire du 2nd ordre à coefficients constants	09
3) Les problème aux limites	10
3.1 Position du problème	10
3.2 Classification des problèmes aux limites	12
3.2.1 Problème de Dirichlet	13
3.2.2 Problème de Neumann.....	13
3.2.3 Problème mixte	13
4) Critère sous forme d'opérateur des problèmes aux limites	13
4.1 Problème de Dirichlet	14
4.2 Problème de Neumann	14
4.3 Problème mixte	14
Chapitre (2) :La fonction de Green	16
1)Sur les fonctions de Green	17
2)Existence de la fonction de Green	19
3) la fonction de Green pour un opérateur différentiel	21
Chapitre(3):Construction de la fonction de green de quelques problèmes aux limites	23
1)Rappelles sur la transformation de mellin	24
2) la relation entre la transformation de mellin et de Fourier	27
3) L'alternative de Fredholm	27
4) La fonction de green , pour un problème aux limite d'EDP	28

4.1 problème de Dirichlet.....	28
4.2 problème de Neumann.....	34
5) La fonction de Green , pour un problème aux limite d'EDO.....	36
Conclusion général.....	39
Bibliographie.....	41

Introduction:

On appelle fonction de Green en physique ce que les mathématiciens appellent solution élémentaire ou fondamentale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants. Ces "fonctions" de Green, qui se trouvent être le plus souvent des distributions, ont été introduites par George Green en 1828 pour les besoins de l'électromagnétisme. Le mémoire de Green restera confidentiel jusqu'à sa republication en trois parties, à partir de 1850. Les fonctions de Green, qui seront dénommées ainsi par Riemann en 1869, seront alors abondamment utilisées, notamment par Neumann en 1877 pour sa théorie du potentiel Newtonien dans un espace à deux dimensions, puis en 1882 par Kirchhoff pour l'équation de propagation des ondes dans l'espace à trois dimensions et enfin par Helmholtz en acoustiques.

Elles sont devenues un outil en théorie quantique des champs après que Feynman les ait popularisées en 1948 sous le nom de propagateur dans sa formulation en intégrale de chemin de l'électrodynamique quantique.

Nous n'aborderons ce sujet que très légèrement ici, juste rappeler les grands principes de la méthode de Green.

Objectif du mémoire:

L'objectif de ce mémoire est de résoudre quelques problèmes aux limites par la fonction de Green.

Organisation du mémoire

Le mémoire est organisé en trois chapitres :

Chapitre (1) :

Le chapitre (1) présente une notion fondamentale des problèmes aux limites à partir d'équations aux dérivées partielles (EDP), puis des opérateurs différentiels.

Chapitre (2):

Le chapitre (2) est consacré à l'étude de la méthode de Green et quelques notions fondamentales sur cette méthode.

Chapitre (3):

Le chapitre (3) est consacré à la résolution théorique de quelques problèmes aux limites par les fonctions de Green.

Chapitre 1

Les problèmes aux limites

1) Rappels principaux :

1.1 Notions générales :

Définition (1): la relation reliant des variables indépendantes d'une fonction inconnue et ses dérivées partielles s'appelle équation aux dérivées partielles :

$$F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0 \quad (1)$$

Où : $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

La fonction u est continue dans un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ainsi que ses dérivées existent.

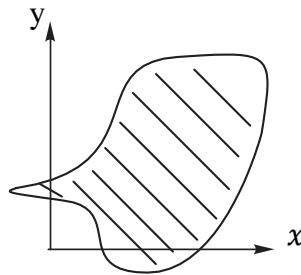


FIG 1.1.

En transformant cette équation en identité, elle s'appelle la solution régulière ou classique de cette équation.

L'équation (1) est dit homogène . Dans le cas contraire on dit que l'équation (1) inhomogène (c'est-à-dire que le second membre contient une fonction).

Exemple (1):

L'équation $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (équation de diffusion) admet les solutions suivantes :

$$u_1(x, y) = 2x + y^2 \quad \text{solution dans tout } \mathbb{R}^2.$$

$$u_2(x, y) = e^{-x} \sin(y) \quad \text{solution dans } \mathbb{R}^2.$$

$$u_3(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} e^{-\frac{y^2}{4x}} \quad \text{solution dans } \Omega \begin{cases} x > 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pour $x = 2$ on obtient le graphe de la fonction u_3 suivante :

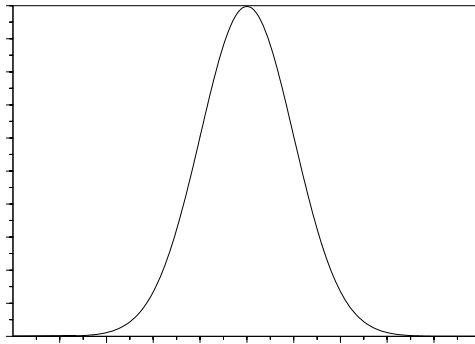


FIG.1.2- $u_3(x, y)$ avec $x = 2$

D'autre part on définit l'EDP par la théorie des opérateurs :

Définition (2): On rappelle que un opérateur différentielle à n variable et de degré m est une application A qui associe à tout fonction f définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et dérivable jusqu' au rang m , une autre fonction Af ,définie sur Ω au moyen d'une fonction F selon la formule :

$$Af(x) = F(f(x), \partial f(x), \dots, \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f(x), x) \quad (2)$$

L'opérateur A est dit linéaire si la fonction F est un polynôme au premier degré par rapport à chacune des dérivées $D^{(\alpha)}$ avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m$ (α l'ordre de la dérivation) autrement dit :

$$Af(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) (D^{(\alpha)} f)(x) \quad (3)$$

Où les fonction C_α sont appelés les coefficients de l'opérateur A .donc on la définition:

Définition (3): une équation aux dérivée partielle est une identité $Af = 0$.Elle est dit linéaire si l'opérateur A est linéaire .

Une solution de l'équation dans un ouvert Ω une fonction suffisamment dérivable dans Ω telle que :

$$\forall x \in \Omega, Af(x) = 0$$

Exemple (2) : un exemple d'EDP l'équation de Laplace définie par :

$$\begin{cases} Au(x) = 0 \\ A = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (\text{l'opérateur de laplace}) \end{cases}$$

Définition (4): On appelle ordre d'une EDP le plus élevé des dérivées partielle intervenant dans l'EDP.

Exemple (3):

- 1) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ EDP du 1^{er} ordre linéaire.
- 2) $\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin(u) = 0$ EDP du 2^{ème} ordre non-linéaire .

Théorème (1) (principe de superposition):

Si $u_1, u_2 \dots u_n$ sont des solutions , linéairement indépendantes, d'une équation aux dérivée partielle homogène (second membre nul), alors :

$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$ est aussi solution, a_1, a_2, \dots, a_n sont des constantes.

C'est-à-dire l'espace engendré par les solutions linéairement indépendantes ,d'une EDP formé un espace vectoriel .

Théorème (2):

La solution générale d'une équation aux dérivées partielles non homogène s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation non homogène à la solution générale de l'équation homogène.

2) Classification des EDP linéaire du 2nd ordre à coefficients constants :

La forme générale d'EDP linéaire du 2nd ordre à coefficients constants est définie par :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (4)$$

Avec : A,B,...,G sont des constantes.

Le type de l'EDP dépend du signe de $\Delta = B^2 - 4AC$ donc on a :

Si $B^2 - 4AC > 0$, l'EDP est dit hyperbolique .

Si $B^2 - 4AC = 0$, l'EDP est dit parabolique .

Si $B^2 - 4AC < 0$, l'EDP est dit elliptique .

Exemple (4):

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec $c > 0$ on a :

$\Delta = B^2 - 4AC = 4C > 0$, ainsi l'équation des ondes est hyperbolique.

2) $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ l'équation de Tricomi on a :

Si $y > 0 \Rightarrow$ l'EDP est hyperbolique .

Si $y = 0 \Rightarrow$ l'EDP parabolique .

Si $y < 0 \Rightarrow$ l'EDP elliptique .

Définition (5): (problème bien posé):

Soit un problème définie par une EDP valide sur Ω ouvert ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) régulier . le problème est dit bien posé si :

- 1) La solution existe (existence)
- 2) La solution (unique)
- 3) La solution stable (la stabilité) . si l'une des trois conditions n'est pas vérifier le problème est dit " mal posé " .

Remarque (1) : l'existence et l'unicité de la solution voir le théorème d'existence et unicité , mais l'application du théorème est difficile

3) Les problèmes aux limites :

3.1 Position du problème :

Définition (6): On appelle problème de Cauchy une équation aux dérivées partielles où, pour au moins une variable (généralement le temps t), les conditions " au bord " sont des conditions initiales (c'est-à-dire ne portant que sur un bord $t=0$, et non au bord $t=T$).

Pour formuler le problème on considère les deux exemples :

Le problème aux limite dans L'EDO:

L'équation différentielle ordinaire (EDO) définit par :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t = 0) = y_0 \end{cases} \quad \text{pour } 0 < t < T \quad (5)$$

n'est pas un problème aux limites puisqu'étant posée sur un segment $]0, T[$, avec $0 < T < +\infty$, elle n'a de condition "au bord" qu'en $t=0$ (et non en $t = T$).

Il faut ajouter les conditions aux limites pour que l'équation (5) reste valable.

Dans L'EDP:

$$\text{L'EDP définie par : } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{sur } \Omega \text{ (ouvert) / } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ \text{équation de la chaleur} \end{cases} \quad (6)$$

"n'est pas valable "

Il faut ajouter à cette équation qui est valable dans tout le domaine Ω , une relation, est appelée " condition aux limites ", qui indique ce qui se passe à la frontière ou au bord $\partial\Omega$ du domaine, et une autre relation qui indique quel est l'état initial de la température.

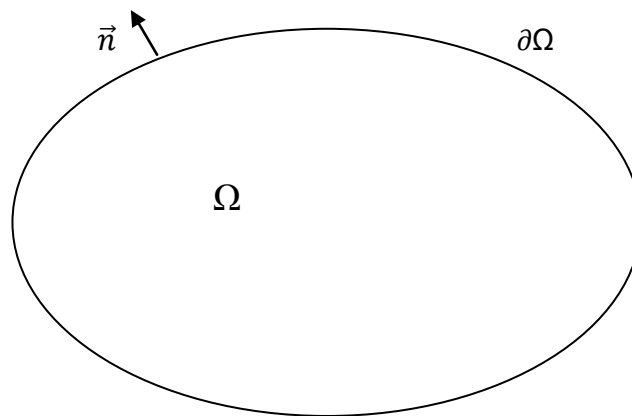


FIG.1.3 –vecteur normal unité orienté vers l'extérieur

Par convention, on choisit l'instant $t=0$ pour être le temps initial, et on impose une condition initiale $u(t = 0, x) = u_0(x)$.

Où u_0 est la fonction de distribution initiale de température dans le domaine Ω . en ce qui concerne la condition aux limites, cela dépend du contexte physique.

Mathématiquement on a la définition :

Définition (7): On appelle problème aux limites une équation aux dérivée partielle munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.

De nombreux modèles sont à la fois des problèmes aux limites et de problèmes de Cauchy.

3.2 Classification des problèmes aux limites :

Les problèmes aux limites sont régis par des équations aux dérivée partielle accompagnés de conditions aux limites spécifiques . selon le type d'équation on obtient le problème aux limites correspondant. En général il existe trois type des problèmes aux limites.

Pour définir les trois problèmes on considère le problème de Laplace suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \text{ (ouvert)} \subset \mathbb{R}^n \\ f \in H & \text{avec } H \text{ espace fonctionnel} \end{cases} \quad (7)$$

3.2.1 Problème de Dirichlet (non homogène) :

Définition (8): On appelle problème de Dirichlet une équation de Laplace (7) avec conditions aux limites de type Dirichlet.

Pour tout Ω ouvert de \mathbb{R}^n et $\Gamma = \partial\Omega$, le problème de Dirichlet s'énonce de la façon suivante :

Déterminer une fonction u dans un certains espace fonctionnel V telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

Où : g la fonction donnée. Si $g \equiv 0$ le problème (8) est dit homogène.

Définition (9):

Le problème : $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$ est bien posé au sens d'Hadamard dans les espaces de Hilbert V et H si Pour tout $f \in H$ il existe une unique solution $u \in V$ et si de plus :

$$\|u\|_V \leq c \|f\|_H \quad \forall f \in H \text{ et } c > 0 \text{ (constante) indépendante de } u \text{ et } f .$$

Pour le cas inhomogène on pose : $h = u - g$ et la définition reste valable.

Rappel :

On dit que le problème : $-\Delta u = f \quad \forall f \in H$ est bien posé au sens d'Hadamard si pour toute donnée f il admet une solution unique u , et si cette solution u dépend continûment de la donnée f .

3.2.2 Problème de Neumann (non homogène):

Définition (10): On appelle problème de Neumann une équation de Laplace (7) avec conditions aux limites de Neumann. Le problème s'énonce de la façon suivante . les fonction f et g étant données , trouver une solution au problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (9)$$

Si $g \equiv 0$ le problème (9) est dit homogène .

Remarque (2) : remarquons tout d'abord que toute solution n'est définie qu'à une constante près. Le problème est donc a priori "mal posé" (au sens d'Hadamard) pour assurer l'unicité de la solution, nous supposons Ω est borné et connexe et nous ajoutons une contrainte supplémentaire pour assurer l'unicité de la solution :

$$\int u dx = 0 \quad \forall x \in \Omega . \text{ bien sur ce choix n'est pas unique.}$$

3.2.3 Problème mixte (Dirichlet-Neumann):

Définition (11): On appelle problème mixte une équation de Laplace (4) avec conditions aux limites mixte . le problème s'énonce de la façon suivante . Trouver une solution u au problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + au = g & \text{dans } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

f, g deux fonctions données. a est une fonction de x .

D'autre part si on utilise la théorie des opérateurs on peut définir les trois critères de manière suivante :

4) Critère sous forme d'opérateur des problèmes aux limites :

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^n et le $\Gamma = \partial\Omega$ bord de ce domaine. On considère un opérateur différentielle \mathcal{L} et l'équation :

$$\mathcal{L}u(x, t) = f(x, t) \quad (11)$$

Pour résoudre cette équation dans laquelle u est l'inconnue et f une donnée sur $\Omega \times \mathbb{R}$, on adjoint les conditions aux limites. Donc on a les critères :

4.1 Problème de Dirichlet :

Définition (12): Dans le problème de Dirichlet ou premier problème aux limites on cherche une solution de l'équation (11) qui prend des valeurs données sur le bord de Ω on cherche donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \forall x \in \Omega \\ u = g & \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

en général la fonction g est (au moins) continue.

4.2 Problème de Neumann :

Définition (13): Dans le problème de Neumann ou deuxième problème aux limites, on cherche une solution de l'équation différentielle dont on connaît la valeur du gradient sur le bord du domaine de résolution. Notons \vec{n} la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de Ω , on cherche donc à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \forall x \in \Omega \\ D_n u = g & \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (13)$$

Expression dans laquelle on a noté $D_n = \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n}$

4.3 Problème mixte :

Définition (14) : Dans le problème de Dirichlet-Neumann ou troisième problème, on cherche une fonction qui vérifie la troisième condition au bord :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \forall x \in \Omega \\ D_n u + au = g & \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (14)$$

Où a est une fonction de x

En fin, une équation de la forme : $\mathcal{L}u + \lambda u = 0$ est un problème aux valeurs propres .

Déterminer les solutions de ce type d'équation revient à déterminer le vecteur propre de l'opérateur \mathcal{L} .

Sous certaines conditions, on démontre que chaque problème admet une solution unique. On doit alors préciser ce qu'on entend par " solution car u peut être une fonction différentiable (solution forte) ou une distribution (solution faible).

Chapitre 2 :

La fonction de Green

1) Sur les fonctions de Green :

On considère le problème :

$$(H) \quad \begin{cases} u''(t) + k(t)u'(t) + P(t)u(t) = f(x) & l < t < r & (1) \\ au(l) - a'u'(l) = 0 & & (2) \\ Bu(r) + B'u'(r) = 0 & & (3) \end{cases}$$

Où k, P, f les fonctions définie et continues sur $l \leq t \leq r$

On peut construire la solution particulière de l'équation (1), on considère le problème homogène suivant :

$$u''(t) + k(t)u'(t) + P(t)u(t) = 0 \quad (4)$$

Soient $u_1(t), u_2(t)$ deux solutions de l'équation (4) donc la solution particulière de l'équation (1) s'écrit :

$$u_p(t) = v_1(t)u_1(t) + v_2(t)u_2(t) \quad (5)$$

Où : v_1, v_2 deux fonctions inconnues .

Si on suppose que :

$$v_1'u_1 + v_2'u_2 = 0$$

Donc on a :

$$\begin{cases} u_p' = v_1'u_1 + v_2'u_2 + v_1u_1' + v_2u_2' = v_1u_1' + v_2u_2' & (6) \\ u_p'' = v_1'u_1' + v_2'u_2' + v_1u_1'' + v_2u_2'' & (7) \end{cases}$$

On remplace les formules (6) et (7) dans l'équation (1) on obtient :

$$v_1'u_1' + v_2'u_2' + v_1(u_1'' + k(t)u_1' + p(t)u_1) + v_2(u_2'' + ku_2' + p(t)u_2) = f(t)$$

Et on a :

$$\begin{cases} u_1'' + ku_1' + pu_1 = 0 \\ u_2'' + ku_2' + pu_2 = 0 \end{cases}$$

Car u_1, u_2 les solutions de l'équations (4).

Donc on obtient un système linéaire définie par :

$$(P) \quad \begin{cases} v_1'u_1 + v_2'u_2 = 0 & (8) \\ v_1u_1' + v_2u_2' = f(t) & (9) \end{cases}$$

Avec : v_1', v_2' les inconnues .

Donc le système (P) admet une seule solution, il faut :

$$w(t) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad (K)$$

Où: $w(x)$ est appelée le Wronskien

Sous la conditions (K) on a :

$$v_1(t) = - \int_{t_0}^t \frac{u_2(z)f(z)}{w(z)} dz, v_2(t) = \int_{t_0}^t \frac{u_1(z)f(z)}{w(z)} dz \quad (10)$$

On remplace les dernières formules dans (5), donc la solution particulière s'écrit :

$$u_p(t) = u_1(t) \int_{t_0}^t -\frac{u_2(z)f(z)}{w(z)} dz + u_2(t) \int_{t_0}^t \frac{u_1(z)f(z)}{w(z)} dz$$

On a le théorème :

1.1 Théorème :

Soient u_1, u_2 deux solutions indépendants de l'équation:

$$u''(t) + ku'(t) + P(t)u(t) = 0$$

$$\text{Si : } w(t) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{On a : } u_p(t) = \int_{t_0}^t G(t, z)f(z) dz$$

La solution de l'équation non homogène :

$$u''(t) + k(t)u'(t) + P(t)u(t) = f(t)$$

Avec :

$$G(t, z) = \frac{u_1(z)u_2(t) - u_2(z)u_1(t)}{w(z)}$$

Selon le théorème (2.1) la solution de l'équation différentielle (1) s'écrit :

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + \int_l^t (u_1(z)u_2(t) - u_2(z)u_1(t)) \frac{f(z)}{w(z)} dz \quad (11)$$

Donc on a :

$$u'(t) = c_1u_1'(t) + c_2u_2'(t) + \int_l^t (u_1(z)u_2'(t) - u_2(z)u_1'(t)) \frac{f(z)}{w(z)} dz$$

En passant aux conditions aux bord :

Si $t = l$ on obtient :

$$\begin{aligned} au(l) - a' u'(l) &= c_1(au_1(l) - a' u_1'(l)) + c_2(au_2(l) - a' u_2'(l)) \\ &= c_2(au_2(l) - a' u_2'(l)) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_2 = 0$$

Si $t = r$ on a :

$$\begin{aligned} Bu(r) + B' u'(r) &= c_1(Bu_1(r) + B' u_1'(r)) + \int_l^r [u_1(z)(Bu_2(r) + B' u_2'(r)) - \\ &u_2(z)(Bu_1(r) + B' u_1'(r))] \frac{f(z)}{w(z)} dz = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_1(Bu_1(r) + B' u_1'(r)) - \int_l^r u_2(z)(Bu_1(r) + B' u_1'(r)) \frac{f(z)}{w(z)} dz = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \int_l^r u_2(z) \frac{f(z)}{w(z)} dz$$

$$\Rightarrow u(t) = u_1(t) \int_l^r u_2(z) \frac{f(z)}{w(z)} dz + \int_l^t (u_1(z)u_2(t) - u_2(z)u_1(t)) \frac{f(z)}{w(z)} dz$$

Finalement on obtient :

$$u(t) = \int_l^t u_1(z)u_2(t) \frac{f(z)}{w(z)} dz + \int_t^r u_1(t)u_2(z) \frac{f(z)}{w(z)} dz$$

Car : $\int_l^r u_2(t) \frac{f(z)}{w(z)} dz = \int_l^t u_2(z) \frac{f(z)}{w(z)} dz + \int_t^r u_2(z) \frac{f(z)}{w(z)} dz$

On définit la fonction G par :

$$G(t, z) = \begin{cases} \frac{u_1(z)u_2(t)}{w(z)} & l < z \leq t \\ \frac{u_1(t)u_2(z)}{w(z)} & t \leq z < r \end{cases} \quad (11)$$

La fonction G est dit la fonction de Green.

On le théorème :

1.2 Théorème :

Soient P, k, f les fonctions définies et continues sur : $l \leq x \leq r$

Le problème aux limites :

$$\begin{cases} u''(x) + k(x)u'(x) + P(x)u(x) = f(x) & l < x < r \\ au(l) - a'u'(l) = 0 & (i) \\ Bu(r) + B'u'(r) = 0 & (ii) \end{cases}$$

Admet une seule solution (si le problème homogène associée n'admet que la solution triviale $u=0$)

Définie par : $u(x) = \int_l^r G(x, z)f(z)dz$

Où G la fonction de Green définie par la relation (11).

2) Existence de la fonction de Green:

Soient $p, q, f \in C^1([a; b]), (a < b)$ et $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2$ telle que $\forall i = 1, 2 \quad |\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

On a les équations différentielles ordinaires:

$$(pu')' + qu = 0 \quad (H)$$

$$(pu')' + qu = f \quad (NH)$$

Ainsi que les conditions aux bords associées:

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \gamma \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \varrho \end{cases}$$

Théorème(1):

Si le problème homogène (H)- $(CB)_h$ n'admet pas de solution non triviale alors, il existe une (et une seule) fonction G ne dépend pas de f , et dite fonction de Green, telle que, pour tout fonction f , la solution u du problème non homogène (NH)- $(CB)_{nh}$ s'écrit de manière unique sous la forme:

$$u(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds$$

Exemple(1):

on calcule une fonction de Green du problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} u'' + u = 0 & \text{dans } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

la solution générale de l'équation $u'' + u = 0$ s'écrit sous la forme :

$$u = a \cos x + b \sin x$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow b = 0$$

donc il existe une(et seulement une) fonction de Green associée au problème (12)

il est claire que $\{\cos x, \sin x\}$ est un système de solution fondamentales, alors on calcule le wronskien :

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

Et on obtient:

$$G(x, \varepsilon) = \begin{cases} \cos \varepsilon \sin x & \text{si } 0 < \varepsilon \leq x \\ \sin \varepsilon \cos x & \text{si } x \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3) la fonction de Green pour un opérateur différentiel :

Soit le problème définit par :

$$Lu = f$$

Où : L opérateur de dérivation injectif , donc on a la définition :

Définition :

La fonction de Green associée à l'opérateur L avec des conditions aux bord homogène est solution du problème :

$$\begin{cases} LG(x, y) = \delta(x - y) \\ x \mapsto G(x, \cdot) \text{ vérifie les conditions aux bord homogène} \end{cases}$$

Où δ désigne la fonction de Dirac.

Remarque :

Définissons la fonction de Dirac δ en point x_0 par :

$$\delta|_{x=x_0} = \delta(x - x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x)$$

Où :

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } x_0 - \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{si } x > (x_0 + \frac{\varepsilon}{2}) \vee (x < x_0 - \frac{\varepsilon}{2}) \end{cases}$$

Alors :

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

Et donc :

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Si f est une fonction continue en x_0 , on a également :

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

Multiplions l'équation :

$$L(G(x, \xi)) = \delta(x - \xi)$$

Par $f(\xi)$ on obtient :

$$f(\xi)L(G(x, \xi)) = f(\xi)\delta(x - \xi)$$

Et on intègre les deux termes par rapport à ξ , on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)L(G(x, \xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\delta(x - \xi)d\xi$$

En remarquant que : $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\delta(x - \xi)d\xi$

Alors : $Lu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)L(G(x, \xi))d\xi=f(x)$

Donc : $u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)G(x, \xi)d\xi$

Propriétés :

1. la fonction de Green est symétrique, i.e. $G(x, \xi) = G(\xi, x)$
2. G est une fonction continue et bornée.
3. la fonction $x \mapsto \frac{dG(x,y)}{dx}$ est continue pour tout $x \neq y$.

Chapitre 3

Construction de la fonction de green de quelques problèmes aux limites

1) Rappelles sur la transformation de mellin

Définition :

On appelle transformée de mellin de f la fonction \tilde{f} définie par :

$$\tilde{f}(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{\sigma-1} dx \quad \sigma \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Où la fonction f définie sur \mathcal{R}^+

Lorsque l'intégrale converge

Exemple(1):

$$f : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+a} \quad (a > 0)$$

$$\tilde{f}(\sigma) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\sigma-1}}{x+a} dx = \frac{\pi a^{\sigma-1}}{\sin \sigma \pi} \quad 0 < \operatorname{Re} \sigma < 1$$

2.2 Quelques propriétés :

$$1) \widetilde{x^a f(x)} = \tilde{f}(\sigma + a)$$

$$2) \widetilde{f(x^\beta)} = \frac{1}{\beta} \tilde{f}\left(-\frac{\sigma}{\beta}\right) \quad (\beta > 0)$$

$$3) \widetilde{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \tilde{f}(-\sigma)$$

$$4) \left(\frac{df}{dx}\right) = -(\sigma - 1)\tilde{f}(\sigma - 1)$$

$$5) \left(\frac{x df}{dx}\right) = -\sigma \tilde{f}(\sigma)$$

$$6) \widetilde{f^{(n)}} = (-1)^n \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma-n)} \tilde{f}(\sigma - n)$$

Avec Γ la fonction Gamma

$$7) \left(\frac{x df}{dx}\right)^n f(\sigma) = (-1)^n \sigma^n \tilde{f}(\sigma)$$

8) soit \tilde{h} la transformation de mellin de la fonction h , avec $h = f * g$ alors on a :

$$\tilde{h}(\sigma) = f(x) \widetilde{*} g(x) = \tilde{f}(\sigma) \times \tilde{g}(\sigma) \quad (* \text{ désigne le convolution multiplicative})$$

Remarque : soient f et g deux fonction définies sur \mathcal{R}^+ , le convolution multiplicative de f par g pour la mesure (de Haar) $\frac{dt}{t}$ la fonction h définit par :

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_0^{+\infty} f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

Définition (transformation inverse) :

La transformée de mellin inverse de \tilde{f} est donnée par la fonction f avec \tilde{f} est définie pour $a_1 < Re\sigma < a_2$ et

$$f(x) = \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\vartheta}^{\mu+i\vartheta} \tilde{f}(\sigma) x^{-\sigma} d\sigma \quad a_1 < \mu < a_2$$

Lorsque l'intégrale converge

Proposition :

Soit A un opérateur différentiel homogène à coefficient constants , d'ordre $2m$ par rapport aux variable x et y . Alors en coordonnées polaires (r, θ) l'opérateur $r^{2m} A$ est un polynôme de degré $2m$ par rapport à la variable $r \frac{d}{dr}$.

Conséquence :

Si A est un opérateur différentiel homogène elliptique d'ordre $2m$ la transformation de mellin de $r^{2m} AU$,

S'écrit :

$$r^{2m} AU = P_{2m} \left(\sigma, \theta, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tilde{u}(\sigma, \theta)$$

Où P_{2m} est un polynôme de degré $2m$ par rapport à la variable σ

Nous utiliserons cette proposition pour le cas particulier où $m=1$ et $A = \Delta$ (l'opérateur de Laplace) , l'opérateur $r^2 \Delta u = \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2$

Cette formule est très utile surtout pour établir une fonction de green , pour les problèmes aux limites avec l'opérateur de Laplace.

Exemple(2):

Considérons le problème :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(r, 0) = g \\ u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Où $\Omega = \{(r, \theta) \in \mathcal{R}^2, r > 0, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}$

En multipliant l'opérateur Δ par r^2 , et en passant à la transformation de mellin , le problème (2) sera :

$$\begin{cases} r^2 \widetilde{\Delta u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \widetilde{u}(\sigma, 0) = \widetilde{g} \\ \widetilde{u}(\sigma, \varphi) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

On a :

$$r^2 \widetilde{\Delta u} = \left(r \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \widetilde{u} = 0$$

On obtient un problème différentiel ordinaire d'ordre deux par rapport à la variable θ ,

Et dépendant d'un paramètre complexe σ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \widetilde{u}(\theta) = 0 \\ \widetilde{u}(\sigma, 0) = \widetilde{g} \\ \widetilde{u}(\sigma, \varphi) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Il admet comme solution :

$$\widetilde{u}(\sigma, \theta) = a \cos(\sigma \theta) + b \sin(\sigma \theta)$$

En utilisant les conditions aux limites et si en posant $\widetilde{g} = 1$, on obtient :

$$\widetilde{u}(\sigma, 0) = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\widetilde{u}(\sigma, \varphi) = 0 \Rightarrow b = \frac{-\cos(\sigma \varphi)}{\sin(\sigma \varphi)}$$

D'où :

$$\tilde{u}(\sigma, \theta) = \cos(\sigma\theta) - \frac{\cos(\sigma\varphi)}{\sin(\sigma\varphi)} \sin(\sigma\theta)$$

La fonction :

$$\tilde{N}(\sigma, \theta, \varphi) = \frac{\sin\sigma(\varphi-\theta)}{\sin\sigma\varphi}$$

Est la transformation de mellin du noyau de poisson $N(r, \theta, \varphi)$.

En utilisant le produit de convolution multiplicative , il vient :

$$u(r, \theta) = \int_0^{+\infty} g(t) N\left(\frac{r}{t}, \theta, \varphi\right) \frac{dt}{t}$$

Où $u(r, \theta)$ représente la transformation de mellin inverse de $\tilde{u}(\sigma, \theta)$

2) la relation entre la transformation de mellin et de Fourier:

Il ya une certaine analogie entre la transformation de mellin et celle de Fourier , on peut passer de l'une à l'autre en effectuant un changement de variable convenable comme par exemple : $r = e^{-t}$, si l'on pose $\sigma = i\varepsilon$, on aura :

$$\tilde{f}(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(r) r^\sigma \frac{dr}{r}$$

Et en posant $r = e^{-t}$, il vient :

$$\tilde{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t}) e^{-it\varepsilon} dt = \hat{F}(\varepsilon)$$

Qui n'est autre que la transformation de Fourier de $F(t) = f(r)$

Le travail suivant est basé sur l'alternative de Fredholm (les équations d'EDP ou EDO) , dans la partie suivante on peut rappeler cette notion.

3) L'alternative de Fredholm :

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} Lu = f & a < x < b \\ u(a) = u(b) = \alpha \end{cases} \quad (5)$$

- 1- Si le problème homogène associé à (5) n'admet que la solution triviale $u = 0$ (i.e $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre) , alors le problème non homogène admet une solution unique .
- 2- Si le problème homogène admet une solution non triviale (i.e. $\lambda = 0$ est une valeur propre) , alors le problème (5) n'admet aucune solution où un nombre infini des solutions .

Si v est solution du problème homogène alors :

si $\int_a^b v f = 0 \Rightarrow$ le problème non homogène admet un nombre infini des solutions

si $\int_a^b v f \neq 0 \Rightarrow$ il n'ya aucune solution.

Exemple(3):

$$\begin{cases} \Delta u = x & 0 < x < 2 \\ u(0) = u(2) = 2 \end{cases} \quad (6)$$

La solution de l'équation homogène $\Delta u = 0$ s'écrit :

$$u(x) = Ax + B$$

Pour $u(0) = 2 \Rightarrow B = 2$

Pour $u(2) = 2 \Rightarrow A = 0$

On remarque que $v = 2$ est une solution de l'équation homogène car $\Delta v = 0$ mais

$$\int_0^1 2x dx = 1 \neq 0$$

Donc le problème (6) n'admet aucune solution.

4.La fonction de green , pour un problème aux limite d'EDP :

4.1problème de Dirichlet:

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega \\ \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \quad (7)$$

Avec : $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathcal{R}^2, x^2 + y^2 > 0, 0 < \arctan \frac{x}{y} < \varphi < 2\pi \right\}$

Ω : est dit le secteur plan et φ la mesure de l'angle d'ouverture à l'intérieur

En coordonnées polaires le problème (7) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = f(r, \theta) \\ u(r, 0) = u(r, \varphi) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega \\ \text{dans } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \quad (8)$$

Avec $\Omega = \{(r, \theta) \in \mathcal{R}^2, r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$

Ou bien :

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta) = f(r, \theta) \\ u(r, 0) = u(r, \varphi) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega \\ \text{dans } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \quad (9)$$

Ce dernier problème équivalent au suivant :

$$\begin{cases} r^2 \Delta u = r^2 f \\ u(r, 0) = u(r, \varphi) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega \\ \text{dans } \Gamma \end{array} \quad (10)$$

Ou bien :

$$\begin{cases} r^2 \Delta u(r, \theta) = F(r, \theta) \\ u(r, 0) = u(r, \varphi) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \Omega \\ \text{sur } \Gamma \end{array} \quad (11)$$

Avec : $F(r, \theta) = r^2 f(r, \theta)$

Si on suppose que f admet une transformation de mellin donc ona :

$$r^2 \widetilde{f(r, \theta)} = \tilde{f}(\sigma + 2, \theta) = \tilde{F}(\sigma, \theta)$$

$$\widetilde{r^2 \Delta u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \tilde{u}$$

Par la transformée de mellin , on transforme le problème (11) au suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \tilde{u}(\theta) = \tilde{f}(\sigma + 2, \theta) \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(\varphi) = 0 \end{cases} \quad 0 < \theta < \varphi \quad (12)$$

Donc on obtient un problème de Cauchy par rapport à la variable θ que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{cases} y'' + \sigma^2 y = \tilde{F}(\theta) \\ y(0) = y(\varphi) = 0 \end{cases} \quad 0 < \theta < \varphi \quad (13)$$

Avec $y(\theta) = \tilde{u}(\theta)$

Cherchons maintenant une fonction de green associée à (13) , en effet nous avons le théorème suivant :

Théorème(1):

Si le problème homogène associée à (12) n'admet que la solution triviale alors il existe une (seule une) fonction de green \tilde{G} continue et symétrique définie par :

$$\tilde{G}(\sigma, \theta, a) = \begin{cases} \frac{\tilde{u}_1(\theta)\tilde{u}_2(a)}{w(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} & si \quad 0 < a \leq \theta \\ \frac{\tilde{u}_1(a)\tilde{u}_2(\theta)}{w(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} & si \quad \theta \leq a < \varphi \end{cases}$$

Où $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}$ est un système fondamental de solution pour le problème homogène , et w leur wronskien .

Alors le problème (12) admet une solution représenté par :

$$\tilde{u}(\sigma, \theta) = \int_0^\varphi \tilde{G}(\sigma, \theta, \alpha) \tilde{F}(\sigma, \alpha) d\alpha$$

Démonstration :

1) On a le problème homogène associée à (12) s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{u}''(\theta) + \sigma^2 \tilde{u}(\theta) = 0 \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(\varphi) = 0 \end{cases} \quad 0 < \theta < \varphi$$

La solution générale s'écrit :

$$\tilde{u}(\theta) = C_1 \cos(\sigma\theta) + C_2 \sin(\sigma\theta) , \quad (C_1, C_2) \in \mathcal{R}^2$$

En passant aux conditions initiales :

$$\tilde{u}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\tilde{u}(\varphi) = 0 \Rightarrow (C_2 = 0) \vee (\sigma\varphi = n\pi), n \in \mathbb{Z}$$

Par suite ,si $\sigma\varphi \neq n\pi$ pour tout n dans \mathbb{Z} alors :

$$C_1 = 0 \text{ alors } \tilde{u} \equiv 0$$

Donc il existe une fonction de Green \tilde{G} associé au problème (12)

2) Pour déterminer cette fonction de Green , cherchons un système des solutions fondamentales des problèmes de Cauchy respectifs suivants :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1''(\theta) + \sigma^2 \tilde{u}_1(\theta) = 0 & 0 < \theta < \varphi \\ \tilde{u}_1(0) = 0, \tilde{u}_1'(0) = -1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_2''(\theta) + \sigma^2 \tilde{u}_2(\theta) = 0 \\ \tilde{u}_2(\varphi) = 0, \tilde{u}_2'(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Pour (14) ,on a :

$$\tilde{u}_1 = C_1 \cos(\sigma\theta) + C_2 \sin(\sigma\theta)$$

$$\tilde{u}_1(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\tilde{u}_1'(0) = -1 \Rightarrow \sigma C_2 = -1$$

$$\text{D'où : } C_2 = \frac{-1}{\sigma}$$

Alors :

$$\tilde{u}_1(\theta) = \frac{-1}{\sigma} \sin\sigma\theta, \sigma \neq 0$$

Pour (15) , on a :

$$\tilde{u}_2 = C_3 \cos(\sigma\theta) + C_4 \sin(\sigma\theta)$$

$$\tilde{u}_2(\varphi) = 0 \Rightarrow C_3 \cos(\sigma\varphi) + C_4 \sin(\sigma\varphi) = 0$$

En multipliant le deux derniers termes par $\sigma \sin(\sigma\varphi)$ on obtient :

$$\sigma C_3 \sin\sigma\varphi \cos\sigma\varphi + \sigma C_4 \sin^2\sigma\varphi = 0$$

$$\tilde{u}_2'(\varphi) = 1 \Rightarrow -\sigma C_3 \sin\sigma\varphi + \sigma C_4 \cos\sigma\varphi = 1$$

En multipliant le deux derniers termes par $\cos(\sigma\varphi)$ on obtient :

$$-\sigma C_4(\sin^2 \sigma \varphi + \cos^2 \sigma \varphi) = \cos \sigma \varphi$$

Alors :

$$C_4 = \frac{\cos \sigma \varphi}{\sigma} \text{ et } C_3 = -\frac{\sin \sigma \varphi}{\sigma}$$

Donc :

$$\tilde{u}_2(\theta) = \frac{-\sin \sigma \varphi \cos \sigma \theta}{\sigma} + \frac{\cos \sigma \varphi \sin \sigma \theta}{\sigma} = -\frac{\sin \sigma(\varphi - \theta)}{\sigma}$$

Alors :

$$W(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)(\theta) = \begin{vmatrix} \frac{-1}{\sigma} \sin \sigma \theta & -\frac{1}{\sigma} \sin \sigma(\varphi - \theta) \\ -\cos \sigma \theta & \cos \sigma(\varphi - \theta) \end{vmatrix} = -\frac{\sin \sigma \varphi}{\sigma} \neq 0$$

3) La fonction de Green est une fonction symétrique, bornée et donnée par :

$$\tilde{G}(\sigma, \theta, \alpha) = \begin{cases} \frac{-\sin \sigma(\varphi - \alpha) \sin \sigma(\alpha - \theta)}{\sigma \sin \sigma \varphi} & \text{si } 0 < \alpha \leq \theta \\ \frac{-\sin \sigma \alpha \sin \sigma(\varphi - \theta)}{\sigma \sin \sigma \varphi} & \text{si } \theta \leq \alpha < \varphi \end{cases}$$

Il reste maintenant à montrer que la fonction du problème (12) , s'écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{u}(\sigma, \theta) = \int_0^\varphi \tilde{G}(\sigma, \theta, \alpha) \tilde{F}(\sigma, \alpha) d\alpha$$

Et pour ce la posons :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sigma^2 I$$

Qui est l'opérateur de notre problème.

C'est-à-dire :

$$L\tilde{u} = \tilde{F}$$

Où L représente la transformée de Mellin de l'opérateur $r^2 \Delta$

Alors d'après la définition de la fonction de green on a :

$$L\tilde{G}(\sigma, \theta, \alpha) = \delta(\theta - \alpha) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \tilde{G} = \delta(\theta - \alpha)$$

$$L\tilde{u} = \tilde{F} \Leftrightarrow \int_0^\varphi \tilde{G}L\tilde{u} = \int_0^\varphi \tilde{G}\tilde{F}$$

En intégrant la terme gauche deux fois par partie , on obtient :

$$\int_0^\varphi \tilde{G}L\tilde{u} = \left[\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta} \right]_0^\varphi + \int_0^\varphi \tilde{u} \left(\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \tilde{G} \right) d\alpha$$

On a :

$$\left[\tilde{G} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right]_0^\varphi = 0$$

Car \tilde{u} est nulle sur le bord , et :

$$\left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta} \right]_0^\varphi = 0$$

Car \tilde{G} vérifie les conditions au bord aussi (par la définition de la fonction de Green) en remarquant que :

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \tilde{G} = L\tilde{G} = \delta(\theta - \alpha)$$

On a aura :

$$\int_0^\varphi \tilde{u} \delta(\theta - \alpha) d\alpha = \int_0^\varphi \tilde{G}(\sigma, \theta, \alpha) d\alpha$$

Et d'après la définition de la fonction de Dirac on a :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\sigma, \alpha) &= \int_0^\varphi \tilde{u}(\theta) \delta(\theta - \alpha) d\theta \\ \Rightarrow \tilde{u}(\sigma, \alpha) &= \int_0^\varphi \tilde{G}(\sigma, \theta, \alpha) \tilde{F} d\alpha \end{aligned}$$

Donc si on pose $\theta = \alpha$, on obtient :

$\tilde{u}(\sigma, \theta) = \int_0^\varphi \tilde{G}(\sigma, \alpha, \theta) \tilde{F}(\sigma, \alpha) d\alpha$ et comme la fonction de Green est symétrique ,
on aura alors :

$$\tilde{u}(\sigma, \theta) = \int_0^\varphi \tilde{G}(\sigma, \theta, \alpha) \tilde{F}(\sigma, \alpha) d\alpha$$

4.2 problème de Neumann:

Considérons le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (16)$$

Où : Ω le même ensemble

Ou applique la transformation de mellin sur notre problème on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \tilde{u}(\theta) = \tilde{f}(\theta) & 0 < \theta < \varphi \\ \tilde{u}'(0) = \tilde{u}'(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Pour qu'il existe une fonction de Green associée au problème homogène

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \tilde{u}(\theta) = 0 & 0 < \theta < \varphi \\ \tilde{u}'(0) = \tilde{u}'(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

N'admet que la solution triviale.

La solution générale de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \tilde{u}(\theta) = 0$$

Est donnée par :

$$\tilde{u}(\sigma, \theta) = a \cos \sigma \theta + b \sin \sigma \theta \quad \forall (a, b) \in \mathcal{R}^2$$

En passant aux conditions aux bord :

$$\tilde{u}'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\tilde{u}'(\varphi) = 0 \Rightarrow -\sigma a \sin \sigma \varphi = 0$$

Si : $\sigma \varphi \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) , alors $a = 0$

Donc il existe une fonction de Green associée au problème(17).

2) soit $\{\phi_1, \phi_2\}$ un système des solutions du problème (18), alors elle vérifient :

$$\begin{cases} \phi_1'' + \sigma^2 \phi_1 = 0 \\ \phi_1(0) = 1, \phi_1'(0) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \phi_2'' + \sigma^2 \phi_2 = 0 \\ \phi_2(\varphi) = 1, \phi_2'(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Pour le problème (19) on a :

$$\phi_1(\theta) = C_1 \cos \sigma \theta + C_2 \sin \sigma \theta$$

$$\phi_1(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1 \text{ et } C_2 = 0 \Rightarrow \phi_1(\theta) = \cos \sigma \theta$$

Et pour le problème (20)

$$\phi_2(\theta) = b_1 \cos \sigma \theta + b_2 \sin \sigma \theta$$

$$b_1 = \cos \sigma \varphi \text{ et } b_2 = \sin \sigma \varphi$$

$$\text{Donc : } \phi_2(\theta) = \cos \sigma \varphi \cos \sigma \theta + \sin \sigma \varphi \sin \sigma \theta = \cos \sigma (\varphi - \theta)$$

Alors W est constant(Independent de θ).

$$W(\phi_1, \phi_2)(\theta) = \sigma \sin \sigma \varphi$$

Donc la fonction de Green \tilde{N} sera :

$$\tilde{N}(\sigma, \theta, \alpha) = \begin{cases} \frac{\cos \sigma \theta \cos \sigma (\varphi - \alpha)}{\sigma \sin \sigma \varphi} & \text{si } 0 < \alpha \leq \theta \\ \frac{\cos \sigma \alpha \cos \sigma (\varphi - \theta)}{\sigma \sin \sigma \varphi} & \text{si } \theta \leq \alpha < \varphi \end{cases}$$

C'est-à-dire que la solution est donnée par :

$$\tilde{u}(\sigma, \theta) = \int_0^{\varphi} \tilde{N}(\sigma, \theta, \alpha) \tilde{F}(\sigma, \theta) d\alpha$$

On peut donc définir une fonction inverse N par :

$$N(r, \theta, \alpha) = \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\vartheta}^{\mu+i\vartheta} \tilde{N}(\sigma, \theta, \alpha) r^{-\alpha} d\sigma$$

Donc la solution du problème s'écrit :

$$u(r, \theta) = \int_0^{\varphi} N(r, \theta, \alpha) * F(t, \alpha) d\alpha$$

Ce qui donne :

$$u(r, \theta) = \int_0^{+\infty} \int_0^{\varphi} N\left(\frac{r}{t}, \theta, \alpha\right) F(t, \alpha) d\alpha \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \int_0^{\varphi} N\left(\frac{r}{t}, \theta, \alpha\right) t^2 f(t, \alpha) d\alpha \frac{dt}{t}$$

5. La fonction de Green , pour un problème aux limites d'EDO :

soit le problème :

$$\begin{cases} u'' - u = x & \text{dans } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Et soit le problème homogène associée à (21) :

$$u'' - u = 0 \quad (22)$$

Donc la solution de l'équation (22) :

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x}$$

En passant aussi conditions aux limites

$$u(0) = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$u(1) = 0 \Rightarrow A = B = 0$$

Et nous avons démontré l'existence de la fonction de Green .

2) on va calculer la fonction de Green , soit $\{u_1, u_2\}$ un système des solutions qui sont vérifiées:

$$\begin{cases} u_1'' - u_1 = 0 & 0 < x < 1 \\ u_1(0) = 0, u_1'(0) = -1. \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} u_2'' - u_2 = 0 & 0 < x < 1 \\ u_2(1) = 0, u_2'(1) = 1 \end{cases} \quad (24)$$

Donc pour (23), on a :

$$u_1(x) = ae^x + be^{-x}$$

$$u_1(x) = -sh(x)$$

Et pour le problème (24), on a :

$$u_2(x) = sh(x - 1)$$

$$W(u_1, u_2)(x) = -sh1.$$

Alors la fonction de Green associée au problème (22) est donnée par :

$$G(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{sh\varepsilon sh(x-1)}{sh1} & 0 < \varepsilon \leq x \\ \frac{shxsh(\varepsilon-1)}{sh1} & x \leq \varepsilon < 1 \end{cases}$$

4) Cherchons la solution du problème aux limites(21) sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x, \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \\ u(x) &= \int_0^x \frac{\varepsilon sh\varepsilon sh(x-1)}{sh1} d\varepsilon + \int_x^1 \frac{\varepsilon shxsh(\varepsilon-1)}{sh1} d\varepsilon \\ &= \frac{sh(x-1)}{sh1} \int_0^x \varepsilon sh\varepsilon d\varepsilon + \frac{shx}{sh1} \int_x^1 \varepsilon sh(\varepsilon-1) d\varepsilon \end{aligned}$$

Puisque :

$$\int_0^x \varepsilon sh\varepsilon d\varepsilon = xchx - shx$$

$$\int_x^1 \varepsilon \operatorname{sh}(\varepsilon - 1) d\varepsilon = 1 - x \operatorname{ch}(x - 1) + \operatorname{sh}(x - 1)$$

On a :

$$u(x) = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1} - x$$

Conclusion général :

Le but de ce mémoire où , on trouve un détail pour la résolution des problèmes aux limites directes en utilisant la fonction de Green (l'existence de la fonction de Green implique l'existence de la solution du problème aux limites traité) , et des problèmes aux limites (d'EDP) transformés en coordonnées polaires à des problèmes cités au dessus puis leurs résolutions en équation intégrale dont le noyau est la fonction de Green . Notons que ces solutions basées sur la transformation de Mellin dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Omega = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, r > 0, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}$$

Cette transformation est plus général que la transformé de Fourier et la transformé de Laplace.

Résumé du mémoire :

N'est pas évident tout opérateur admet une fonction de Green, mais ce dernier est utilisé pour résoudre une équation différentielle inhomogène ,avec des conditions initiales ou conditions aux limites, et aussi la fonction de Green appliqué dans la théorie de distributions .

Mots clés : conditions aux limites, fonctions de Green, noyau dégénéré, méthode parallèle.

Abstract :

It is not evident that all operator admits a Green function but this last is used to solve an inhomogeneous differential equation with initial conditions or boundary conditions, we also say that the Green function acting on distribution theory.

Keys words : Boundary conditions, Green function, degenerate kernel, parallel method.

ملخص الرسالة باللغة الوطنية :

ليس من الواضح أن كل مؤثر يقبل دالة قرين، وهذه الأخيرة تستعمل لحل معادلة تفاضلية ذات شروط بدائية أو شروط حدية، أيضا دالة قرين تطبق في فضاء التوزيعات .
كلمات مفتاحية : شروط حدية ، دالة قرين ، نواة منحلة ، طريقة متوازية .

Bibliographie:

- [1] Frank Jędrzejewski. Introduction aux méthodes numériques. deuxième édition. Springer(2005)
- [2] Alexandre Ern.éléments finis,Dunod.Paris(2005)
- [3] J,Quinet. Cours élémentaire de mathématiques supérieures.Dunod(1977)
- [4] Robert Bédard.équations aux dérivées partielles .Université du Québec à Montréal (2003)
- [5] P,Laurent.Gengoux,Analyse des équations aux dérivées partielles. école centrale
- [6] Georges koepfler.équation aux dérivées partielles. Université René Descartes en (2001)
- [7] Haïm Brezis .Analyses fonctionnelle. Masson , paris, en 1983.
- [8] V ,Smirnov .Coure de Mathématiques supérieures.Réimpression(1977)
- [9] Pierre Florent . Michelle Lauton .Gérard Lauton . équations et systèmes différentiel . Librairie Vuibert (1978).
- [10] Mourad Choulli. Une introduction aux problèmes inverse elliptiques et paraboliques . Springer (mai 2009).
- [11] Alphonse Magnus. Equations aux dérivées partielles 2. Université catholique de Louvain (2009-2010).
- [11] B. Torrèsani . Mathématiques pour la physique 2. Année universitaire 2011-2012, second semestre .
- [12] N. Piskounov . calcul différentiel. Tome 2 .
- [13] Patrick Joly . cours de Master : Introduction à l'analyse mathématique de la propagation d'ondes en régime harmonique . université pierre et marie curie . Année 2006-2007.

[14] Beloul Said . Sur la résolution du problème de Laplace perturbé dans un polygone plan, par décomposition du domaine. Mémoire de Magister, soutenue le 20/10/2010 à l'université de Kasdi Merbah- Ouargla .

[15] Thierry Ramond . Introduction aux équation aux dérivées partielles. Université Paris-sud le 15/09/2002.

[16] Frédéric Paulin. Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique. Cours de deuxième année de magister. Université de Paris-sud 11 .Année 2011-2012.

[17] Anne-Sophie Bonnet Bendhia. Marc Lenoir. Outils élémentaires d'analyse pour les équations aux dérivées partielles MA 12. Ecole Nationale supérieure de Technique avancées (ENSTA). Le 21/10/2004.

[18] Françoise et Gilbert Demengel . Espaces Fonctionnels (utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles). EDP sciences en 2007.

[19] Alifio quarteroni . Riccardo Sacco. Fausto Saleri- méthodes Numériques . par Springer .

[20] J. Bass . Cours de Mathématiques Tome 3. Massons et C^{ie} , paris (1971).

