

Remerciements

Tout d'abord je remercie **allah** le tout puissant qui m'a donné, le courage et l'ambition pour réaliser ce modeste travail.

Je remercie mon encadreur de son aide et ses encouragements durant la réalisation de mon travail. Il m'a orienté vers le succès avec ses connaissances en partageant nos idées, et sa présence à tout moment:

Mr:Douadi MIHOUBI

Je tiens à exprimer mes reconnaissances et tout mes remerciements aux personnes qui m'ont soutenu, encouragé, accueilli, conseillé et accompagné durant mon cursus universitaire dont ma mère **Khadidja**, mes frères **Lakhdar** et **Mohamad**, mes soeurs **Zahra** et **Hadjira**.

Sans oublier toutes et tous mes ami(e)s et mes collègues de promotion 2015.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Généralité sur les groupes	2
1.1.1 Notions de groupe	2
1.1.2 Groupe opérant sur un ensemble	5
1.1.3 le théorème de lagrange et ses variantes	6
1.1.4 Exemple(groupe symétrique)	8
1.2 Généralité sur les isométries	12
1.2.1 L'isométries de plan	12
1.2.2 Isométries affines dans l'espace euclidien	17
2 Groupe de symétries dans le plan et dans l'espace	22
2.1 Groupe de symétries dans le plan	22
2.1.1 Groupe d'isométries dans le plan	22
2.1.2 Exemple de groupe des isométries	23
2.2 Groupe de symétries dans l'espace	28
2.2.1 le groupe d'isométries	28
2.2.2 Exemple de groupe d'isométries	30
3 Applications en chimie	33
3.1 Introduction	33
3.2 Opérations de symétrie	33

3.2.1	Éléments de symétrie d'une molécule	34
3.3	Les groupes ponctuels	35
3.3.1	des opérations de symétrie engendrées par chacun des éléments de symétrie d'une molécule	37
3.3.2	Représentation du groupe	38
	Conclusion générale	41
	Bibliographie	41

Introduction

La notion de groupe a été introduite pour la première fois au début **du dix-neuvième siècle**. A cette époque elle intervient dans les travaux d'Evariste Galois sur les équations algébriques sous forme de groupes de permutation des racines de ces équations. Presque au même moment les groupes commencent à jouer un rôle en géométrie notamment des groupes symétriques de polygone et de polyèdre régulier. C'est à partir de cette double origine algébrique et géométrique qu'a été conçue vers la fin du dix-neuvième siècle la notion abstraite de groupe et que petit à petit a été construite la théorie de groupes.

Dans la théorie de groupe une place importante a été accordée à l'étude de la structure des groupes finis compte tenu des nombreuses interprétations concrètes qui peuvent en être données. C'est précisément dans ce cadre que se place ce mémoire dans lequel ont été traités les groupes de symétrie en 2 et 3 et 1 dimension application en chimie . Ce travail est composé trois chapitre:

1. Le premier chapitre consiste en un rappel des notions et notations utilisées par la suite: la structure du groupe, sous groupe homomorphismes des groupes.
2. Dans le second chapitre nous avons étudiés les groupes de symétries dans le plan et dans l'espace avec quelques exemples illustratifs.
3. Dans le troisième chapitre nous avons fait les applications de groupe de symétries en chimie: Les groupes de symétrie ponctuelles et la représentation des groupes.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralité sur les groupes

1.1.1 Notions de groupe

Groupe

Définition 1.1.1

Un groupe est la donnée d'un ensemble non vide G et d'une loi de composition interne

$$\begin{aligned}G \times G &\rightarrow G \\(x, y) &\rightarrow x * y\end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. Associativité : $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$
2. Existence d'un élément neutre: $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G, x * e = e * x = x$
3. Existence d'un inverse: $\forall x \in G, \exists x' \in G$ tel que $x * x' = x' * x = e$.

Définition 1.1.2 Si $(G, *)$ est un groupe tel que la loi $*$ satisfasse à la propriété

$$\forall x, y \in G, x * y = y * x,$$

le groupe $(G, *)$ est dit **commutatif** ou encore **abélien**.

Exemple 1.1.1

- 1) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens.
- 2) $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times), (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ et $(\mathbb{C} - \{0\}, \times)$ sont des groupes abéliens.
- 3) soit E et F deux ensembles. Alors $(\{f : E \rightarrow F\}, +)$ est un groupe abélien.
- 4) soit E un ensemble. Alors $(f : E \rightarrow F, \circ)$ est un groupe non abélien.

Sous groupes**Définition 1.1.3**

Un sous-ensemble non vide H d'un groupe $(G, *)$ est sous-groupe de G si et seulement si

- a) $\forall (x, y) \in H \times H, x * y \in H.$
- b) $\forall x \in H, x^{-1} \in H.$

Exemple 1.1.2

G et $\{1\}$ sont des sous groupes de G appelés sous groupes triviaux de G .

(1 est l'élément neutre de G).

Définition 1.1.4

Soit H un sous groupe de G .

Si H est différent de G et $\{1\}$, on dit que H est un sous groupe **propre** de G .

Définition 1.1.5

Soit A une partie non vide de G . Alors, on appelle sous groupe engendré par A et on note $\langle A \rangle$, le plus petit sous groupe (au sens de l'inclusion) de G contenant A .

Si g un élément appartient à G on note $\langle g \rangle$ à la place de $\langle \{g\} \rangle$ le sous groupe engendré par ce élément.

Notation 1.1.1 Si H est un sous groupe propre de G , on notera $H < G$.

Exemple 1.1.3

- a) $(\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{Q}, +) < (\mathbb{R}, +) < (\mathbb{C}, +).$
- b) $(\mathbb{Q}^*, *) < (\mathbb{R}^*, *) < (\mathbb{C}^*, *).$

L'ordre d'un élément

Définition 1.1.6

On dit qu'un groupe G est fini si l'ensemble G est fini :

Dans ce cas, le cardinal de G est appelé ordre de G et noté $|G|$ ou $o(G)$.

Définition 1.1.7

L'ordre d'un élément a d'un groupe est le plus petit nombre entier positif m tel que $a^m = e$ (où e désigne l'élément neutre ou identité du groupe, et a^m désigne le produit de m copies de a). Si aucun m de la sorte n'existe, on dit que a est d'ordre infini.

Exemple 1.1.4

- 1) dans tout groupe G , l'élément neutre est le seul élément d'ordre 1
- 2) dans $(\mathbb{Z}, +)$, tous les éléments non nuls sont d'ordre infini.

Morphisme d'un groupe

Définition 1.1.8

Soient (G_1, \cdot) et $(G_2, *)$ deux groupes, un morphisme (ou homomorphisme) du groupe G_1 dans G_2 est une application

$$f : G_1 \rightarrow G_2$$

vérifiant:

$$\forall (x, y) \in G_1 \times G_2, f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

Si de plus f est bijectif, on dit que f est un isomorphisme de groupes, si $G_1 = G_2$ on dit que f est un endomorphisme de G_1 ; un endomorphisme bijectif s'appelle un automorphisme.

Définition 1.1.9

Soient G_1 et G_2 deux groupes (avec e_2 est élément neutre de G_2) et

$$f : G_1 \rightarrow G_2$$

un homomorphisme de groupes.

On appelle noyau de f et on note $\ker f$, l'ensemble $\{x \in G_1 / f(x) = e_2\}$.

On appelle image de f , et on note $\text{Im} f$, l'ensemble $\{f(x) / x \in G_1\}$

Proposition 1.1.1

Pour tout sous groupe H_1 de G_1 , $f(H_1)$ est un sous groupe de G_2 et, pour tout sous groupe H_2 de G_2 , $f^{-1}(H_2)$ est un sous groupe de G_1 .

En particulier $\text{Im} f$ est un sous groupe de G_2 et $\ker f$ est un sous groupe de G_1 .

Définition 1.1.10

Une relation d'équivalence sur un ensemble E est une relation binaire R qui vérifie:

1. R réflexive: $\forall x \in E, xRx$;
2. R symétrique: $\forall x, y \in E, \text{si } xRy \text{ alors } yRx$;
3. R transitive: $\forall x, y, z \in E \text{ si } xRy \text{ et } yRz \text{ alors } xRz$.

1.1.2 Groupe opérant sur un ensemble

Action de groupe

Définition 1.1.11

Une action (à gauche) d'un groupe G sur ensemble X est la donnée d'une application

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

1. $\forall x \in X, e \cdot x = x$;
2. $\forall x \in X, \forall g_1, g_2 \in G, \text{ on a } g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$.

Il résulte de cette définition que, si on pose $\Phi_g(x) = g \cdot x$, on a

$$\Phi_e = id_X, \text{ et } \Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2} = \Phi_{g_1 g_2}.$$

Une action du groupe G sur l'ensemble X est donc la même chose qu'un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \Phi & : G \rightarrow \text{bij}(X) \\ g & \mapsto \Phi_g, \end{aligned}$$

où $\text{bij}(X)$ est le groupe des bijections de X .

Exemple 1.1.5

Pour tout ensemble X , le groupe $\text{bij}(X)$ agit sur X .

Orbites

Définition 1.1.12

Soit G un groupe opérant sur X . On vérifie que la relation

$$xRy \Leftrightarrow \exists g \in G \ y = g \cdot x$$

est relation d'équivalence sur X .

La classe d'équivalence d'un élément x de X est son orbite

$$G_X = \{g \cdot x / g \in G\},$$

de sorte que G est réunion disjointes de orbite sous G .

On appelle l'ensemble des orbites de X sous G le quotient de X par G , noté $G \backslash X$.

le stabilisateur de x est le sous groupe de G défini par

$$H_X = \{g \in G, g \cdot x = x\}.$$

1.1.3 le théorème de Lagrange et ses variantes

Théorème 1.1.1 (Lagrange)

Si G est groupe fini, alors l'ordre de tout sous-groupe de G divise l'ordre de G .

Démonstration.

Si G est un groupe fini, et si H est un sous-groupe de G , alors

$$\begin{aligned}\varphi & : H \rightarrow xH \\ h & \mapsto xh\end{aligned}$$

est une application bijectif, ce qui fait $|xH| = |H|$. Comme $G = \cup_{i=1}^k x_i H$ alors $|G| = |\cup_{i=1}^k x_i H| = \sum_{i=1}^k |H| = k |H|$.

Donc $|H|$ divise $|G|$. ■

Proposition 1.1.2

Dans un groupe fini, l'ordre de tout élément divise l'ordre du groupe.

Démonstration.

L'ordre d'un élément est égal à l'ordre du sous-groupe qu'il engendre donc il divise l'ordre du groupe. ■

Corollaire 1.1.1

Soit G un groupe fini d'ordre n . Alors, quel que soit l'élément g de G , $g^n = 1$ (1 est l'élément de G).

Démonstration.

D'après la proposition précédente $|\langle g \rangle|$ divise n donc il existe un entier m tel que $n = |\langle g \rangle| m$.

D'où,

$$\begin{aligned}g^n & = g^{|\langle g \rangle| m} \\ & = (g^{|\langle g \rangle|})^m \\ & = 1^m \\ & = 1.\end{aligned}$$

■

1.1.4 Exemple(groupe symétrique)

Rappels, propriétés

Soit n un entier naturel non nul.

Définition 1.1.13

On note S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ c'est à dire l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ vers $\{1, \dots, n\}$.

L'ensemble S_n avec (\circ) la composition des applications est groupe fini d'ordre $n!$, appelé groupe symétrique de degré n .

Remarque 1.1.1

- 1) S_1 et S_2 sont abéliens.
- 2) pour $n \geq 3$, S_n n'est pas abélien.

Notation 1.1.2

On peut écrire une permutation σ sous la forme suivante:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Ainsi, l'identité (e) s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est la permutation de $\{1, 2, 3\}$ qui envoie 1 sur 2, 2 sur 3 et 3 sur 1.

σ -orbite

Définition 1.1.14

Soit $\sigma \in S_n$, on appelle support de σ l'ensemble $\text{supp}(\sigma) = \{i \in \{1, \dots, n\} / \sigma(i) \neq i\}$

Remarque 1.1.2

- a) On a $\text{supp}(\sigma) = \emptyset \iff \sigma = e$.
- b) Quelle que soit $\sigma \in S_n$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $\text{supp}(\sigma^k) \subseteq \text{supp}(\sigma)$. Notons que cette inclusion peut être stricte.

Définition 1.1.15

Soit $\sigma \in S_n$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. On appelle σ -orbite de i l'ensemble

$$\Omega_\sigma(i) = \{\sigma^r(i) / r \in \mathbb{Z}\}$$

a) Si, sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, on définit la relation (d'équivalence) R_σ suivante:

$$iR_\sigma k \iff \exists r \in \mathbb{Z}, \sigma^r(i) = k$$

on voit que la σ -orbite de i , $\Omega_\sigma(i)$ n'est rien d'autre que la classe d'équivalence de i modulo R_σ

b) Soit $\sigma \in S_n$ avec $\sigma \neq e$. Posons $k = o(\sigma)$. On a alors $\langle \sigma \rangle = \{e, \sigma, \dots, \sigma^{k-1}\}$ il s'ensuit que pour tout $i = 1, \dots, n$, on a

$$1 \leq |\Omega_\sigma(i)| \leq k$$

on remarque alors on a $|\Omega_\sigma(i)| = 1 \iff i \notin \text{supp}(\sigma)$ (on dit que la σ -orbite est ponctuelle). Ainsi, si $i \in \text{supp}(\sigma)$, on a

$$2 \leq |\Omega_\sigma(i)| \leq n$$

c) Si $\{i_1, \dots, i_m\}$ désigne une classe de représentants des σ -orbites de $\{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire une classe de représentants de l'ensemble quotient $\{1, \dots, n\} / R_\sigma$, alors les sous ensembles $\{\Omega_\sigma(i_q)\}_{1 \leq q \leq m}$ forment une partition de $\{1, \dots, n\}$, on a donc

$$n = \sum_{q=1}^m |\Omega_\sigma(i_q)|$$

Exemple 1.1.6

Pour $n = 6$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, on a $\Omega_\sigma(1) = \{1, 5, 3\}$, $\Omega_\sigma(2) = \{2\}$, $\Omega_\sigma(4) = \{4, 6\}$.

Cycles et transposition

Définition 1.1.16

Dans S_n on appelle cycle de longueur r ($1 \leq r \leq n$) ou alors r -cycle, toute permutation $\sigma \in S_n$ telle qu'il existe r entiers distincts deux à deux de $\{1, \dots, n\}$, j_1, \dots, j_r tels que $\sigma(j_1) = j_2$, $\sigma(j_2) = j_3$, ..., $\sigma(j_{r-1}) = j_r$, $\sigma(j_r) = j_1$ et $\forall k \notin \{j_1, \dots, j_r\}$, $\sigma(k) = k$.

Un tel r -cycle sera noté (j_1, \dots, j_r) (son support est alors égal à $\{j_1, \dots, j_r\}$). On appelle transposition tout cycle de longueur 2.

Remarque 1.1.3

Une transposition est donc un élément de S_n qui échange deux éléments de $\{1, \dots, n\}$ et laisse invariant les autres.

On déduit qu'il y a exactement $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ transpositions dans S_n .

Exemple 1.1.7

a) toute cycle de longueur 1 est l'identité.

b) On a $S_2 = \{e, \tau\}$ où τ est transposition $(1\ 2)$. S_3 n'est composé que de cycle: e de longueur 1, trois transpositions $\tau_1 = (1\ 2), \tau_2 = (2\ 3)$ et $\tau_3 = (1\ 3)$, et deux 3-cycle $\mu_1 = (1\ 2\ 3)$ et $\mu_2 = (1\ 3\ 2)$.

Signature d'une permutation

Définition 1.1.17

Soit $\sigma \in S_n$. On appelle nombre d'inversions de σ , le nombre de paires $\{i, j\} \in \{1, \dots, n\}$ telles que la restriction de σ à $\{i, j\}$ soit décroissante (i.e. si $i > j$ alors $\sigma(i) < \sigma(j)$ et si $i < j$ alors $\sigma(i) > \sigma(j)$). On note ν_σ cet entier.

Exemple 1.1.8

Dans S_5 , on considère $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Les paires $\{i, j\}$ où il ya inversion sont $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$ et $\{3, 4\}$.

Ainsi, on a $\nu_\sigma = 7$.

Définition 1.1.18

Soit $\sigma \in S_n$, on appelle signature de σ l'entier (égal à ± 1) $e_\sigma = (-1)^{\nu_\sigma}$. On dira que σ est pair (resp. impair) si $e_\sigma = 1$ (resp. si $e_\sigma = -1$).

Groupe alterné**Définition 1.1.19**

On appelle groupe alterné de degré n le sous-ensemble A_n de S_n constitué des permutations pairs.

Proposition 1.1.3

Pour $n \geq 2$, l'ensemble A_n est sous groupe de S_n d'ordre $\frac{n!}{2}$.

Théorème de Cayley**Théorème 1.1.2**

Tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe du groupe S_G de ses permutations.

Démonstration.

Soit g un élément de G . L'application $f_g : G \rightarrow G$ définie par $f_g(x) = gx$ est bijective.

En effet, injective

$$\begin{aligned} f_g(x_1) = f_g(x_2) &\Rightarrow gx_1 = gx_2 \\ &\Rightarrow g^{-1}gx_1 = g^{-1}gx_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

et surjective : $\forall g \in G$

$$f_g(x) = gx = y \Rightarrow x = g^{-1}y.$$

c'est donc une permutation de G . L'application

$$F : G \rightarrow S_G, g \mapsto f_g$$

est un morphisme de groupes. En effet $F(gh)$ est l'application de G dans G qui à x associe ghx . Comme $ghx = g(hx)$, cet élément est aussi l'image de x par l'application $F(g) \circ F(h)$. On en déduit que $F(gh) = F(g) \circ F(h)$.

De plus, F est injective. En effet, si $F(g)$ est égal à l'identité, pour tout x de G on a $gx = x$, d'où $g = 1_G$, où 1_G est l'élément neutre de G , et $\ker(F) = \{1_G\}$. Par conséquent, F est un isomorphisme de G sur son image $F(G)$, qui est un sous-groupe de S_G . ■

1.2 Généralité sur les isométries

Rappel: La distance de deux points A et B sera notée $d(A, B)$ tel que $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Définition 1.2.1

On appelle *isométrie affine du plan (ou d'espace)* une transformation f , qui conserve les distances c'est-à-dire pour tout A, B du plan (ou d'espace)

$$d(A, B) = d(f(A), f(B))$$

(on notera aussi pour simplifier $f(A)f(B) = AB$). On retrouve cette définition le nom *isométrie d'origine grecque:*

iso-pour égales

métrie (de metros) pour mesures.

Donc l'*isométrie affine du plan (ou d'espace)* une application bijectif.

Définition 1.2.2 D'une isométrie vectorielle (ou endomorphisme orthogonal)

Soit E un espace vectoriel euclidien.

On appelle *isométrie vectorielle (ou endomorphisme orthogonal)* d'un espace, toute application linéaire de E dans E qui concerne la norme.

f est une isométrie vectorielle de $E \iff f$ est linéaire

$$\forall \vec{u} \in E, \|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|.$$

1.2.1 L'isométries de plan

Les transformations du plan

Définition 1.2.3 (La symétrie axiale)

Soit la droite (d) :

Les points M et M' se correspondent par la symétrie d'axe (d) si (d) est la médiatrice de $[MM']$.

Les points M et M' sont symétriques par rapport à la droite (d) :

- 1) Les droites (MM') et (d) sont perpendiculaires;
- 2) M et M' sont situés à égale distance de (d) .

Remarque 1.2.1

1. (d) étant la médiatrice de $[MM']$, tout point de (d) est situé à égal distance de M et M' .
2. chaque point de l'axe (d) a pour image lui même pour cette symétrie: les points de cet axe sont dits invariants.

Définition 1.2.4 (*La symétrie centrale*)

Soit le point O :

Les points M et M' se correspondent par la symétrie de centre O si O est milieu de $[MM']$.

Les points M et M' sont symétriques par rapport au point O si:

O appartient à segment $[MM']$ et $OM = OM'$.

Remarque 1.2.2

1. O étant centre de symétrie, il a pour symétrique lui même: il est invariant.
2. Deux droites symétriques par rapport à un point sont parallèles.

Définition 1.2.5 (*La translation*)

Dans une translation, tout point du plan est **projeté**.

dans la même direction

dans le même sens

sur la même longueur de trajet

Ces trois informations nous indiquant le déplacement à opérer sont contenues dans le mot magique **vecteur**.

Définition 1.2.6

Les points M et M' se correspondent par la translation qui transforme A en B si $ABM'M$ est un parallélogramme ou encore:

les vecteurs \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{MM'}$ sont égaux.

Remarque 1.2.3

- Si un point est invariant dans une translation alors tous les points sont invariants, c'est le cas particulier de la translation de vecteur nul.
- Deux droites se correspondant par translation sont parallèles.

Définition 1.2.7 (*La rotation*)

Pour définir une rotation, il faut connaître:

1. son centre
2. son angle
3. son sens

les points M et M' se correspondent par la rotation de centre O et d'angle α qui transformé A en B si

$$\widehat{MOM} = \widehat{AOB} = \alpha$$

et

$$OM = OM'.$$

Proposition 1.2.1

Les quatre transformations:

symétrie axiale, symétrie central, translation et rotation qui sont donc des isométries du plan.

Remarque 1.2.4

1. En composant deux isométries du plan, on trouve encore une isométrie du plan.
La composé de deux translations est un translation, la composé de translation et rotation est un rotation et la composé de deux rotations est un rotation ou une translation.
2. la translation et la rotation sont la composé de deux symétries axiale.

Théorème 1.2.1 (Reconnaissance des isométries selon les points invariants)

Soit f une isométrie du plan.

1. Si f admet trois points invariants, non alignés alors, $f = Id$
2. Si f est différente de Id et admet deux points invariants, distincts, A, B , alors f est une symétrie d'axe (AB) .
3. Si f admet un seul point invariant alors f est une rotation de centre ce point.
4. Si f n'admet aucun point invariant alors f est une translation.

Démonstration.

Soit f une isométrie du plan.

1. Soit A, B, C trois points non alignés de plan telle que:

$$\begin{aligned} f(A) &= A \\ f(B) &= B \\ f(C) &= C \end{aligned}$$

dans ce cas $\forall M \in P$, M est aussi un point invariant car si $f(M) = M'$ telle que $M \neq M'$, on a:

$$\begin{aligned} AM &= AM' \\ BM &= BM' \\ CM &= CM' \end{aligned}$$

ce qui implique A, B, C appartient à axe de $[MM']$, mais A, B, C non alignés il ya contradiction, donc $f = Id$.

2. supposons que $f \neq Id$ et soit $A, B \in P$ telle que $A \neq B$ et $f(A) = A, f(B) = B$ soit $C \in P, C$ non alignés avec A et B telle que $f(C) = C'$.

On a $C \neq C'$ car si $C = C'$ alors f admet trois points invariant non alignés donc $f = Id$. soit h la symétrie d'axe de $[CC']$, c'est à dire $(h \circ f)(C) = C$ et

$$\begin{aligned} (h \circ f)(A) &= A \\ (h \circ f)(B) &= B \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} AC &= AC' \\ BC &= BC' \end{aligned}$$

ce qui implique A et B situés à l'axe de $[CC']$ donc $h \circ f = Id$ alors

$$h \circ h \circ f = (h \circ h) \circ f = Id \circ f = f$$

et

$$\begin{aligned} h \circ h \circ f &= h \circ (h \circ f) = h \circ Id = h \\ \text{donc } f &= h \end{aligned}$$

donc si f est différente de Id et admet deux points invariants, distincts, A, B , alors f est une symétrie d'axe (AB) .

3. Soit $A \in P$ un seul point invariant alors $f(A) = A$, et soit $B \in P$ telle que $B \neq A$ et $f(B) = B'$,

on a : $B \neq B'$ car si $B = B'$ alors f admet deux points invariants mais f admet un seul point invariant.

Soit h est symétrie d'axe de $[BB']$.

On a f est une isométrie donc $AB = AB'$, donc A appartient à l'axe de $[BB']$, et on a : $(h \circ f)(A) = A$ et $(h \circ f)(B) = B$ et $h \circ f \neq Id$ car si $h \circ f = Id$ alors, $h \circ h \circ f = h \circ Id$ donc $f = h$ dans ce cas f admet une infinité de points invariants, d'après 2 on a : $h \circ f = h'$ telle que h' est la symétrie d'axe (AB) et $h \circ f = h'$ donne $h \circ h \circ f = h \circ h'$ donc $f = h \circ h'$, alors f est la composée de deux symétries par rapport à deux droites concourant en A donc f est une rotation de centre A .

4. Soit f n'admet aucun point invariant et soit A un point du plan telle que $f(A) = A'$ et $A \neq A'$,

on appelle (Δ) est l'axe de $[AA']$ et h est la symétrie par rapport à (Δ) . On a $(h \circ f)(A) = A$, d'après 1, 2 et 3 $h \circ f = Id$ ou $h \circ f$ est la symétrie par rapport à la droite qui appartient à A ou rotation de centre A .

- Si $h \circ f = Id$ alors $h \circ h \circ f = h \circ Id$ donc $f = h$ ce cas impossible car f n'admet pas un point invariant.
- Si $h \circ f = h'$ telle que h' est la symétrie d'axe (Δ') et $A \in (\Delta')$ donc $h \circ h \circ f = h \circ h'$ c'est à dire $f = h \circ h'$ donc f est la composé de deux symétries par rapport deux droites parallèles car si $(\Delta) \cap (\Delta') = \{B\}$ alors f est rotation de centre B et ce cas impossible donc $h \circ f = h'$ alors f est translation.
- Si $h \circ f = r(A, \theta)$ telle que $\theta \neq 0$ alors $h \circ h \circ f = h \circ r(A, \theta)$ c'est à dire $f = h \circ r(A, \theta)$ donc f est la composé de trois symétries car $r(A, \theta)$ est composé de deux symétries axiales.

■

Conclusion 1.2.1

Chaque isométrie est Id ou symétrie axiale ou translation ou rotation ou bien la composé de trois symétries par rapport à trois droites.

1.2.2 Isométries affines dans l'espace euclidien

Notation: φ est espace affine euclidien et E l'espace vectoriel associé.

Applications affines**Théorème 1.2.2**

Etant donné un couple de points (o, o') d'un espace affine φ et un endomorphisme g de l'espace vectoriel associé E , il existe dans φ une application f qui à tout point m de φ associé le point m' tel que:

$$\overrightarrow{o'm'} = g(\overrightarrow{om})$$

En effet la détermination de $\overrightarrow{o'm'}$ entraîne celle de m' .

l'application f est appelée **application affine** définie par (o, o') et g ; on dit que g est l'**application linéaire** associée à f .

Définition 1.2.8

Tout bijection affine f de g ayant pour endomorphisme associé une transformation orthogonale de E est une isométrie.

Définition 1.2.9

L'ensemble des isométries de φ_3 est l'ensemble des bijections affines de φ_3 telles que chacune a pour endomorphisme associé une transformation orthogonale E_3 . Nous noterons $Is(\varphi_3)$ cet ensemble: c'est un sous ensemble de $A(\varphi_3)$ le groupe affine de φ_3 .

Définition 1.2.10

Toute isométrie de φ_3 pour laquelle la transformation orthogonale associée est une rotation vectorielle de E_3 est déplacement si non antidéplacement.

Rappel

L'application H qui à toute isométrie de φ_3 fait correspondre la transformation orthogonale associée de E_3 réalise un morphisme du groupe des déplacements $D(\varphi_3)$ dans le groupe des rotations vectorielles $R(E_3)$,

Déplacements de φ_3 **Rotation de φ_3** **Définition 1.2.11**

Etant donné une droite orientée \vec{D} et un angle θ , on appelle **rotation d'axe \vec{D} et d'angle θ** l'application de φ_3 dans φ_3 qui laisse invariants tous les points de la droite D , et dont la restriction à tout plan P orthogonal à D est une rotation plane d'angle θ (l'orientation du plan P étant associée à celle de \vec{D}). On note cette rotation $r(\vec{D}, \theta)$. Si \vec{D}' désigne l'axe opposé à \vec{D} , la rotation $r(\vec{D}', -\theta)$ est la même application que $r(\vec{D}, \theta)$. Et la rotation $r''(\vec{D}, -\theta)$ est la réciproque de r .

Théorème 1.2.3

Toute isométrie f de φ_3 admettant comme ensemble de points invariants une droite D est une rotation dont l'axe est porté par D .

On montre aisément que la transformation orthogonale ψ associée est une rotation vectorielle, et que la restriction de f à un plan P orthogonale à D est une rotation.

Théorème 1.2.4

Tout déplacement de φ_3 ayant au moins un point invariant est une rotation dont l'axe passe par ce point.

Vissage

Définition 1.2.12

D désignant une droite affine, Δ la direction de D , θ une mesure d'angle (en radians, mod 2π), \vec{V} un vecteur appartenant à Δ , on appelle *vissage* d'axe \vec{D} , d'angle θ , de vecteur \vec{V} , le produit de la rotation $r(\vec{D}, \theta)$ par la translation t de vecteur \vec{V} .

On note ce déplacement $V(\vec{D}, \theta, \vec{V})$; \vec{D}' étant l'axe opposé à \vec{D} , $\vec{V}' = (\vec{D}', -\theta, \vec{V})$ désigne le même *vissage*.

Remarque 1.2.5

La *vissage* V se réduit à la rotation r si $\vec{V} = \vec{0}$, à la translation t si $\theta = 0$, à l'identité si $\theta = 0$ et $\vec{V} = \vec{0}$. Par la suite on dira *vissage stricte* si $\vec{V} \neq \vec{0}$ et $\theta = 0$.

Symétries axiales de φ_3

Définition 1.2.13

Etant donnée une droite D , on appelle *symétrie d'axe D* l'application de φ_3 dans φ_3 qui à tout point M associe le point M' symétrique de M par rapport à D dans le plan (M, D) .

On notera s ou s_D . On dit aussi : *symétrie-droite, demi-tour, retournement plan*.

Théorème 1.2.5

Toute *symétrie axiale* dans φ_3 est un déplacement, rotation d'axe D et d'angle π .

On démontre que l'application vectorielle associée δ est une rotation et que D est l'ensemble des points invariants. De plus l'orientation de D n'intervient pas, on parle donc de *symétrie d'axe D* sans préciser le sens choisi sur D .

Antidéplacement de φ_3 **Symétrie par rapport à un plan****Définition 1.2.14**

Etant donné un plan affine P , on appelle symétrie par rapport à ce plan l'application qui à tout point M de φ_3 associe le point M' défini ainsi : H étant la projection orthogonale de M sur P ,

$$\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$$

on la note Sp , P est appelé le plan de symétrie.

Théorème 1.2.6 Toute symétrie par rapport à un plan affine P est un antidéplacement de φ_3 admettant comme ensemble de points invariants le plan de symétrie P .

Démonstration.

En effet, O étant un point de P , l'application vectorielle associée δ est telle que $\delta(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}$ avec $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\|$, δ est donc une symétrie par rapport au plan vectoriel P direction de P ; Sp est l'antidéplacement associé à δ et l'ensemble des points invariants est le plan P . ■

Produits de symétries-plan

Théorème 1.2.7 Le produit non commutatif des symétrie par rapport à deux plans parallèles est une translation.

Théorème 1.2.8 Le produit non commutatif des symétrie par rapport à deux plans sécants suivant une droite D est une rotation d'axe \overrightarrow{D} et d'angle $\theta = 2(d, d')$, d et d' étant les intersections de P et de P' avec un plan R orthogonal à D , R étant orienté par le choix de \overrightarrow{D} .

Symétries centrales**Définition 1.2.15**

On appelle symétrie de centre O l'application de φ_3 dans φ_3 qui à tout point M associé le point M' tel que O soit milieu du segment MM' , c'est-à-dire $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

Théorème 1.2.9

Toute symétrie centrale de φ_3 est un antidéplacement laissant un seul point invariant.

Théorème 1.2.10

Le produit de deux symétries de centres o et o' distincts est la translation de vecteur $2oo'$.

Définition 1.2.16 (Barycentre)

On donne n points A_1, A_2, \dots, A_n de l'espace et n nombres réels a_1, a_2, \dots, a_n . A un point quelconque M , nous associons le vecteur:

$$\vec{V}_m = a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n}$$

la fonction $M \mapsto \vec{V}_m$ est appelée fonction barycentrique, si $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ cette fonction appelé isobarycentre

Chapitre 2

Groupe de symétries dans le plan et dans l'espace

Dans ce chapitre, on étudie le groupe d'isométrie et le groupe de déplacement dans le plan et dans l'espace avec des exemples.

2.1 Groupe de symétries dans le plan

2.1.1 Groupe d'isométries dans le plan

Soit $Is(P)$ est l'ensemble des isométries du plan.

Théorème 2.1.1

$(Is(P), \circ)$ est groupe (\circ = loi de composition des applications).

Démonstration.

$Is(P) \neq \emptyset$ car $Id_P \in Is(P)$.

On montre que $(Is(P), \circ)$ est sous groupe des bijections du plan .

Soient $M, N \in P$, et $f, g \in Is(P)$. Alors

$$\begin{aligned}d((g \circ f)(M), (g \circ f)(N)) &= d(g(f(M)), g(f(N))) \\ &= d(f(M), f(N)) \\ &= d(M, N)\end{aligned}$$

donc $g \circ f \in Is(P)$. De plus, f est bijective, donc

$$d(M, N) = d(f(M), f(N)) \Rightarrow d(f^{-1}(M), f^{-1}(N)) = d(f^{-1}(f(M)), f^{-1}(f(N))) = d(M, N)$$

donc $f^{-1} \in Is(P)$ alors $(Is(P), \circ)$ est groupe. ■

Groupe des déplacements

Définition 2.1.1

Une isométrie du plan qui conserve les angles orientés est appelée déplacement celle qui l'inverse est appelé antidéplacement

on note leur ensemble respectivement $Is^+(P)$ et $Is^-(P)$.

Remarque 2.1.1

On a

- un déplacement d'angle nul est une translation.
- un déplacement d'angle π est une symétrie centrale.
- un déplacement d'angle θ non nul est une rotation d'angle θ .

Notation 2.1.1 On a $Is^-(P) = Is(P) \setminus Is^+(P)$.

Proposition 2.1.1

$(Is^+(P), \circ)$ est un groupe.

Démonstration.

$Id_P \in Is^+(P)$ est évident.

Soient $a, b, c \in P$ et $f, g \in Is^+(P)$. pour tout $x \in \{a, b, c\}$, on note $x' = f(x)$ et $x'' = g(x)$, de sorte que $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = (\overrightarrow{a'b'}, \overrightarrow{a'c'}) = (\overrightarrow{a''b''}, \overrightarrow{a''c''})$, donc $g \circ f$ conserve les angles orientés.

De plus, on sait par le théorème 2.1.1 que f^{-1} existe et $f^{-1} \circ f = Id_P$,

donc $f^{-1} \circ f(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = (\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) \Leftrightarrow f^{-1}(\overrightarrow{a'b'}, \overrightarrow{a'c'}) = (\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$, et il vient que $f^{-1} \in Is^+(P)$ (car $(\overrightarrow{a'b'}, \overrightarrow{a'c'})$ et $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ ont la même orientation puisque $f \in Is^+(P)$). ■

2.1.2 Exemple de groupe des isométries

Groupe diédral

Définition 2.1.2

Toute isométrie d'un polygone régulier à n sommets dans son plan est une rotation autour de son centre, d'angle $2\pi k/n$, k étant un nombre entier.

Il y a donc n isométries du polygone régulier à n sommets dans son plan. Nous avons vu que ces n rotations forment un groupe, noté D_n .

Proposition 2.1.2

Le groupe diédral, D_n , pour ($n \geq 3$) est un sous groupe d'ordre $2n$ de groupe symétrique S_n .

Cas particulier

1) Pour $n = 4$ (Le groupe des isométries d'un carré)

Exemple 2.1.1

On note D_4 le groupe des isométries du carré.

Les éléments de D_4 sont

I = identité

R_1 = la rotation de centre O (le centre du carré) et d'angle $\pi/2$

R_2 = la rotation de centre O (le centre du carré) et d'angle π

R_3 = la rotation de centre O (le centre du carré) et d'angle $3\pi/2$

H = la symétrie par rapport à l'axe de symétrie horizontal

V = la symétrie par rapport à l'axe de symétrie vertical

Δ_1 = la symétrie par rapport à la première diagonale

Δ_2 = symétrie par rapport à la deuxième diagonale.

qui se composent suivant la table

\circ	I	R_1	R_2	R_3	H	V	Δ_1	Δ_2
I	I	R_1	R_2	R_3	H	V	Δ_1	Δ_2
R_1	R_1	R_2	R_3	I	Δ_1	Δ_2	V	H
R_2	R_2	R_3	I	R_1	V	H	Δ_2	Δ_1
R_3	R_3	I	R_1	R_2	Δ_2	Δ_1	H	V
H	H	Δ_2	V	Δ_1	I	R_2	R_3	R_1
V	V	Δ_1	H	Δ_2	R_2	I	R_1	R_3
Δ_1	Δ_1	H	Δ_2	V	R_1	R_3	I	R_2
Δ_2	Δ_2	V	Δ_1	H	R_3	R_1	R_2	I

Proposition 2.1.3

le groupe D_4 isomorphe un sous groupe de S_4 (théorème de cayley).

2) Pour $n = 3$ (le groupe des isométries d'un triangle équilatéral)

Exemple 2.1.2

On note D_3 le groupe des isométries d'un triangle équilatéral .

Les éléments de D_3 sont

$I =$ identité.

$R_1 =$ la rotation de centre O (le centre du triangle équilatéral) et d'angle $2\pi/3$.

$R_2 =$ la rotation de centre O (le centre du triangle équilatéral) et d'angle $4\pi/3$.

$V =$ la symétrie par rapport à l'axe de symétrie vertical.

$\Delta_1 =$ la symétrie par rapport à la première diagonale.

$\Delta_2 =$ symétrie par rapport à la deuxième diagonale.

qui se composent suivant la table:

\circ	I	R_1	R_2	V	Δ_1	Δ_2
I	I	R_1	R_2	V	Δ_1	Δ_2
R_1	R_1	R_2	I	Δ_2	V	Δ_1
R_2	R_2	I	R_1	Δ_1	Δ_2	V
V	V	Δ_1	Δ_2	I	R_1	R_2
Δ_1	Δ_1	Δ_2	V	R_2	I	R_1
Δ_2	Δ_2	V	Δ_1	R_1	R_2	I

Exemple 2.1.3

Soit n un entier, $n \geq 3$.

On se propose de déterminer l'ensemble G des isométries (du plan) préservant les sommets d'un n -gone.

Soient O le centre du n -gone, A_0 l'un de ses sommets et g un élément de G . On note A_0, A_1, \dots, A_{n-1} les sommets du n -gone, dans cet ordre.

On note s la symétrie d'axe (OA_0) et r_i la rotation de centre O qui envoie A_0 en A_i ($0 \leq i \leq n-1$)

1. Démontrer que G est un groupe dont l'ordre divise $n!$.
2. a) On suppose dans cette question que $g(A_0) = A_0$. Que peut-on dire de g ?
 b) On suppose dans cette question que $g(A_0) = A_i$, ($1 \leq i \leq n-1$).
 Démontrer que: $g = r_i$ ou $g = r_i \circ s$
 c) En déduire que:

$$G = \langle r, s \rangle \text{ où } r = r_i$$

préciser l'ordre de G .

3. Compositions d'éléments de G :

a) Démontrer que :

$$s \circ r \circ s \circ r = Id$$

b) Démontrer que :

$$\forall i, j \in [0, n-1]^2, (r^i \circ s) \circ (r^j \circ s) = r^{i-j}$$

Solution 2.1.1

1. Il est clair que G est un sous groupe du groupe symétrique S_n .

D'après le théorème de Lagrange, on peut affirmer que l'ordre de G divise $n!$

2. a) g possède deux déjà points fixes. Il y a évidemment A_0 . Mais également O . En effet, comme g est affine, elle conserve le barycentre d'une famille de points. Donc $g(O) = O$. (car O est l'isobarycentre de A_0, A_1, \dots, A_{n-1})

En conséquence, g fixe la droite (A_0O) . (puisque cette droite est l'ensemble des barycentres de A_0 et O) on en déduit:

$$g = s \text{ ou } g = Id.$$

b) On a: $(r_i^{-1} \circ g)(A_0) = r_i^{-1}(A_i) = A_0$. Et d'après a): $r_i^{-1} \circ g = s$ ou $r_i^{-1} \circ g = Id$

D'où: $g = r_i \circ s$ ou $g = r_i$. De plus, ces deux isométries sont bien distinctes puisque l'on a, par exemple:

$$(r_i \circ s)(A_1) = r_i(A_{n-1}) = A_{i-1[n]} \text{ et } r_i(A_1) = A_{i+1[n]}$$

or, $i-1 = i+1 [n]$ entraîne, $2 = 0 [n]$ ce qui est exclu car $n \geq 3$. Donc $r_i \circ s(A_1) \neq r_i(A_1)$.

c) D'après les questions a) et b), on a examiné toutes les possibilités de transformation du point A_0 . (À chaque image possible de A_0 correspond deux isométries distinctes).

On a la liste des isométries suivantes:

$$Id, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_1 \circ s, r_2 \circ s, \dots, r_{n-1} \circ s$$

En notant

$$r = r_1, \text{ on a bien } G = \langle r, s \rangle$$

l'ordre de G est $2n$. (Et $|\langle r \rangle| = n, |\langle s \rangle| = 2$)

3. a) $r \circ s \circ r(A_0) = r \circ s(A_1) = r(A_{n-1}) = A_0$.

Donc, d'après 2)a):

$$r \circ s \circ r = Id \text{ ou } r \circ s \circ r = s$$

Or: $r \circ s \circ r(A_1) = r \circ s(A_2) = r(A_{n-2}) = A_{n-1}$.

Donc $r \circ s \circ r \neq Id$.

D'où:

$$r \circ s \circ r = s$$

$$s \circ r \circ s \circ r = Id$$

$$(\text{on a aussi} \quad : \quad r \circ s \circ r \circ s = Id)$$

b) Utilisons $r \circ s = s \circ r^{-1}$. (D'après 3)a))

$$(r^i \circ s) \circ (r^j \circ s) = r^i \circ s \circ \underbrace{r \circ \dots \circ r}_{j \text{ fois}} \circ s = r^i \circ s \circ s \circ r^{-j} = r^{i-j}$$

2.2 Groupe de symétries dans l'espace

2.2.1 le groupe d'isométries

Définition 2.2.1

On note $GL(E_3)$ le groupe des bijections linéaires de E_3 et $A(\varphi_3)$ le groupe affine de φ_3 . Dans l'un et l'autre la loi de composition des applications sera notée multiplicativement. f étant une bijection affine, δ la bijection linéaire associée, il existe une application H de $A(\varphi_3)$ dans $GL(E_3)$:

$$f \in A(\varphi_3); f \mapsto H(f) = \delta \in GL(E_3).$$

Nous savons que H est un homomorphisme de $A(\varphi_3)$ dans $GL(E_3)$, c'est à dire que

$$H(f' \cdot f) = H(f') \cdot H(f) = \delta' \cdot \delta$$

Si f et f' sont des isométries, les endomorphismes δ et δ' associés sont des transformations orthogonales ainsi que $\delta' \delta$, par suite $f' \cdot f$ est une isométrie et la loi de composition des applications est interne dans $Is(\varphi_3)$. De plus l'homomorphisme H implique que la bijection réciproque f^{-1} a pour endomorphisme associé δ^{-1} qui est une transformation orthogonale,

donc f^{-1} est une isométrie.

En général $ff' \neq f'f$ puisque $\delta\delta' \neq \delta'\delta$.

Conclusion 2.2.1

L'ensemble $Is(\varphi_3)$ muni de la loi de composition des applications a une structure de groupe non commutatif: on l'appelle groupe des isométries de φ_3 . C'est un sous groupe du groupe $A(\varphi_3)$. L'application H réalise un homomorphisme de $Is(\varphi_3)$ dans le groupe orthogonal de E_3 . [12]

groupe des déplacements

Définition 2.2.2

On appelle déplacement de φ_3 toute isométrie de φ_3 pour laquelle la transformation orthogonale associée est une rotation vectorielle de E_3 .

L'ensemble des déplacements de φ_3 sera noté $D(\varphi_3)$: c'est un sous ensemble de $Is(\varphi_3)$. D'après la définition (2, 2, 1) en considérant l'ensemble $D(\varphi_3)$ et l'ensemble $R(E_3)$ des rotations vectorielles de E_3 . $R(E_3)$ muni de la loi \cdot est un sous groupe du orthogonale de E_3 . f et f' étant deux éléments quelconques de $D(\varphi_3)$ ayant pour rotations vectorielles associées δ et δ' , l'homomorphisme H du groupe $Is(\varphi_3)$ dans le groupe orthogonale de E_3 montre que ff' , $f'f$ et f^{-1} sont des éléments de $D(\varphi_3)$.

Conclusion 2.2.2

L'ensemble $D(\varphi_3)$ muni de la loi de composition des applications a une structure de groupe: c'est un sous groupe du groupe des isométries, on l'appelle le groupe des déplacements de φ_3 .

La restriction de H à $D(\varphi_3)$ est un homomorphisme du groupe $D(\varphi_3)$ dans le groupe $R(E_3)$. [12]

2.2.2 Exemple de groupe d'isométries

le groupe des rotations du tétraèdre

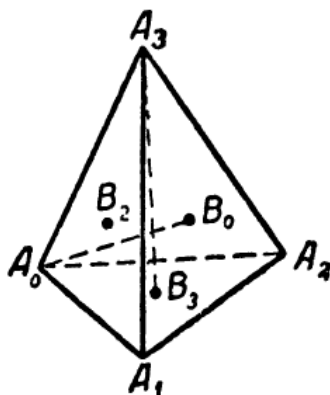


FIG. 7.

Pour déterminer toutes les isométries du tétraèdre régulier $A_0A_1A_2A_3$ (fig.7), envisageons d'abord celle qui laissent fixe un de ses sommets,

par exemple, A_0 . Ces isométries transforment alors le triangle $A_1A_2A_3$ en lui même; ce sont les rotations $0, 2\pi/3, 4\pi/3$ autour de son centre B_0 . Il en résulte qu'il y a seulement 3 isométries du tétraèdre laissant fixe le sommet A_0 : l'isométrie identique a_0 qui garde tous les éléments du tétraèdre, et les deux rotations $2\pi/3, 4\pi/3$ autour de l'axe A_0B_0 , que nous désignons par a_1 et a_2 . Soit maintenant une isométrie particulière du tétraèdre emmenant le sommet A_0 en A_i ($i = 1, 2, 3$).

Désignant par x_0 l'isométrie identique, nous allons démontrer que, b étant une isométrie quelconque du tétraèdre, on peut écrire

$$b = a_i + x_k \quad (1)$$

($i = 1, 2, 3$) et ($k = 0, 1, 2, 3$), i et k étant déterminés d'une façon univoque.

Si b est une isométrie du tétraèdre, elle emmène le sommet A_0 en un sommet bien déterminé A_k $k = 0, 1, 2, 3$.

Alors l'isométrie $b - x_k$ laisse fixe le sommet A_0 et est donc une isométrie bien déterminée a_i telle que

$$b - x_k = a_i$$

et par suite:

$$b = x_k + a_i$$

i et k étant déterminés d'une façon univoque. Comme réciproquement, d'après (1), à tout couple (i, k) correspond isométrie bien déterminée du tétraèdre, il existe une correspondance biunivoque entre les isométries du tétraèdre et les couples (i, k) , i prenant les valeurs 0, 1, 2 et k les valeurs 0, 1, 2, 3.

Il en résulte qu'il ya exactement 12 isométries du tétraèdre correspond à une permutation déterminée de ses sommets, donc à une substitution déterminée des numéros qui leur sont associés.

Les substitutions portant sur 4 éléments sont au nombre de 24, mais parmi elles il y en a seulement 12 correspondant à des isométries du tétraèdre. Nous allons établir une correspondance entre ces isométries et substitutions du 4 éléments.

Pour abrégier le langage, appelons médiane du tétraèdre la droite joignant le sommet A_i du tétraèdre au centre B_i de la face opposée, et «(droite des milieux)» la droite qui passe par les milieux de deux arêtes opposées du tétraèdre.

A chaque médiane correspondent deux isométries du tétraèdre distinctes de l'isométrie identique; ce sont les rotations $2\pi/3$ et $4\pi/3$ autour de cette droite. Nous obtenons en 8 rotations représentable comme substitution des numéros attribués aux sommets de la manière suivante:

$$\begin{aligned} a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad a_5 = \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad a_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad a_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad a_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Achaque droite des milieux correspond une rotation distincte de la rotation nulle; c'est une rotation d'angle π . Comme le tétraèdre a 3 droites des milieux, il y a 3 rotations distinctes d'angle π .

On peut les représenter par les substitutions suivantes:

$$a_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad a_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3).$$

Ces 11 rotations constituent, avec le rotation nulle (isométrie identique) les 12 isométries du tétraèdre. Chacune de ces tétraèdre (1). Pour cette raison, le groupe des isométries du tétraèdre est encore appelé groupe des rotations du tétraèdre.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que toutes les substitutions (2) et (3) sont paires. Comme il ya a 12 substitutions paires de 4 éléments qui sont ici les sommets du tétraèdre, il existe évidemment une correspondance entre le groupe des rotations du tétraèdre et le groupe A_4 . [3]

Chapitre 3

Applications en chimie

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la symétrie aux systèmes moléculaires dans le cadre mathématique de la théorie des groupes.

On étudie les opérations de symétrie d'une molécule et les applique en détail à de petites molécules comme l'eau. Nous allons aborder les outils de la théorie des groupes puis son application aux molécules.

3.2 Opérations de symétrie

Définition 3.2.1 (*Opérations de symétrie*)

Une opération de symétrie est le mouvement de déplacement d'un objet le conduisant soit à une position équivalente soit à une position identique.

Chaque opération de symétrie possède un **élément de symétrie**, qui sera un axe un plan ou un point.

3.2.1 Eléments de symétrie d'une molécule

Eléments de symétrie d'une molécule sont:

1. **E**, l'identité.

Toutes les molécules ont au moins cet élément.

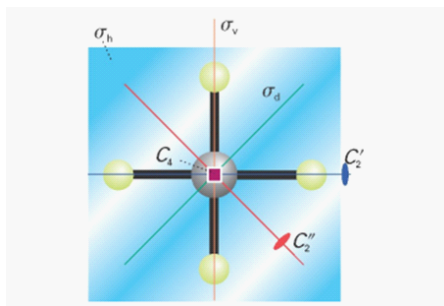
2. **C_n**, la rotation d'ordre n , c'est à dire d'un angle de $2\pi/n$ laisse la molécule inchangée.
La molécule d'eau possède un axe de rotation C_2 .

Certaines molécules ont plusieurs axes de symétrie; dans ces cas l'axe qui a la plus grande valeur de n est appelé l'axe principal.

Par convention, les rotations s'effectuent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

3. **σ** , le plan de symétrie.

La réflexion au travers de ce plan laisse la molécule inchangée. Dans une molécule qui contient également un axe de rotation, si le plan contient cet axe, il est noté σ_v . Si le plan est perpendiculaire à cet axe, il sera noté σ_h . Un plan bissecteur de deux axes de rotation C_2 sera noté σ_d .



Certains éléments de symétrie d'une molécule comme XeF_4

il ya deux couples d'axes de rotation d'ordre 2 perpendiculaires à l'axe principal d'ordre 4

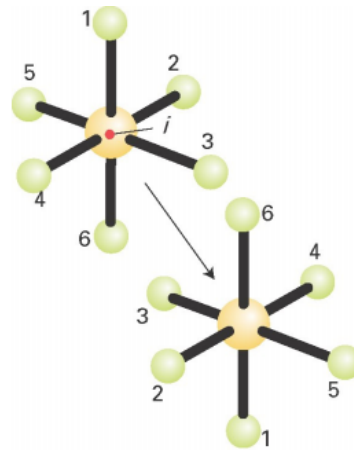
Un plan de symétrie σ_h contenu dans le plan de la feuille, et deux ensembles de plans

σ_v et σ_d

4. i , le centre d'inversion ou centre de symétrie.

L'inversion au travers de ce centre de symétrie laisse la molécule inchangée.

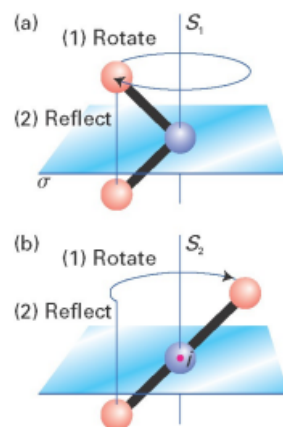
L'inversion consiste à projeter tous les points au travers de ce centre.



Le centre d'inversion et l'opération d'inversion dans une molécule de SF_6

5. S_n , la rotation impropre d'ordre n (rotation/réflexion). Cette opération consiste en une rotation d'ordre n suivie par une réflexion dans un plan perpendiculaire à cet axe.

S_1 est équivalent à une réflexion, S_2 à une inversion.



Rotations impropres d'ordres 1 et 2 équivalentes à une réflexion et une inversion

3.3 Les groupes ponctuels

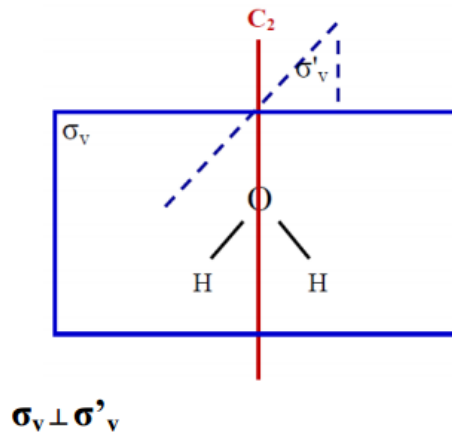
Définition 3.3.1

L'ensemble complet des opérations de symétrie effectuables sur une molécule constitue un

groupe. Les groupes des opérations de symétrie des molécules sont des groupes ponctuels car tous les éléments de symétrie passent par un point de la molécule; ce point est invariant par les opérations des symétries du groupe. Ce point n'est pas forcément un centre de symétrie.

Exemple 3.3.1

vérifions que une opération de symétrie de H_2O forme un groupe.



Les éléments de symétrie sont:

C_2 : axe de symétrie

σ_v : plan moléculaire (contient l'axe C_2).

$\sigma_v \perp \sigma'_v$ (contient l'axe C_2).

Les opérations de symétries sont:

$C_2^1, C_2^2 = E, \sigma_v, \sigma_v^2 = E, \sigma'_v, \sigma_v'^2 = E$.

Table de multiplication:

\cdot	E	C_2^1	σ_v	σ'_v
E	E	C_2^1	σ_v	σ'_v
C_2^1	C_2^1	E	σ'_v	σ_v
σ_v	σ_v	σ'_v	E	C_2^1
σ'_v	σ'_v	σ_v	C_2^1	E

La loi de composition est interne,

- il y a un élément neutre E ,

- la loi est associative,

- tout élément a un inverse : lui-même,
- la table présente une symétrie par rapport à la diagonale, donc c'est un groupe abélien d'ordre 4.

3.3.1 des opérations de symétrie engendrées par chacun des éléments de symétrie d'une molécule

La liste complète de toutes les opérations de symétrie engendrées par chacun des éléments de symétrie d'une molécule répond aux 4 critères d'un groupe mathématique. Par exemple pour une molécule plane AB_3 ces opérations sont:

$$E, C_3, C_3^2, C_2, C_2', C_2'', \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v'', \sigma_h, S_3 \text{ et } S_3^2$$

Considérons systématiquement quels genres de groupes seront obtenus à partir des différentes séries d'opérations de symétrie:

a) Groupes engendrés par un seul élément de symétrie:

l'élément de symétrie	le groupe engendré par ce élément
$\exists! E$	$\langle E \rangle = \{E\} = C_1$
$\exists! \sigma$	$\langle \sigma \rangle = \{\sigma, \sigma^2 = E\} = C_s$
$\exists! i$	$\langle i \rangle = \{i, i^2 = E\} = C_i$
$\exists! S_n (n \text{ pair})$	$\langle S_n \rangle = \{E, S_n, C_{n/2}, S_n^2, \dots, S_n^{n-1}\} = S_n$
$\exists! S_n (n \text{ impair})$	$\langle S_n \rangle = \{E, C_n, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, \sigma_h, S_n, S_n^3, \dots, S_n^{n-2}, S_n^{n+2}, \dots, S_n^{2n-1}\} = C_{nh}$

b) Groupes engendrés par deux ou plusieurs éléments de symétrie:

l'éléments de symétrie	le groupe engendré par ces éléments
$\exists C_n \perp nC_2$	$\{E, C_n, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, nC_2\} = D_n$
$\exists C_n \perp \sigma(\sigma_h)$	$\{E, C_n, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, \sigma_h, \sigma_h C_n, \sigma_h C_n^2, \dots, \sigma_h C_n^{n-1}\} = C_{nh}$
$\exists C_n // \sigma(\sigma_v); n \text{ impair}$	$\{E, C_n, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, n\sigma_v\} = C_{nv}$
$\exists C_n // (\sigma_v); n \text{ pair}$	$\{E, C_n, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, n\sigma_v/2, \} = C_{nv}$
$\exists C_n + nC_2 + \sigma_h$	$\{4n \text{ opérations}\} = D_{nh}$
$\exists C_n + nC_2 + \sigma_d$	$\{4n \text{ opérations}\} = D_{nd}$

c) Groupes spéciaux:

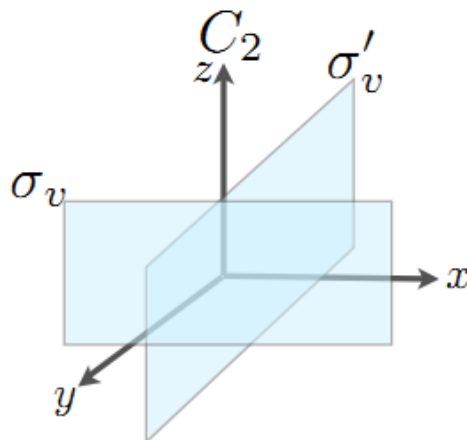
1. Molécules linéaires sans centre de symétrie: $C_{\infty v}$
2. Molécules linéaires avec centre de symétrie: $D_{\infty h}$
3. Tétraèdre, 24 opérations, T_d
4. Octaèdre, 48 opérations, O_h
5. Icosaèdre, 120 opérations, I_h

3.3.2 Représentation du groupe

Définition 3.3.2

Une représentation d'un groupe est l'ensemble des matrices correspondant chacune à une opération simple du groupe.

Exemple 3.3.2 On a les éléments de symétrie E , C_2 , σ_v , σ'_v forment un groupe, nous allons décrire leurs effets sur un vecteur quelconque (x, y, z) .



$$E(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$C_2(x, y, z) = (-x, -y, z)$$

$$\sigma_v(x, y, z) = (x, -y, z)$$

$$\sigma'_v(x, y, z) = (-x, y, z)$$

Ici, l'effet de ces éléments sur le vecteur r était facile à identifier. Plus généralement, une rotation d'un vecteur r et d'angle θ par rapport à un axe N résulte en un nouveau vecteur r' ,

$$r'(n, \theta) = r \cos(\theta) + (n * r) \sin(\theta) + n(n - 1)(1 - \cos(\theta))$$

- Un plan est représenté par $\sigma r = -r'(n, \pi)$ où $n \perp \sigma$
- Une rotation impropre est représentée par $S_m r = \sigma_h C_M r = -r'(n, (2/m - 1)\pi)$

Ces éléments de symétrie s'expriment aussi sous forme matricielle.

$$E(x, y, z) = (x, y, z), \quad M(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C(x, y, z) = (-x, -y, z), \quad M(C_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_v(x, y, z) = (x, -y, z), \quad M(\sigma_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma'_v(x, y, z) = (-x, y, z), \quad M(E) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Table de multiplication

\cdot	E	C_2	σ_v	σ'_v
E	E	C_2	σ_v	σ'_v
C_2	C_2	E	σ'_v	σ_v
σ_v	σ_v	σ'_v	E	C_2
σ'_v	σ'_v	σ_v	C_2	E

Vérification:

$$\sigma_v \cdot C_2 = \sigma'_v$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_v \cdot \sigma_v = E$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

autres représentations

Il y a ensuite des représentations d'ordre très élevé. Par exemple, si nous attribuons trois petits vecteurs unitaires orientés le long des axes x , y et z de chacun des atomes de H_2O , cet ensemble de 9 vecteurs engendrera un ensemble de 4 matrices 9×9 . [5]

Conclusion

Dans ce travail. Nous avons présenté dans un premier temps les concepts fondamentales des groupes avec un exemple le groupe S_n et généralité sur l'isométries dans le plan et dans l'espace. Ensuite nous avons présenté le groupe d'isométrie dans le plan et dans l'espace avec des exemples. Finalement nous avons présenté : les applications de la théorie de groupe en chimie.

Bibliographie

- [1] A. Ben Kilani & S. Msallem Ghorbe, Groupes. Anneaux. Corps. Exemples et Applications, Centre de Publication Universitaire, Tunis, 2006.
- [2] A. Daul, Application de la théorie des groupes à la chimie, Pérolles, 2001.
- [3] A. Gloden, P. S. Alexandroff, Introduction a La Théorie des Groupes. Dunod, Paris, 1968.
- [4] A. Kettle, F. Sidney, Symmetry and structure readable group theory for chemists, Copyright, 2007.
- [5] A. Daul, Application de la théorie des groupes à la chimie, Pérolles, 2001.
- [6] D. Guin & T. Hansberger, Algèbre Tome 1 Groupes, Corps et Théorie de Galois. Belin, 1997.
- [7] H. Klein, Symétrie moléculaire, applications aux petit molicule, 2008.
- [8] J. Bernard Zuber, Introduction à la théorie des groupes et de leurs représentations, Printemps 1994.
- [9] J. Calais, Eléments de Théorie de Groupes. Presses Universitaires de France, Paris, 1998.
- [10] M. Demal, J. Dubucq, D. Popeler, La geometrie des transformations dans l'apprentissage des mathématiques, Demal-Popeler, 2000 – 2001.
- [11] P. Louquet, C. Mendes, L. Moulia, J. Tressens, A. Vogt, Les Mathématiques en Terminales C et E. Librairie Armand Colin, Paris, 1973.

- [12] S. Lang, Structures Algébriques, Inter Editions, 1976.