Remerciements

j'exprime mes profonds remerciments à mon directeur de mémoire ***Saadi Abderachid*** *, pour l'aide qu'il m'a apporté et ses encouragements constants. son oeil critique m'a été trés précieux pour réaliser ce travail*

Je souhaite vivement remercier ma famille pour l'aide et le soutien apportés au cours de ses cinq ans d'étude, cette présence. m'a été précieuse

Mes gratitudes vont également à l'endroit de tous ceux qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre.

A tous mes collégues de promotion 2016 *pour les bons moments, que nous avons passés ensemble, je leur souhaite bonheur et réusite dans la vie.*

Dédicaces

-A mes parents, ma mère, et mon père

A mes soeurs, mes frères, toute mes amies.

Et vous rappelez-vous les amies, et la table,

Et le rire éclatant du père respectable,

En attendant les pleurs !

Table des matières

Introduction

Parmi des applications d'inégalités variationnelles avec des obstacles, le plus célèbre est probablement celui du problème de digue, l'approche moderne a comencée par le travail de C.Baiocchi (voir [2]) .

Beaucoup de développements ont suivi. Malhereusement cette approche est seulement possible dans le cas de milieu poreux, avec des murs verticaux par example le cas d'un barrage rectangle et approprie dans la dimension 2.

Soit Ω un domaine borné avec une frontière $\partial\Omega = S$, continue localement lipschitzienne, (Ω représente la partie de milieu poreux) et $S_1, S_2, S_3 = (S_{3,i})_{1\leq i\leq N}$ des sous ensembles de S tels que S_1 est fermé, et S_3 est ouvert dans le complément de S_1 dans S, et ϕ une fonction continue de Lipschitz positive :

Consédérons l'inéquation variationnelle suivante :

$$(P)\begin{cases} \text{Trouver une paire } (p,\chi) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \quad \text{tel que :} \\ (i) \quad p \geq 0 \text{ dans } \Omega, \quad p = \phi \text{ sur } S_2 \cup S_3 \\ (ii)\, 0 \leq \chi \leq 1, p(1-\chi) = 0 \\ (iii) \displaystyle\int_\Omega \nabla p.\nabla\xi + \chi.\xi_y \leq 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \xi = 0 \text{ sur } S_3, \xi \geq 0 \text{ sur } S_2 \end{cases}$$

Nous nous intéréssons à étudier la régularité de la frontière libre $\partial(\{p > 0\} \cap \Omega)$, et l' expression de χ , la frontière libre est une courbe :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \sup\{y | p(x,y) > 0\} & \text{si cet ensemble n'est pas vide} \\ S^-(x) & \text{si non} \end{cases}$$

Notre travail est composé de trois chapitres :

- Dans le premier chapitre on va proposer une approche physique, et on pose le problème.
- Dans le second chapitre, on va étudier l'éxistance de la solution, en utilisant la méthode de pénalisation, et on donne queluqe propriétés de la solution.
- Dans le troisième chapitre on va définir la frontière libre, et nous étudions sa continuité.

.

Chapitre 1

Notations et définitions

L'objet de ce chapitre est de donner quelques résultats fondamentaux qui concernent les espaces de Sobolev, Banach, L^p.

1.1 Notations

Ω : domaine borné de $\mathbb{R}^2$

$X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ est dit multi-indice

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$

Définition 1.1. *si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, On note*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha_1}\ \partial y^{\alpha_2}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\ \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial y^{\alpha_2}}\ f$$

$$u^+ = \begin{cases} u & si \quad u > 0 \\ 0 & si \quad u \leq 0 \end{cases}, u^- = \begin{cases} 0 & si \quad u \geq 0 \\ -u & si \quad u < 0 \end{cases}$$

χ_A : la fonction caractéristique de A

$\{f = a\}, \{f < a\}, \{f \leq a\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ f(x, y) = a, f(x, y) < a, f(x, y) \leq a\right\}$

pp : presque partout

∇ l'opérateur $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

$[y > h] = \{(x, y) \in \Omega | y > h\}$

1.2 Espaces de Banach

Définition 1.2. (*norme*) *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel*

$\|.\|$ *est une norme sur* E*, si et seulememt si* $\|.\|$ *est une application de* E *dans* $\mathbb{R}^+$ *telle que*

1. $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E \;\; \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|.$
3. $\forall \, (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Définition 1.3. (*espace vrctoriel normé*) *Tout couple* $(E, \|.\|)$ *ou* E *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $\|.\|$ *est une norme sur* E*, s'appelle un* $\mathbb{R}$-***espace vectoriel normé***

Définition 1.4. (*espace de Banach*) $(E, \|.\|)$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé,* E *est un Banach si toute suite de cauchy de* E *est convergente (dans* E *)*

Théorème 1.1. (*Point fixe*) *Soit* K *est un ensemble fermé, borné, et convexe de* X*, telle que* X *est un espace de Banach, et* $F : K \to K$ *est une fonction continue. Alors ;* F *admet un point fixe dans* K*.*

1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.5. *Soit* F *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. un* ***produit scalaire*** (u, v) *est une forme bilinéaire de* $F \times F$ *dans* $\mathbb{R}$*, symétrique, définie positive c'est-à-dire* $(u, u) > 0$ *si* $u \neq 0$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé ***espace préhilbertien****.*

Théorème 1.2. (*Inégalié de Cauchy-Schwartz*) *Soit* $(E, (\; , \;))$ *un espace préhilbertien réel. Alors ; pour tout* $a, b \in E$

$$|(a, b)| \leq (a, a)^{\frac{1}{2}} \, (b, b)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.6. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H, muni d'un produit scalaire (u,v), et qui est complet pour la norme $(u,u)^{\frac{1}{2}}$.*

Théorème 1.3. (*Lax-Milgram*) *Soit H un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire $(\ ,\ )$, $f \in H'$, et $a(\ ,\ )$ est une forme bilinéaire continue dans H satisfait pour $A > 0$*

$$a(u,u) \geq A. \|u\|^2 , \forall u \in H$$

Soit K un ensemble non vide, fermé de H. Alors ; il existe solution unique $u \in K$ de

$$a(u,v) = < f, v >, \ \forall v \in H$$

1.4 Espaces L^p

Définition 1.7. *$L^1(\Omega)$, L'ensemble des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ tels que $\int_\Omega |f| < \infty$.*
On note

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f|$$

Définition 1.8. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, On pose*
$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}; f \text{ mésurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$
On note

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.9. *On pose $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}; f$ mésurable, et il existe une constante C telle que $|f(x)| < C$ pp sur Ω*
On note :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup ess_{x\in\Omega} |f(x)|$$

Théorème 1.4. (*Théorème de Fubini*) *Soit Ω_1, Ω_2 tel que $\Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega \subset \mathbb{R}^2$, on suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$:*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \qquad et \qquad \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même , pour presque tout $y \in \Omega_2$.

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \qquad et \qquad \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus on a :

$$\int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)\,dx\ dy = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx\right)dy$$

Théorème 1.5. *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue) : Soit* (S,μ) *un espace mésuré, et soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'applications mésurables* $f_n : S \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$*, on suppose que*

1. *la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge pp vers une fonction mésurable* $f : S \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$
2. *Il existe une fonction intégrable* $g : S \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *positive, telle que l'on ait la condition de domination*

$$|f_n| < g \ pp,\ \forall n \geq 1.$$

Alors, les fonctions f_n *et* f *sont intégrables et*

$$\int_S f\ d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_S f_n\ d\mu$$

Et même

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_S |f_n - f|\ d\mu = 0$$

1.5 Espace $\mathcal{D}(\Omega)$ et espace $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 1.10. $k \in \mathbb{N}$*, on dira que* $f \in C^k(\Omega)$ *si une des conditions ci-dessous est satisfaite*

- $k = 0$ *et* f *est continue sur* Ω
- $k \geq 1$ *et* f *admet des dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$*, qui sont dans* $C^{k-1}(\Omega)$.
- *On dit que* $f \in C^\infty(\Omega)$*, si* $f \in C^k(\Omega)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Définition 1.11. *Si $u \in C(\Omega)$, le support de u, (noté Supp(Ω)), est l'adhérence de l'enesmble $\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}$.*

Les éléments de $C^{\infty}(\Omega)$ qui à support un sous ensemble, compact de Ω, noté par $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.12. *On définit l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ (distributions sur Ω) comme étant l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires **continues** sur $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Autrement dit si T une distribution sur Ω et si $< T, \varphi >$, désigne la dualité entre $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$, pour toute suite (φ_m) convergente vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, $< T, \varphi_m >$ tend vers $< T, \varphi >$.

1.6 Espaces de Sobolev

Définition 1.13. *L'espace de Sobolev d'ordre $1, W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble suivante :*
$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega), \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \in L^p(\Omega) \right\}$

En particulier $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$

Définition 1.14. *Pour $m \in \mathbb{N}, W^{m,p}(\Omega)$ est l'ensemble suivante :*
$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), D^{\alpha} f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|.\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|.\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^{\alpha}.\|_{L^p(\Omega)}$$

En particulier $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ et $W^{0,2}(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Théorème 1.6. (*Formule de Green*) *Soit Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^2$, sa frontière $\partial\Omega = \Gamma$, $\eta(x)$ le vecteur normale unitaire vers l'exterieur, et $\eta_i(x)$ les composantes de $\eta(x)$. On a*

1. $\forall f \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = \int_{\Gamma} f.\eta_i(x)\ d\Gamma(x)$$

2. $\forall f, g \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}.g \; dx = -\int_\Omega f.\frac{\partial g}{\partial x_i} \; dx + \int_\Gamma f.g.\eta_i(x) \; d\Gamma(x)$$

Définition 1.15. *Etant donné un entier $m \geq 1$, et un réel $1 \leq p < \infty$. On définit l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

$\| \, \|_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \| \, \|_{W^{m,p}(\Omega)}$ *car $W_0^{m,p}$ est fermé dans $W^{m,p}$*

En particulier $H_0^1 = W_0^{1,2}$

Théorème 1.7. (*Inégalité de Poincaré*) *Supposons que Ω est borné, $1 \leq p < \infty$. Alors, il existe une constante $C = C(\Omega, p)$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Théorème 1.8. *$H_0^1(\Omega)$ s'injecte avec compacité dans $L^2(\Omega)$(c-à-d l'application identité de $H_0^1(\Omega)$, dans $L^2(\Omega)$ est compacte) et si la frontière Γ de Ω est de Lipschitz, Alors $H^1(\Omega)$ s'injecte avec compacité dans $L^2(\Omega)$.*

Théorème 1.9. *Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceau tel que $f' \in L^\infty(\Omega)$, on note par L l'ensemble des points singliers de f. Alors nous avons dans le distrbutionnel sens :*

$$\nabla(f.u) = \begin{cases} f'(u).\nabla u & si \quad u \notin L \\ 0 & si \quad u \in L \end{cases}$$

Théorème 1.10. *Si $u \in W^{1.p}(\Omega)$ alors $u^+, u^- \in W^{1.p}(\Omega)$, de plus nous avons :*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & si \quad u > 0 \\ 0 & si \quad u \leq 0 \end{cases}, \nabla u^- = \begin{cases} 0 & si \quad u \geq 0 \\ -\nabla u & si \quad u < 0 \end{cases}$$

Remarque 1.1. *pour une fonction $u \in W^{1.p}(\Omega)$ $\nabla u = 0$ pp sur l'ensemble $[u = 0]$*

1.7 Espaces de Holder

Définition 1.16. *Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $C(\Omega), C(\overline{\Omega})$, ensemble des fonctions continues dans $\Omega, \overline{\Omega}$ respectivement avec $f|_\Omega \in C(\Omega)$, pour $u \in C(\overline{\Omega})$ et*

$0 \leq \beta \leq 1$.

Soit

$\|u\|_u = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ *et* $[u]_\beta = \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \left\{ \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\beta} \right\}$

Si $[u]_\beta < \infty$, alors l'espace de β-Holder :

$C^{1,\beta} = \left\{ D^\beta u \in C(\Omega), [u]_\beta < \infty \right\}$

On note :

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\Omega)} = \sum_{0 \leq \beta \leq 1} \left\| D^\beta u \right\|_u + [u]_\beta$$

1.8 Principe de maximum

Théorème 1.11. (*principe de maximum*) *Soit* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, *avec* $\Delta u \geq 0 \, (\leq 0)$ *dans* Ω, *Alors*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right)$$

On suppose

$$Lu = a(x) \ \nabla u + b(x) . \frac{\partial u}{\partial x} + C(x) \frac{\partial u}{\partial y} + d(x) . u$$

a est une matrice telle que $a_{12} = a_{21}$

1. L est elliptique à un point x dans Ω, si la matrice a est positive, c'est-à-dire si $\lambda(x), \theta(x)$ dénoter respectivement le minimum, maximum. de $[a^{ij}]$ alors

$$0 \leq \lambda(x) |\xi|^2 \leq a(x) \xi . \xi \leq \theta(x) |\xi|^2$$

   Et Pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2) \neq 0$ si $\lambda > 0$

2. si $\lambda(x) > \lambda_0 > 0$, pour un certain constant λ_0, on dit que L est strictement elleptique dans Ω.

3. Si $\dfrac{\theta(x)}{\lambda(x)}$ est borné dans Ω. on dit que L est uniformément elleptique dans Ω.

Théorème 1.12. (*principe de maximum faible*) *: Supposons que* L *est elliptique telle que* $d = 0$ *dans* Ω *.*

Soit $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ *satisfait :*

$$Lu \geq 0\,(\leq 0) \text{ dans } \Omega$$

Alors ;

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right)$$

Théorème 1.13. (*principe de maximum fort*) *: Soit* $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ *telle que*

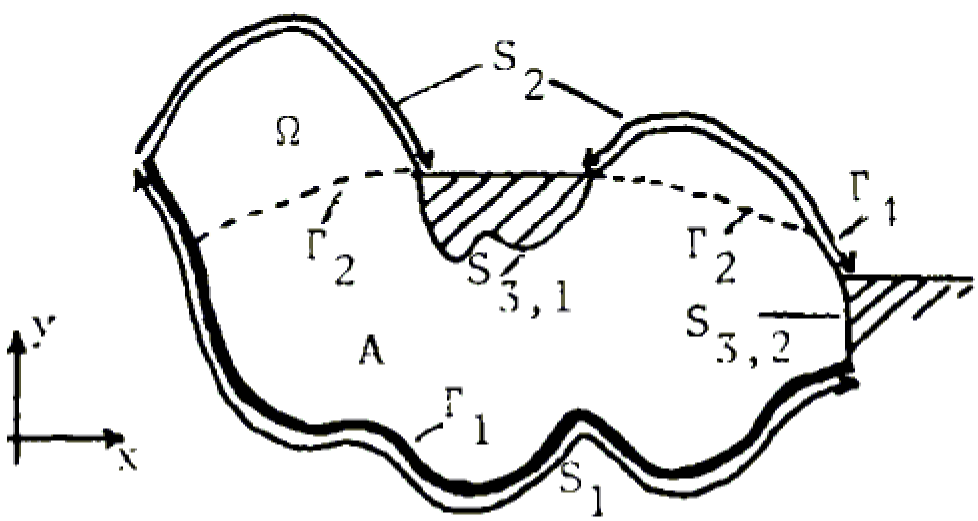
$$Lu \geq 0$$

Si u *atteint son maximum sur* $\overline{\Omega}$ *en un point* x_0 *de* Ω*, et si* $d = 0$ *dans* Ω *ou* $u(x_0) \geq 0$
Alors la fonction u *est constante*

Chapitre 2

Position du problème

2.1 Représentation physique



Consédèrons Ω un domain borné, avec une frontière $\partial\Omega = S$, continue localement lipschitzienne. Ω représente la partie de milieux poreux.

Nous subdivisons S, dans les sous-ensembles suivants :

- S_1 : la partie imperméable de digue
- S_2 : la partie de la frontière $\partial\Omega$ en contact avec le terrain en plein air.
- S_3 : est la partie de digue sous l'eau

pour simplifier l'étude théorique, on suppose que :

- S_1 est fermé de S .
- S_3 est ouvert dans le complément de S_1 dans S

De plus dans le cas plusieurs réservoirs, nous dénotons aussi par $S_{3,1}$, $S_{3,2} \ldots S_{3,N}$ sont les différents composants connexes de S_3 telle que $S_3 = S_{3,1} \cup S_{3,2} \cup \ldots \cup S_{3,N}$
Nous limiterons souvent au cas plus simple suivant :
Soit Ω est verticalement convexe c'est-à-dire Ω satisfait :

$$\forall (x, y), (x, y') \in \Omega \quad \text{le segment} \quad \{x\} \times [y, y'] \subset \Omega \tag{2.1}$$

De plus, on suppose que :

$$S_1 \text{ est fermé, connexe de } S, \text{ qui entoure } \Omega \text{ de dessous} \tag{2.2}$$

$$S_2 \cup S_3 \text{ qui enteure } \Omega \text{ d'en haut.} \tag{2.3}$$

$$S \text{ a seulement un nombre fini de murs verticaux} \tag{2.4}$$

Plus précisement si nous dénotons par π_x la projection habituelle de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe x pour $x \in \pi_x(\Omega)$ nous pouvons définir :

$$S^-(x) = \inf \{y | (x, y) \in \Omega\}, S^+(x) = \sup \{y | (x, y) \in \Omega\} \tag{2.5}$$

Alors (2.1) est clairement équivalent à :

$$\Omega = \left\{(x, y) | x \in \pi_x(\Omega), S^-(x) < y < S^+(x)\right\} \tag{2.6}$$

Maintenant (2.2) , (2.3) signifier respectivement cela nous

$$\begin{aligned} &S_1 \text{ est une partie connexe de } S, \text{ qui contient tous les points} \\ &(x, y) \text{ de } S \text{ tels que } y \leq S^-(x) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$S_2 \cup S_3 \text{ contient tous les points } (x, y) \text{ de } S \text{ tels que } y \geq S^+(x) \tag{2.8}$$

De plus (2.4) implique clairement

$$S^-(x) \quad \text{est continue sur} \quad \pi_x(\Omega), \quad \text{sauf peut-être sur un sous-ensemble fini } \rho^- \tag{2.9}$$

$$S^{+}(x) \text{ est continue sur } \pi_x(\Omega), \quad \text{sauf peut-être sur un sous-ensemble fini } \rho^{+}. \tag{2.10}$$

A la fin du digue, biensure ces points S^- et S^+ ont une limite à droite et gauche, quand cela a du sens.

Le problème de base est maintenant de trouver la pression $p = p(x, y)$ de fluide dans Ω, et cette partie de Ω qui est humide, c'est-à-dire l'ensemble humide A.

2.2 Formulation forte

La frontière de A est divisée en quatre parties :

- Γ_1 est la partie imperméable .
- Γ_2 est la frontière libre de A .
- $\Gamma_3 = S_3$ est la partie couverte par le fluide .
- Γ_4 est la partie humide du barrage en contact avec l'air .

Parmi ces morceaux de la frontière, seulement Γ_3 est complètement connu .

Expérimentalement la vitesse $\overrightarrow{V}$ de mouvement du fluide, Pour lequel nous supposons citer peut l'eau avec un poids spécifique égal à 1, est donné dans A par loi de Darcy

$$\overrightarrow{V} = -k\,\nabla(p+y)$$

Avec k étant le coefficient de perméabilité, et si le milieu est homogène alors k est une constante ce qui nous choisirons strictement psitif. et dans ce cas le fluide n'est pas compressible, donc

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{V}\right) = 0 \text{ dans } A.$$

$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{V}\right) = \operatorname{div}\left(-k\,\nabla(p+y)\right) = -k\,\Delta(p+y)$, donc

$$\Delta p = 0 \quad \text{dans} \quad A. \tag{2.11}$$

Maintenant, on suppose que la pression atmosphérique est choisie pour être 0 et négliger les effets de capillarité et d'évaporation. Alors, si nous dénotons par $h_i\,(i = 1, \ldots, N)$

le niveau de l'eau dans le réservoir avec le fond $S_{3,i}$, la pression sur $S_2 \cup S_3$ doit être indiqué par la fonction, continue, de lipschitz ϕ, telle que :

$$\phi(x,y) = \begin{cases} 0 & sur \quad S_2 \\ h_i - y & sur \quad S_{3,i} \quad \forall\, i = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{2.12}$$

Alors, p doit être satisfait les conditions Dirichlet, de frontière suivantes :

$$\begin{cases} p = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\ p = \phi \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \end{cases} \tag{2.13}$$

Le fait qu'aucune eau ne peut traverser Γ_1, et Γ_2, mène aux conditions de Neumann à savoir

$$\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\eta} = -k\overrightarrow{V}(p+y).\overrightarrow{\eta} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

ou' $\eta = (\eta_x, \eta_y)$ désigne le vecteur unitaire normal à A ceci donne

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(p+y) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \tag{2.14}$$

Finalement, nous pouvons exprimer le fluide traversons Γ_4 par

$$\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\eta} \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_4$$

Alors, si k est strictement positif et par

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(p+y) \leq 0 \; sur \; \Gamma_4 \tag{2.15}$$

Le problème est maintenant de trouver (p, A) qui vérifié (2.11), (2.13), (2.14) et (2.15) cette équivalent à

$$(I) \begin{cases} \Delta p = 0, & \text{dans} \quad A \\ p = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_4, & p = \phi \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(p+y) = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(p+y) \leq 0, & \text{sur} \quad \Gamma_4 \end{cases}$$

2.3 Formulation faible

On veut trouver une paire (p, A) qui est une solution du problème (I), supposons que p et ∂A sont assez régulieres. En appliquant formule de Green :

pour $\xi \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$:

Tenant en compte $\Delta p = \Delta\left(p+y\right)$

$\int_A \Delta\left(p+y\right).\xi = \int_{\partial A} \nabla(p+y).\xi.\eta - \int_A \nabla\left(p+y\right).\nabla\xi$

Alors ;

$$\int_A \nabla p.\nabla\xi + \xi_y = \int_A -\Delta p.\xi + \int_{\partial A} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(p+y\right).\xi$$

Nous avons dénoté par ξ_y le dérivé de ξ par rapport y

De (2.11) nous obtenons

$$\int_A \nabla p.\nabla\xi + \xi_y = \int_{\partial A} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(p+y\right).\xi$$

D'aprés (2.14) on a :

$\int_{\partial A} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(p+y\right).\xi = \int_{\Gamma_3\cup\Gamma_4} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(p+y\right).\xi$

alors

$$\int_A \nabla p.\nabla\xi + \xi_y = \int_{\Gamma_3\cup\Gamma_4} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(p+y\right)\cdot\xi$$

si nous choissons maintenant $\xi = 0 \quad sur \quad \Gamma_3,\ \xi \geq 0 \quad sur \quad S_2$ ($\xi \geq 0$ sur Γ_4 doit être suffisante mais Γ_4 est inconnue), d'aprés (2.15) nous obtenons

$$\int_A \nabla p.\nabla\xi + \xi_y \leq 0\ \forall\xi \in c^1\left(\overline{\Omega}\right) \quad \xi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3, \xi \geq 0 \quad sur \quad S_2$$

Puisque p étant égal à 0 extèrieur A nous pouvons écrire cette inégalité comme

$$\int_\Omega \nabla p.\nabla\xi + \chi_A.\xi_y \leq 0\ \forall\xi \in c^1\left(\overline{\Omega}\right) \quad \xi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3, \xi \geq 0 \quad \text{sur} \quad S_2$$

Mais maintenant par le principe de maximum χ peut être la fonction caractéristique de l'ensemble

$$[p > 0] = \left\{(x, y) \in \Omega, p\left(x, y\right) > 0\right\}$$

En effet p est positif sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ et de (2.14) on a :

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = -\eta_y \text{ sur } \Gamma_1$$

depuis celon nos supposition

$$\eta_y \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \tag{2.16}$$

Le principe de demaximum fort, nous donne $p > 0$ interieur A. Ainsi on recherche $(p, \chi(A))$:

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver une paire } (p, \chi) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \quad \text{tel que} \\ (i) \quad p \geq 0 \text{ dans } \Omega, \quad p = \phi \text{ sur } S_2 \cup S_3 \\ (ii) \;\; 0 \leq \chi \leq 1, p(1-\chi) = 0 \\ (iii) \;\; \displaystyle\int_\Omega \nabla p . \nabla \xi + \chi . \xi_y \leq 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \xi = 0 \text{ sur } S_3, \xi \geq 0 \text{ sur } S_2 \end{cases}$$

Chapitre 3

Résultats priliminaires

3.1 Existence de solution

On a $H_\varepsilon(p)$ est définie pour $\varepsilon > 0$ comme

$$H_\varepsilon(p) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p \geq \varepsilon \\ \dfrac{p}{\varepsilon} & \text{si} \quad 0 \leq p \leq \varepsilon \\ 0 & si \quad p \leq 0 \end{cases}$$

On a p est la limite de p_ε d'ou p_ε est la solution de

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \quad p_\varepsilon = \phi \quad \text{sur} \quad S_2 \cup S_3 \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla p_\varepsilon . \nabla \xi + H_\varepsilon(p_\varepsilon) . \xi_y = 0 \qquad \forall \xi \in H^1(\Omega), \xi = 0 \ \text{ sur } \ S_2 \cup S_3 \end{cases}$$

Dabord, laissez-nous étudions la pénalisation p_ε du problème (P) et montrer

Théorème 3.1. *Il existe solution p_ε de le problème (P_ε)*

Preuve

Soit l'application F_ε, qui pour $V \in L^2(\Omega)$ $u_\varepsilon = F_\varepsilon(V)$ la solution du problème :

$$\begin{cases} u_\varepsilon = \phi \ \text{ sur } \ S_2 \cup S_3 \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_\varepsilon . \nabla \xi + H_\varepsilon(V) . \xi_y = 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \ \xi = 0 \quad sur \ S_2 \cup S_3 \end{cases} \tag{3.1}$$

En peut appliquer Lax-Milgram en effet, on pose $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u . \nabla v$, $a(u,v)$ est une forme bilinéaire dans $H^1(\Omega)$, $a(u,u) \geq c. \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ (en appliquant l'inégalité de poincaré)

$a(u,v) \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}$

Alors, il existe unique solution de (3.1).

Si l'on désigne par ψ une fonction dans $H^1(\Omega)$ qui est d'accord avec ϕ sur $S_2 \cup S_3$ et si nous remplaçons $\xi = u_\varepsilon - \psi$ dans (3.1) nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla (u_\varepsilon - \psi)|^2 = \int_\Omega H_\varepsilon(V).\psi_y + |\nabla\psi|^2$$

Et si $H_\varepsilon(V)$ est délimitée par 1 nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla (u_\varepsilon - \psi)|^2 \leq C(\psi) \tag{3.2}$$

ou $C(\psi)$ est une constante qui dépend de ψ seulement, ainsi u_ε est borné dans $H^1(\Omega)$ et de l'application identité de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (voir théorème (1.8)), il résulte que F_ε est continue.

De plus, selon l'inégalité de Poincaré, nous avons

$$\int_\Omega |u_\varepsilon - \psi|^2 \leq k \int_\Omega |\nabla (u_\varepsilon - \psi)|^2 \leq k.C(\psi).$$

Alors, pour R assez grand, applique F_ε de la boule de centre 0 et de rayon R (dans $L^2(\Omega)$) dans lui même. En appliquant Théorème de point fixe nous obtenons l'éxistance de p_ε comme un point fixe de F_ε

Théorème 3.2. *La solution p_ε de (P_ε) est unique, $p_\varepsilon \geq 0$ pp dans Ω, et l' application $\phi \to p_\varepsilon$ est non décroissante (notament, si ϕ_1, ϕ_2 sont deux fonctions continues de Lipschitz sur $S_2 \cup S_3$ si $\phi_2 > \phi_1$, alors les solutions qui correspondants. p_ε^1 , p_ε^2 de p_ε satisfont $p_\varepsilon^2 \geq p_\varepsilon^1$. pp dans Ω).*

Preuve

Si p_ε^1 , p_ε^2 sont deux solutions de p_ε, correspendant à valeurs ϕ_1 et ϕ_2 repictivement, nous avons placé $q = q_\varepsilon = p_\varepsilon^1 - p_\varepsilon^2$. Pour $\delta > 0$

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\delta}{x}\right)^+ & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Si $q \leq 0$ sur $S_2 \cup S_3$, $\xi = f_\delta(q)$ est une fonction dans $H^1(\Omega)$ qui est égal à 0 sur $S_2 \cup S_3$, en outre nous avons (voir le théorème 1.9)

$$\nabla \xi = f'_\delta(q) . \nabla q = \delta . \chi([q > \delta]) . \nabla q / q^2 \tag{3.3}$$

De l'égalité satisfaite par p^1_ε , p^2_ε nous déduisons alors

$$\int_\Omega \nabla q . \nabla \xi = \int_\Omega \left(H_\varepsilon \left(p^2_\varepsilon \right) - H_\varepsilon \left(p^1_\varepsilon \right) \right) \xi_y$$

Et d'aprés (3.3)
$$\int_{[q>\delta]} \delta \cdot \frac{|\nabla q|^2}{q^2} = \int_{[q>\delta]} \delta . \left(H_\varepsilon \left(p^2_\varepsilon \right) - H_\varepsilon \left(p^1_\varepsilon \right) \right) \frac{q_y}{q^2}.$$
D'ou
$$\int_{[q>\delta]} \frac{|\nabla q|^2}{q^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{[q>\delta]} \frac{|q_y|}{q}.$$
Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous obtenons

$$\int_\Omega \left| \nabla \log \left(1 + \frac{(q-\delta)^+}{\delta} \right) \right|^2 = \int_{[q>\delta]} \frac{|\nabla q|^2}{q^2} \leq \frac{|\Omega|}{\varepsilon^2}$$

avec $|\Omega|$ dénote la mésure de Ω. D'aprés inégalité de poincaré nous obtenons

$$\int_\Omega \log \left(1 + \frac{(q-\delta)^+}{\delta} \right)^2 \leq k . \frac{|\Omega|}{\varepsilon^2}$$

Avec k est indépendant de δ. mais lorsque δ va au 0 nous déduisons du au-dessus inégalité

$$q = p^1_\varepsilon - p^2_\varepsilon \leq 0 \ \text{ sur } \ \Omega. \tag{3.4}$$

l'application de cette inégalité pour $\phi = \phi_1 = \phi_2$ et p^1_ε , p^2_ε deux solutions de p_ε mène à l'unicité de p_ε.

Théorème 3.3. *Dans les hypothèses ci-dessus, il existe une paire (p, χ), solution de (P).*

Preuve

Daprés (3.2), p_ε étant un certain u_ε. Nous déduisons que p_ε est borné dans $H^1(\Omega)$ indé pendant de ε. Ainsi (voir le théorème 1.8), on peut trouver une suite $\varepsilon_n \to 0$ tel que

- $p_{\varepsilon_n} \rightharpoonup p$ dans $H^1(\Omega)$.

- $p_{\varepsilon_n} \to p$ dans $L^2(\Omega)$.
- $H_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \chi$ dans $L^2(\Omega)$.

$H_\varepsilon(p_\varepsilon)$ est borné dans $L^\infty(\Omega)$, et par conséquent il est borné dans $L^2(\Omega)$.

De plus, si nous choisissons $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous obtenons

$$\Delta p_{\varepsilon_n} = -H'_{\varepsilon_n}(p_{\varepsilon_n})(p_{\varepsilon_n})_y \in L^2(\Omega)$$

D'aprés la formule de Green, nous avons :

$$\int_\Omega \nabla p_{\varepsilon_n}.\nabla\xi + H_{\varepsilon_n}(p_{\varepsilon_n})\xi_y = \int_{S_2}\frac{\partial p_{\varepsilon_n}}{\partial\eta}.\xi \le 0\,\forall\xi \in H^1(\Omega),\ \xi = 0 \text{ sur } S_3,\ \xi \ge 0 \text{ sur } S_2.$$

(Notons que $p_{\varepsilon_n} \ge 0$ et $p_{\varepsilon_n} = 0$ sur S_2 implique $\dfrac{\partial p_{\varepsilon_n}}{\partial\eta} \le 0$ sur S_2.)

On suppose $\varepsilon_n \to 0$, (iii) de (p) est satisfaite

D'autre part, puisque les ensembles convexes

$K = \{v \in H^1(\Omega) \,|v \ge 0 \text{ sur } \Omega, v = \phi \text{ sur } S_2 \cup S_3\}$,

$K' = \{v \in L^2(\Omega) \,|0 \le v \le 1 \text{ sur } \Omega\}$,

Sont faiblement fermés dans $H^1(\Omega)$, et $L^2(\Omega)$, respectivement, nous conclusons que $(p,\chi) \in K \times K'$, ceci donne (i) et la première partie de (ii) dans (p).

Finalement, dans l'ensemble $[p > 0]$ nous avons pp (aprés que extraction une sous-suite) $H_{\varepsilon_n}(p_{\varepsilon_n}) \to 1$. Alors par théorème de Lesbegue $H_{\varepsilon_n}(p_{\varepsilon_n}) \to 1$ dans $L^2([p > 0])$, Du fait cele $H_{\varepsilon_n}(p_{\varepsilon_n}) \to \chi$ dans $L^2(\Omega)$, et par l'unicité de la limite on déduit que $\chi = 1$ pp sur $[p > 0]$.

3.2 Monotonicité de χ

Selon les hypothèses (2.1)-(2.4) nous avons :

Théorème 3.4. *Soit (p,χ) une solution de (P), Alors*

1. *$\Delta p + \chi_y = 0$, dans Ω.*
2. *$\Delta p \ge 0$, dans Ω.*

3. *$\chi_y \leq 0$, et ainsi χ est une fonction décroissante par rapport à y dans Ω.*

Preuve

1. Soit $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$

   On a :

$$\int_{\Omega} \nabla p.\nabla \xi + \xi_y = \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} \frac{\partial}{\partial \eta}(p+y).\xi.$$

   Et on a :

   $\Gamma_3 = S_3 \subset S$ et $\Gamma_4 \subset S_2 \subset S$ alors $\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \subset S = \partial\Omega$ et d'aprés $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nous obtenons

$$\int_{\Omega} \nabla p.\nabla \xi + \chi.\xi_y = 0$$

   En utilisant formule de Green :

$$\int_{\Omega} [-\Delta p - \chi_y].\xi = 0$$

   Alors

$$\Delta p + \chi_y = 0 \text{ dans } \Omega$$

2. Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega), \zeta \geq 0$ et pour $\varepsilon > 0$ mettant
   $\xi = \min\left(\frac{p}{\varepsilon}, \zeta\right)$.
   lorsque $\phi \geq 0$ sur $S_2 \cup S_3$,ξ égal à 0 sur $S_2 \cup S_3$ (car $p = 0$ sur S_2 et $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$) et $\xi, -\xi$ sont deux fonctions test dans (P) (iii) nous obtenons

$$\int_{\Omega} \nabla p.\nabla \min\left(\frac{p}{\varepsilon}, \zeta\right) + \int_{\Omega} \chi.\left[\min\left(\frac{p}{\varepsilon}, \zeta\right)\right]_y = 0.$$

   $\chi = 1$ sur l'ensemble $[p > 0]$, et $\min\left(\frac{p}{\varepsilon}, \zeta\right) = 0$ sur l'ensemble $[p = 0]$ (voir remarque (1.1)). l'égalité ci-dessus devient
   $\int_{\Omega} \nabla p.\nabla \min\left(\frac{p}{\varepsilon}, \zeta\right) + \int_{\Omega} \left[\min\left(\frac{p}{\varepsilon}, \zeta\right)\right]_y = 0;$
   Et alors

$$\int_{\Omega} \nabla p.\nabla \min\left(\frac{p}{\varepsilon}, \zeta\right) = 0 \text{ (puisque } \min\left(\tfrac{p}{\varepsilon}, \zeta\right) = 0 \text{ sur } S \text{ car } \zeta \in \mathcal{D}(\Omega) \text{)}$$

Ecrivant cette égalité comme
$\int_{[p>\varepsilon.\zeta]} \nabla p.\nabla\zeta + \frac{1}{\varepsilon}\int_{[p\leq\varepsilon.\zeta]} |\nabla p|^2 = 0,$
Nous obtenons

$$\int_{\Omega} \chi\,[p>\varepsilon.\zeta]\,.\nabla p.\nabla\zeta \leq 0$$

Maintenant, en utilisant le fait $\chi\,[p>\varepsilon.\zeta] \longrightarrow \chi\,[p>0]$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, nous obtenons, puis $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans l'inégalité ci-dessus et l'application de Théorème de Lebesgue
$\int_{\Omega} \chi\,[p>0]\,\nabla p.\nabla\zeta \leq 0$
Alors

$$\int_{\Omega} \nabla p.\nabla\zeta \leq 0 \quad \forall\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\ \zeta \geq 0$$

En utilisant formule de Green
$\int_{\Omega} \nabla p.\nabla\zeta = \int_{\Omega} -\Delta p.\zeta \leq 0$
Donc

$$\Delta p \geq 0$$

3. Finalement, On a :

   $\chi_y = -\Delta p$ et $\Delta p \geq 0$

   Alors

$$\chi_y \leq 0$$

Théorème 3.5. *Soit (p,χ) une solution de (P), p est continue sur tout Ω, et sur $S_2 \cup S_3$. Donc l'ensemble $[p>0]$ est ouvert*

Preuve voir [8] p 84.

3.3 Quelques prioriétés de (p,χ) solution de (P)

Laissez-nous indiquer maintenant les propriétés de l'ensemble $[p>0]$. D'abord

Théorème 3.6. *Soit* (p, χ) *une solution de* (P) *Si* $(x_0, y_0) \in [p > 0]$*, alors existe* $\varepsilon > 0$ *tel que le cylindre*

$C_\varepsilon = \{(x, y) \in \Omega \mid |x - x_0| < \varepsilon,\ y < y_0 + \varepsilon\}$

est inclus dans $[p > 0]$

Preuve

Si $(x_0, y_0) \in [p > 0]$, et puisque cet ensemble est ouvert, Pour ε assez petit le carré

$Q_\varepsilon = \{|x - x_0| < \varepsilon,\ |y - y_0| < \varepsilon\}$

est aussi inclus dans $[p > 0]$. Ainsi, nous avons $\chi = 1$ dans Q_ε, et par la monotonicité de χ, $\chi = 1$ sur C_ε (d'aprés (2.1) C_ε est connecté par des segments verticaux). Mais de Théorème (3.4) (1), maintenant $\Delta p = 0$ sur C_ε, et si p prend la valeur 0 sur C_ε, par le principe de maximum $p = 0$ sur C_ε, qui contredit $Q_\varepsilon \subset [p > 0]$

Par conséquent nous avons :

Corollaire 3.1. *Soit* (p, χ) *une solution de* (P)*. si* $p(x_0, y_0) = 0$*, alors* $p(x_0, y) = 0$ *pour tout* (x_0, y) *avec* $y > y_0$

Preuve ‘

Supposons l'inverse c'est-à-dire $p(x_0, y) > 0$ pour certains $y > y_0$ et d'aprés le théorème (3.4) une contraduction

Remarque 3.1. *Dans le cas général , le Théorème (3.6) est remplacé par choisir un point* $(x_0, y_0) \in [p > 0]$*, Alors pour* ε *assez petit, nous avons* $p > 0$ *sur chaque segment droit descendant, commençant dans* Q_ε *est inclus dans* Ω*. Si* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *et* $p(x_0, y_0) = 0$ *alors* $p(x_0, y) = 0$ *pour tout* $(x_0, y) \in \Omega$ *tel que* $y \geq y_0$ *et* $x_0 \times [y_0, y] \subset \Omega$

Remarque 3.2. *Physiquement la signification de Théorème(3.6) est claire :*
Quand un point (x_0, y_0) *est humide, alors toute est humide ci-dessus. cependant noter que ceci n'est plus le cas quand la perméabilité est pas constante*
Pour ce qui concerne l'ensemble est humide, dans les hypothèses (2.1)-(2.4)

Nous pouvons démontrer

Théorème 3.7. *Soit* (p,χ) *une solution de* (P)*, alors*

$$p(x,y)>0 \quad \forall (x,y)\in\Omega, x\in\pi_x(S_3)$$

Preuve

Si $(x,y)\in S_3$ nous avons $p(x,y)=h_i-y>0$, et par le Théorème (3.6) p est strictement positive dans un voisinage de (x,y), et le résultat suit du Théorème (3.6) (dans le cas général nous avons seulement $p>0$ ci-dessus S_3 jusqu'au premier point de $S_1\cup S_2$ que nous rencontrons en descendant le long des lignes verticales

A propos de l'ensemble $[p=0]$ nous avons généralité complète

Théorème 3.8. *Soit* (p,χ) *une solution de* (P)*. Dénoter par* B_r *une boule ouverte, du centre* (x_0,y_0)*, et de rayon* r*, inclus dans* Ω*. Si* $p=0$ *dans* B_r*, alors*

$$p=\chi=0 \textit{ dans } B_r$$

Preuve

D'aprés le corollaire (3.1) et la remarque (3.3), nous avons $p=0$ au-dessus de B_r, c'est-à - dire, sur la partie C de Ω, de points connectèes à B_r par des segments verticaux.

Choisir un cylindre $\Sigma=\ell\times(h,\infty)$ inclus dans $B_r\cup(x_0-r,x_0+r)\times(y_0,\infty)$

Pour $\alpha\in\mathcal{D}(\ell),\alpha\geq 0,\ \xi=\chi(C).\alpha.(y-h)^+$ est une fonction de test pour (P). Alors nous obtenons

$$\int_C \nabla p\nabla\xi+\chi.\xi_y=\int_{C\cap\Sigma}\chi.\alpha$$

Quand $\alpha\geq 0$ dans $\mathcal{D}(\ell)$ et $\chi\geq 0$. ceci implique clairement $\chi=0$ c'est-à-dire sur $\Sigma\cap C$ et alors sur C.

Chapitre 4

Régularité de la frontière libre

4.1 Définition de la frontière libre

Notons que si (p, χ) est une solution de (P) nous pouvons définir la frontière libre Φ de notre problème. En effet dans les hypothèses (2.1)-(2.4) mis pour $x \in \pi_x(\Omega)$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \sup\{y | p(x,y) > 0\} & \text{si cet ensemble n'est pas vide} \\ S^-(x) & \text{si non} \end{cases} \tag{4.1}$$

par le Théorème (3.6), le corollaire (3.1) cette définition signifie quelque chose et nous avons :

Théorème 4.1. *Pour tout (p, χ) solution de (P), la fonction Φ est en bas semi-continue sur $\pi_x(\Omega)$ sauf peut-être sur ρ^- (voir (2.9)). Alors, Φ est mésurable et nous avons :*

$$[p > 0] = \{(x,y) \in \Omega | y < \Phi(x)\} = [y < \Phi(x)] \tag{4.2}$$

Preuve : voir [8] p 86

Théorème 4.2. *Soit (p, χ) une solution de (P), h un nombre réel. Soit C un composant connexe de l'ensemble $[p > 0] \cap [y > h]$. Clairement $\pi_x(C) = (x_0, x_1)$ est un intervalle. Mettre*

$Z_h = \Omega \cap (x_0, x_1) \times (h, \infty)$

Si $\overline{Z_h} \cap S_3 = \emptyset$ *nous avons :*

$$\int_{Z_h} \chi.p_y + \chi^2 \leq \int_{Z_h} p_y + \chi \leq 0$$

Preuve :

Supposons que nous avons preuvé pour tout $\xi \in H^1(Z_h) \cap C\left(\overline{Z_h}\right)$, ξ positive qui est égal à 0 sur $[y = h]$ l'inégalité suivant :

$$\int_{Z_h} \nabla p.\nabla \xi + \chi([p > 0])\ \xi_y \leq \int_{(x_0,x_1)} \xi(x, \Phi(x))\ dx \tag{4.3}$$

et choisir α_ε une fonction dans $\mathcal{D}((x_0, x_1))$, à valeurs dans $[0, 1]$ Pour ε assez petit, on a $\alpha\varepsilon$ est égal à 1 sur $(x_0 + \varepsilon, x_1 - \varepsilon)$ et :

$$\begin{aligned}
\int_{Z_h} p_y + \chi &= \int_{Z_h} \nabla p\nabla(y - h) + \chi.(y - h)_y \\
&= \int_{Z_h} \nabla p.\nabla[\alpha_\varepsilon.(y - h)] + \chi.[\alpha_\varepsilon.(y - h)]_y \\
&+ \int_{Z_h} \nabla p.\nabla[(1 - \alpha_\varepsilon).(y - h)] + \chi.[(1 - \alpha_\varepsilon)(y - h)]_y .
\end{aligned}$$

On a $\overline{Z_h} \cap S_3 = \emptyset$, donc $\chi(Z_h).\alpha_\varepsilon.(y - h)$ est une fonction de test pour (P). En appliquant (4.3)

$$\int_{Z_h} p_y + \chi \leq \int_{(x_0,x_1)} (1 - \alpha_\varepsilon).(\Phi(x) - h)\, dx + \int_{Z_h} (\chi - \chi([p > 0]))(1 - \alpha_\varepsilon)$$

Lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, le résultat d'aprés le Théorème de lebesgue, à condition que (4.3) est vérifiée (la première inégalité est la conséquence de $\chi^2 \leq \chi$ et $\chi.p_y = p_y$)

Pour prouver (4.3) la première remarque qui pour $\zeta \in H^1(Z_h) \cap C\left(\overline{Z_h}\right)$ avec $\zeta \geq 0$ et $\zeta = 0$ sur $[y = h]$, La fonction

$$\xi = \chi(Z_h).\min\left(\frac{p}{\varepsilon}, \zeta\right) \quad (\varepsilon > 0)$$

est une fonction test pour (P). Notons que $p(x_i, y) = 0$ pour toute $(x_i, y) \in \Omega$, $y \geq h$, $i = 0, 1$. Alors aprés (p) (iii) nous obtenons

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{Z_h \cap [p \leq \varepsilon.\zeta]} |\nabla p|^2 + \int_{Z_h \cap [p > \varepsilon.\zeta]} \nabla p\nabla\zeta + \int_{Z_h} \chi.\left[\min\left(\frac{p}{\varepsilon}, \zeta\right)\right]_y \leq 0 .$$

On a $\left[\min\left(\frac{p}{\varepsilon}, \zeta\right)\right]_y = 0$ pp sur $[p = 0]$, ce qui donne

$$\int_{Z_h} \chi\left[p>\varepsilon.\zeta\right]\nabla p\nabla\zeta+\chi\left(\left[p>0\right]\right)\left[\min\left(\frac{p}{\varepsilon},\zeta\right)\right]_y\leq 0$$

Alors

$$\int_{Z_h} \chi\left[p>\varepsilon.\zeta\right]\nabla p\nabla\zeta+\chi\left(\left[p>0\right]\right)\zeta_y\leq\int_{Z_h}\chi\left(\left[p>0\right]\right).\left[\zeta-\min\left(\frac{p}{\varepsilon},\zeta\right)\right]_y$$

Donc

$$\int_{Z_h} \chi\left[p>\varepsilon.\zeta\right]\nabla p\nabla\zeta+\chi\left(\left[p>0\right]\right)\zeta_y\leq\chi\left(\left[p>0\right]\right).\left(\zeta-\frac{p}{\varepsilon}\right)^+. \tag{4.4}$$

Par Théorème de Fubini, dernier intégral est égal à

$$\int_{(x_0,x_1)}\int_{(h,\Phi(x))}\left(\zeta-\frac{p}{\varepsilon}\right)^+(x,y)\ dy\ dx$$

Pour la simplicité, nous étudions toujours par le maximum de h et $S^-(x)$. (S_1 peut intersecter $y=h$). Mais maintenant en utilisant la continuité absolue au y de $\left(\zeta-\frac{p}{\varepsilon}\right)^+$ pp dans (x_0,x_1) pour $\Phi(x)>h$, et pour δ assez petit nous avons :

$$\int_{[h+\delta,\Phi(x)-\delta]}\left(\zeta-\frac{p}{\varepsilon}\right)^+_y(x,y)\,dy\leq\left(\zeta-\frac{p}{\varepsilon}\right)^+(x,\Phi(x)-\delta)\leq\zeta\left(x,\Phi(x)-\delta\right)$$

Maintenant quand $\delta\longrightarrow 0$ et par continuité de ζ nous obtenons pp $x\in(x_0,x_1)$

$$\int_{(h,\Phi(x))}\left(\zeta-\frac{p}{\varepsilon}\right)^+_y(x,y)\,dy\leq\zeta\left(x,\Phi(x)\right)$$

Et donc (4.3) résulte.

Théorème 4.3. *Soit (p,χ) une solution de (P), B_r une boule ouverte de centre (x_0,y_0) et le rayon r, inclus dans Ω. Alors on ne peut pas arriver aux assertions suivantes :*

$$i\begin{cases} p(x_0,y)=0 & \forall(x_0,y)\in B_r\\ p(x,y)>0 & \forall(x,y)\in B_r,\ x\neq x_0\end{cases}$$

$$ii\begin{cases} p(x,y)=0 & \forall(x,y)\in B_r\cap[x\leq x_0]\ (\ resp\ \ B_r\cap[x\geq x_0])\\ p(x,y)>0 & \forall(x,y)\in B_r\cap[x>x_0]\ (\ resp\ \ B_r\cap[x<x_0])\end{cases}$$

Preuve : voir [8] p 89 .

4.2 Fonction de barrière

Nous construisons une fonction, qui sera utilisée dans la preuve de la continuité de Φ.

Soit $(x_1, h_1), (x_2, h_1) \in \Omega$ tels que $x_1 < x_2$. Supposons que $\varepsilon = x_2 - x_1$ est assez petit pour garantir que

$$(x_1 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \times (h_1, h_1 + 2\varepsilon) \subset\subset \Omega$$

Soit $Z = (x_1 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \times (h_1, h_1 + \varepsilon)$. Nous dénotons par v la solution unique dans $H^1(Z)$ du problème

$$\begin{cases} \Delta\, v = 0 & \text{dans } \; Z \\ v = \phi = \varepsilon\,(h_1 + \varepsilon - y)^+ & \text{sur } \; \partial Z \end{cases} \tag{4.5}$$

Proposition 4.1. *Il existe un constant positif C, indépendant de ε tel que*

$$0 < v \leq C.\varepsilon^{2\left(1-\left(\frac{1}{p}\right)\right)} \quad \textit{dans} \;\; Z$$

Preuve

Depuis $\Delta\, v \leq 0$ dans Z, et $v \geq 0$ dans ∂Z, Nous obtenons par le principe de maximum faible (voir [9] Théorème 8.1 p 168) que :

$$v \geq 0 \text{ dans } Z$$

Le principe de maximum fort (voir [9] Théorème 8.9 p 188) mène à

$$v > 0 \;\; \text{dans} \;\; Z$$

pour prouver la deuxième inégalité, Nous présentons la fonction :

$\omega : \;\; Y \; = (0,3) \times (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$\qquad (x', y') \longmapsto \omega\,(x', y') = v\,(x_1 - \varepsilon + \varepsilon x', h_1 + \varepsilon y')$

On a

$$\begin{cases} \Delta\, \omega = 0 & \text{dans } \; Z \\ \omega = \varepsilon^2\,(1 - y') & \textit{sur } \partial Z \end{cases} \tag{4.6}$$

En appliquant le Théorème 8.16 p 181 [9], Nous obtenons

$$\sup_{Y} \omega \leq \sup_{\partial Y} \omega$$

ou $p > 1$ donc pour ε assez petit

$$\sup_{Z} \ v = \sup_{Y} \ \omega < \varepsilon^2 < C.\varepsilon^{2\left(1-\left(\frac{1}{p}\right)\right)} \quad C = 1$$

Car $\varepsilon^2 < \varepsilon^{2\left(1-\left(\frac{1}{p}\right)\right)}$ et $(1 - y') < 1$ *sur* ∂Y

Maintenant, Nous avons l'évaluation de gradient suivante :

Proposition 4.2. *Il existe une constante positive C indépendant de ε telle que*

$$|\nabla \, v| \leq C.\varepsilon^{1-\left(\frac{2}{p}\right)} \qquad \forall X \in T = [x_1, x_2] \times \{h_1 + \varepsilon\}$$

Preuve

Soit $S = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{11}{4}\right) \times \{1\}$ et $Y' = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Depuis $\omega = 0$ sur S, Nous déduisons de (4.6) en appliquant le corollaire 8.29 p 195 de [9], l'évaluation suivante :

$$|\omega|_{1,\alpha,Y'} \leq C\, |\omega|_{0,Y}$$

Nous obtenons pour autre constante C indépendante de ε

$$|\nabla \omega|_{0.Y'} \leq |\omega|_{1,\alpha,Y'} \leq C.\varepsilon^{2\left(1-\left(\frac{1}{p}\right)\right)}$$

Ce qui en particulier à

$$|\nabla \omega\,(x', 1)| \leq C.\varepsilon^{2\left(1-\left(\frac{1}{p}\right)\right)} \quad \forall x' \in [1, 2]\ .$$

Donc

$$|\nabla v\,(x, h_1 + \varepsilon)| = \frac{1}{\varepsilon} \left|\nabla \omega \left(\frac{x - x_1 + \varepsilon}{\varepsilon}, 1\right)\right| \leq C.\varepsilon^{\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)} \quad \forall x \ \in [x_1, x_2]$$

Maintenant, on a le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Pour ε est assez petit, Nous avons :*

$$\begin{aligned} &\int_D \nabla v.\nabla \xi + \chi\,([v > 0])\,.\xi_y \geq 0 \\ &\forall \xi \in H^1\,(D)\,, \quad \xi \geq 0, \quad \xi = 0 \ \ sur \quad \partial D \backslash S_2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Tel que v est prolongé par 0 à $D = ((x_1, x_2) \times (h_1, \infty)) \cap \Omega$.

Preuve

Soit η exterieur de l'unité le vecteur normal à D, D'abord nous avons par proposition (4.2) :

$$\nabla v.\eta + \eta_y > -C.\varepsilon^{2\left(1-\left(\frac{1}{p}\right)\right)} + 1 \text{ sur } T = [x_1, x_2] \times \{h_1 + \varepsilon\}$$

Pour ε est assez petit et $\xi \in H^1(D), \xi = 0$ sur $\partial D \backslash S_2$, Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_D \nabla v.\nabla\xi + \chi([v>0]).\xi_y &= \int_{D\cap[v>0]} \nabla v.\nabla\xi + \xi_y \\ &= \int_T (\nabla v.\eta + \eta_y).\xi\end{aligned}$$

On a $|\nabla v| \leq C.\varepsilon^{\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)}$ Ce qui donne

$$\eta_y + \nabla v.\eta > 1 - C.\varepsilon^{\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)}$$

Alors

$$\eta_y + \nabla v.\eta > 0$$

Donc

$$\int_D \nabla v.\nabla\xi + \chi.\xi_y \geq 0$$

4.3 Continuité de la frontière libre

Lemme 4.2. *Soit v la fonction barrière, définie par* (4.5), *et soit* (p, χ) *une solution de* (P) *, Supposons que :*

$$p(x, h_1) \leq v(x, h_1) \quad \forall x \in (x_1, x_2) \quad et \quad p(x_i, h_1) = 0 \;\; i = 1, 2.$$

Alors, nous avons :

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{D_\delta} \nabla (p-v)^+ . \nabla (p-v)^+ \, dx = 0$$

tel que $D_\delta = D \cap [v > 0] \cap [0 < p - v < \delta]$.

Preuve : voir [6] p 295

Théorème 4.4. *Φ est continue à chaque $x \in \pi_x(\Gamma_2)$, tels que $(x, \Phi(x)) \in \Omega$*

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$ est assez petit, soit $x_0 \in \pi_x(\Gamma_2)$, tels que $(x_0, \Phi(x_0)) = (x_0, y_0)$. Supposons que $(x_0, y_0) \in \Omega$. Depuis $p(x_0, y_0) = 0$, p est continue, il existe $\eta_1 \in (0, \varepsilon)$ tel que

$$p(x,y) \leq \varepsilon^2 \quad \forall (x,y) \in B_{\eta_1}(x_0, y_0) \tag{4.8}$$

D'aprés le théorème (4.3) l'une de ces situations est satisfaite :

1. $\exists (x_1, y_1) \in B_{\eta_1}(x_0, y_0)$ tel que $x_1 < x_0$ et $p(x_1, y_1) = 0$
2. $\exists (x_2, y_2) \in B_{\eta_1}(x_0, y_0)$ tel que $x_2 > x_0$ et $p(x_2, y_2) = 0$

Supposons que (1) est vérifiée .

Posons $h_1 = \max(y_1, \Phi(x_0))$, et supposons que ε est assez petit, alors

$$(x_1 - \varepsilon, x_1 + 2\varepsilon) \times (h_1 - \varepsilon, h_1 + 2\varepsilon) \subset\subset \Omega$$

Soit v_1 la fonction barrière définie par (4.5) dans l'ensemble $Z_1 = (x_1 - \varepsilon, x_1 + 2\varepsilon) \times (h_1, h_1 + \varepsilon)$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} \Delta\, v_1 = 0 & \text{dans } \ Z_1 \\ v_1 = \phi = \varepsilon\,(h_1 + \varepsilon - y)^+ & \text{sur } \ \partial Z_1 \end{cases}$$

Nous consédérons la prolongement par 0 de v_1 à $D_1 = ((x_1, x_0) \times (h_1, \infty)) \cap \Omega$, qui satisfait (4.7) .

Maintenant, puisque $(x_1, x_0) \times \{h_1\} \subset B_{\eta_1}(x_0, y_0)$, Nous avons :

$$p(x, h_1) \leq \varepsilon^2 = v_1(x, h_1) \quad \forall x \in (x_1, x_0)\,. \tag{4.9}$$

De plus, depuis $p(x_1, h_1) = p(x_0, h_1) = 0$, d'aprés le corollaire (3.1) nous obtenons

$$p(x_1, y) = p(x_0, y) = 0 \quad \forall y > h_1 \tag{4.10}$$

Posons $H_\delta(s) = \min\left(\dfrac{s^+}{\delta}, 1\right)$ pour $\delta > 0$.

Soit $D_1^+ = (x_1, x_0) \times (h_1, h_1 + \varepsilon)$ et $\Delta_1 = (x_1, x_0) \times (h_1 - \varepsilon, h_1 + \varepsilon)$. En fait raisonnement comme (4.10), nous pouvons prolongé $(p-v_1)^+$ par 0 à $\Delta_1 \backslash D_1^+$ alors $(p-v_1)^+ \in H^1(\Delta_1)$. Donc nous avons pour $\xi \in \mathcal{D}(\Delta_1)$, et d'aprés Théorème de Lebesgue dans $L^1\left(D_1^+\right)$

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_1} \nabla(p-v_1)^+ . \nabla \xi dX &= \int_{D_1^+} \nabla(p-v_1)^+ . \nabla \xi dX \\
&= \lim_{\delta \longrightarrow 0} \int_{D_1^+} H_\delta(p-v_1) \nabla(p-v_1)^+ . \nabla \xi dX \\
&= \lim_{\delta \longrightarrow 0} I_\delta
\end{aligned}$$

On a :

$H_\delta(p-v_1) . \nabla \xi = \nabla(H_\delta(p-v_1)\xi) - \nabla(H_\delta(p-v_1)) . \xi$

Alors

$$\begin{aligned}
I_\delta &= \int_{D_1^+} \nabla(p-v_1)^+ . \nabla(H_\delta(p-v_1)\xi) dX \\
&- \tfrac{1}{\delta} \int_{D_1^+ \cap [0<p-v_1<\delta]} \xi . \nabla(p-v_1) . \nabla(p-v_1) dX \\
&= I_\delta^1 - I_\delta^2
\end{aligned}$$

D'aprés le lemme (4.2) $\lim\limits_{\delta \longrightarrow 0} I_{\delta_2} = 0$, depuis

$$\left|I_\delta^2\right| \leq \sup_{D_1^+} |\xi| . \frac{1}{\delta} \int_{D_1^+ \cap [0<p-v_1<\delta]} \nabla(p-v_1) . \nabla(p-v_1) dX$$

On a $H_\delta(p-v_1) = 0$ quand $p \leq v_1$, alors :

$\nabla(p-v_1)^+ . \nabla H_\delta((p-v_1)\xi) = \nabla(p-v_1) . \nabla H_\delta((p-v_1)\xi)$ dans D_1^+.

Donc

$$I_{\delta_1} = \int_{D_1^+} \nabla p . \nabla H_\delta((p-v_1)\xi) dX - \int_{D_1^+} \nabla v_1 . \nabla H_\delta((p-v_1)\xi) dX$$

Puisque $p \leq v_1$ sur $\partial D_1^+ \backslash [y = h_1 + \varepsilon]$, nous avons $\nabla H_\delta(p-v_1) = 0$ sur $\partial D_1^+ \backslash [y = h_1 + \varepsilon]$ De plus, $\xi = 0$ sur $[y = h_1 + \varepsilon]$. Alors $H_\delta(p-v_1) . \xi \in H_0^1\left(D_1^+\right)$ et d'aprés la définition de v_1, nous obtenons alors

$$\int_{D_1^+} \nabla v_1 \nabla(H_\delta(p-v_1) . \xi) dX = \int_{D_1^+} (H_\delta(p-v_1) . \xi)_y dx$$

Puisque, $\pm H_\delta(p-v_1) . \xi . \chi\left(D_1^+\right)$ sont deux fonctions de test pour (P), $\chi = 1$ dans $D_1^+ \cap [p > 0]$ et $H_\delta(p-v_1) = 0$ quand $p = 0$ .Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{D_1^+} \nabla p.\nabla\left(H_\delta\left(p-v_1\right)\xi\right).dX &= -\int_{D_1^+} \chi\left(H_\delta\left(p-v_1\right).\xi\right)_y dX \\
&= -\int_{D_1^+\cap[p>0]} \left(H_\delta\left(p-v_1\right).\xi\right)_y dX \\
&= -\int_{D_1^+} \left(H_\delta\left(p-v_1\right).\xi\right)_y dX
\end{aligned}$$

Alors, $I_\delta^1 = 0$. Donc

$$\int_{\Delta_1} \nabla\left(p-v_1\right)^+.\nabla\xi \; dX = 0 \quad \forall\xi \in \mathcal{D}\left(\Delta_1\right)$$

Ce qui mène par (4.9) et le principe principe de maximum fort à $(p-v_1)^+ \equiv 0$ dans Δ_1. Alors $p \leq v_1$ dans D_1^+ et dans particulière

$$p\left(x, h_1+\varepsilon\right) = 0 \qquad \forall x \in \left[x_1, x_0\right]$$

Donc

$$p\left(x, y\right) = 0 \quad \forall\; x \in \left[x_1, x_0\right] \quad \forall\; y \geq h_1+\varepsilon = h_2$$

D'aprés la continuité de de p, il existe $\eta_2 \in (0, x_0-x_1)$ tel que

$$p\left(x, y\right) \leq \varepsilon^2 \quad \forall\left(x, y\right) \in B_{\eta_2}\left(x_0, h_2\right)$$

D'aprés le Théorème (4.3) il existe $(x_2, y_2) \in B_{\eta_2}(x_0, h_2)$ tel que

$$x_2 > x_0 \quad y_2 > h_2 \; et \; p\left(x_2, y_2\right) = 0$$

Mettre $h_3 = y_2$, et supposons que ε est assez petit alors

$$\left(x_2-2\varepsilon, x_2+\varepsilon\right) \times \left(h_3, h_3+2\varepsilon\right) \subset\subset \Omega$$

Soit v_2 la fonction barrière définie par (4.5) dans $Z_2 = (x_2-2\varepsilon, x_2+\varepsilon) \times (h_3, h_3+\varepsilon)$. La prolongement par 0 du v_2 à $D_2 = (x_0, x_2) \times (h_3, \infty) \cap \Omega$ qui satisfait (4.7) . Alors, depuis $(x_0, x_2) \times \{h_3\} \subset B_{\eta_2}(x_0, h_2)$ nous avons :

$$p\left(x, h_3\right) \leq \varepsilon^2 = v_2\left(x, h_3\right) \quad \forall x \in \left[x_0, x_2\right]$$

Discussion comme ci-dessus, nous déduisons que $(p-v_2)^+ \equiv 0$ dans $D_2 \cap [v > 0]$. Alors

$$p(x,y) \equiv 0 \quad \forall y > h_3 + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_2)$$

Donc

$$p(x,y) \equiv 0 \quad \forall y > h_3 + \varepsilon \quad \forall x \in [x_1, x_2].$$

Si (2) est vérifiée nous discutont de la même conclusion .

Finalement nous avons preuvé pour chaque $x \in (x_1, x_2)$

$$\Phi(x) < h_3 + \varepsilon < h_2 + \eta_2 + \varepsilon < h_1 + \varepsilon + \eta_2 + \varepsilon < \Phi(x_0) + 4\varepsilon$$

Qui est la superièurement semi-continuité de Φ dans x_0 .

Conclusion

Nous avons présenter une étude sur un problème de digue

On a adopté dans premier et deusième chapitre à [8] et [5] mais dans dernier chapitre à [6] et [7].

C'est une aperçu ouvre la porte à d'autre recherches dans ce domaine :

- L'unicité de la solution
- Surmontrer cette restriction dans le cas à $n > 2$

Bibliographie

[1] R. A. Adams : *Sobolev Spaces.* Academic press, New york, 1975.

[2] C.Baiocchi : *Sur un Problème à Frontière Libre Traduisant le Filtrage de Liquide à Travers des Milieux Poreux* . C.R.Acad. Sc . paris Série A 273 (1971) , 1215-1217.

[3] J.M Bony : *Cours d'nalyse Théorie des Distributions et Anlyse de Fourier.* Ecole polytechnique .

[4] H. Brezis : *Analysse Fonctionnelle.* Masson, Paris, 1987.

[5] J. Carrillo, M. Chipot : *On the Dam Problem.* Differential Equations 45, (1982), 234 - 271.

[6] S.Challal, A.Lyagffouri : *On the Continuity of the Free Boundary in Prolems of type* $div\,(a\,(x)\ \nabla u) = -\,(h\,(x)\,\chi\,(u))_{x_1}$. Nonlinear Analyse 62 (2005), 283-300.

[7] M. Chipot : *On the Continuity of the Free Boundary in Some Class of two Dimensional Probmems* . National Science Foundation (1999), 1-21.

[8] M. Chipot : *Variational Inequalities, and Flow in Porous Media.* Springer-Verlag

[9] D. Gilbarg, N.S. Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, 1983.